

수학 문제해결에서 초등학교 5학년 학생들의 시각적 표현 분석

이대현*

광주교육대학교

The Analysis of 5th Graders' Visual Representation in Mathematical Problem Solving

Daehyun Lee*

Gwangju National University of Education

Abstract : Visual representation has been a useful tool in mathematical problem solving because it vividly express and structure the variables in the problem. But its effects may vary according to the types of problems. So, this study analyzes the survey results on the 5th graders' visual representations using questionnaire consisting of the routine problems and the non-routine problems. The results are follows: The rate of correct answers in routine problems was higher than that of the non-routine problems. Even though the subjects were asked to solve the problem using visual representations, the ratio of solving the problem using the numerical expression was high in the routine problems. On the other hand, the rate of solving the problem using visual representation was high in the non-routine problems. The number of respondents who used visual representation in the non-routine problems was twice as many as that of the routine problems. But, among the subjects who used visual representation in the non-routine problems, the proportion of incorrect answers was also high, which resulted in using visual pictures. So, it is necessary to provide an experience that can use various types of the visual representations for problem solving and pay attention to the process of converting problems into visual representations.

keywords : representation, visual representation, numerical expression, routine problem, non-routine problem, spatial picture, visual picture

I. 서론

수학은 추상화된 대상을 다루기 때문에 학생들이 수학을 쉽게 이해하거나 수학적 대상에 대한 서로의 생각을 공유하며 의사소통하기 위하여 수학적 표현은 중요한 역할을 한다. 수학적 표현은 학생들의 인지구조에 존재하는 수학적인 생각을 구체적인 표현 양식을 이용하여 외적으로 표현하기 때문에 학생들의 생각을 파악하는데 중요한 기능을 한다. 또, 추상적인 수학을 다양한 양식으로 구체화하여 제시함으로써 수학을 지도하는 데에도 중요한 요소가 된다. 따라서 수학적 표현은 수학 학습 과정에서 핵심적인 부분이며, NCTM (2000)도 과정 기준의 하나로 표현을 설정하고 수학 학습에 필요한 기능과 역할을 제시하고 있다.

수학적 표현의 중요성에 대해 Bruner (1960)는 표

현 양식이 수학 학습에 중요함을 강조하며, 활동적(enactive), 영상적(iconic), 상징적(symbolic) 표현으로 이루어진 세 가지 표현 양식을 이용하여 학생들의 수학 학습을 지원해야 한다고 제시하고 있다. 즉, 학생들의 지적 수준에 맞게 세 가지 표현 양식을 적절히 제공함으로써 학습 내용에 대한 이해를 촉진시키고, 표현 양식의 조정 과정을 통해 지적 능력을 발전시켜 가도록 해야 한다는 것이다. Bruner의 3가지 표현 양식은 교과서에서도 이용하는 주요 기술 방식으로, 다양한 표현 양식을 통해 학생들의 이해를 지원하는 것이다. Skemp (1987)도 수학 학습에서 기호의 중요성을 지적하며, 수학에서 이용되는 기호를 시각적 기호와 언어-대수적 기호로 구분하고, 이들이 서로 대조적이지만, 상보적 성질을 가지고 있음을 제시하고 있다. 특히 시각적 기호는 모양이나 위치와 같이 공간

* 교신저자: 이대현 (leedh@gnue.ac.kr)

** 2021년 6월 29일 접수, 2021년 7월 30일 수정원고 접수, 2021년 8월 13일 채택
<http://dx.doi.org/10.21796/jse.2021.45.2.247>

적인 성질을 추상화하는데 적합한 표현 양식으로, 통합적이고 동시적이며 직관적 이해에 적합한 체계로 그 특성을 요약하고 있다.

수학 학습 과정에서 사고 과정이나 내용을 외적으로 나타내는 표현은 여러 양식으로 나타난다. 수학적 표현은 Lesh, Landau, & Hamilton (1983)에 의해 실세계 상황, 조작적 도구, 그림, 구어적 기호, 구문적 기호의 5가지 표현 양식으로 분류된 이후로 체계적인 논의가 이루어져 오고 있다(Kim & Jang, 1997에서 재인용). 그리고 표현 양식은 표현 간의 우열의 문제가 아니라, 개인의 인지 양식과 관련된 선호의 문제로 간주하는 것이 적절하다(Kim & Jang, 1997). 이것은 Krutetskii (1976)가 문제를 풀 때 수학 정보를 처리하는 방식에 따라 시각적 이미지를 선호하는 사람, 말과 언어를 선호하는 사람, 그리고 이 둘을 혼합하여 이용하는 사람으로 구분한 바와 같이 각 문제해결자가 주로 이용하는 표현 양식의 선호 정도에서 차이가 있다는 것과 유사하다.

수학 교수·학습 과정에서 이용할 수 있는 표현 양식 중에서 시각적 표현은 수학적 사실이나 변인간의 관계를 구체적인 그림(사진)이나 도형, 수직선, 다이어그램, 표, 그래프 등과 같은 다양한 시각적 도구를 이용하여 나타낸 것으로, 학생들의 이해를 촉진시키는 역할을 가지고 있다. 특히 문제해결 과정에서 시각적 표현은 문제에 주어진 조건이나 정보를 재조직하여 문제 이해와 해결을 촉진시키는 기능을 가지고 있다. 즉, 시각적 표현은 수식이나 문장으로 구성된 학습 내용이나 문장제를 다룰 때 내용 이해와 문제를 즉각적으로 이해하는데 효과적이다. 특히 수학 문제해결 과정에서 시각적 표현은 문제에 제시된 정보를 구체화하여 해결 방안을 탐색하기에 용이하며, 변인 간의 관계를 명료하게 분석하여 오류를 예방하는 데에도 효과가 있어서 문제해결력 향상에 도움을 준다(Kim & Baik, 2005).

수학 문제해결에 시각적 표현을 적절히 이용하도록 하기 위해서는 시각화 과정에 대한 지도와 더불어, 시각적 표현의 중요성에 대한 인식이 필요하다(Kim, Lee, & Ku, 2013). 즉, 시각적 표현을 이용하기 위해 수학 학습에 이용 가능한 시각적 표현의 여러 유형을 확인할 필요가 있으며, 각각의 장·단점을 확인하고 시각화 과정을 통해 시각적 표현을 이용하도록 해야 한다. 특히 문제를 이해하고 해결 방법을 탐색하기 위해 문제 상황을 시각적으로 표현할 때에는 문제 상황의 이해 및 해결에 적합한 그림으로 나타내는 것이 중요한데, 문제해결에 필요한 필수적인 정보와 그들의 관계를 명확하게 나타냈는가가 문제해결 성공의 핵심이 되기 때문이다. 그런데 문제 상황을 시각적으로 나

타낸 그림일지라도 문제해결에서 그 효과는 다를 수 있다. 예를 들어 수학 문제를 시각적 표현으로 나타내는 것이 문제해결에 도움이 된다는 것을 선행연구들이 밝히고 있지만(Hwang & Pang, 2009; Kim, Lee, & Ku, 2013; van Garderen, 2006 등), 10학년 중등 학생을 대상으로 실시한 연구에서는 시각적 표현이 문제해결과 특별한 관련이 없다는 것을 밝히기도 한다(Campbell, Collis, & Watson, 1995).

이런 이유로 문제해결에서 시각적 표현 이용에 따른 긍정적·부정적 평가 결과의 이유를 몇 가지로 정리해 볼 수 있다. 첫째, 시각적 표현에 이용된 이미지를 Hegarty & Kozhevnikov (1999)가 제시한 바와 같이 시각적 이미지(visual imagery)와 공간적 이미지(spatial imagery)로 구분할 때 시각적 표현의 유형별 기능에 따라 그 효과가 달라지기 때문이다. 즉, 문제 상황을 단순한 그림으로 표현한 경우와 문제에 내재된 정보간의 관계를 나타낸 도식으로 표현한 경우에 그 효과가 달라질 수 있는 것이다(Hwang & Pang, 2009; Kim, Lee, & Ku, 2013). 둘째, 학교 교육에서 문제해결 경험과 문화가 시각적 표현의 이용에 영향을 끼치기도 한다. 수학 학습 과정에서 학생들이 기호적이고 논리적인 문제해결 방법에 치중하여 시각적 표현을 체험하지 않으면, 문제해결에 시각적 표현을 적절하게 이용할 능력이 형성되지 않기 때문이다. 셋째, 수학 내용 영역과 관련해서도 학생들은 기하(도형) 문제의 경우에는 시각적 표현을 이용하려는 경향이 있는 반면에, 연산과 관련된 문제의 경우에는 식을 이용하려는 경향이 있기 때문이기도 하다(Hwang & Pang, 2009).

이에 덧붙여 문제해결에 시각적 표현을 이용하려는 선호 정도와 그 효과는 문제 유형에 따라서도 다를 수 있다. 예를 들어 교과서에 전형적으로 제시되는 알고리즘으로 해결 가능한 정형화된 문제와 문제해결을 위해 문제에 내재된 변인들의 관계를 분석하고 수학적 표현으로 변환하여 문제해결 전략이나 해결 방법을 찾아 해결해야 하는 비정형화된 문제의 경우에 이용하는 시각적 표현의 기능과 시각화 과정을 통해 문제를 해결하는 방법 면에서 차이가 나타날 수 있다. 시각적 표현이 수학 내용 및 문제해결에 이용되는 시각적 표현의 유형, 문제해결 경험과 교실 문화, 문제 유형 등에 따라 그 이용 정도와 효과에 차이가 있을 수 있다는 면에서 각 변인별로 시각적 표현 이용에 시사점을 확인할 필요가 있다. 특히 시각적 표현에 관한 종전의 연구가 수학 내용과 시각적 표현의 유형 등에 관한 효과를 분석한 것에 비추어, 본 연구에서는 문제 유형에 따른 시각적 표현의 선호 정도와 유형 등을 살펴보고자 한다.

특히 본 연구에서는 정형화된 문제와 비정형화된 문제에 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 할 때 학생들이 이용하는 시각적 표현의 유형을 살펴보고자 한다. 이것은 학생들이 개인적으로 선호하는 문제해결 방법으로 문제를 해결하기보다, 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 함으로써 문제 유형에 따라 시각적 표현을 활용하는 정도나 유형을 살펴보기 위함이다. 구체적으로는 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 요구했을 때 정형화된 문제와 비정형화된 문제에서 정답 정도와 표현 유형, 시각적 표현의 이용에 따른 정답자와 오답자 분포 및 유형을 살펴보고자 한다. 이를 바탕으로 수학교육에서 시각적 표현을 이용한 학습 및 문제해결 지도에 시사점을 제시하고자 한다.

II. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구에서는 검사지에 제시된 문제 수준에 적합하도록 초등학교 5학년 학생들을 연구 대상으로 선정

하였다. 연구 대상자는 G광역시에 소재한 초등학교에서 연구자가 한 학교를 편의 표집하여 선정한 2개 반 학생 53명이었다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 검사지를 이용한 조사연구를 실시하였다. 검사에서는 검사 목적과 문제 내용 및 문제의 선정 의도를 연구자와 논의하여 숙지한 담임교사가 검사를 실시하였다. 담임교사는 검사를 실시하기 전에 연구 대상자들에게 각각의 문제에 대해 자신의 풀이 방법을 자세히 적도록 안내하였다. 검사 시간은 정형화된 문제와 비정형화된 문제가 각각 한 문제씩 구성된 검사지를 이용하여 각각 10분씩 30분에 걸쳐 실시되었다. 검사지는 수학 교과서와 익힘책에 제시된 문제를 수정한 정형화된 문제와 Elia & Philippou (2004)와 Hegarty & Kozhevnikov (1999)에서 사용한 문제를 참고하여 수정한 비정형화된 문제로 구성하였으며, 문제 내용은 Table 1과 같다.

본 연구에 제시된 정형화된 문제는 표준화된 알고리즘을 적용하여 해결하기가 용이한 구조를 가지고 있지만, 문제 이해와 해결을 위해 시각적 표현을 이용하기 용이한 구조를 가진 ‘수와 연산’ 영역의 문제가

Table 1. The problems of questionnaire

유형	번호	문 제	출 처
정형화된 문제	1	1.65보다 0.57이 큰 소수를 구하시오.	The Ministry of Education (2018)
	3	아이스크림을 만드는데 필요한 우유는 $\frac{1}{2}$ 컵이고, 과자를 만드는데 필요한 우유는 $\frac{2}{3}$ 컵입니다. 아이스크림과 과자를 만드는데 필요한 우유의 양을 구하시오.	The Ministry of Education (2019a)
	5	야구공 12개와 축구공 8개를 최대한 많은 친구에게 남김없이 똑같이 나누어 주려고 합니다. 야구공과 축구공을 최대 몇 명의 친구에게 나누어 줄 수 있는지 구하시오.	The Ministry of Education (2019b)
비정형화된 문제	2	민이는 15m인 직선 길의 양 끝에서부터 3m마다 한 그루씩 나무를 심으려고 합니다. 민이는 몇 그루의 나무를 심을 수 있는지 구하시오.	Elia & Philippou (2004)
	4	원이는 오늘 12km를 이동할 계획인데, 먼저 2km를 걸었습니다. 그리고 나서 버스를 타고 가다가 내렸습니다. 이제 남은 거리가 오늘 이동할 거리 전체의 $\frac{1}{3}$ 만큼 일 때 원이가 버스를 타고 이동한 거리를 구하시오.	Hegarty & Kozhevnikov (1999)
	6	양팔저울 한쪽에 60g 물건과 2개의 블록이 올려있습니다. 양팔저울의 다른 쪽에 5개의 블록을 올려놓았더니 양팔저울이 평형을 이루었습니다. 블록 1개의 무게를 구하시오.	Hegarty & Kozhevnikov (1999)

다. 또, 비정형화된 문제는 연구 대상자들의 수준에 비추어 표준화된 알고리즘을 적용하기 어렵거나 수식 외에 수학적 표현을 이용하여 문제해결 방법을 쉽게 찾을 수 있는 실생활 응용문제이다.

3. 자료 분석 방법

검사 실시 후에 연구 대상자들의 검사지를 수합하고, 정답 유무와 해결 방법을 분석하였다. 분석에서는 검사지에 나타난 연구 대상자들의 전형적인 문제해결 방법을 분석의 주안점으로 삼았다. 구체적으로 자료 분석은 다음과 같은 과정으로 이루어졌다. 먼저, 두 유형의 검사 결과에 대한 기술 통계량으로 정답 정도를 분석하였다. 다음으로 검사 결과에 나타난 수학적 표현의 유형별(시각적 표현, 수식 표현, 답만 제시) 분포 정도와 정답 개수, 표현 유형별 누적 정답 개수, 시각적 표현에 의한 정답 여부 및 이용된 시각적 표현의 유형(상황 그림, 관계 그림)을 분석하였다.

연구 대상자들의 풀이 과정에 그림이나 수식이 혼합되어 나타난 경우가 있었는데, 이 경우에는 답을 제시하는 과정에 핵심으로 이용한 표현을 수학적 표현의 유형으로 분석하였다. 시각적 표현의 유형에서 상황 그림은 문제에 제시된 소재나 상황을 있는 그대로 구체화하여 나타난 그림으로, 문제 상황을 직접적으로 묘사한 수준의 시각적 표현을 의미한다. 관계 그림은 문제에 제시된 소재나 상황에 내재된 요소간의 관계를 구조화하여 그림으로 나타난 시각적 표현을 의미한다.

Ⅲ. 연구 결과 및 논의

1. 정답자 수 분석

이 절에서는 정형화된 문제와 비정형화된 문제에 대해 각각 정답자 수(정답률)를 분석하였다. 분석 결과는 Table 2와 같고, 정형화된 문제의 평균 정답률은 79.2%, 비정형화된 문제의 평균 정답률은 58.5%였다.

정형화된 문제의 평균 정답률은 비정형화된 문제의 평균 정답률보다 20.7%p 높게 나타났다. 이것은 연구 대상자들이 학교에서 자주 다룬 정형화된 문제에 대해 수식을 이용한 알고리즘 적용 경험과 친숙함에 비추어 비정형화된 문제보다 정답률이 높은 것으로 판단된다. 다음 Table 3의 분석 결과에서도 정형화된 문제에서는 수식을 이용하여 정답을 한 비율이 높게 나타났다.

2. 시각적 표현 분석

이 절에서는 연구 대상자들이 제시한 시각적 표현을 몇 가지 면에서 분석하였다. 첫째, 문제 유형별 정답자를 대상으로 문제해결에 이용한 수학적 표현 양식을 분석한 결과는 Table 3과 같다. 본 검사에서는 연구 대상자들에게 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 제시하였지만, Figure 1과 같이 문제 상황을 나타내는 단순한 도구로만 그림을 제시했을 뿐 문제해결에서는 수식을 이용한 사례가 나타났기 때문에 분석에서는 문제 유형별 정답자에 따른 수학적 표현 별로 정답자 수를 분석한 것이다.

Table 2. The number of corrector (The rate of correctness)

문 제	정형화된 문제			비정형화된 문제		
	1	3	5	2	4	6
정답자 수(정답률)	43 (81.1)	42 (79.2)	41 (77.4)	32 (60.4)	32 (60.4)	29 (54.7)
평균 정답률(%)	79.2			58.5		

Table 3. The types of mathematical representations according to the corrector

유 형		정형화된 문제				비정형화된 문제			
		1	3	5	계(%)	2	4	6	계(%)
정답자 수		43	42	41	126 (100.0)	32	32	29	93 (100.0)
표현 유형	시각적	13	16	14	43 (34.1)	32	28	28	88 (94.6)
	수식	30	26	25	81 (64.3)	0	4	1	5 (5.4)
	답만 제시	0	0	2	2 (1.6)	0	0	0	0 (0.0)

따라서 수학적 표현은 문제해결의 주요 방법(여러 가지 표현이 함께 나타난 경우에는 답을 산출하는데 이용된 표현을 주요 방법으로 분석함)으로 이용된 표현을 기준으로 분석하였다. 결과 분석에서 정답자만을 대상으로 제한한 이유는 문제해결에 유용하게 활용하는 표현 양상을 보기 위함이었으며, 시각적 표현의 경우에 오답 유형은 이 절의 Table 7에서 분석하였다.

정형화된 문제의 경우에는 수식을 이용한 정답자 비율이 64.3%가 나타났다. 이러한 반응의 대부분은 Figure 1과 같이 시각적 표현 중 상황을 묘사하는 그림으로 문제 조건을 표현했을 뿐, 문제를 해결하기 위한 주요 방법으로는 수식을 이용한 경우였기 때문이다. 이것은 학생들이 문제를 해결할 때 자신이 선호하는 해결 방법에 집중했다는 것과 특히 알고리즘을 적용한 수식 표현을 다른 수학적 표현보다 선호한다는 것을 의미한다. 그렇지만 문제해결을 위한 도구로 시각적 표현을 이용한 경우도 34.1%로 나타났으며, 이

들은 Figure 2의 여러 사례와 같이 문제 해결에 적절한 시각적 표현으로 나타난 후에 관련된 요소를 수학적으로 탐구하여 해석한 경우였다.

이에 비해 비정형화된 문제해결에서는 대부분의 정답자들이 문제에 제시된 조건에 따라 시각적 표현을 이용한 비율이 94.6%를 보였다. 이것은 비정형화된 문제의 경우에 문제 조건을 시각적으로 표현함으로써 문제의 해를 즉각적으로 얻거나 문제해결의 실마리를 얻을 수 있을 뿐만 아니라, 그림으로 표현하기에 용이한 소재가 문제에 포함되어 있었기 때문으로 해석된다.

두 번째로는 정형화된 문제와 비정형화된 문제에 연구 대상자들이 어떤 수학적 표현을 이용하여 문제를 해결한 것이 정답 산출에 얼마나 유용했는가를 살펴보기 위해 수학적 표현별로 연구 대상자들이 정답을 한 문제를 대상으로 누적 정답 개수를 분석하였다. 이것은 Table 4에 제시되어 있다.

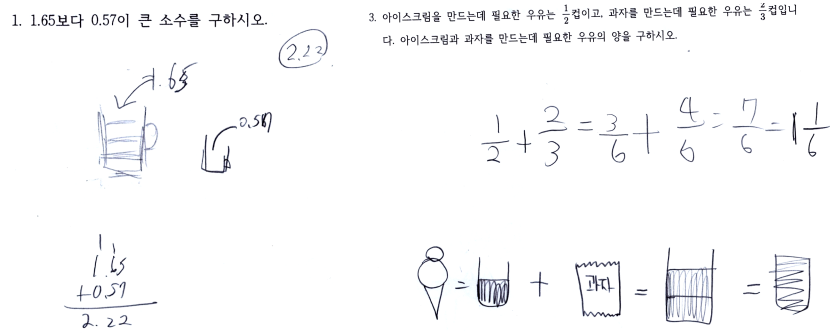


Figure 1. The examples of using numerical expression with decorative figure

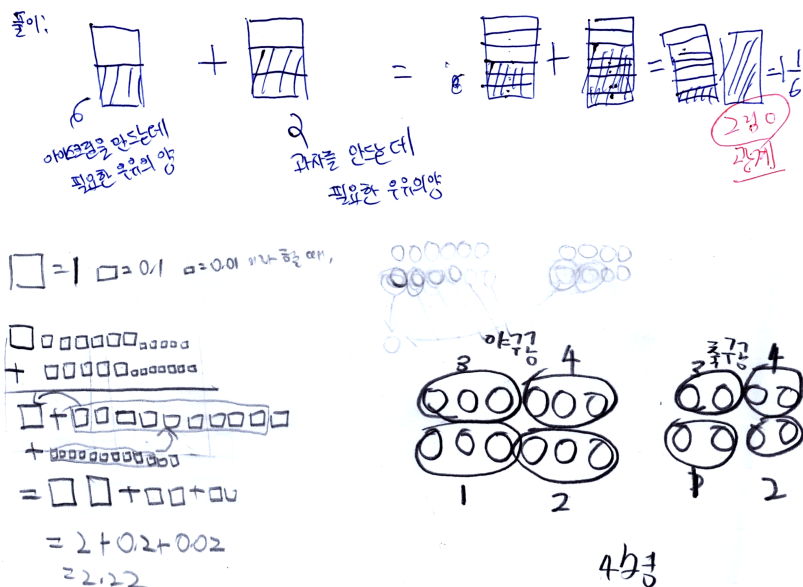


Figure 2. The examples of using the visual representation in routine problems

Table 4. The number of correct answers according to the mathematical representations

유형		정형화된 문제			비정형화된 문제		
정답 개수		1	2	3	1	2	3
표현 유형에 따른 정답자수	시각적	16	6	5	14	7	20
	수식	13	16	12	5	0	0
	답만 제시	2	0	0	0	0	0

정형화된 문제의 경우에는 시각적 표현으로 모두 정답을 한 대상자는 5명, 2개를 정답을 한 대상자는 6명으로 나타났고, 비정형화된 문제의 경우에는 시각적 표현으로 모두 정답을 한 대상자는 20명, 2개를 정답을 한 대상자는 7명으로 나타났다. 이것은 문제해결에서 시각적 표현은 정형화된 문제보다 비정형화된 문제에서 더 많이 선호되고 유용하게 이용되고 있음을 확인해 준다.

한편, 수식을 이용하여 해결한 경우에 정형화된 문제에서 모두 정답을 한 대상자도 12명, 2개를 정답을 한 대상자도 16명으로 나타났으며, 비정형화된 문제에서는 한 문제에 정답을 한 경우가 5명이 나타났다. 이것은 본 검사에서 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 제시했음에도 불구하고, 정형화된 문제에서 수식을 활용한 문제해결이 유용하게 이용되고 있음을 알 수 있다.

세 번째로는 학생들이 문제 유형에 따라 시각적 표현을 적절하게 이용했는가를 확인하기 위하여 시각적 표현을 이용한 연구 대상자들 중에서 정답자와 오답자의 분포 정도를 분석하였다. 이 결과는 Table 5와 같다. 먼저, 유형별로 세 문제에 대해 시각적 표현을 이용하여 문제해결을 시도한 연구 대상자 수의 합이 정형화된 문제에서 56건, 비정형화된 문제에서 132건으로 나타나, 시각적 표현을 이용한 사례가 정형화된 문제에서 낮다는 것을 확인할 수 있다.

정형화된 문제의 경우에는 시각적 표현을 이용한 응답자 중 정답자 비율이 76.8%로 나타났고, 오답자 비율은 23.2%로 나타났으며 문제별로도 이러한 경향은 유사하게 나타났다. 비정형화된 문제의 경우에는 시각적 표현을 이용한 응답자 중 정답자 비율이 66.7%로 나타났고, 오답자 비율은 33.3%로 나타났으며

문제별로도 이러한 경향은 유사하게 나타났다.

시각적 표현을 이용한 응답자 중 정형화된 문제에서 정답자의 비율이 약간 높게 나타난 현상은 시각적 표현을 정형화된 문제에서 이용하는 경우에는 Figure 2와 같이 문제에 내재된 알고리즘을 발견할 수 있는 시각적 표현으로 변환하여 문제를 해결하는 경우가 대부분이어서 정답을 산출할 가능성이 높았기 때문으로 해석된다. 반면에 비정형화된 문제의 경우에는 시각적 표현으로 표현할지라도 문제의 조건에 부합하도록 변환하고 해석하지 못해 오답이 산출되는 경우가 있었기 때문이며, 그러기에 문제 변인 간 관계가 더 복잡한 비정형화된 문제에서는 시각적 표현으로 변환하기 이전에 문제이해의 과정이 더욱 중요함을 확인할 수 있다.

마지막으로 연구 대상자들이 시각적 표현을 문제해결의 유용한 도구로 이용하는지, 단순히 문제 상황만을 표현하기 위해 이용하는 것인지를 알기 위하여 연구 대상자들이 제시한 시각적 표현의 유형을 분석하였다. 즉 연구 대상자들이 시각적 표현의 어떤 기능에 초점을 두고 문제 상황을 시각적 표현으로 변환시켰는가를 살펴보았다. 이를 위해 시각적 표현 유형을 Hegarty & Kozhevnikov(1999)가 제시한 시각적 이미지(visual imagery)와 공간적 이미지(spatial imagery) 및 Hwang & Pang (2009)의 그림 표현과 도식 표현을 기반으로 문제에 제시된 대상의 외관만을 묘사한 '상황 그림'과 문제에 내재된 변인 간의 관계나 공간적 관계를 구조화한 '관계 그림'으로 구분하여 분석하였다. 먼저 정답자들이 제시한 시각적 표현 유형을 분석한 결과는 Table 6과 같다. 시각적 표현을 이용한 정답자들이 제시한 시각적 표현은 정형화된 문제와 비정형화된 문제 모두에서 관계 그림을 이

Table 5. The number of correct and incorrect answer by the visual representation

문제 유형 /문제	정형화된 문제				비정형화된 문제			
	1	3	5	계(%)	2	4	6	계(%)
학생 수	16	21	19	56 (100.0)	48	42	42	132 (100.0)
정답자수(%)	13	16	14	43 (76.8)	32	28	28	88 (66.7)
오답자수(%)	3	5	5	13 (23.2)	16	14	14	44 (33.3)

Table 6. The types of visual representation according to the corrector

문제 유형 /문제	정형화된 문제				비정형화된 문제			
	1	3	5	계(%)	2	4	6	계(%)
해당 학생수	13	16	14	43 (100.0)	32	28	28	88 (100.0)
상황 그림(%)	0	0	0	0 (0.0)	0	0	0	0 (0.0)
관계 그림(%)	13	16	14	43 (100.0)	32	28	28	88 (100.0)

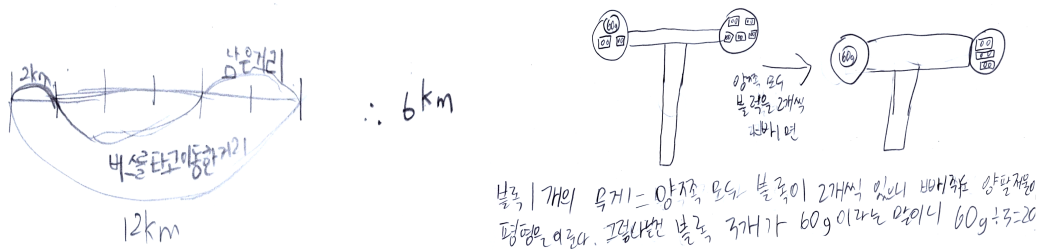


Figure 3. The examples of using the spatial picture in non-routine problems

용하였다.

비정형화된 문제의 경우에 연구 대상자들이 제시한 관계 그림의 예시는 Figure 3과 같다. 예시에서는 문제 상황과 변인 간의 관계를 그림으로 적절히 나타내고, 그 관계를 문제 조건에 맞게 해석했음을 알 수 있다.

다음으로 시각적 표현을 이용하여 응답한 사례 중에서 오답으로 나타난 시각적 표현의 유형을 분석한 결과는 Table 7과 같다.

시각적 표현을 이용했지만 오답을 한 대상자들은 정형화된 문제와 비정형화된 문제 모두에서 상황 그림을 이용한 경우에 높은 비율을 차지하였다. 상황 그림의 경우에 문제 상황의 파악에는 도움을 줄 수 있지만, 문제에 내재된 변인간의 수학적 해석에는 미치지 못하여 오답을 한 것으로 해석된다. 예를 들어 Figure 4의 왼쪽 그림과 같이 연구 대상자들은 문제 상황을 단지 그림으로 표현했을 뿐, 문제에 주어진 조건을 분석하고 해석하지 못함으로써 정답을 하지 못하였다. 또한 Figure 4의 오른쪽 그림과 같이 문제 상황을 관계 그림으로 표현했음지라도 이를 해석하는 과정에 주의하지 못하여 오답을 산출한 경우도 나타

났다.

한편, 문제 상황에 관계 그림으로 나타낸 경우에도 수식에 의존한 문제해결로 인해 오답을 보인 경우가 나타났다. 예를 들어 비정형화된 문제 2번의 경우에는 문제 상황을 관계 그림으로 나타냈지만, 문제에 제시된 숫자의 해석에서 $15 \div 3 = 15$ 라는 수식에 집중하여 오답을 한 경우였다.

3. 논의

이 절에서는 초등학교 학생들의 문제해결에 나타난 시각적 표현에 대한 분석 결과를 바탕으로 몇 가지 논점을 제시하고자 한다. 첫째, 본 연구에서는 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 제시했음에도 불구하고, 정형화된 문제의 경우에는 수식을 이용하여 문제를 해결한 비율이 높게 나타났다. 이것은 학생들이 문제를 해결할 때 계산과 관련된 요소가 포함된 문제의 경우에 수식을 이용하려는 경향이 높다는 연구 결과와 유사하다(Hwang & Pang, 2009). 정형화된 문제의 경우에는 시각적 표현이 직접적인 해법을 제시하기보다 문제 이해에 활용되는 경향이 크기 때문이

Table 7. The types of visual representation according to the incorrect answer

문제 유형 /문제	정형화된 문제				비정형화된 문제			
	1	3	5	계(%)	2	4	6	계(%)
해당 학생수	3	5	5	13 (100.0)	16	14	14	44 (100.0)
상황 그림(%)	3	4	5	12 (92.3)	15	13	11	39 (88.6)
관계 그림(%)	0	1	0	1 (7.7)	1	1	3	5 (11.4)

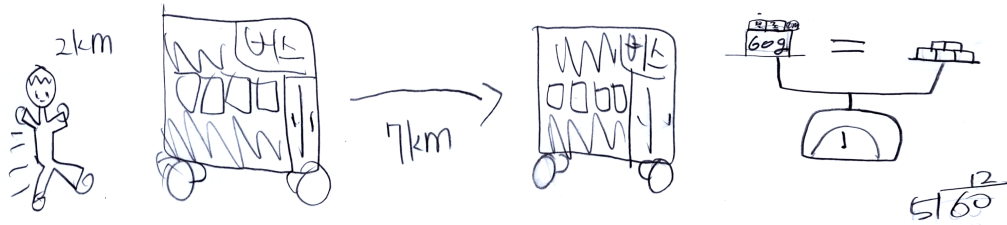


Figure 4. The examples of the error in non-routine problems

며, 답을 얻기 위해서는 그림으로 표현된 상황을 문제 조건에 맞게 재구성하고 변형해 가며 해석해야 하는 어려움이 있기 때문에 판단된다. 예를 들면 영역모델을 이용한 이분모 분수 덧셈의 예시에서는 통분 과정을 보여주는 새로운 단위를 생성해 가는 시각적 표현의 변화 과정에 대한 이해가 필요하다. 따라서 정형화된 문제에서는 문제 상황을 시각적으로 표현함으로써 문제를 이해하고 해결 방법을 세우는 데 주안점을 두도록 한다. 또한 답을 산출하기 위해서는 문제에 제시된 원리에 적합하도록 시각적 표현을 변형해 가는 과정에 대한 지도가 요구되며, 이 과정에서 시각적 표현 자체에 대한 ‘메타인지 이동’ 현상이 발생하지 않도록 주의해야 한다. 한편, 교과서에 주로 다루어지는 정형화된 문제의 경우에 이용되는 시각적 표현은 문제에 제시된 이야기 상황을 나타내는 장식 그림의 성격이 강하거나(Hong, 2019) 개념이나 알고리즘을 발견하는 수단으로 이용되는 경향이 크다. 이러한 교수학적 영향도 학생들의 시각적 표현을 이용한 문제해결에 영향을 끼칠 수 있다. 따라서 교과서에 제시되는 시각적 표현에도 관심을 둘 필요가 있다.

둘째, 비정형화된 문제에서는 문제 상황을 시각적 표현으로 변환하여 문제를 옹계 해결한 비율이 높게 나타났는데, 문제 조건을 시각적으로 표현함으로써 해결의 실마리나 해를 즉각적으로 얻기 쉽기 때문으로 해석된다. 그렇지만 정형화된 문제뿐만이 아니라 비정형화된 문제에서도 시각적 표현을 이용했지만 오답을 한 경우에는 상황을 단순 묘사한 경우였거나, 상황 그림으로 제시할 뿐 정답을 찾는 과정에서는 잘못 적용된 수식을 이용한 경우였다. 두 문제 유형에 대한 결과에 비추어 문제해결에 시각적 표현을 이용할 때에는 문제 유형에 따라 시각적 표현의 활용 목적과 범위를 정하고, 문제에 내재된 의미에 맞게 시각적 표현으로 변환하며 해석하는 지도가 필요하다. 또 학생들에게 다양한 유형의 문제를 제공하고 문제해결에 적절한 시각적 표현을 선택하고 이용하도록 함으로써 시각적 표현의 가치와 유용성을 인식하도록 할 필요도 있다.

셋째, 연구 대상자들이 시각적 표현을 이용하여 응답한 경우에 정답자들은 ‘관계’ 그림을 이용한 경우였다. 그렇지만 오답자들의 시각적 표현 유형은 ‘상황’ 그림을 이용한 경우가 대다수였다. 이것은 문제를 해석하여 시각적 표현으로 변환하는 경우에 문제 상황을 단순 그림으로 제시한 시각적 표현은 정답을 산출하는데 크게 기여하지는 못한다는 것을 의미한다. 이에 반해 관계 그림은 문제에 내재된 수량 사이의 관계를 즉각적으로 파악하기에 용이하며, 문제 상황을 구조적으로 분석하여 변인들의 관계를 의미 있게 표현하는데 유용하기 때문이다. 특히 수학 문제해결에서는 문제 상황에서 양들과 그들 사이의 관계로 상황을 해석하여 추론하는 것이 중요한데, 본 연구에서도 관계 그림은 문제에 내재된 양들의 관계를 구조적으로 해석함으로써 문제를 이해하고 해결하는 데 유용하게 이용됐음을 알려준다. 그러나 본 연구의 검사 대상자들이 관계 유형의 시각적 표현을 이용하여 문제를 시도한 경우에도 그림에 제시된 양이나 조건들 사이의 관계를 올바르게 해석하지 못한 경우에는 오답을 산출하였다. 따라서 수학 문제해결에서 시각적 표현을 이용할 경우에는 관계 유형의 시각적 표현을 이용하도록 하되, 시각화와 더불어 문제에 내재된 양들 사이의 관계를 구조적으로 해석할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

넷째, 정형화된 문제의 경우에 시각적 표현을 이용하여 정답을 한 사례가 34.1%가 나타났다. 이것은 알고리즘을 적용하여 해결 가능한 정형화된 문제에서도 시각적 표현을 이용하여 학생들이 문제를 해결할 수 있다는 것을 말해주며, 이 경우의 시각적 표현은 알고리즘 원리를 발견하는 구조로 기능하기 때문에 더욱 가치 있다. 이를 근거로 하여 정형화된 문제의 해결에서도 학생들이 수식을 이용하여 알고리즘을 적용하는 방법에 대한 보완책으로 시각적 표현을 이용하여 문제에 대한 개념적 이해와 알고리즘 작용의 기본 원리를 이해하도록 지도할 필요가 있다.

IV. 결론 및 제언

수학 문제해결은 수학 교수·학습의 본질이면서 학교 수학의 핵심이기도 하다. 새수학 운동의 개선책으로 대두된 1970년대의 '기초·기본 교육'의 강조는 학교 수학에서 기초·기본에 대한 공통 관심사의 추출을 시도하게 되었고, 많은 연구가들과 단체의 공통된 핵심어로 문제해결이 대두되게 되었다. 이러한 과정을 거쳐 1980년에는 문제해결이 학교 수학에서 강조할 핵심으로 자리매김하게 되었다. 문제해결이 강조되면서 이에 관한 많은 연구들이 수행되었고, 문제해결 과정에서 강조할 내용에서 서로 차이가 있지만, 학생들의 문제해결력을 길러주려는 목적은 동일하였다.

학생들의 문제해결을 지원하기 위한 방안의 하나로 시각적 표현은 문제 상황을 시각적이고 구체적인 표현으로 나타내어 즉각적이고 개념적으로 해결할 수 있다는 장점이 있다. 그렇지만 시각적 표현이 모든 문제 유형에 적절한 방안인지? 어떤 유형의 시각적 표현이 문제해결에 적합한가에 대한 분석이 필요하다. 이것은 문제 유형별로 시각적 표현 이용에 시사점을 확인할 필요가 있기 때문이다. 이에 본 연구에서는 문제해결에서 시각적 표현의 효과를 분석하기 위하여 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 정형화된 문제와 비정형화된 문제로 구성된 검사지를 이용한 조사연구를 실시하였으며, 이를 바탕으로 시사점을 제시하였다.

분석 결과, 정답률에서는 정형화된 문제가 비정형화된 문제보다 높게 나타났다. 본 연구에서는 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 하였지만, 정형화된 문제에서는 수식을 이용하여 해결한 비율이 높게 나타났다. 반면에 비정형화된 문제에서는 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결한 비율이 높게 나타났다. 따라서 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 하기 위해서는 문제 유형에 따라 시각적 표현의 활용 목적과 범위를 정하여 이용하도록 지도할 필요가 있다. 예를 들어 정형화된 문제에서는 문제를 이해하고 해결 방법을 세우는 데 초점을 두거나, 수학적 원리에 적합하도록 시각적 표현을 변형해 가는 과정에 주안점을 두는 것이 필요하다. 비정형화된 문제에서는 문제에 내재된 변인간의 관계를 시각적 표현으로 나타내고, 이를 올바르게 해석하여 해결하는데 초점을 둘 필요가 있다. 한편 시각적 표현을 이용한 대상자 중에 오답자의 비율도 높게 나타났는데, 이것은 문제 상황을 묘사하는 수준의 '상황 그림'의 시각적 표현에 그친 경우였다. 시각적 표현은 그 자체의 유용성보다 문제에 제시된 양들과 그들 사이의 관계를 나타내는 '관계

그림'으로 나타내어 해석하도록 지도하는 것이 필요하다. 이를 위해 다양한 유형의 시각적 표현을 이용할 수 있는 문제해결 경험과 각각의 시각적 표현이 가지고 있는 의미에 대한 파악이 이루어지도록 하여 시각적 표현을 이용하는데 주의할 필요가 있다.

본 연구에서는 소수의 검사 문제 및 연구 대상자들을 이용하여 연구를 진행하였기 때문에 결과 해석에 제한이 따를 수 있다. 추후의 연구로는 더 많은 검사 문항과 연구 대상자를 선택하여 시각적 표현의 효과를 확인할 필요가 있다. 또 시각적 표현의 유형에 따라 수학 학습과 문제해결의 효과를 분석하여 상황에 적절한 시각적 표현을 이용하도록 하며, 교과서에서도 학생들이 친숙하게 이용할 수 있는 시각적 표현을 활용하는 방안을 모색하는 것이 필요하다. 학생들은 학교 수학의 전통에 따라 수식 위주의 문제해결에 고착화되는 경향이 있다. 이에 대한 대안으로 시각적 표현을 이용한 문제해결의 상보적 측면에 대한 논의도 필요하다.

국 문 요약

수학 문제해결에서 시각적 표현은 문제 이해와 해결에 유용한 수학적 표현으로 인식되고 있다. 그렇지만 그 효과는 문제 내용이나 유형, 또는 이용되는 시각적 표현 유형에 따라 다를 수 있다. 본 연구에서는 정형화된 문제와 비정형화된 문제해결에 이용된 시각적 표현의 양상을 살펴보기 위해 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 조사연구를 실시하였다. 분석 결과, 정답률에서는 정형화된 문제가 비정형화된 문제보다 높게 나타났다. 정형화된 문제에서는 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 하였음도 불구하고 수식을 이용하여 해결한 비율이 높게 나타났다. 반면에 비정형화된 문제에서는 시각적 표현을 이용하여 해결한 비율이 높게 나타났다. 그렇지만 비정형화된 문제에서 시각적 표현을 이용한 대상자 중에 오답자의 비율도 높게 나타났는데, 이것은 문제 상황을 묘사하는 수준의 시각적 표현에 그친 경우였다. 따라서 다양한 유형의 시각적 표현을 문제해결에 이용할 수 있는 경험을 제공하도록 하고, 시각적 표현으로의 변환 과정에도 주의를 기울일 필요가 있다.

주제어: 표현, 시각적 표현, 수식, 정형화된 문제, 비정형화된 문제, 관계 그림, 상황 그림

References

- Bruner, J. (1960). *The process of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Campbell, K. J., Collis, K. F., & Watson, J. M. (1995). Visual processing during mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 28*(2), 177-194.
- Elia, H., & Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (2)*, 327-334.
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.
- Hong, G. (2019). The connection between illustrations and contents in elementary mathematics textbooks. *The Mathematical Education, 58*(2), 225-237.
- Hwang, H., & Pang, J. (2009). A study on the 6th graders' use of visual representation in mathematical problem solving. *Education of Primary School Mathematics, 12*(2), 81-97.
- Kim, S., Lee, K., & Ku, M. (2013). The fourth graders' visual representation in mathematics problem solving. *Education of Primary School Mathematics, 16*(3), 285-301.
- Kim, Y., & Baik, S. (2005). A study on the representation in the elementary mathematical problem-solving process. *Journal of Elementary Mathematics in Korea, 9*(2), 85-110.
- Kim, Y., & Jang, H. (1997). A study on the representation in mathematics learning-Focused on the development of a representation model. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics, 6*(2), 185-196.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. the University of Chicago.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. NY: Routledge.
- The Ministry of Education (2018). *Mathematics workbook 4-2*. Seoul: Cheonjaekyoyook.
- The Ministry of Education (2019a). *Mathematics 5-1*. Seoul: Cheonjaekyoyook.
- The Ministry of Education (2019b). *Mathematics workbook 5-1*. Seoul: Cheonjaekyoyook.
- van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities, 39*, 496-506.

저 자 정 보

이 대 현 (광주교육대학교 교수)