

직류전압을 건 평행판 축전기에서 변위전류 고찰

김재동 · 장태훈¹ · 하혜진¹ · 손상호^{1*}

계성고등학교 · ¹경북대학교

Displacement Current in a Parallel Plate Capacitor Biased by DC Voltages

Jae-Dong Kim · Taehun Jang¹ · Hye Jin Ha¹ · Sang Ho Sohn^{1*}

Keisung High School · ¹Kyungpook National University

Abstract : In this study, we derived several formulas for magnetic fields and induced voltages in a parallel plate capacitor biased by DC voltages. The computer simulation based on the derived formulas reveals that the magnetic fields due to the displacement current fall within the range of $10^{-10}T$ to $10^{-9}T$ and thence the experiment for the displacement current is not possible because the magnetic field sensor used in Data Logger could measure the magnetic fields of above $10^{-5}T$ range. Contrary to this, the computer simulation confirms that the induced voltages in a toroidal coil due to the displacement current range measurable values of $0.002 \sim 0.021 V$. The results imply that the displacement current can be confirmed by measuring the induced voltages in a toroidal coil inserted into a parallel plate capacitor under DC biasing.

keywords : displacement current, magnetic fields, induced voltages, parallel plate capacitor, DC biasing, Data Logger(MBL)

I. 서론

고등학교에서 학습하는 물리학 I, II 교과서에는 전자기학의 기본 내용인 전기장과 자기장, 전기 회로 연결, 평행판 축전기, 전자기 유도, 상호유도 등 전자기학의 다양한 내용이 포함되어 있다. 그중에서도 평행판 축전기에 관련된 내용은 2009 개정 교육과정 물리학 I, II 및 2015 개정 교육과정 물리학 II에서 내용을 다루고 있듯이 전자기학 분야에서 매우 중요하다. 2009 개정 교육과정 물리학 I(Kwak *et al.*, 2011a)에서는 축전기의 용량 리액턴스에 관한 내용 다루고 있으며, 2009 개정 교육과정 물리학 II(Kwak *et al.*, 2011b)에서는 축전기의 전기 용량, 축전기의 직렬-병렬 연결에 따른 축전기에 저장되는 전하의 양 및 교류-직류 전원을 연결할 때 축전기 회로 분석을 다루고 있다. 2015 개정 교육과정 물리학 II(Kim *et al.*, 2018)에서는 Figure 1처럼 '전원 장치에 축전기를 연

결하여 스위치를 연결하면 전구에 불이 켜진다.'라고 서술되어 있다. 학생들에게 Figure 1의 상황에 대해 질문을 할 때 '전구에 불이 켜진다.'라고 답하기도 하지만 전류에 대해 지식을 갖춘 학생들은 Figure 1의 상황에 대해 이상함을 느낀다. 중학교에서 학습한 내용으로는 전류는 전자의 흐름이라고 학습하였으며, 전자는 도선을 따라 이동한다고 학습하였다. Figure 1의 상황에서 축전기 사이는 도선으로 연결되어 있지 않기 때문에 전자가 이동할 수 없으므로 전류가 흐를 수 없으며, 따라서 불이 켜지는 현상에 의문을 가진다. 이처럼 Figure 1의 상황에서 전류가 흐르는 이유에 대해 많은 학생이 궁금증을 가지고 있다. 그러나 2009 개정 교육과정과 2015 개정 교육과정 물리학 I, II의 교과서에는 Figure 1에서 가진 궁금증을 해결할 수 있는 내용을 포함하고 있지 않으며, 대학에 진학하여 변위전류(Displacement current)에 대해 학습한 후 위의 궁금증이 해결된다.

* 교신저자: 손상호 (shsohn@knu.ac.kr)

** 이 논문은 김재동의 2021년도 석사 학위논문의 데이터를 활용하여 재구성하였음.

*** 2021년 6월 14일 접수, 2021년 8월 3일 수정원고 접수, 2021년 8월 9일 채택

http://dx.doi.org/10.21796/jse.2021.45.2.219

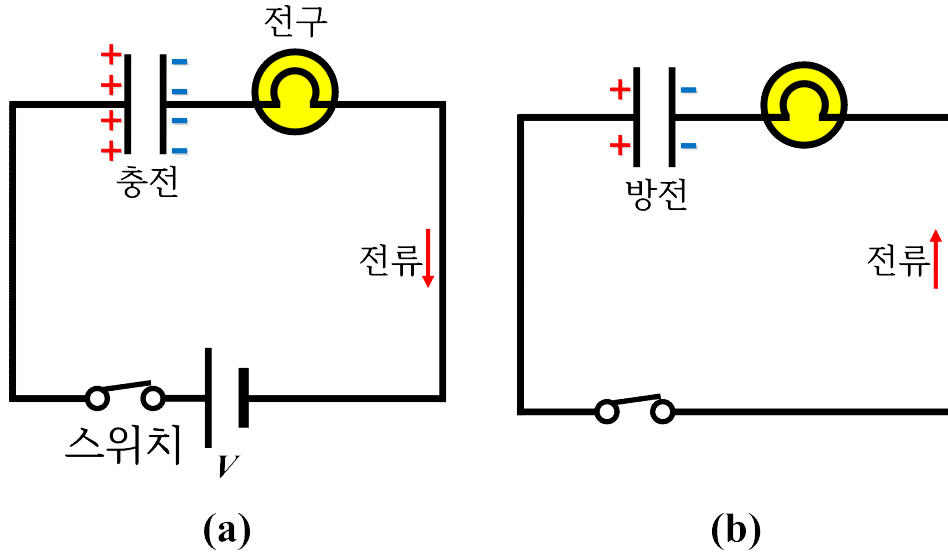


Figure 1. Circuits of (a) charging and (b) discharging of a capacitor

대학에서 배우는 일반물리학 교재에서는 평행판 축전기에서 변위전류 I_d 에 대해 다음과 같이 설명하고 있다(Halliday, Resnick, & Walker, 2008; Tipler & Moska, 2007). Figure 2와 같이 축전기의 극판에 전류를 공급하는 도선을 둘러싼 동일한 폐곡선 C 로 정의되는 두 개의 면 S_1 과 S_2 를 볼 때면 S_1 을 통과하는 전도전류는 I_c 이지만, 면 S_2 를 통과하는 전류(전도전류라 부름)는 전하가 축전지의 극판에서 멈추기 때문에 존재하지 않는다. ‘곡선으로 둘러싸인 임의의 면을 통과하는 전류’라는 표현에는 모호한 점이 발생하며, 이러한 문제점은 전도전류 I_c 가 비연속적일 경우 항상 발생하므로 전도전류와 관련된 앙페르 법칙은 수정이

불가피하여 맥스웰이 내놓은 것이 다음과 같은 일반화된 앙페르 법칙인 맥스웰-앙페르 법칙이다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_{enc} \quad (1)$$

여기서 μ_0 는 진공의 자기 투자율이며, 크기는 $4\pi \times 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m/A}$ 이다. ϵ_0 는 진공의 유전상수이며, 크기는 $8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ 이다. Φ_E 는 전기 다발이며, I_{enc} 는 폐곡선 C 로 둘러싸인 도선에 흐르는 전류의 세기이므로 Figure 2에서 전도전류 I_c 다.

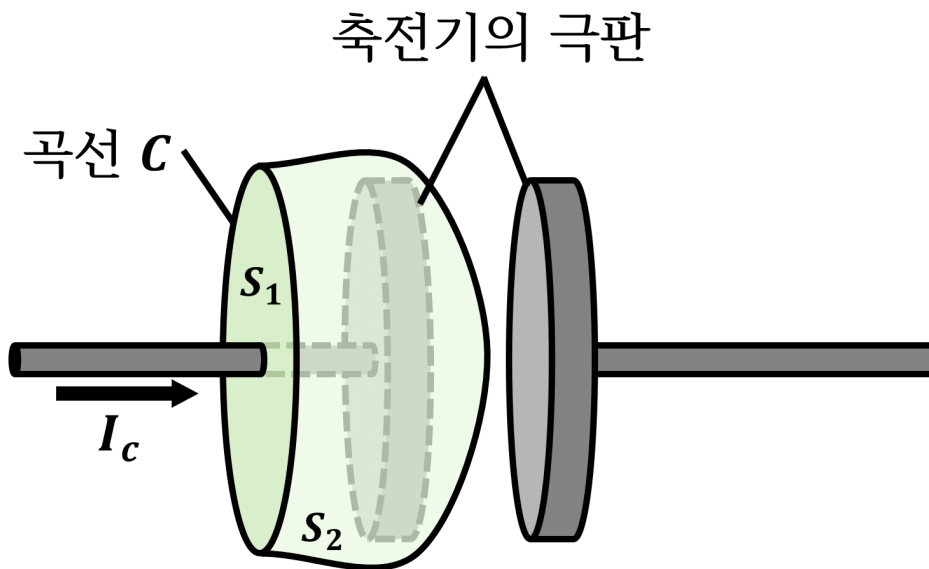


Figure 2. Diagram for explaining the displacement currents in the capacitor

식 (1)은 맥스웰이 처음 유전체라는 물질에서 주장한 식이 아니라 나중에 자유공간에서 재해석한 식이다. 식 (1)의 차원을 비교하면 $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ 는 전류의 차원을 가져야 하며, 맥스웰은 이것을 변위전류 I_d 로 이름지었다.

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (2)$$

변위(Displacement)라는 용어는 역학에서 질점의 위치의 벡터적 이동을 의미하는데 대학 일반물리학 교재(Halliday, Resnick, & Walker, 2008)에서 언급했듯이, 축전기의 극판 사이에 존재하는 가상의 전류에 대해 변위라는 용어를 선택한 것은 잘못이다. 그래서 변위전류의 개념에는 많은 혼란을 초래하고 있고 (Seigel, 2003) 일부 전자기학 번역판 교재(Griffiths, 2010)에서는 ‘변위전류’ 대신에 ‘대체전류’라는 용어를 쓰기도 한다. 그러나 맥스웰의 논문(Maxwell, 1861)에서 기원을 찾아보면 맥스웰의 변위전류는 자유공간에서 변위전류가 아니라 유전체 내부에서 발생하는 변위전류를 역학적인 관점에서 해석하고자 하였다. 따라서 유전 분극시 일어나는 전하의 이동(Displacement, h) 같은 것이 유전공간에서 일어나는 전류의 시작으로 보고, h 는 유전체의 성질에 의존하며 기전력 ϵ 는 h 에 의존한다고 보았다. 그리고 h 에 의해 발생하는 전류 즉 변위전류 I_d 는 h 의 시간 변화율인 $I_d = dh/dt$ 로 나타낼 수 있다고 하였다. 그 후 변위전류는 유전체에서만 존재하는 것이 아니라 전기장의 시간 변화가 존재하는 곳이라면 식 (1)과 같이 자유공간에서도 존재할 수 있는 것으로 알려진 이후로는 ‘변위’라는 용어가 이상해지기 시작했다(Seigel, 2003). 맥스웰의 역학적 바탕 위에서 변위전류 개념의 도입이 옳은지, 정당성이 의심받고 있기도 하지만 이 개념을 처음 도입한 맥스웰이 지은 용어이므로 본 연구에서는 맥스웰의 표현 그대로 따르기로 하겠다.

대학의 기초 전자기학(Griffiths, 2010)에서는 변화하는 전기장 E 는 자기장 B 을 만들어 내며, 단위 면적당 변위전류인 변위전류밀도 J_d 는

$$J_d = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (3)$$

라는 내용이 추가로 설명되어 있다. 전도전류에 의해 자기장이 발생하듯이 I_d 나 J_d 에 의해서도 자기장이 발생하는데 대학 일반물리학 교재에서는 원형 평행판 축전기(반지름 R_c)에서 I_d 에 의한 원형 축전기의 중심

에서 거리 r 인 곳에서의 자기장의 세기 B 를

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R_c^2} I_d \quad (r \leq R_c) \quad (4)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_d \quad (r \geq R_c) \quad (5)$$

로 소개하고 있다(Halliday, Resnick, & Walker, 2008; Tipler & Moska, 2007).

이처럼 앙페르 법칙의 모순점을 해결하기 위해 도입된 변위전류의 존재는 전자기파가 발생하고 감지되는 헤르츠의 실험에서 증명된 후 평행판 축전기에서 변위전류에 관한 여러 연구가 진행되었으며(Scheler, 2015) 또한 다양한 방법으로 변위전류의 계산에 관한 연구가 수행되었으나(Milson, 2020) 실험과 관련된 연구 결과는 많이 없다. 그것도 대개가 교류전압을 평행판 축전기에 걸어서 자기장의 변화를 측정(Bartlett & Corle, 1895)하거나 평행판 축전기 사이에 토로이드 코일과 같은 유도 코일을 넣어서 유도전압을 측정하는 방법(Carver & Rajhel, 1973; Scheler & Paulus, 2015)뿐이다. 두 가지 경우 모두 I_d 를 직접 측정하는 방법이 아니라 I_d 에 의한 자기장과 유도전압의 발생을 관찰하는 간접적인 방법이다.

교류전압 $V = V_0 \cos \omega t$ (각 진동수 ω)를 전기용량이 C 인 평행판 축전기에 인가할 경우 N 번 감긴 유도 코일에 발생하는 유도전압은 자기 다발 Φ_m 이

$$\Phi_m = NBA = N \frac{\mu_0 r A}{2\pi R_c^2} \omega C V_0 \cos \omega t \quad (6)$$

이므로 패러데이 법칙으로부터 토로이드 코일의 유도전압 V_d 는

$$V_d = - \frac{d\Phi_m}{dt} = N \frac{\mu_0 r A}{2\pi R_c^2} \omega^2 C V_0 \sin \omega t \quad (7)$$

로 주어진다.

축전기 사이에 발생하는 자기장인 식 (4)는 매우 작아서 미세한 자기장을 측정하기 위해서 실험에서 초전도 양자 간섭 검출기(Superconducting Quantum Interference Device, SQUID)를 사용하였으며(Bartlett & Corle, 1895) 교류전압을 인가하여 유도 코일에서 유도전압(식(7))을 측정하는 실험에서는 1MHz 이상의 교류전압을 전원으로 사용하였다(Carver & Rajhel, 1973; Scheler & Paulus, 2015).

변위전류에 의한 자기장이나 유도전압을 측정하는 실험(Bartlett & Corle, 1895; Carver & Rajhel, 1973; Scheler & Paulus, 2015)에서는 모두 교류전원을 사용했으므로 식 (7) 뿐만 아니라 식 (4)와 식 (5)도 주기함수로 표시된다. 변위전류의 정밀한 측정을 위해서는 직류전압에서 실험이 이루어져야 한다(Bartlett & Corle, 1895)고 말하고 있지만, 평행판 축전기에서 직류전압을 이용하여 충전 또는 방전 중에 발생하는 변위전류와 관련된 실험을 좀처럼 찾을 수 없다. 직류전압을 인가할 때 평행판 축전기 사이에서 발생하는 변위전류에 관한 자료는 인터넷 포럼에서 자주 등장하기는 하지만 ‘직류로 평행판 축전기를 충전, 방전할 때 충전, 방전 시간이 매우 짧아 전도전류나 변위전류가 초기에 잠시 흐르다가 사라진다’라는 말만 할 뿐이다. 직류전압 인가에 의해 평행판 축전기 사이에서 자기장이나 유도전압을 검지할 수 있다면, 그것도 MBL (Microcomputer Based Laboratory, Data Logger)과 같은 실험 장치로 측정할 수 있다면, 고교생이나 대학생들에게 변위전류를 이해하는데 도움이 될 것이다. 본 연구에서는 변위전류에 대해 잘 모르거나 궁금해 하는 학생들을 위해 변위전류를 검증할 수 있는 쉬운 방법을 찾아볼 목적으로, 1) 직류전압이 걸린 평행판 축전기에서 변위전류에 의한 자기장 B 와 축전기 사이에 삽입한 토로이드 코일에 발생하는 유도전압 V_d 의 공식 유도, 2) 유도된 공식을 사용하여 실험조건에 따른 B 와 V_d 를 컴퓨터 시뮬레이션으로 계산, 3) 이것을 바탕으로 MBL을 사용하여 변위전류를 알아보기 위한 적당한 실험조건이나 방법을 찾아보고자 하였다.

II. 이론

1. 변위전류 I_d 에 의한 자기장 B 계산

식 (1)과 식 (2)를 합치면

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_d + \mu_0 I_{enc} = \mu_0 (I_d + I_{enc}) \quad (8)$$

로 나타낼 수 있고 축전기 내부에서 $I_{enc} = 0$ 이므로 식 (8)은

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_d = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (9)$$

로 된다. 식 (9)를 사용하여 Figure 3과 같은 배치를 갖는 원형 평행판 축전기 사이의 임의의 점 r 에서 자기장 B 부터 구하기로 한다.

Figure 3의 전하량 Q 로 대전된 원형 평행판 축전기의 반지름은 R_c 이며, 넓이는 $S = \pi R_c^2$ 이다. 축전기 극판 사이의 간격은 d 이며, 축전기 사이는 공기가 채워져 있으며, 공기의 유전상수는 근사적으로 ϵ_0 다. 중심에서 거리 r 만큼 떨어진 곳에 앙페르 고리(고리가 만드는 면적: S')를 2가지 경우로 나누어 고려한다.

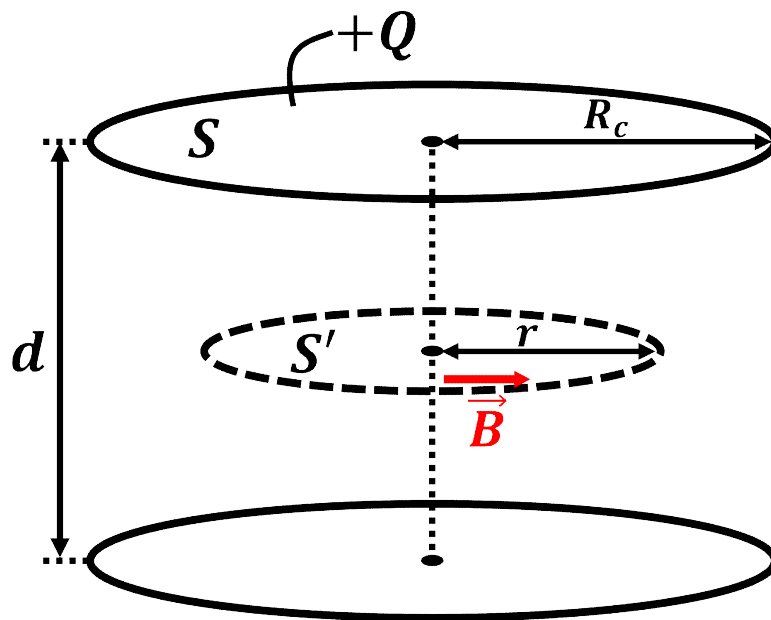


Figure 3. A layout of a capacitor with circular parallel plate electrodes

1) 앙페르 고리가 축전기의 반지름 R_c 보다 작은 경우($r \leq R_c$)

앙페르 고리를 지나가는 전기 다발 Φ_E 은 축전기 내부의 전기장 E 와 관련하여

$$\Phi_E = ES' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi R_c^2} \pi r^2 = \frac{Q r^2}{\epsilon_0 R_c^2} \quad (10)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 $E = \sigma / \epsilon_0$, 전하밀도 σ 는 $\sigma = Q / \pi R_c^2$ 을 사용하였다. 식 (10)을 식 (9)에 대입하면

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{Q r^2}{\epsilon_0 R_c^2} \right) = \mu_0 \frac{r^2}{R_c^2} \frac{dQ}{dt} \quad (11)$$

이 된다. 따라서 식 (11)로부터 평행판 축전기의 내부에서 B 는

$$B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R_c^2} \frac{dQ}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R_c^2} I_d \quad (12)$$

로 주어진다.

2) 앙페르 고리가 축전기의 반지름 R_c 보다 큰 경우($r > R_c$)

축전기의 가장자리(Edge) 부위에 발생하는 가장자리 전기장(Fringing field)을 무시하여 $r > R_c$ 인 영역에서는 전기장이 존재하지 않는다고 하면

$$\Phi_E = ES = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \pi R_c^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (13)$$

이 된다. 식 (13)을 식 (9)에 대입하면

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right) = \mu_0 \frac{dQ}{dt} \quad (14)$$

가 된다. 따라서 식 (14)에서 평행판 축전기의 외부에서 B 는

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{dQ}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_d \quad (15)$$

로 나타낼 수 있다.

다음으로 Figure 4와 같이 평행판 축전기에 직류 전압 V_a 가 인가될 때 변위 전류 I_d 와 자기장 B 을 구하기로 한다. 충·방전이 천천히 일어나기 위해서 저항값이 비교적 큰 저항 R 이 달려있는 회로를 구성하여 충전과 방전시의 I_d 를 구한 뒤 식 (12)와 식 (15)로부터 자기장 B 를 구하는 절차를 밝기로 한다.

(1) 평행판 축전기를 충전하는 경우

평행판 축전기에 충전되는 전하량 Q 는 $Q = CV$ 로 나타낼 수 있으며 키르히호프 법칙에 따라 $V_a - R dQ/dt - Q/C = 0$ 이므로 Q 에 대한 미분방정식을 풀면 다음과 같다.

$$Q = CV_a (1 - e^{-t/RC}) \quad (16)$$

평행판 축전기의 전속 밀도 D 는

$$D = \sigma = \frac{Q}{\pi R_c^2} = \frac{CV_a}{\pi R_c^2} (1 - e^{-t/RC}) \quad (17)$$

로 되며, 따라서 변위전류밀도 J_d 는

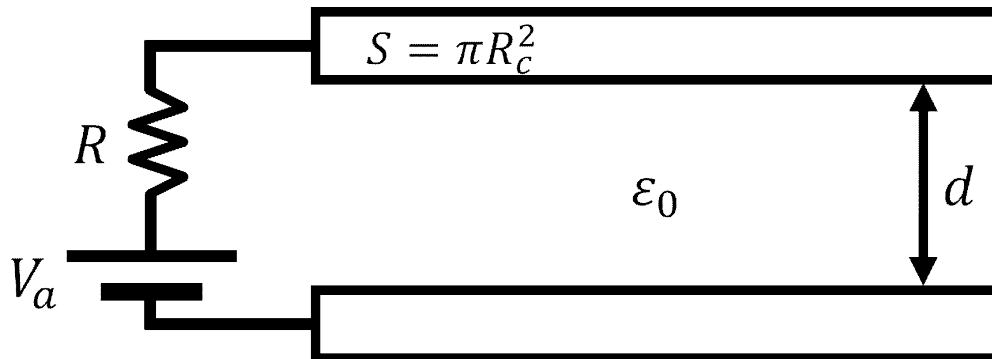


Figure 4. A parallel plate capacitor biased by a DC voltage V_a

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{CV_a}{\pi R_c^2} \left(-\frac{1}{RC}\right) (-e^{-t/RC})$$

$$= \frac{1}{\pi R_c^2} \frac{V_a}{R} e^{-t/RC} \quad (18)$$

로 나타낼 수 있다. 따라서 변위전류 I_d 는

$$I_d = \int_S J_d \cdot da = SJ_d = \frac{\pi R_c^2}{\pi R_c^2} \frac{V_a}{R} e^{-t/RC}$$

$$= \frac{V_a}{R} e^{-t/RC} \quad (19)$$

가 된다. 식 (19)를 식 (12)와 식 (15)에 대입하면

$$B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R_c^2} \frac{V_a}{R} e^{-t/RC} \quad (r \leq R_c), \quad (20)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{V_a}{R} e^{-t/RC} \quad (r > R_c) \quad (21)$$

를 얻게 된다.

평행판 축전기에 직류전압을 인가하여 충전할 때 변위전류에 의한 자기장 B 는 평행판 축전기 내부 ($r \leq R_c$)에서는 식 (20)에 의해 r 과 V_a 에 따라서 선형적으로 증가하며 축전기의 넓이 πR_c^2 와 저항 R 에 반비례한다. 축전기 외부($r > R_c$)에서는 식 (21)에 의해 r^{-1} 에 비례하므로 빠르게 감소한다. 따라서 자기장을 축전기 내부에서 효과적으로 측정하기 위해서는 면적이 큰 축전기와 작은 저항값을 갖는 저항을 사용하며 큰 전압을 걸어줘야 함을 시사한다. 그러나 작은 저항을 사용할 경우 시상수 $(RC)^{-1}$ 가 작아서 B 의 시간 변화가 순간적으로 일어나게 되어 MBL 자기장 센서가 검지를 못할 수도 있으니 작은 저항값을 사용하는 것은 한계가 있을 수 있다. 식 (20)과 식(21)에서 R 은 자기장의 크기뿐만 아니라 시간적인 변화에도 관계하므로 매우 중요한 실험변수가 됨을 알 수 있다.

(2) 평행판 축전기를 방전하는 경우

축전기가 방전할 때 평행판 축전기에 남아 있는 Q 는 다음과 같다.

$$Q = CV_a e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/RC} \quad (22)$$

여기서, $CV_a \equiv Q_0$ 는 충전 후 축전기에 저장된 전하량이다. 충전 때와 같은 방법으로 변위 전류 밀도 J_d , 변위전류 I_d , 변위전류에 의한 B 를 계산하면 식 (18), (19), (20), (21)에서 (-)부호가 덧붙게 된다. 따라서 충전할 때와 방전할 때의 변위전류의 방향과 변위전류에 의한 자기장은 크기는 같고 방향이 반대라는 결론을 얻게 된다. 마찬가지로 방전할 때 자기장을 축전기 내부에서 효과적으로 측정하기 위해서는 면적이 큰 축전기와 작은 저항값을 갖는 저항을 사용하며 큰 전압을 걸어줘야 하지만 시상수도 고려해야한다.

2. 변위전류 I_d 에 의한 유도전압 V_d 계산

Figure 5는 원형 평행판 축전기 내부에 토로이드 코일을 설치한 모습을 나타낸다. 토로이드 코일의 감은 수를 N , 토로이드 코일의 반지름을 r_t , 토로이드 단면적의 반지름을 R_t 이에 따른 토로이드 코일 단면적 $A = \pi R_t^2$ 이라고 할 때 토로이드 반지름 r_t 의 위치에서 자기장 B 에 의한 토로이드 코일의 자기 다발 Φ_m 은 $\Phi_m = NBA$ 과 식 (20)을 이용하여 V_d 를 계산할 수 있다. 직류전압 V_a 를 인가하여 충전하는 경우는

$$\Phi_m = NBA = NA \frac{\mu_0 r_t}{2\pi R_c^2} \frac{V_a}{R} e^{-t/RC} \quad (23)$$

이 되고 따라서, 축전기 내부에서 변위전류에 의해 토로이드에 유도되는 V_d 는

$$V_d = -\frac{d\Phi_m}{dt} = NA \frac{\mu_0 r_t}{2\pi R_c^2} \frac{V_a}{R^2 C} e^{-t/RC} \quad (24)$$

로 나타낼 수 있다. V_d 는 코일을 감은 수 N , 코로이드 코일의 단면적 A , 토로이드 코일의 반지름 r_t , 직류전압 V_a , 축전기 원판의 면적($= \pi R_c^2$)과 저항 R 의 제곱, 축전기의 전기용량 C 에는 반비례 한다. 방전할 때는 V_d 의 방향이 반대이기 때문에 (24)식에서 (-)부호가 붙으면 된다. 식 (20)에서 B 는 축전기 중심으로 부터 거리 r 의 함수인데 유한한 단면적을 갖는 토로이드 코일을 지나는 Φ_m 을 단면적에 대해 적분을 해야하는데 어떻게 단순하게 식 (23)과 같이 축전기의 중심에서 토로이드 코일의 중심위치(토로이드 코일의 반지름) r_t 의 함수로 나타낼 수 있는가 하는 문제는 다음과 같이 설명된다. B 가 거리 r 에 선형적으로 비례하는 경우에는 비균일 자기장을 중적분해서 자기 다발을 구하면 코일 단면적의 중심인 r_t 의 함수로 표

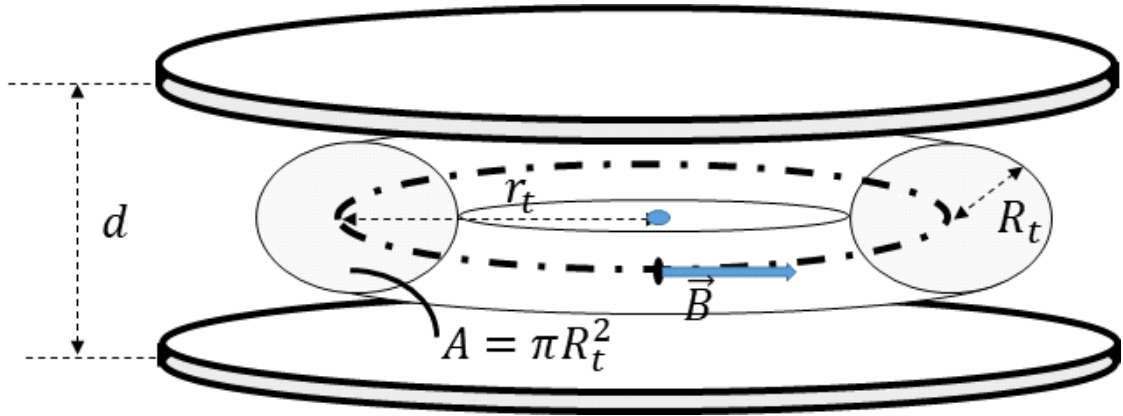


Figure 5. A toroidal coil inserted into a parallel plate capacitor

현한 결과와 동일하다. 적분 계산을 해보면 코일의 단면적이 원형이든 사각형이든 관계없이 식 (23)과 동일한 수식을 얻게 된다. 식 (24)에 나오는 여러 변수 가운데 R 과 C 는 V_d 의 크기뿐만 아니라 V_d 의 시간적인 변화에도 민감하게 작용하는 매우 중요한 변수다. 일반적으로 평행판 축전기의 C 값은 매우 작고 C 값을 바꾼다하더라도 평행판 축전기의 극판거리 d 를 바꿀 수밖에 없어 제한적이다. 그러나 R 은 우리가 임의로 바꿀 수 있고 바꿀 수 있는 범위도 매우 크게 할 수 있으므로 결과에 영향을 줄 수 있는 가장 중요한 실험변수라고 본다. 직류로 충, 방전할 때 V_d 는 순간적으로 나타나서 사라지므로 R 을 크게 하여 큰 시상수 때문에 V_d 가 천천히 사라지게 할 수 있지만 V_d 의 크기가 R^{-2} 에 비례하므로 V_d 측정이 불가능하게 될 문제를 일으킬 수 있다. 따라서 R 의 선택은 평행판 축전기에 직류전압을 인가해서 V_d 를 검지하는 실험에서 결정적인 요소가 된다.

Ⅲ. 컴퓨터 계산 결과 및 논의

평행판 축전기에 직류전압을 인가할 때 식 (20)과 식 (21)에 따라 시간 t 가 0일 때 변위전류에 의한 자기장 B (시간에 대해서 최대 자기장)를 축전기의 중심에서 거리 r 에 따라서 계산한 결과를 나타내면 Figure 6과 같다. 계산에서 $R_c = 0.12\text{m}$, $C = 2.002 \times 10^{-12}\text{F}$, $R = 1.000 \times 10^7\Omega$ 로 두었는데 이 값들은 실험을 위해 일반적으로 공급되는 평행판 축전기의 크기나 용량값과 저항값이다. 계산과 그래프 작성은 엑셀 2013 버전으로 하였다.

Figure 6에서 알 수 있듯이 B 는 평행판 축전기 축전기 중심에서 멀어질수록 선형적으로 증가하면서 평행판 축전기의 끝단($R_c = 0.12\text{m}$)에서 최대가 되다가 축전기 바깥에서는 비선형적으로 감소함을 알 수 있다. 이런 경향은 교류전압을 걸 때의 연구결과 (Bartlett & Corle, 1895; Carver & Rajhel, 1973;

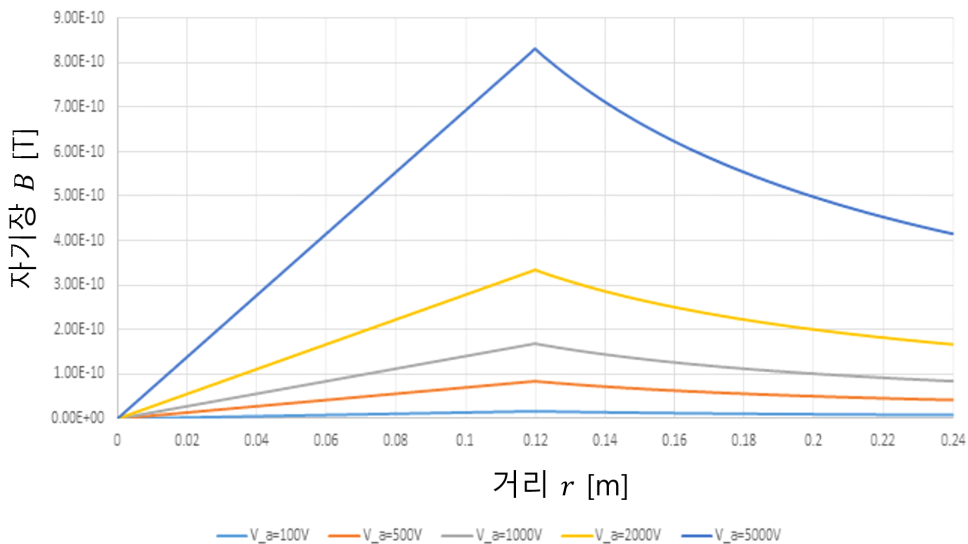


Figure 6. Magnetic fields B as functions of the distance r from the center of a parallel plate capacitor at $t = 0$ ($R_c = 0.12\text{m}$, $C = 2.002 \times 10^{-12}\text{F}$, $R = 1.000 \times 10^7\Omega$)

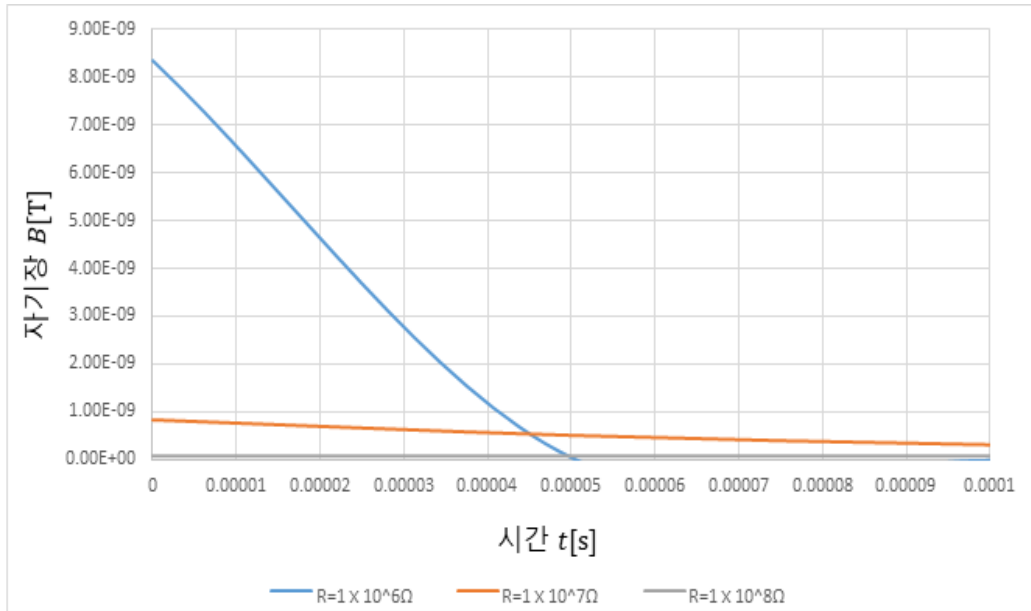


Figure 7. Time variations of magnetic fields B in a parallel plate capacitor for several resistors ($R_c = 0.12\text{m}$, $V = 5,000\text{V}$, $r = 0.12\text{m}$)

Scheler & Paulus, 2015)와 유사한데 식 (20)과 식 (21)에서 시간항을 제외하면 직류나 교류인가 시 거의 비슷한 함수 꼴로 나타나기 때문이다. 이것은 식 (12)와 식 (15)에서 I_d 를 교류의 형태로 나타내면 쉽게 증명할 수 있다. Figure 6의 조건에서 I_d 에 의한 B 의 최댓값은 $5,000\text{V}$ 에서 $8.33 \times 10^{-10}\text{T}$ 로 매우 작음을 알 수 있다.

Figure 7은 저항값 R 에 따른 자기장 B 의 시간 변화를 계산한 결과를 나타낸다. 계산에서 $R_c = 0.12\text{m}$, $V = 5,000\text{V}$, $r = 0.12\text{m}$ 로 두었으며 저항값은 $R = 1 \times 10^6, 1 \times 10^7, 1 \times 10^8 \Omega$ 로 설정하였다.

Figure 7에서 알 수 있듯이, B 는 R 의 크기에 따라 민감하게 의존함을 알 수 있는데 이것은 식 (20)과 식 (21)에서 알 수 있듯이 B 의 크기와 시간 변화가 모두 R 에 의존하기 때문이다. $R = 1 \times 10^7 \Omega$ 과 $1 \times 10^8 \Omega$ 에서는 B 자체가 너무 작아서 지수적 감소를 잘 인지할 수 없으나 $R = 1 \times 10^6 \Omega$ 에서는 $5 \times 10^{-5}\text{s}$ 때까지 지수 함수적인 감소를 확인할 수 있다. R 을 줄일수록 B 가 증가하고 지수 함수적인 경향을 보이지만, R 을 너무 줄일 경우, 시상수 $(RC)^{-1}$ 가 역시 줄어들어 자기장 B 를 측정하는데 자기장 센서의 샘플링 타임보다 작아지면 자기장 측정 자체가 불가능하게 된다. Figure 6과 Figure 7의 계산 결과를 두고 종합해서 분석해보면 직류전압을 걸 때 평행판 축전기 내부에서 변위전류에 의한 자기장의 세기는 $10^{-10}\text{T} \sim 10^{-9}\text{T}$ 의 범위를 가지며 $R = 1 \times 10^6 \Omega$ 에서는 $5 \times 10^{-5}\text{s}$ 때까지 지수

함수적인 감소를 확인할 수 있다. 시중에 많이 사용하는 MBL용 자기장 센서의 범위가 10^{-5}T 이고 샘플링 타임도 10^{-5}s 이기 때문에 이런 자기장 센서로는 변위전류에 의한 자기장 B 를 감지할 수 없다. 식 (20)에 따라 $B \propto V_d$ 이므로 직류 전원의 전압 V_d 을 $5,000\text{V}$ 의 10^4 배 이상으로 높여 B 의 세기를 자기장 센서의 측정 범위인 10^{-5}T 로 하는 방법이 있으나, 이 정도의 고전압 전원을 구하기도 어렵고 설령 고전압 전원이 있다 하더라도 일반 실험실에서 평행판 축전기를 가지고 이런 고전압 실험을 진행하기에 위험이 따른다. 식 (20)에 따라 $B \propto R^{-1}$ 이므로 R 값을 $10^2 \Omega$ 이하로 낮추어 측정하면 10^{-5}T 의 범위를 가질 수 있지만, 시상수가 엄청나게 줄어들어 자기장 센서로 측정이 불가능하다. 결론적으로 시중의 MBL장치로는 평행판 축전기에서 변위전류에 의해 발생하는 자기장을 측정할 수 없다. 대학 일반물리학 교재(Halliday, 2017)에서도 평행판 축전기에서 변위전류로 인해 생기는 자기장의 세기가 매우 약하다고 언급하고 있으며, 이 때문에 미세한 자기장을 검지해낼 수 있는 SQUID장치를 사용하여 평행판 축전기에서 변위전류에 의한 자기장을 측정(Bartlett, 1985)해야 했다. 마찬가지로 B 의 직접 측정보다는 V_d 를 측정(Scheler, 2015; Carver, 1973)하여 변위전류를 찾아보고자 한 까닭도 여기에 있다고 본다.

Figure 8은 토로이드 코일 반지름 r_t 에 따른 V_d 를 식 (24)에 따라 계산한 결과를 나타낸다. 계산에서 토

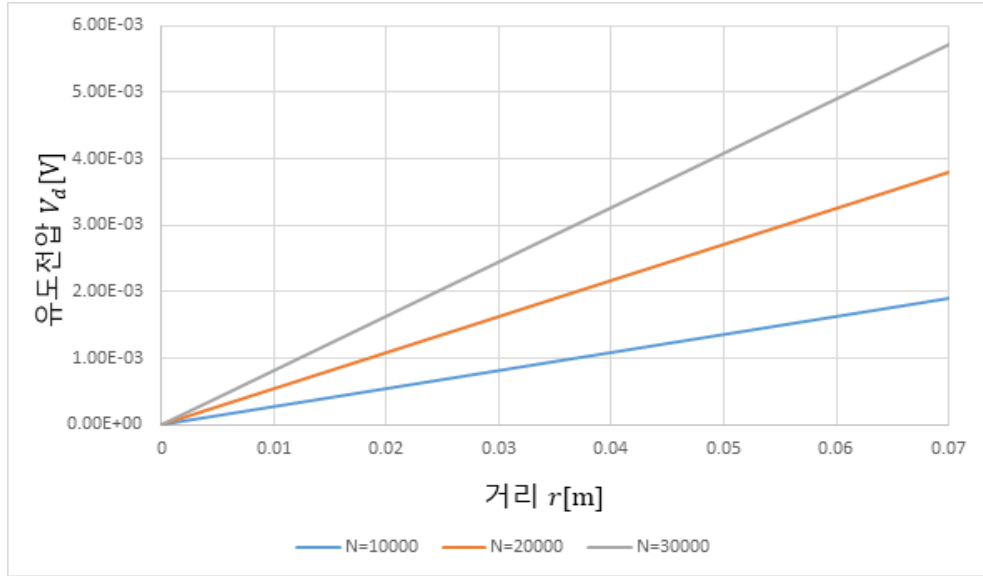


Figure 8. Induced voltages V_d versus the radius r_t of a toroidal coil inserted into a parallel plate capacitor for several turns N . ($R_t = 0.05\text{m}$, $V_a = 5,000\text{V}$, $C = 2.002 \times 10^{-12}\text{F}$, $R = 1.000 \times 10^7\Omega$)

로이드 코일 단면적의 반지름 R_t 는 0.05m, 평행판 축전기의 반지름 R_c 는 0.12m, 평행판 축전기 사이 간격 d 는 0.2m, 저항 R 은 $1.000 \times 10^7\Omega$, 직류전압 V_a 는 5,000V, $t=0\text{s}$ 로 두었으며 코일을 감은 수 $N=10,000, 20,000, 30,000$ 으로 하였다.

Figure 8에서 알 수 있듯이, 변위전류에 의한 V_d 는 토로이드 코일의 반지름 r_t 에 따라 선형적으로 증가함을 알 수 있다. $r_t=0.07\text{m}$, $V_a=5,000\text{V}$, 토로이드 코일의 감은 수 N 이 20,000 ~ 30,000번일 때 $V_d \sim 0.006\text{V}$ 정도로 계산된다. 이 정도의 V_d 는 시중의 MBL장치의 전압센서로 충분히 측정될 수 있는 전압이므로 실험으로 직류전압을 평행판 축전기에 걸어 주고 축전기 내부에 삽입한 토로이드 코일에 발생하

는 유도전압을 측정하여 변위전류의 존재를 확인하는 방법은 가능하다고 결론 내릴 수 있다. 식 (24)에 나오는 변수인 N, V_a ,와 C 의 함수로 계산을 하여 결과를 얻었으나 지면 관계상 생략하기로 한다. 여러 실험 결과 가운데 MBL장치로 변위전류에 의한 유도전압을 측정할 수 있는 실험조건을 Table 1에 정리해 두었다. Table 1에서 나타낸 여러 실험변수에 대한 수치는 최상의 조건을 의미하는 것은 아니지만, 이 부근에서 실험을 하면 MBL 장치로 변위전류를 검증할 수 있는 하나의 참고 조건은 될 수 있다.

Table 1의 조건으로 식 (24)를 사용하여 평행판 축전기에 직류전원을 연결한 후 토로이드 코일에 발생한 V_d 를 시간 t 에 따라 나타내면 Figure 9와 같다.

Table 1. Experimental conditions for measuring displacement currents in parallel plate under biasing DC voltages

실험변수	값
인가전압	$V_a = 5,000\text{V}$
저항의 크기	$R = 3 \times 10^6 \sim 5 \times 10^6\Omega$
축전기 원판 사이의 거리	$d = 0.2\text{m}$
축전기 원판의 반지름	$R_c = 0.12\text{m}$
토로이드 코일 반지름	$r_t = 0.07\text{m}$
측정 시간	$0 \leq t \leq 0.000025\text{s}$
토로이드 코일 감은 수	$N = 10,000$
토로이드 코일 단면적	$A = \pi R_t^2 = \pi \times (0.05)^2\text{m}^2$

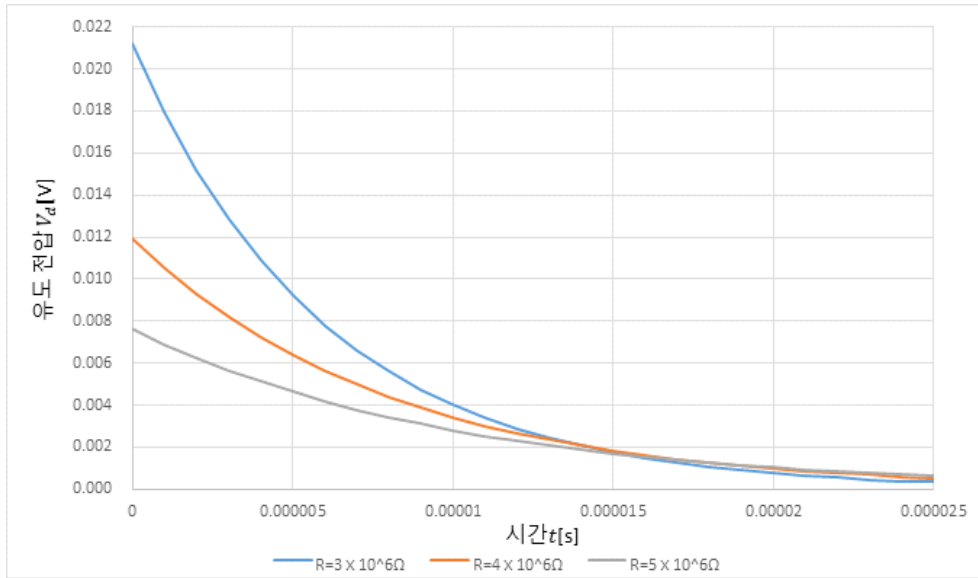


Figure 9. Time variations of induced voltages V_d of a toroidal coil inserted into a parallel plate capacitor for several resistors

Figure 9에서 알 수 있듯이, V_d 는 R 에 매우 민감하게 의존하면서 t 에 따라 빠르게 변함을 알 수 있다. Figure 9에서 V_d 가 R 에 크게 의존하므로 적절한 R 을 선택해서 MBL 전압센서로 V_d 의 신호를 잡아내는 게 무엇보다 중요하다는 것을 시사한다. 이점이 컴퓨터 계산 결과에서 얻은 가장 중요한 결과라고 볼 수 있다. Table 1의 실험조건에 따라 V_d 는 0.002~0.021 V 정도로 얻을 수 있으며, 최댓값은 $t=0$ 일 때 0.021V까지 나온다. R 이나 C 값을 좀더 섬세하게 바꾼다면 이보다 더 큰 V_d 값을 얻을 수 있을 것이다. 시간이 흐를수록 지수함수적으로 급하게 감소하지만 시중 MBL 장치의 샘플링 타임이 $10^{-5}s$ 정도이므로 충분히 데이터로서 수집이 가능할 것이다.

이처럼 Table 1에 나와 있는 실험조건으로 하면 시중의 MBL 장치로 직류 전원을 사용하여 평행판 축전기에서 변위전류를 검증할 수 있지만, 실험을 진행하기 위해서는 Table 1의 조건에 부합하는 평행판 축전기, 직류전원(5kV 이상), 토로이드 코일이 마련되어야 한다. 우리는 평행판 축전기와 직류전원(5kV 이상)은 마련했으나 반지름(r_t)과 단면적($=\pi R_t^2$)이 크고 감은 수($N > 10,000$)가 큰 토로이드 코일을 구할 수 없어서 이번 연구에서는 실험적 검증을 할 수 없었다. 그러나 향후 실험조건에 부합되는 토로이드 코일을 마련하여 평행판축전기에 직류전압을 인가할 때 변위전류를 실험으로 검증하고자 한다. 지금까지의 논의 가운데 몇 가지 의문이 생길 수 있다. 첫 번째, 토로이드 코일을 평행판축전기의 내부에 넣는다면 축전기의 내부의 전기용량 C 값이 달라지므로 식 (20), 식 (21)

과 식 (24)를 그대로 사용할 수 있는가? 하는 의문이 생길 수 있다. 그러나 이런 경우에는 토로이드 코일을 평행한 축전기에 넣고 LCR미터기와 같은 계측기로 실험적으로 C 값을 측정하여 이 실험값을 식 (20), 식 (21)과 식 (24)의 C 값으로 사용하면 된다. 실제로 앞서 소개한 여러 교류전압 인가 실험(Bartlett & Corle, 1895; Carver & Rajhel, 1973; Scheler & Paulus, 2015)에서도 탐침이나 코일을 평행판축전기 사이에 넣을 때 이론식에는 진공 축전기의 C 값을 사용하고 실험값과 비교할 때는 실험값 C 을 사용하였다. 두 번째 의문은 이론에서 언급한 가장자리 효과(Fringing effect)로 야기되는 문제인데 식 (20), 식 (21)과 식 (24)의 유도는 축전기의 가장자리(Edge) 부위에 발생하는 가장자리 전기장(Fringing field)를 무시하고 얻은 결과이며 이것을 고려하면 식이 달라질 수 있다. 그러나 토로이드 코일을 가장자리보다 약간 안쪽에 설치한다면 이곳에서는 가장자리 전기장이 없기에 식 (20), 식 (21)과 식 (24)를 사용하여도 실험결과와 비교하는데는 큰 문제는 없을 것이다. 가장자리 효과를 고려하여 평행판축전기의 전기장 계산은 매우 난해한 과정을 거치므로 앞선 교류전압 인가 실험(Bartlett & Corle, 1895; Carver & Rajhel, 1973; Scheler & Paulus, 2015)에서도 가장자리 효과를 무시한 수식을 사용하였다. 이번 연구에서 소개한 식 (20), 식 (21)과 식 (24)는 정확한 식은 아니지만, 변위전류에 관심이 있는 대학생들이나 교사들이 평행판 축전기를 가지고 실험적으로 변위전류를 확인하고자 할 때 사용할 수 있는 식이라고 할 수 있다.

IV. 결론과 제언

본 연구에서는 학생들의 의문으로부터 시작하여 변위전류의 개념과 변위전류로 인해 생성되는 자기장과 유도전압에 대해 조사하였다. 평행판축전기에 직류전압을 인가할 때 발생하는 변위전류에 관한 식을 구하고 이것으로부터 축전기 내부에 형성되는 자기장을 구하는 식을 얻었다. 또한 토로이드 코일을 평행판축전기에 넣었을 때 자기 다발의 변화에 따른 유도전압을 나타내는 공식을 찾아내었다. 변위전류에 의해 평행판축전기 내부에 생성된 자기장과 유도전압에 관하여 얻은 식을 바탕으로 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 결과를 분석하였다. 컴퓨터 계산 결과, 직류전압을 걸 때 평행판 축전기 내부에서 변위전류에 의한 자기장의 세기는 통상적인 조건에서는 $10^{-10}T \sim 10^{-9}T$ 의 범위이므로 시중에서 사용하는 MBL용 자기장 센서의 범위를 넘어가기 때문에 자기장을 측정할 수 없다. 한편, 변위전류에 의한 유도전압 V_d 는 저항 R 값에 매우 민감하게 의존하지만 적당한 실험조건에서 V_d 는 $0.002 \sim 0.018V$ 정도로 계산되고 좀 더 조건을 맞춘다면 이보다 더 큰 값도 얻을 수 있을 것이므로 저항 R 값을 잘 선택하면 시중의 MBL장치의 전압센서로 충분히 유도전압을 측정할 수 있다고 본다. 따라서 직류전압을 평행판 축전기에 걸어주고 축전기 내부에 삽입한 토로이드 코일에 발생하는 유도전압을 측정하여 변위전류의 존재를 확인하는 방법은 가능하다고 결론내릴 수 있다. MBL을 사용하여 변위전류와 관련된 전자기적 신호를 찾아낸 연구가 없기때문에 누구라도 관심을 가질 만하다. 직류전압을 사용하여 평행판 축전기의 변위전류를 검증하는 실험적 고찰은 후속 연구과제로 남긴다.

국문 요약

본 연구에서는 고등학교 학생들의 변위전류에 대한 궁금증에서 출발하여 직류전압이 걸린 평행판 축전기에서 자기장과 축전기에 삽입한 토로이드 코일에 유도되는 유도전압에 관한 몇 가지 공식을 얻었다. 이 공식을 바탕으로 통상적인 실험조건에 맞는 컴퓨터 계산 결과, 자기장은 MBL 장치의 자기장 센서로는 측정이 불가능한 매우 작은 값으로 나왔으나, 유도전압은 저항 R 값에 크게 의존하지만 전압센서로 측정이 가능한 범위의 값으로 나타났다. 따라서 직류전원을 사용하여 평행판 축전기에서 변위전류를 확인하기 위해서는 적당한 토로이드 코일

을 축전기에 삽입하여 이것에 유도되는 유도전압을 측정하는 방법이 유용하다. 덧붙여서, 직류전압을 평행판축전기에 인가하여 변위전류를 확인하고자 하는 실험에서는 저항 R 값의 선택이 매우 중요한 실험변수가 된다.

주제어: 변위전류, 자기장, 유도전압, 평행판 축전기, 직류 전원, MBL

References

- Bartlett, D. F., & Corle, T. R. (1985). Measuring Maxwell's displacement current inside a capacitor. *Physical Review Letters*, 55(1), 59-62.
- Carver, T. R., & Rajhel, R. (1974). Direct 'Literal' demonstration of the effect of a displacement current, *American Journal of Physics*, 42, 246-248.
- Griffiths, D. J. (2008). *Introduction to Electrodynamics* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc.
- Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2008). *Fundamentals of Physics* (7th ed., vol. 2). Hoboken, NJ: Wiley.
- Kim, S., Kim, D., Moon, Y., An, H., Kwon, G., Min, B., & Park, G. (2018). *Physics II textbook*. Seoul: Mirae-n.
- Kwak, S., Ryu, S., Kim, D., An, J., Lee, O., Kim, J., Nam, G., & Kim, I. (2011a). *Physics II textbook*. Seoul: Chunjae Education.
- Kwak, S., Ryu, S., Kim, D., An, J., Lee, O., Kim, J., Nam, G., & Kim, I. (2011b). *Physics I textbook*. Seoul: Chunjae Education.
- Maxwell, J. C. (1861). *On physical lines of force. Part I. The theory of molecular vortices applied to magnetic phenomena. Philosophical Magazine*, 21(4), 161-175.
- Milsom, J. A. (2020). Untold secrets of the slowly charging capacitor. *American Journal of Physics*, 88, 194-199.
- Scheler, G., & Paulus, G. G. (2015). Measurement of Maxwell's displacement current. *European Journal of Physics*, 36, 1-9.

Siegel, D. M. (2003). *Innovation in Maxwell's electromagnetic theory: Molecular vortices, displacement current and light*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Tipler, P. A., & Moska, G. (2008). *Physics for Scientists and Engineers* (5th ed.). New York, NY: W. H. Freeman and Company.

저 자 정 보

김 재 동 (계성고등학교 교사)

장 태 훈 (경북대학교 대학원생)

하 혜 진 (경북대학교 강사)

손 상 호 (경북대학교 교수)