East Asian Math. J.
Vol. 37 (2021), No. 4, pp. 499-521
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2021.031

삼차방정식에 관한 Omar Khayyām의 기하학적 해법의 재해석과 시각화 - 항이 4개인 삼차방정식의 6가지 -

Reinterpretation and visualization of Omar-Khayyam's geometric solution for the cubic equation - 6 cases of the cubic equation with 4 terms -

김 향 숙 • 김 미 연 • 심 효 정[1] • 박 명 은

ABSTRACT. This research is devoted to investigate Omar Khayyām's geometric solution for the cubic equation using conic sections in the Medieval Islam as a useful alternative connecting logic geometry with analytic geometry at a secondary school. We also introduce Omar Khayyām's 25 cases classification of the cubic equation with all positive coefficients. Moreover we study 6 cases with 4 terms of 25 cubic equations and in particular we reinterpret geometric methods of solving in 2015 secondary Mathematics curriculum and visualize them by means of dynamic geometry software.

I. 연구의 필요성과 목적

2015 개정 고등학교 수학과 교육과정에서 학생들은 수학의 지식을 이해하고 기능을 습득하는 것과 더불어 문제 해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보 처리,

Received June 2, 2021; Revised August 11, 2021; Accepted August 25, 2021.
2010 Mathematics Subject Classification: 11D25, 94B27.
Key words: the cubic equation, Omar Khayyām's geometric solution, conics, reinterpretation, 2015 secondary Mathematics curriculum, visualization, dynamic geometry software.
This work was supported by 2019 Inje University research grant.
1) Corresponding author.

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다([1]).

기하 과목은 다양한 해법이 존재하기에 종합적이고 창의적 문제해결력을 신장시킬 수 있는 좋은 소재가 되지만 우리나라 현행 중등수학 교육과정에서 고등학교 기하 과목은 진로 선택 과목으로 이동하여 선택한 학생들만 접할 수 있다([2]). 그로 인해 진로 과목인 기하를 접하지 않은 학생이 대학교에 진학 후, 이공계 교과목을 배우는 데에 어려움을 겪을 수밖에 없는 실정이다.

기하학은 고대 수학자들이 기호와 더불어 그림을 이용하여 다양한 유형의 시각적 이론과 논리적 해석한 것에서 비롯되었다. 삼차방정식의 해법은 고대 바빌로니아 시대부터 논의됐으며 바빌로니아인들은 찰흙 판을 이용하여 도형 및 측정을 나타내었고, 세제곱의 수표와 세제곱근 표를 참고하여 삼차방정식의 해를 어느 정도의 근사치로 다룰 수 있었으나 삼차방정식을 표준형으로 나타내는 방법은 알 수가 없었다([6]).

중세 이슬람 수학자들은 고대 그리스 수학자들에 의하여 발전되어 온 기하학적 방법론과 원뿔곡선의 개념을 이용하여([3]) 삼차방정식을 기하학적으로 해결하는 방법에 대해 진지하게 연구하였다. 특히 중세 이슬람의 대표적인 시인이자 수학자였던 오마르 하이얌[2](Omar Khayyām)은 삼차방정식을 분류하고 이에 대한 체계적인 기하학적 해법을 제시한 최초의 학자로 볼 수 있다([7]).

Omar Khayyām은 항의 개수와 형태로 삼차방정식을 25가지로 분류하였고, 분류한 25가지는 항이 2개인 방정식 6가지, 항이 3개인 이차방정식 3가지, 항이 3개인 삼차방정식이지만 이차방정식으로 환원되는 것 3가지, 항이 3개인 삼차방정식 6가지, 항이 4개인 삼차방정식으로 3개 항의 합이 네 번째 항과 같은 꼴 4가지, 항이 4개인 삼차방정식으로 2개 항의 합이 남은 2개의 항의 합과 같은 꼴 3가지이다. 그리고 중세 이슬람의 수학자들은 원뿔곡선을 이용하여 삼차방정식의 해를 구하였다([5]).

현행 중등수학 교육과정의 고1 <수학>에서는 삼차방정식을 단순히 인수분해와 조립제법을 이용하여 해를 찾는 것에만 집중하고 있으며, 진로 선택 과목인 <기하>에서 원뿔곡선을 배움에도 불구하고 삼차방정식의 대수적 해법과 논증기하 해법은 연결되지 않고 있다. 따라서 고1 과목 <수학>과 진로 선택 과목 <기하>의 과목 간 연결을 통해 삼차방정식 해를 대수적 방법으로 구하는 것뿐만 아니라, 원뿔곡선을 활용하여 논증 기하 방법으로도 삼차방정식의 해를 구해보는 탐구적 활동이 수학수업에 적극적으로 도입되어야 하고, 나아가 4차 산업

---

2) 오마르 하이얌(عُمَر خَيّام, 1048 ~ 1131)은 중세 페르시아의 수학자 겸 천문학자 겸 시인이다. 본명은 기야소딘 아볼파트흐 오마르 벤 에브라힘 하이얌 네이샤부리(غ ياثالدين ابوالفتح عُمَر بن ابراهيم خَيّام نيشابورى)이다. 중세를 대표하는 수학자로 이차방정식의 기하학적, 대수학적 해법과 삼차방정식의 기하학적 해법을 연구하였다.

혁명 시대에서 점차 강조되는 6가지 수학 교과 역량을 신장시킬 수 있는 좋은 학습 자료 개발이 필요하다.

이러한 필요성에 따라 본 논문은 2015 개정 수학과 교육과정이 강조하는 수학 수업에서 공학 도구의 적극적 활용 방안으로 Omar Khayyām이 분류한 25가지 삼차방정식 중 선행 연구([4], [5], [6], [7])에서 다루지 않은 항이 4개인 삼차방정식 6가지를 동적 기하프로그램으로 작도해보고 원뿔곡선의 그래프를 그려봄으로 그 해를 시각적으로 나타내보는 활동을 제시한다.

즉, 항이 4개인 삼차방정식으로 3개의 항의 합이 네 번째 항과 같은 꼴과 2개의 항의 합이 남은 2개의 항의 합과 같은 꼴을 원뿔곡선으로 나타내고, 이 과정에서 Omar Khayyām이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법의 수학적 가치를 재조명하고 재해석된 증명 과정을 설명하며, 시각화를 위해 수학교육용 소프트웨어 중 동적 기하프로그램을 활용하여 새로운 자료를 개발하고 그것을 이용하여 심화 활동의 기회를 제공한다. 그러므로 컴퓨터 활용 능력과 알고리즘 개발에 능숙한 인재가 더 요구되는 시대적 상황에 맞추어, 수학 교과에서 학생들이 동적 소프트웨어를 활용하여 삼차방정식의 차수를 낮춘 두 원뿔곡선의 연립방정식 교점으로 삼차방정식의 해를 직접 구해보는 경험과 그것을 바탕으로 시각화된 그래프를 그려보는 활동은 주어진 문제를 응용하여 해결하는 능력을 더욱 향상하게 시킬 것이다. 또한, 수학 교과를 배우는 학교 현장에서 과목 간 연결은 물론이고, 수학 개념 간 연결을 학생들에게 자극하는 기회와 자료를 제공하는 것은 현실에서 발생하는 다변적이고 불규칙하며 답이 정해지지 않은 다양한 문제를 해결하는 힘을 키우는 것에 긍정적인 효과를 가져올 것으로 기대한다.

따라서, 현장에서 활용 가능한 시각화 자료로 본 논문이 제시한 원뿔곡선을 이용한 Omar Khayyām의 삼차방정식 해법은 2015 개정 수학과 교육과정의 기하와 대수를 연결하는 새로운 교수·학습 자료의 한 사례가 될 것이다.

II. 연구 내용

고대 그리스 시대부터 이슬람 시대와 중세 시대를 거치면서 많은 수학자는 삼차방정식의 해를 구하기 위하여 노력하였다. 그중에서 삼차방정식을 체계적으로 분류하고, 분류에 따른 모든 유형의 삼차방정식을 풀었던 사람은 Omar Khayyām이 최초라고 볼 수 있다.

Omar Khayyām은 삼차방정식을 아래와 같이 포괄적으로 분류한, 비록 오늘날 기준으로는 삼차방정식의 차수(degree)를 주로 확인하는 정도였을지라도, 최초의 수학자이다([10]).

(a) 항이 2개인 방정식(Omar는 이를 'simple equations'이라 함.):

① $a = x$ ② $a = x^2$ ③ $a = x^3$

④ $bx = x^2$ ⑤ $cx^2 = x^3$ ⑥ $bx = x^3$

(b) 항이 3개인 이차방정식:

⑦ $x^2 + bx = a$ ⑧ $x^2 + a = bx$ ⑨ $x^2 = bx + a$

(c) 항이 3개인 삼차방정식이지만 이차방정식으로 환원되는 것:

⑩ $x^3 + cx^2 = bx$ ⑪ $x^3 + bx = cx^2$ ⑫ $x^3 = cx^2 + bx$

(d) 항이 3개인 삼차방정식:

⑬ $x^3 + bx = a$ ⑭ $x^3 + a = bx$ ⑮ $x^3 = bx + a$

⑯ $x^3 + cx^2 = a$ ⑰ $x^3 + a = cx^2$ ⑱ $x^3 = cx^2 + a$

(e) 항이 4개인 삼차방정식으로 3개의 항의 합이 네 번째 항과 같은 꼴:

⑲ $x^3 + cx^2 + bx = a$ ⑳ $x^3 + cx^2 + a = bx$

㉑ $x^3 + bx + a = cx^2$ ㉒ $cx^2 + bx + a = x^3$

(f) 항이 4개인 삼차방정식으로 2개의 항의 합이 남은 2개의 항의 합과 같은 꼴:

㉓ $x^3 + cx^2 = bx + a$ ㉔ $x^3 + bx = cx^2 + a$ ㉕ $x^3 + a = cx^2 + bx$

중세 이슬람 수학자 Omar Khayyām[3)]이 분류한 위의 25가지 삼차방정식에서 항이 4개인 삼차방정식 ⑲ ~ ㉕의 7가지 중 이미 선행 연구([4])에 의해 재해석되고 시각화된 ㉕를 제외하고 ⑲ ~ ㉔의 6가지를 다룬다. 즉,

1. $x^3 + cx^2 + bx = a$,
2. $x^3 + cx^2 + a = bx$,

3) [9]에는 14개로 축약되어 있고, [6]과 [8]에는 19개로 소개되어 있으며, 더욱이 [9]에는 어떤 원뿔곡선이 이용되었는지도 밝히고 있다.

3. $x^3 + bx + a = cx^2$,
4. $cx^2 + bx + a = x^3$,
5. $x^3 + cx^2 = bx + a$,
6. $x^3 + bx = cx^2 + a$

의 해를 현행 중등수학 교육과정의 용어로 재해석하고 시각화한다. 다시 말하면 Omar Khayyām이 제시한 삼차방정식의 해를 구하는 기하학적 해법으로([11])

1. $x^3 + cx^2 + bx = a$의 쌍곡선과 원의 교점,
2. $x^3 + cx^2 + a = bx$의 쌍곡선과 쌍곡선의 교점,
3. $x^3 + bx + a = cx^2$의 쌍곡선과 원의 교점,
4. $cx^2 + bx + a = x^3$의 쌍곡선과 쌍곡선의 교점,
5. $x^3 + cx^2 = bx + a$의 쌍곡선과 포물선의 교점,
6. $x^3 + bx = cx^2 + a$ 의 쌍곡선과 포물선의 교점

을 시각적으로 표현하기 위해 그 작도 과정을 교사와 학생이 직접 학교 현장에서 실습할 수 있도록 상세하게 설명하고, 원뿔곡선의 성질 및 중등수학의 기하학적 내용을 활용하여 증명 및 역증명을 통해 재해석하였다.

더욱이 현재에는 삼차방정식의 실근과 허근을 모두 구할 수 있고 실근을 시각화할 수 있으므로 본 논문의 작도 과정에서 동적 소프트웨어로 두 원뿔곡선의 교점을 이용하여 실근을 시각화하여 나타내었다. 그러나 Omar Khayyām은 저서 「Algebra」에서 계수가 모두 양인 삼차방정식만의 해를 원뿔곡선으로 구하는 해법에 대해 수록하고 있으며([11]), 음인 해는 고려하지 않고 양인 해만 다루고 있으므로 본 논문에서도 양의 해만 다루기로 한다.[4)]

Ⅲ. 연구 결과

연구 내용에서 제시한 6가지 삼차방정식의 양의 해를 구하는 과정을 **작도**, **증명** 및 **역증명** 의 세 단계로 나누었다.

작도 에서는 주어진 삼차방정식의 해를 두 원뿔곡선의 교점으로 구하기 위해 양

4) 음수를 피한 이유에 대해서는 여러 설이 보이지만, 16세기에도 유럽인들은 방정식의 근으로 나타나는 음수를 '허구(또는 허상)의 수(fictitious number)'라 불렀다. 또한, 중세 이슬람 수학자들은 쌍곡선으로 오늘날과는 달리 잎이 1개인 것만을 취급한 것으로 알려져 있다([11]).

의 계수와 양의 실근만을 다루는 시대적 상황에 따라, Omar Khayyām이 분류한 삼차방정식의 양의 실근이 적어도 하나 존재한다고 가정하고 그 해를 두 원뿔곡선의 교점으로 구하는 기하학적인 해법을 제시하였다. 즉, 동적 기하프로그램을 활용하여 쌍곡선을 그린 후, 그 쌍곡선과 다른 원뿔곡선(원, 포물선, 쌍곡선)의 교점으로 삼차방정식의 해를 시각화한다.

증명 에서는 작도 에서 시각화한 쌍곡선과 다른 원뿔곡선(원, 포물선, 쌍곡선)의 교점 중 제1사분면 위에 있는 것이 주어진 삼차방정식의 양의 실근임을 보인다. 이때, 모든 실근이 시각화 과정에서 나타나지만, 양의 실근만 다룬다.

역증명 에서는 주어진 삼차방정식이 두 원뿔곡선의 방정식을 동시에 만족함을 보인다.
즉, 삼차방정식을 변형하여 비례식으로 표현하고 비와 비례의 성질을 활용하여 삼차방정식의 해가 두 원뿔곡선의 교점으로 구해짐을 보인다.

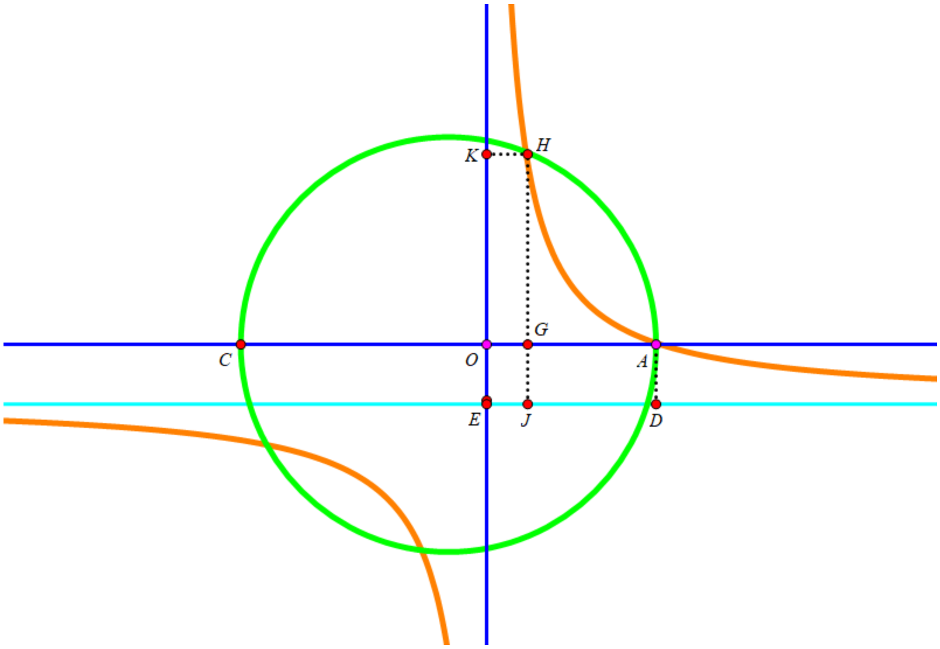
1. $x^3+cx^2+bx=a$의 재해석과 시각화

작도 먼저 삼차방정식의 계수가 모두 양수이므로 $b=\overline{OE}^2$를 만족하는 $\overline{OE}$를 택하여, $a=\overline{OE}^2\cdot\overline{OA}$ 를 만족하는 $\overline{OA}$를 잡아, [그림 1]에서처럼 $\overline{OE}$와 $\overline{OA}$를 수직으로 배열한다. 그리고 $\overline{OA}$의 연장선 위에서 $c=\overline{OC}$를 만족하는 점 C를 택한다. 다음으로 점 A를 지나는 직선 OA의 수선과 점 E를 지나는 직선 OE의 수선과의 교점을 D라 하여, 점 A를 지나고 직선 ED와 EO를 점근선으로 하는 쌍곡선 Σ를 그린다([그림 1] 참조).
이제 방정식 $x^3+cx^2+bx=a$의 양인 실근을 $\overline{OG}$라 하고[5], 점 G에서 세운 직선 OA의 수선이 Σ와의 교점을 H, 직선 ED와의 교점을 J라 한다.
또, 점 H를 지나는 직선 OA의 평행선이 직선 OE와 만나는 점을 K라 한다.
이때 쌍곡선의 성질로부터 $\overline{EJ}\cdot\overline{HJ}=\overline{OE}\cdot\overline{OA}$가 얻어진다. 따라서

$$\overline{GA}\cdot\overline{AD}=\overline{OG}\cdot\overline{HG} \qquad \cdots\cdots\cdots (1\text{-}1)$$

이다.

5) $\overline{OG}<\overline{OA}$ 임을 주어진 방정식으로부터 쉽게 알 수 있다.



[그림 1]

그런데 $\overline{AD} = \overline{OE}$ 이므로 (1-1)은 $\overline{GA} \cdot \overline{OE} = \overline{OG} \cdot \overline{HG}$ 로 변형되며, 따라서

$$\overline{GA} \cdot \overline{OE}^2 = \overline{OE} \cdot \overline{OG} \cdot \overline{HG} \qquad \cdots\cdots\cdots (1\text{-}2)$$

가 얻어진다. 한편 $\overline{OG}$ 는 주어진 방정식의 근이므로

$$\overline{OG}^3 + \overline{OC} \cdot \overline{OG}^2 + \overline{OE}^2 \cdot \overline{OG} = \overline{OE}^2 \cdot \overline{OA}$$

이 성립한다. 그러므로

$$\overline{OG}^2 \cdot \overline{GC} = \overline{OE}^2 \cdot \overline{GA} \qquad \cdots\cdots\cdots (1\text{-}3)$$

이며, 이를 (1-2)에 대입함으로써 $\overline{OG} \cdot \overline{GC} = \overline{OE} \cdot \overline{HG}$ 가 얻어진다.

따라서 $\overline{OG} \cdot \overline{GC} \cdot \overline{HG} = \overline{OE} \cdot \overline{HG}^2$ 이므로, 이 등식에 (1-1)을 대입하면

$$\overline{HG}^2 = \overline{GA} \cdot \overline{GC} \qquad \cdots\cdots\cdots (1\text{-}4)$$

를 얻을 수 있으며, 이는 직각삼각형에 관한 유클리드 정리에 의해 점 H 가 $\overline{CA}$ 를 지름으로 하는 원 Θ 위에도 놓여있음을 말하고 있다.

이상으로부터 삼차방정식 $x^3 + cx^2 + bx = a$의 해는 [그림 1]에서와 같은 쌍곡선 Σ 와 원 Θ 와의 교점의 x 좌표로 구할 수 있다. (단, Σ 와 Θ 와의 교점 A 의 x 좌표는 해가 아니다.)

$\boxed{\text{증명}}$ 양의 실근만을 다루므로 [그림 1]과 같은 쌍곡선 Σ와 원 Θ를 그려 그 교점 중 제1사분면의 점을 H라 한다. 직선 OE에 평행하고 점 H를 지나는 직선이 직선 OA, 직선 ED와 각각 만나는 점을 차례로 G, J라 하고, 또 점 H를 지나고 직선 OA에 평행한 직선이 직선 OE와 만나는 점을 K라 한다. 이때 점 H는 쌍곡선 위에 놓여있으므로 (1-1)과 (1-2)가 성립한다. 한편 점 H는 원 Θ 위에도 놓여있으므로 (1-4)도 성립한다.

따라서 $\overline{OE}\cdot\overline{GA}\cdot\overline{GC} = \overline{OE}\cdot\overline{HG}^2$이며, 이 등식에 (1-1)을 대입하면 $\overline{OG}\cdot\overline{GC} = \overline{OE}\cdot\overline{HG}$이다. 그러므로 (1-2)로부터 (1-3)을 얻을 수 있다. 그런데 $\overline{GC} = \overline{OG} + \overline{OC}$, $\overline{GA} = \overline{OA} - \overline{OG}$ 이므로, 이를 (1-3)에 대입하면 $\overline{OG}^2\cdot(\overline{OG}+\overline{OC}) = \overline{OE}^2\cdot(\overline{OA}-\overline{OG})$이다. 다시 말해서

$$\overline{OG}^3 + \overline{OC}\cdot\overline{OG}^2 + \overline{OE}^2\cdot\overline{OG} = \overline{OE}^2\cdot\overline{OA}$$

이며, 따라서 $\overline{OG}$는 삼차방정식 $x^3+cx^2+bx=a$의 양인 해이다.

$\boxed{\text{역증명}}$ 삼차방정식 $x^3+cx^2+bx=a$의 양의 계수 a,b를 각각 $\boxed{\text{작도}}$ 과정에 따라 m^2w, m^2으로 잡으면, 방정식 $x^3+cx^2+m^2x=m^2w$로 변형된다.

$$x^2(x+c) = m^2(w-x),\ \text{즉},\ \frac{x^2}{m^2} = \frac{w-x}{x+c},$$

$$\text{즉},\ x^2 : m^2 = (w-x) : (x+c)$$

가 얻어지므로

$$(x:m)\cdot(x:m) = ((w-x):y)\cdot(y:(x+c))$$

이 성립하고,

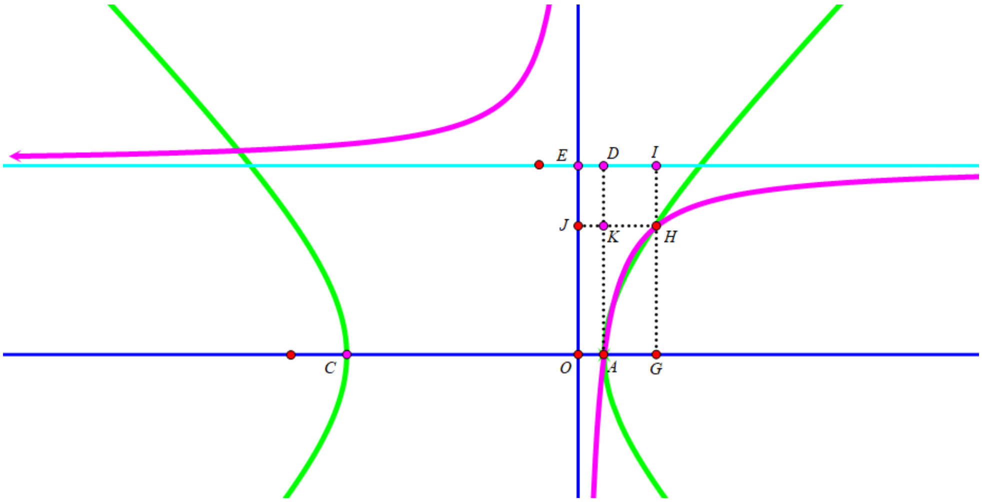
$$x:m = (w-x):y = y:(x+c)$$

이다. 따라서, 주어진 삼차방정식의 해 x는 쌍곡선 $x(y+m)=mw$과 원 $(x-w)(x+c)+y^2=0$을 동시에 만족하므로, 쌍곡선과 원의 교점의 x좌표이다. 또한, 그 역도 성립한다.

2. $x^3+cx^2+a=bx$의 재해석과 시각화

$\boxed{\text{작도}}$ 먼저 $b=\overline{OE}^2$를 만족하는 $\overline{OE}$를 택하여, $a=\overline{OE}^2\cdot\overline{OA}$ 를 만족하는 $\overline{OA}$를 잡아, [그림 2]에서처럼 $\overline{OE}$와 $\overline{OA}$를 수직으로 배열한다. 그리고 $\overline{OA}$의

연장선 위에서 $c = \overline{OC}$를 만족하는 점 C를 택한다. 다음으로 점 A를 지나는 직선 OA의 수선과 점 E를 지나는 직선 OE의 수선과의 교점을 D라 하여, 점 A를 지나고 직선 ED와 EO를 점근선으로 하는 쌍곡선 Σ_1을 그린다([그림 2] 참조).



[그림 2]

이제 방정식 $x^3 + cx^2 + a = bx$의 양인 실근을 $\overline{OG}$라 하여, 점 G에서 세운 직선 OA의 수선이 Σ_1과 만나는 점을 H, 점근선 ED와 만나는 점을 I라 한다. 또, 점 H를 지나는 직선 OA의 평행선과 직선 OE와의 교점을 J라 한다.

이때 쌍곡선의 성질로부터 $\overline{HJ} \cdot \overline{HI} = \overline{OA} \cdot \overline{OE}$가 얻어지므로
$\overline{HK} \cdot \overline{HI} = \overline{OA} \cdot \overline{OJ}$이다.

그런데 $\overline{HK} = \overline{GA}$, $\overline{OJ} = \overline{GH}$, $\overline{HI} = \overline{JE} = \overline{OE} - \overline{GH}$ 이므로,
$\overline{AG} \cdot (\overline{OE} - \overline{HG}) = (\overline{OG} - \overline{AG}) \cdot \overline{HG}$, 즉 $\overline{AG} \cdot \overline{OE} = \overline{OG} \cdot \overline{HG}$이다.
따라서

$$\overline{AG}^2 \cdot \overline{OE}^2 = \overline{OG}^2 \cdot \overline{HG}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (2\text{-}1)$$

이 성립한다. 한편 $\overline{OG}$는 주어진 삼차방정식의 해이므로

$$\overline{OG}^3 + \overline{OC} \cdot \overline{OG}^2 + \overline{OE}^2 \cdot \overline{OA} = \overline{OE}^2 \cdot \overline{OG} \qquad \cdots\cdots\cdots (2\text{-}2)$$

이다.

따라서 $\overline{OG}^2(\overline{OE} + \overline{OG}) = \overline{OE}^2(\overline{OG} - \overline{OA})$, 즉 $\overline{OG}^2 \cdot \overline{CG} = \overline{OE}^2 \cdot \overline{AG}$

이므로 $\overline{OG}^2 = \dfrac{\overline{OE}^2 \cdot \overline{AG}}{\overline{CG}}$ 이다. 이 등식을 (2-1)에 대입하여

$$\overline{AG} \cdot \overline{CG} = \overline{HG}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (2\text{-}3)$$

를 얻을 수 있으며, 이를 고쳐 나타내면 $\overline{AG} \cdot (\overline{CA} + \overline{AG}) = \overline{HG}^2$ 이다.

이로부터 점 H 는 횡단 변이 $\overline{CA}$ 이고, 매개변수가 $\overline{CA}$ 인 직각쌍곡선 Σ_2 위에도 놓여있음을 알 수 있다([그림 2] 참조).

이상으로부터 삼차방정식 $x^3 + cx^2 + a = bx$ 의 양인 해는 그림 (2-1)에서와 같은 쌍곡선 Σ_1 과 Σ_2 의 교점의 x 좌표로 구할 수 있다. (단, Σ_1 과 Σ_2 의 교점 A 의 x 좌표는 해가 아니다.)

증명 [그림 2]에서처럼 쌍곡선 Σ_1 과 Σ_2 의 교점을 H 라 하면, (2-1)과 (2-3)이 성립한다. (2-3)을 (2-1)에 대입하면

$$\overline{AG}^2 \cdot \overline{OE}^2 = \overline{OG}^2 \cdot (\overline{AG} \cdot \overline{CG}),$$

$$\text{즉, } \overline{OG}^2 \cdot \overline{CG} = \overline{OE}^2 \cdot \overline{AG}$$

이다. 따라서 $\overline{OG}^2 \cdot (\overline{OC} + \overline{OG}) = \overline{OE}^2 \cdot (\overline{OG} - \overline{OA})$ 이며, 다시 말해서 (2-2)를 얻을 수 있다. 이로써 $\overline{OG}$ 는 주어진 삼차방정식 $x^3 + cx^2 + a = bx$ 의 양인 해임을 알 수 있다.

역증명 삼차방정식 $x^3 + cx^2 + a = bx$ 를 방정식 $x^3 + cx^2 + m^2 w = m^2 x$ 로 표현하면

$$x^2 (x + c) = m^2 (x - w),\ \text{즉, } \frac{x^2}{m^2} = \frac{(x - w)}{(x + c)},$$

$$\text{즉} \quad x^2 : m^2 = (x - w) : (x + c)$$

를 얻을 수 있으므로

$$(x : m) \cdot (x : m) = ((x - w) : y) \cdot (y : (x + c))$$

가 성립한다. 따라서

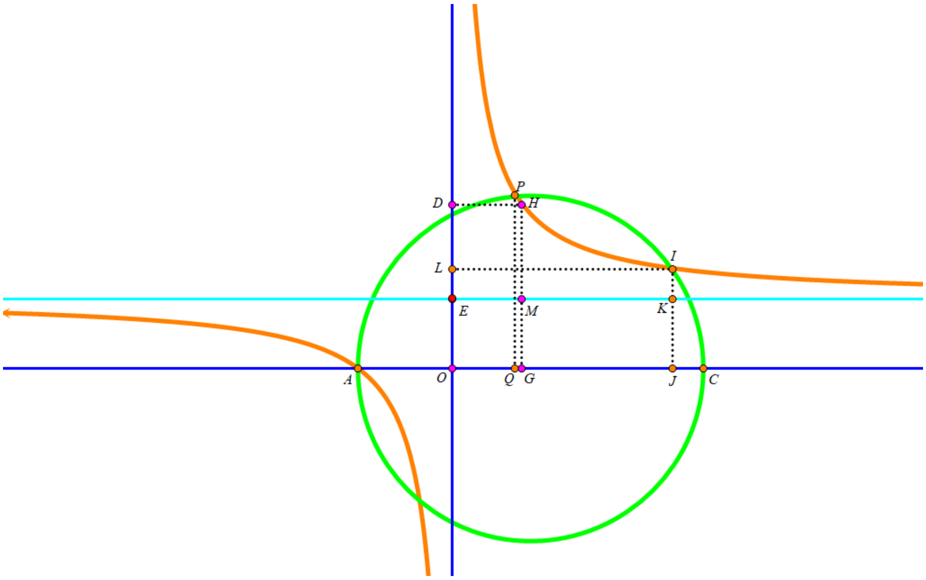
$$x : m = (x - w) : y = y : (x + c)$$

이며,

이로부터 주어진 삼차방정식의 해 x는 쌍곡선 $\left(x + \frac{c - w}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{c + w}{2}\right)^2$ 과 쌍곡선 $x(m - y) = mw$ 을 동시에 만족하므로 쌍곡선과 쌍곡선의 교점의 x 좌표이다. 또한, 그 역도 성립한다.

3. $x^3 + bx + a = cx^2$ 의 재해석과 시각화

$\boxed{\text{작도}}$ 먼저 $b = \overline{OE}^2$ 를 만족하는 $\overline{OE}$ 를 택하여, $\overline{OE}$ 의 연장선 위에서 $a = \overline{OE}^2 \cdot \overline{ED}$ 를 만족하는 $\overline{ED}$ 를 잡아, [그림 3-1]에서처럼 정사각형 $EOGM$ 을 긋는다. 그리고 $c = \overline{OC}$ 라 하고, $\overline{OG}$ 의 연장선 위에서 $\overline{AO} = \overline{ED}$ 를 만족하는 점 A 를 택한다. 다음으로 점 D 를 지나는 직선 OD 의 수선과 점 G 를 지나는 직선 OG 의 수선과의 교점을 H 라 하여, 점 H 를 지나고 직선 EM 과 ED 를 점근선으로 하는 쌍곡선 Σ 를 그린다([그림 3] 참조).



[그림 3]

이제 방정식 $x^3 + bx + a = cx^2$ 의 양인 실근을 $\overline{OJ}$ 라 하고, 점 J 에서 세운 직선 OG 의 수선이 Σ 와의 교점을 I 라하고, 직선 EM 과의 교점은 K 라 한다. 또, 점 I 를 지나는 직선 OG 의 평행선이 직선 OD 와 만나는 점을 L 이라 한다. 이때 쌍곡선의 성질로부터

$$\overline{EK} \cdot \overline{IK} = \overline{EM} \cdot \overline{HM} \qquad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}1)$$

가 얻어진다. 그런데 $\overline{OJ}$ 는 방정식의 근이므로

$$\overline{OJ}^3 + \overline{OE}^2 \cdot \overline{OJ} + \overline{OE}^2 \cdot \overline{ED} = \overline{OC} \cdot \overline{OJ}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}2)$$

이 성립한다.

한편 $\overline{AO} = \overline{DE} = \overline{HM}$, $\overline{OG} = \overline{OE} = \overline{EM}$ 이므로, 이 등식을 (3-1)에 대입함으로써

$$\overline{EK} \cdot \overline{IK} = \overline{OE} \cdot \overline{AO} \qquad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}3)$$

를 얻을 수 있다. 그러므로 등식 $\overline{OJ} \cdot \overline{IJ} = \overline{EK} \cdot \overline{OE} + \overline{EK} \cdot \overline{IK}$ 에 (3-3)을 대입하면 $\overline{EK} = \overline{OJ}$ 이므로

$$\overline{OJ}^2 \cdot \overline{IJ}^2 = \overline{AJ}^2 \cdot \overline{OE}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}4)$$

이 성립한다. 그런데 등식 (3-2)는

$$\overline{OE}^2 \cdot \overline{AJ} = \overline{JC} \cdot \overline{OJ}^2 \text{ 6)} \qquad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}5)$$

로 변형되므로, (3-4)의 양변에 $\overline{JC}$ 를 곱해서 (3-5)를 대입하여

$$\overline{IJ}^2 = \overline{AJ} \cdot \overline{JC} \qquad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}6)$$

를 쉽게 얻을 수 있다. 이는 직각삼각형에 관한 유클리드 정리에 의해 점 I 가 $\overline{AC}$ 를 지름으로 하는 원 Θ 위에도 놓여있음을 말하고 있다.

이상으로부터 삼차방정식 $x^3 + bx + a = cx^2$ 의 해는 [그림 3]에서와 같은 쌍곡선 Σ 와 원 Θ 와의 교점의 x 좌표 구할 수 있다. (단, Σ 와 Θ 와의 교점 A 의 x 좌표는 해가 아니다.)

증명 먼저 점 H, I 는 둘 다 쌍곡선 Σ 위에 놓여있으므로 (3-1)이 성립한다. 따라서 (3-3)을 얻을 수 있으며, 앞에서와 똑같은 방법으로 (3-4)를 얻을 수 있다. 한편 점 I 는 원 Θ 위에도 놓여있으므로 (3-6)이 성립하므로 이를 (3-4)에 대입함으로써

$$\overline{OJ}^2 \cdot \overline{JC} = \overline{AJ} \cdot \overline{OE}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}7)$$

를 얻을 수 있다. 그런데 $\overline{AJ} = \overline{AO} + \overline{OJ}$, $\overline{JC} = \overline{OC} - \overline{OJ}$ 이므로 (3-7)은

$$\overline{OE}^2 \cdot (\overline{OJ} + \overline{AO}) = \overline{OJ}^2 \cdot (\overline{OC} - \overline{OJ})$$

이며, 더욱이 $\overline{AO} = \overline{ED}$ 이므로

$$\overline{OJ}^3 + \overline{OE}^2 \cdot \overline{OJ} + \overline{OE}^2 \cdot \overline{ED} = \overline{OC} \cdot \overline{OJ}^2$$

으로 변형된다. 따라서 $\overline{OJ}$ 는 삼차방정식 $x^3 + bx + a = cx^2$ 의 양인 해이다.

쌍곡선 Σ 와 원 Θ 와의 또 다른 교점 P 에서 직선 OG 에 내린 수선의 발을 Q 라 할 때, 똑같은 방법으로 $\overline{OQ}$ 도 주어진 삼차방정식의 양인 해임을 보일 수 있다.

---

6) 주어진 삼차방정식으로부터 $\overline{OJ} < \overline{OC}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

역증명 삼차방정식 $x^3+bx+a=cx^2$를 방정식 $x^3+m^2x+m^2w=cx^2$로 표현하면

$$x^2(c-x)=m^2(x+w),\ \text{즉},\ \frac{x^2}{m^2}=\frac{(x+w)}{(c-x)},$$

$$\text{즉},\ x^2 : m^2=(x+w) : (c-x)$$

를 얻을 수 있으므로

$$(x : m)\cdot(x : m)=((x+w) : y)\cdot(y : (c-x))$$

가 성립한다. 따라서

$$x : m=(x+w) : y=y : (c-x)$$

이며, 이로부터 주어진 삼차방정식의 해 x는 쌍곡선 $x(y-m)=mw$과 원 $(x+w)(x-c)+y^2=0$을 동시에 만족하므로 쌍곡선과 원의 교점의 x좌표이다. 또한, 그 역도 성립한다.

4. $cx^2+bx+a=x^3$의 재해석과 시각화

작도 먼저 $b=\overline{OE}^2$를 만족하는 $\overline{OE}$를 택하여, $\overline{OE}$의 연장선 위에서 $a=\overline{OE}^2\cdot\overline{ED}$ 를 만족하는 $\overline{ED}$를 잡아, [그림 4]에서처럼 정사각형 $EOFG$을 긋는다. 그리고 $c=\overline{OC}$라 하고, $\overline{OF}$의 연장선 위에서 $\overline{AO}=\overline{DE}$를 만족하는 점 A를 택한다. 다음으로 점 D를 지나는 직선 OD의 수선과 점 F를 지나는 직선 OF의 수선과의 교점을 H라 하여, 점 H를 지나고 직선 EG와 ED를 점근선으로 하는 쌍곡선 Σ_1을 그린다([그림 4] 참조).

이제 방정식 $cx^2+bx+a=x^3$의 양인 실근을 $\overline{OL}$이라 하고[7], 점 L에서 세운 직선 OF의 수선이 Σ_1과의 교점을 M라 하고, 직선 EG와의 교점은 K라 한다. 또, 점 M을 지나는 직선 OL의 평행선이 직선 OD와 만나는 점을 N이라 한다.

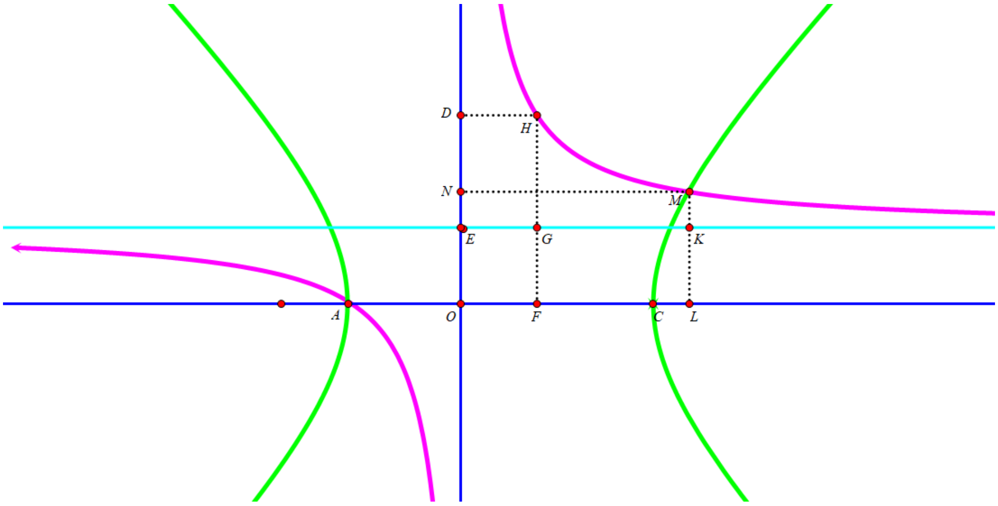
이때 쌍곡선의 성질로부터

$$\overline{EK}\cdot\overline{EN}=\overline{EG}\cdot\overline{ED} \qquad \cdots\cdots\cdots (4\text{-}1)$$

가 얻어진다.

---

7) $\overline{OL}>\overline{OC}$임을 주어진 삼차방정식으로부터 쉽게 알 수 있다.



[그림 4]

그런데 $\overline{EG} = \overline{OE}$, $\overline{ED} = \overline{AO}$이므로 $\overline{EK} \cdot \overline{EN} = \overline{AO} \cdot \overline{OE}$ 이며, 더욱이 $\overline{OL} \cdot \overline{LM} = \overline{AL} \cdot \overline{OE}$,

$$\text{즉 } \overline{OL}^2 \cdot \overline{LM}^2 = \overline{AL}^2 \cdot \overline{OE}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (4\text{-}2)$$

이다. 한편 $\overline{OL}$ 은 주어진 방정식의 근이므로

$$\overline{OL}^3 = \overline{OC} \cdot \overline{OL}^2 + \overline{OE}^2 \cdot \overline{OL} + \overline{OE}^2 \cdot \overline{ED} \qquad \cdots\cdots\cdots (4\text{-}3)$$

이다. 그러므로

$$\overline{OL}^2 \cdot \overline{CL} = \overline{OE}^2 \cdot \overline{AL} \qquad \cdots\cdots\cdots (4\text{-}4)$$

이다. 이 식의 양변에 $\overline{AL}$ 을 곱해서 (4-2)에 대입하면

$$\overline{LM}^2 = \overline{AL} \cdot \overline{CL} = \overline{CL} \cdot (\overline{AC} + \overline{CL}) \qquad \cdots\cdots\cdots (4\text{-}5)$$

이며, 이는 점 M 이 $\overline{AC}$ 를 횡단변, $\overline{AC}$ 를 매개변수로 하는 직각쌍곡선 Σ_2 위에 놓여있음을 말하고 있다([그림 4] 참조).

이상으로부터 삼차방정식 $cx^2 + bx + a = x^3$의 해는 [그림 4]에서와 같은 쌍곡선 Σ_1 과 Σ_2 의 교점의 x 좌표로 구할 수 있다. (단, Σ_1 과 Σ_2 의 교점 A 의 x 좌표는 해가 아니다.)

증명 [그림 4]에서처럼 쌍곡선 Σ_1 과 Σ_2 의 교점을 M 이라 하면, (4-1)과 (4-5)가 성립한다. 그러므로 (4-2)도 성립한다. (4-5)를 (4-2)에 대입하여 (4-4)를

얻을 수 있으며, 여기에 등식

$$\overline{CL} = \overline{OL} - \overline{OC}\,,\ \overline{AL} = \overline{OA} + \overline{OL}$$

를 대입하면

$$\overline{OL}^2 \cdot (\overline{OL} - \overline{OC}) = \overline{OE}^2 \cdot (\overline{OA} + \overline{OL})$$

이다.

다시 말해서 (4-3)이 성립한다. 따라서 $\overline{OL}$ 은 주어진 삼차방정식의 해이다.

역증명 삼차방정식 $x^3 + bx + a = cx^2$ 를 방정식 $x^3 + m^2x + m^2w = cx^2$ 로 표현하면

$$x^2(c-x) = m^2(x+w),\ 즉,\ \frac{x^2}{m^2} = \frac{(x+w)}{(c-x)},$$

$$즉,\ x^2 : m^2 = (x+w) : (c-x)$$

를 얻을 수 있으므로

$$(x : m) \cdot (x : m) = ((x+w) : y) \cdot (y : (c-x))$$

가 성립한다. 따라서

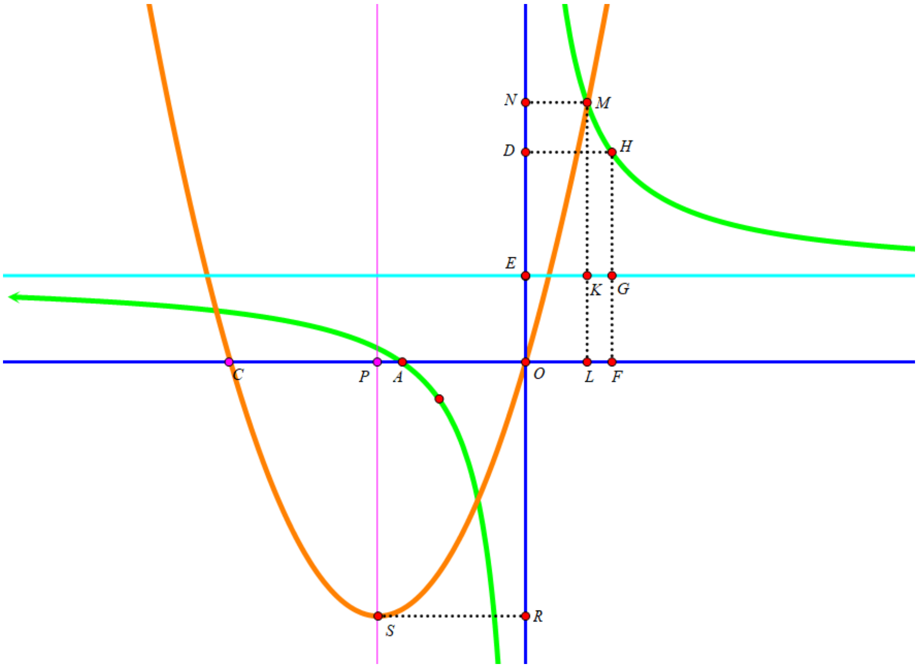
$$x : m = (x+w) : y = y : (c-x)$$

이며, 이로부터 주어진 삼차방정식의 해 x는 쌍곡선 $x(y-m) = mw$ 과 쌍곡선 $\left(x - \frac{c-w}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{c+w}{2}\right)^2$ 을 동시에 만족하므로 쌍곡선과 쌍곡선의 교점의 x좌표이다. 또한, 그 역도 성립한다.

5. $x^3 + cx^2 = bx + a$의 재해석과 시각화

작도 먼저 $b = \overline{OE}^2$ 을 만족하는 $\overline{OE}$ 를 택하여, $\overline{OE}$ 의 연장선 위에서 $a = \overline{OE}^2 \cdot \overline{ED}$ 를 만족하는 $\overline{ED}$ 를 잡아, [그림 5]에서처럼 정사각형 $EOFG$ 을 긋는다. 그리고 $c = \overline{OC}$ 라 하고, $\overline{OF}$ 의 연장선 위에서 $\overline{AO} = \overline{DE}$ 를 만족하는 점 A 를 택한다. 다음으로 점 D 를 지나는 직선 OD 의 수선과 점 F 를 지나는 직선 OF 의 수선과의 교점을 H 라 하여, 점 H 를 지나고 직선 EG 와 ED 를 점근선으로 하는 쌍곡선 Σ을 그린다([그림 5] 참조).

이제 방정식 $x^3 + cx^2 = bx + a$의 양인 실근을 $\overline{OL}$ 이라 하고, 점 L 에서 세운 직선 OF 의 수선과 Σ과의 교점을 M 라하고, 직선 EG 와의 교점은 K 라 한다.



[그림 5]

또, 점 M 을 지나는 직선 OF 의 평행선이 직선 OD 와 만나는 점을 N 이라 한다. 이때 쌍곡선의 성질로부터

$$\overline{EK} \cdot \overline{EN} = \overline{EG} \cdot \overline{ED} \qquad \cdots\cdots\cdots (5\text{-}1)$$

가 얻어진다. 그런데 $\overline{AO} = \overline{ED}$, $\overline{EG} = \overline{OE}$ 이므로 $\overline{EK} \cdot \overline{EN} = \overline{AO} \cdot \overline{OE}$ 이며, 더욱이

$$\overline{OL} \cdot \overline{LM} = \overline{AL} \cdot \overline{OE} \qquad \cdots\cdots\cdots (5\text{-}2)$$

이다. 한편 $\overline{OL}$ 은 주어진 방정식의 근이므로

$$\overline{OL}^3 + \overline{OC} \cdot \overline{OL}^2 = \overline{OE}^2 \cdot \overline{OL} + \overline{OE}^2 \cdot \overline{ED} \qquad \cdots\cdots\cdots (5\text{-}3)$$

이다. 그러므로

$$\overline{OL}^2 \cdot \overline{CL} = \overline{OE}^2 \cdot \overline{AL} \qquad \cdots\cdots\cdots (5\text{-}4)$$

이다. (5-2)를 (5-4)에 대입하면

$$\overline{OL} \cdot \overline{CL} = \overline{OE} \cdot \overline{LM} \qquad \cdots\cdots\cdots (5\text{-}5)$$

이며, 또, $\overline{CL} = \overline{OL} + \overline{OC}$ 이므로 (5-5)를

$$\overline{OL}^2 + \overline{OL} \cdot \overline{OC} = \overline{OE} \cdot \overline{LM} \qquad \cdots\cdots\cdots (5\text{-}6)$$

으로 고쳐 쓸 수 있다. 다시 말해서

$$\left(\overline{OL} + \frac{\overline{OC}}{2}\right)^2 = \overline{OE} \cdot \left(\overline{LM} + \frac{\overline{OC}^2}{4\,\overline{OE}}\right)$$

을 얻을 수 있다. 따라서 점 M은 점 S를 꼭짓점으로 하고 직선 PS를 (대칭)축, $\overline{OE}$를 매개변수로 하는 포물선 Γ위에 놓여있음을 알 수 있다. 단, 점 P는 $\overline{OC}$의 중점이고, 점 S는 다음과 같이 택한 것이다. 직선 OE위에 놓인 점으로 $\overline{OC}^2 = 4\,\overline{OE} \cdot \overline{OR}$을 만족하는 것을 R이라 할 때, 점 R을 지나는 직선 OC의 평행선과 점 P에서 세운 직선 OC의 수선과의 교점이 S이다([그림 5] 참조).

이상으로부터 삼차방정식 $x^3 + cx^2 = bx + a$의 해는 [그림 5]에서와 같은 쌍곡선 Σ과 포물선 Γ의 교점의 x좌표로 구할 수 있다.

증명 [그림 5]에 보이는 교점 M에 대해서 먼저 살펴보기로 한다. 점 M은 쌍곡선 Σ과 포물선 Γ위에 놓여있으므로 (5-2)와 (5-6)이 성립한다. (5-6)의 양변에 $\overline{OL}$을 곱하면

$$\overline{OL}^3 + \overline{OL}^2 \cdot \overline{OC} = \overline{OL} \cdot \overline{OE} \cdot \overline{LM}$$

이며, 이 등식에 (5-2)를 대입함으로써

$$\overline{OL}^3 + \overline{OL}^2 \cdot \overline{OC} = \overline{AL} \cdot \overline{OE}^2$$

을 얻을 수 있다. 그런데 $\overline{AL} = \overline{OL} + \overline{OA}$, $\overline{OA} = \overline{ED}$이므로 (5-3)이 성립함을, 다시 말해서 $\overline{OL}$은 주어진 삼차방정식의 양인 해임을 알 수 있다.

역증명 삼차방정식 $x^3 + cx^2 = bx + a$를 방정식 $x^3 + cx^2 = m^2x + m^2w$로 표현하면

$$x^2(x+c) = m^2(x+w)\,,\ 즉,\ \frac{x^2}{m^2} = \frac{(w+x)}{(x+c)}\,,$$

$$즉,\ x^2 : m^2 = (x+w) : (x+c)$$

를 얻을 수 있으므로

$$(x : m)\cdot(x : m) = ((x+w) : y)\cdot(y : (x+c))$$

가 성립한다. 따라서

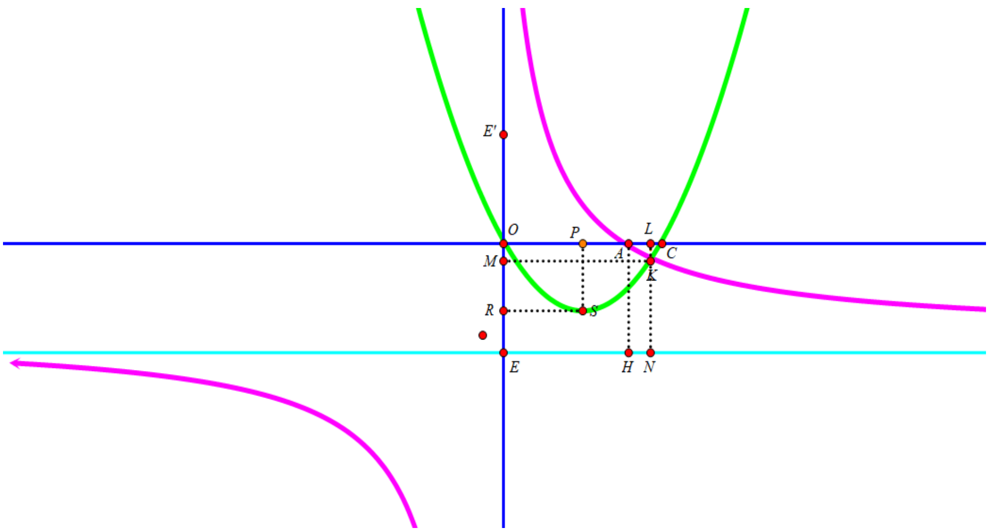
$$x : m = (x+w) : y = y : (x+c)$$

이며, 이로부터 주어진 삼차방정식의 해는 포물선 $\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 = m\left(y + \frac{c^2}{4m}\right)$과 쌍

곡선 $x(y-m) = mw$ 을 동시에 만족하므로 포물선과 쌍곡선의 교점의 x 좌표이다. 또한, 그 역도 성립한다.

6. $x^3 + bx = cx^2 + a$ 의 재해석과 시각화

작도 먼저 $b = \overline{OE}^2$ 을 만족하는 $\overline{OE}$ 를 택하여, $a = \overline{OE}^2 \cdot \overline{OA}$ 를 만족하는 $\overline{OA}$ 를 잡아, [그림 6]에서처럼 $\overline{OE}$ 와 $\overline{OA}$ 를 수직 되게 긋는다. 그리고 $c = \overline{OC}$ 라 하여 $\overline{OA}$ 의 연장선 위에서 점 C 를 택한다. 다음으로 점 A 에서 세운 직선 OA 의 수선과 점 E 를 지나는 직선 OA 의 평행선과의 교점을 H 라 한다. 이때 점 A 를 지나고 직선 EH 와 직선 EO 를 점근선으로 하는 쌍곡선 Σ을 그린다([그림 6] 참조).



[그림 6]

이제 방정식 $x^3 + bx = cx^2 + a$ 의 양인 실근을 $\overline{OL}$ 이라 하고, 점 L 에서 세운 직선 OA 의 수선과 Σ과의 교점을 K 라 하고, 직선 EH 와의 교점은 N 라 한다. 또, 점 K 를 지나는 직선 OA 의 평행선이 직선 OE 와 만나는 점을 M 이라 한다. 더욱이 $\overline{OC}$ 의 중점을 P 라 하고, 점 S 는 다음과 같이 택한다. 직선 OE 위에 놓인 점으로 $\overline{OC}^2 = 4\overline{OE} \cdot \overline{OR}$ 을 만족하는 것을 R 이라 할 때, 점 R 을 지나는 직선 OA 의 평행선과 점 P 에서 세운 직선 OC 의 수선과의 교점을 S 라 한다.

이때 쌍곡선의 성질로부터

$$\overline{OA} \cdot \overline{OE} = \overline{OL} \cdot \overline{ME} \qquad \cdots\cdots\cdots (6\text{-}1)$$

가 얻어진다. 한편 $\overline{OL}$ 은 주어진 방정식의 해이므로

$$\overline{OL}^3 + \overline{OE}^2 \cdot \overline{OL} = \overline{OC} \cdot \overline{OL}^2 + \overline{OE}^2 \cdot \overline{OA} \qquad \cdots\cdots\cdots (6\text{-}2)$$

가 성립하며, 이 등식에 (6-1)을 대입하면

$$\overline{OL}^2 + \overline{OE}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OL} + \overline{OE} \cdot \overline{ME} \qquad \cdots\cdots\cdots (6\text{-}3)$$

를 얻을 수 있다. 그러므로

$$\left(\overline{OL} - \frac{\overline{OC}}{2}\right)^2 = \overline{OE} \cdot \left\{\frac{\overline{OC}^2}{4\overline{OE}} - (\overline{OE} - \overline{ME})\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots (6\text{-}4)$$

이다. 그런데

$$\overline{MR} = \overline{PS} - \overline{OM} = \overline{PS} - (\overline{OE} - \overline{ME}), \quad \overline{PS} = \frac{\overline{OC}^2}{4\overline{OE}}$$

이므로 (6-4)는

$$\left(\overline{OL} - \frac{\overline{OC}}{2}\right)^2 = \overline{OE} \cdot \overline{MR} \qquad \cdots\cdots\cdots (6\text{-}5)$$

로 변형되며, 이로부터 점 K 는 점 S 를 꼭짓점으로 하고 직선 PS 를 (대칭)축, $\overline{OE}$ 를 매개변수로 하는 포물선 Γ 위에 놓여있음을 알 수 있다.

이상으로부터 삼차방정식 $x^3 + bx = cx^2 + a$의 해는 [그림 6]에서와 같은 쌍곡선 Σ 과 포물선 Γ 의 교점의 x 좌표로 구할 수 있다.

증명 [그림 6]에서와 같은 쌍곡선 Σ_1 과 포물선 Γ 의 교점을 K 라 하면, (6-1)과 (6-5)가 성립한다. 따라서 (6-3)도 성립한다. (6-3)의 양변에 $\overline{OL}$ 을 곱해서 (6-1)을 대입하면 (6-2)가 성립함을 쉽게 알 수 있다. 다시 말해서 $\overline{OL}$ 은 주어진 삼차방정식의 해이다.

역증명 삼차방정식 $x^3 + bx = cx^2 + a$를 방정식 $x^3 + m^2 x = cx^2 + m^2 w$ 로 표현하면

$$x^2(x-c) = m^2(w-x), \text{ 즉, } \frac{x^2}{m^2} = \frac{(w-x)}{(x-c)},$$

$$\text{즉, } x^2 : m^2 = (w-x) : (x-c)$$

를 얻을 수 있으므로

$$(x : m) \cdot (x : m) = ((w-x) : y) \cdot (y : (x-c))$$

가 성립한다. 따라서

$$x : m = (w-x) : y = y : (x-c)$$

이며, 이로부터 주어진 삼차방정식의 해는 쌍곡선 $x(y+m) = mw$과 포물선 $\left(x-\frac{c}{2}\right)^2 = m\left(y+\frac{c^2}{4m}\right)$을 동시에 만족하므로 쌍곡선과 포물선의 교점의 x좌표이다. 또한, 그 역도 성립한다.

Ⅳ. 결론 및 제언

2015 개정 수학과 교육과정에서는 지식을 이해하고 기능을 습득하는 것과 더불어 문제 해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다고 제시하고 있다([1]). 6가지 수학 교과 역량을 함양시키기 위해 본 논문은 Omar Khayyām이 분류한 계수가 모두 양인 삼차방정식 25가지 중 항이 4개인 삼차방정식으로 6가지를 선택하여 원뿔곡선의 교점으로 양의 해를 구할 수 있다는 것을 재해석하고 공학적인 도구로 시각화하였다.

즉
첫째, $x^3+cx^2+bx = a$를 작도, 증명, 역증명의 과정을 통해 재해석하고 시각화,
둘째, $x^3+cx^2+a = bx$를 작도, 증명, 역증명의 과정을 통해 재해석하고 시각화,
셋째, $x^3+bx+a = cx^2$를 작도, 증명, 역증명의 과정을 통해 재해석하고 시각화,
넷째, $cx^2+bx+a = x^3$를 작도, 증명, 역증명의 과정을 통해 재해석하고 시각화,
다섯째, $x^3+cx^2 = bx+a$를 작도, 증명, 역증명의 과정을 통해 재해석하고 시각화,
여섯째, $x^3+bx = cx^2+a$를 작도, 증명, 역증명의 과정을 통해 재해석하고 시각화 하였다.

결론적으로
첫째, 문제 해결과 추론 역량을 키우기 위해 Omar Khayyām이 분류한 삼차방정식 25가지 중 6가지를 선별하여 학습자가 연구하고 분석할 수 있도록 중등 수학의 기하 내용의 유클리드 기하, 원뿔곡선의 성질과 비와 비례를 이용하여 논증 기하 해법을 제시하였고,

둘째, 하나의 문제를 여러 가지 방법으로 볼 수 있는 창의·융합 역량을 신장시키기 위해 Omar Khayyām의 삼차방정식 해법을 작도, 증명, 역증명 3단계로 재해석하고, 쌍곡선과 원, 쌍곡선과 포물선, 쌍곡선과 쌍곡선의 교점으로 해를 시각화한 자료를 제공하였으며,

셋째, 기하학적인 내용의 정당화, 수학적 사고력 향상, 역동적인 시각화를 통해 학생들의 수학 개념들에 대한 이해도를 높이고 <기하> 과목에 대한 흥미를 유발하기 위해 교수자와 학습자가 제시된 논증 기하 해법을 자기 주도적으로 체험할 수 있도록 중등수학의 기하학적 내용과 활용의 단계별 작도 과정으로 나타내었고,

넷째, 정보 처리 역량을 기를 수 있도록 학습자가 직접 작도 과정을 설계하여 공학적 도구를 활용해 삼차방정식의 실근을 구해보는 활동이 가능한 교수·학습 자료를 제시하였다.

한편, 현행 수학교육 과정은 고등학교 공통 과목 <수학>에서 인수분해가 가능한 간단한 삼차방정식을 다루며 대수적인 해법만 제시하고 있고, 진로 선택 과목 <기하>에서 원뿔곡선의 내용을 다룸에도 불구하고 삼차방정식과 원뿔곡선을 상호 연관 짓는 교수·학습 자료가 부족한 실정이므로 본 논문은 원뿔곡선의 교점을 이용해 삼차방정식의 해를 구하는 기하학적 해법이 제시된 교수·학습 자료로 수학 과목 간 연결의 한 사례가 될 것이다.

Omar Khayyām은 계수가 모두 양인 삼차방정식의 해를 원뿔곡선으로 구하는 해법으로 음인 해는 고려하지 않고 양인 해만 다루고 있으나 현재에는 삼차방정식의 실근과 허근을 모두 구할 수 있고 양의 실근과 음의 실근을 모두 시각화할 수 있으므로 음의 해 또한 작도, 증명, 역증명 3단계의 연구가 이어지기를 제언한다.

더 나아가, 수학 과목 간의 연결은 물론이고, 수학 개념 간의 연결과 확장을 위한 연구가 더욱 다양해지기를 기대하며, 삼차방정식의 대수적 해법과 논증 기하 해법의 연결은 물론이고, 수학사 활용에 관한 원뿔곡선의 역사적 발달 배경을 소개하고, 현 시대적 상황에 맞춘 동적 소프트웨어 활용으로 학교 현장에서 교사와 학생들의 적극적인 수학 체험 활동 및 동기와 흥미를 유발할 수 있음을 기대하는 교수·학습 모델의 개발이 필요하다.

참고 문헌

[1] 교육부, 수학과 교육과정, 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8], 2015.

[2] 김향숙 · 박혜경, Biot의 원뿔곡선에 관한 conjecture의 재해석, *East Asian Mathematical J.* 35(2019), 141-162.

[3] 김향숙.박진석. 해석기하학개론[제2판]. 경문사, 2011.

[4] 김향숙 · 김양 · 박시은, 삼차방정식의 기하적 해법에 대한 재조명과 시각화, *East Asian Mathematical J.* 34(2018), 403-427.

[5] 김미연, Omar Khayyām의 원뿔곡선을 이용한 Depressed cubic equations 해법, 인제대학교 박사학위논문, (2020).

[6] 반은섭, 삼차방정식의 기하학적 해결을 위한 수학적 지식의 연결 과정 분석, 한국교원대학교 박사학위논문, (2016).

[7] 반은섭 · 신재홍 · 류희찬, 오마르카얌(Omar Khayyām)이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법의 교육적 활용, *대한수학교육학회지* 제18권 제3호(2016), 589-609.

[8] Berggren, J. L., Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, *Springer -Verlag, New York*, (1986).

[9] Connor, M. G., A historical survey of methods of solving cubic equations, *A thesis of master of science, Univ. of Richmond,* (1956).

[10] Mardia, K. V., Omar Khayyām, René Descartes and Solution to Algebraic Equations, *Omar Khayyam Club, London*, (1999).

[11] Sinclair, Nathalie M., Mathematical applications of conic sections in problem solving in ancient Greece and medieval Islam, *Simon Fraser Univ*, (1995).

Kim, Hyang Sook
Department of Computer Engineering
& Institute of Natural Science
Inje University
Gimhae, 621-749 Korea
E-mail : mathkim@inje.ac.kr

Kim, Mi Yeoun
Department of Computer Aided Sciences
Inje University
Gimhae, 621-749 Korea
E-mail : mt-miyun@hanmail.net

Sim, Hyo Jung
Department of Computer Aided Sciences
Inje University
Gimhae, 621-749 Korea
E-mail : onlylovelyhj@gmail.com

Park, Myeong Eun
Department of Computer Aided Sciences
Inje University
Gimhae, 621-749 Korea
E-mail : myeongeun_n@naver.com