韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
http://doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.3.297
2021. 8. 제 60권, 제 3호, 297-319.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August. 2021, Vol. 60, No. 3, 297-319.

수학교사의 대수식 쓰기 지도를 위한 발달에 핵심적인 이해

최윤형(한국교원대학교 대학원, 학생)・이수진(한국교원대학교, 교수)†
†교신저자

Mathematics teachers' Key Developmental Understandings for teaching equation writing

Choi, Yunhyeong(Graduate School of Korea National University of Education, yun@knue.ac.kr)
Lee, Soo Jin(Korea National University of Education, sjlee@knue.ac.kr)†
†Corresponding Author

초록

본 연구는 Gess-Newsome(1999)의 변형적 관점에서 수학교사의 수학적 이해와 잠재적 학생들을 가르치기 위한 지도 방법 간의 관계를 면밀히 이해하고자 중등 수학교사 4명을 대상으로 질적 사례 연구를 수행하였다. 구체적으로, 대수식 쓰기 문제해결을 위한 발달에 핵심적인 이해를 조사 후, 연구 참여자들이 이에 주목하여 문제를 해결하는지 분석하였다. 나아가 대수식 쓰기를 지도하기 위한 수업을 예상하는 과정에서 나타나는 교수적 행동과 수학적 이해 사이의 연관성을 분석하였다. 분석 결과 KDU에 주목한 2명은 대수식 쓰기 문제해결에 성공했으나, 다른 2명은 가분수 상황을 그림으로 나타내거나 상호적 추론을 요구하는 문제를 어려워하였다. 또한 교사들이 구상한 대수식 쓰기를 지도하는 방법에서 확인된 교수적 행동은 그들이 문제해결 과정에서 주목했던 수학적 이해가 투영되어 있었다. 본 연구 결과는 특정 수학 내용에 대한 교사의 KDU와 교수 활동을 위한 지식과의 연결 사례를 제시함으로 교사교육 연구에 기여한다.

Abstract

The present study explored a relationship between mathematical understandings of teachers and ways in which their knowledge transferred in designing lessons for hypothetical students from Gess-Newsome (1999)'s transformative perspective of pedagogical content knowledge. To this end, we conducted clinical interviews with four secondary mathematics teachers of their solving and teaching of equation writing. After analyzing the teacher participants' attention to Key Developmental Understandings (Simon, 2007) in solving equation writing, we sought to understand the relationship between their mathematical knowledge of the problems and mathematical knowledge in teaching the problems to hypothetical students. Two of the four teachers who attended the key developmental understandings solved the problems more successfully than those who did not. The other two teachers had trouble representing and explaining the problems, which involved reasoning with improper fractions or reciprocal relationships between quantities. The key developmental understandings of all four teachers were reflected in their pedagogical actions for teaching the equation writing problems. The findings contribute to teacher education by providing empirical data on the relationship between teachers' mathematical knowledge and their knowledge for teaching particular mathematics.

---

* 주요어: 발달에 핵심적인 이해, 대수식 쓰기, 수학교사
* **Key words**: Key Developmental Understandings, Equation writing, Mathematics teacher
* 이 논문은 제1저자의 석사학위논문 일부를 재구성하고 수정 및 보완하여 작성한 것임
* This paper reconstructed some of the first author's master's thesis.
* **Address**: Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, Cheongju, Korea
* **2000 Mathematics Subject Classification**: 97C70
* **Received**: August 2, 2021 **Revised**: August 8, 2021 **Accepted**: August 20, 2021

Ⅰ. 서론

수학교사의 지식은 수학 수업에 영향을 미친다. 교사는 학생들에게 배움의 기쁨을 느낄 수 있도록 학생에 대한 지식과 교수에 대한 지식을 갖추기 위하여 끊임없이 노력하며, 자신의 수업에 대하여 반성하고 개선할 필요가 있다(Park, 2015). 교사의 전문성을 확보하고자 우리나라는 초·중등교육법에 따른 교원양성 프로그램을 이수한 자에게 수학교사가 될 수 있는 최소한의 자격을 부여하고 있다. 그러나 여러 수학교사들은 교원양성을 위한 전문적인 교육을 받은 후에 교실 현장에 투입되었음에도, 직접 학 교실 현장을 경험을 하면서 수학교사로서 자신에게 부족한 역량을 실감하고 있다(Kang et al., 2011). 이에 교실 현장에서 실시되는 수학교육의 질을 높이기 위하여 우리나라의 많은 수학교육 연구자들은 수학교사 지식 연구의 중요성을 강조하고 있으며, 수학교사 지식 연구는 최근까지 활발하게 진행되어왔다(e.g., Han, 2016; Kang & Choi, 2021; Kang et al., 2011; Kang, Jo & Kim, 2013; Kim, 2012; Kwon, Nam & Kim, 2009; Lee & Shin 2015; Song & Pang, 2013; Sunwoo & Pang, 2019). 특히 국내에서 이루어진 수학교사 지식 연구는 Ball, Thames, Phelps(2008)의 연구에서 제안되었던 MKT 연구가 다수이다(e.g., Han, 2016; Kang et al., 2013; Kim, 2012; Kwon et al., 2009; Moon & Kim, 2015; Yi & Cho, 2011).

Ball 외(2008)는 Shulman의 교수학적 내용 지식을 바탕으로 수학을 가르치는 데 필요한 지식을 구체화하였으며, 특히 필요한 수학적 지식을 교과내용지식(SMK)과 교수학적 지식(PCK)으로 구분하고 이를 포함하는 영역으로 교수를 위한 수학 지식(MKT)을 제안하였다. Ball 외(2008)가 제안한 MKT 기반 연구들은 수학교사 지식을 세부 요소로 나누었으며, 세부 요소들의 타당성을 검증하기 위하여 검사지를 개발하고 심리 측정 연구 방법을 이용하였다. 이와 같은 MKT를 Gess-Newsome(1999)이 제안하였던 통합적 관점(integrative perspective)의 MKT에 비유할 수 있다(Silverman & Thompson, 2008). 그러나 Lee, Shin(2015)는 통합적 관점의 교사 지식 연구가 교사들의 지식 구조와 교실 현장에서 나타나는 다양한 현상들을 해석하는 설명적 도구의 역할은 하지만, 교사가 가진 지식을 발달하는 데 도움을 주는 구체적인 방향을 제시하지 못한다는 점을 지적하였다.

Silverman, Thompson(2008)은 통합적 관점의 문제점을 보완하기 위하여 Gess-Newsome(1999)의 변형적 관점(transformative perspective)으로의 MKT를 제안하였다. 변형적 관점의 MKT는 여러 지식들의 통합에 의하여 새로 생성된 지식이 아닌, 교사가 기존에 가지고 있던 지식의 변형 결과임을 강조한다. 변형적 관점의 MKT는 교사 개인이 가지고 있던 지식이 개념적 이해에 기반한 내용 지식이 아닐 경우, 교사가 교사교육을 통하여 접하게 되는 구성 요소별 학습은 습관적인 행동 방식으로 받아들여진다(Lee & Shin, 2015). 이렇게 형성된 교사의 내용 지식은 학생들의 개념을 형성하는 수업에서 직관적 교수 활동을 유도하게 될 수도 있다. Silverman, Thompson(2008)은 교수자가 가지고 있는 발달에 관련된 핵심적인 이해(Key Developmental Understandings, 이하 KDU)를 학습자들에게 실제 영향력을 미치는 교수학적 이해로 변형하는 과정에서 중추적인 역할을 한다는 입장을 취한다. 그들은 교수자가 학습자들의 수학적 개념 형성 과정에서 수학적 개념을 발달시킬 수 있는 과제를 선택하고, 과제 수행과정에서 반영적 추상화를 유발하는 발문을 제공할 수 있었던 이유를 교수자가 스스로 형성한 수학적 개념의 KDU로 보았다.

2015 개정 수학과 교육과정은 문자를 통하여 수량 사이의 관계를 일반화함으로써 산술에서 대수로 이행하며, 방정식과 부등식은 양 사이의 관계를 나타내며 적절한 절차를 따라 이를 만족시키는 해를 구할 수 있음을 명시한다(Ministry of Education, 2015). 또한 대수 학습의 핵심은 관계적 사고에 있고, 분수는 기준 양의 얼마만큼을 나타내는 개념으로 양 사이의 관계를 연결하는 중요한 자원이 되므로 대수를 의미 있게 배우기 위해 분수의 의미를 풍부하게 할 필요가 있다(Kim, Shin & Lee, 2019). 이에 따라 대수식 쓰기(equation writing) 및 추론 지도 과정에서 분수 스킴 형성을 위한 구체적인 조작 활동 경험과 연산자 분수의 의미에 대한 풍부한 학습 기회를 제공하는 교사의 역할이 강조된다(Lee, 2017; Lee & Shin, 2011). 그러나 교사가 양 사이의 관계를 나타내는 대수식의 의미를 이해하는 과정을 고려하지 않은 채, 그 해를 구하는 절차적 과정에 초점을 두고 학생들을 지도한다면,

후행되는 대수 영역의 수학 학습에 영향을 끼칠 것이다(Lee, 2017).

본 연구는 앞서 제시한 배경과 필요성에 바탕을 두고 수학교사의 KDU를 기반으로 한 내용 지식과 대수식 쓰기를 지도하는 과정에서 나타나는 교수적 행동 사이의 연관성을 분석하고자 하였다. 수학교사가 대수식 쓰기 문제 해결과정에서 주목했던 수학적 이해를 확인하여 KDU인가를 살피고, 대수식 쓰기 지도 과정에서 발현되는 수학교사의 교수적 행동과 대수식 쓰기를 위한 KDU 사이의 연관성을 분석하는 것에 목적을 두고 아래의 두 가지 연구 문제를 설정하였다.

연구 문제1. 대수식 쓰기 문제를 해결하는 과정에서 수학교사가 주목[1]하는 수학적 이해는 어떠한가?

연구 문제2. 대수식 쓰기 지도를 위하여 수학교사가 구상한 지도 방법에서 드러나는 교수적 행동과 수학교사의 수학적 이해와의 연관성은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 변형적 관점의 MKT와 KDU

1) 변형적 관점의 MKT

통합적 관점에서 교수활동에 필요한 지식은 그 지식을 구성하는 하위 요소들이 각각 개별적으로 발전하며, 교수활동에서 통합된다는 입장을 취한다(Gess-Newsome, 1999). 교사지식을 구성하는 개별적 요소를 규명하는 시도는 이러한 요소를 중점적으로 교사교육 및 교사연수 교육과정을 계획하여 실행할 수 있다는 측면에서 효율적일 수 있다. 한편, 국내외 선행 연구에서는 교사 지식을 구성하는 하위 요소끼리의 경계가 모호하고(e.g., Lee & Shin, 2015), 교사교육 수업에서 학습한 개별적인 요소들이 교사들의 절차적인 지식과 일관성이 결여된 수학적 이해로 동화되어 효과적인 교수학적 지식으로 통합하는 데 실패한 사례를 보여주었다(Carpenter, Fennema, Peterson, & Carey, 1988 as cited in Silverman & Thompson, 2008).

Silverman, Thompson(2008)은 통합적 관점을 사용하는 전통적인 교사교육 프로그램의 대안으로 변형적 관점(transformative perspective)에서의 MKT를 소개하였다. 변형적 관점에서의 교수학적 내용 지식은 원래 갖고 있던 지식의 형태에서는 존재하지 않던 구별된 특징을 보이며, 현재 지식의 근본적 변형 또는 새로운 지식의 생성 결과이다(Gess-Newsome, 1999). 변형적 관점은 교사들에게 수학적 및 교육적 이해를 확장하고 연결하여 새로운 지식을 창출할 수 있는 기회를 의도적으로 통합한 경험을 필요로 한다(Silverman & Thompson, 2008). 특히 변형적 관점에 따르면 수학교사 개인의 MKT는 특정한 수학 개념에 대한 개인의 강력한 이해를 토대로 그 개념에 대하여 교수학적 ‘잠재성을 지닌 이해(pedagogical understandings)’에서 ‘실제적 영향력을 가진 이해(key pedagogical understandings)’의 변형으로 구성된다(Lee & Shin, 2015; Silverman & Thompson, 2008).

2) KDU

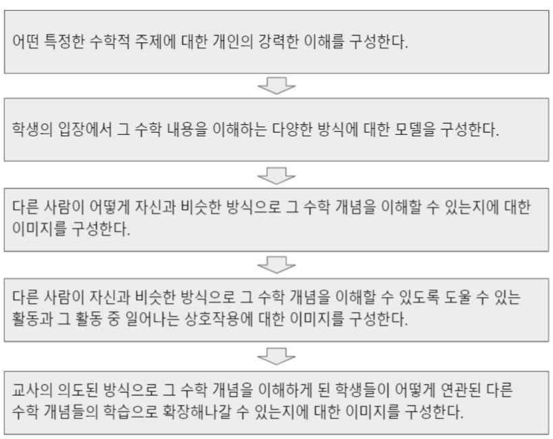
KDU는 수학 개념 형성과 발달에 도움이 될 수 있는 핵심적인 이해를 의미한다. Simon(2006)은 학생들의 수학적 개념 형성에 도움이 될 수 있는 핵심적인 이해를 연구하려는 시도에서 이해를 위한 교수법의 특정 측면을 강조하고, 수학에서 개념 학습 목표를 식별하는 데 사용할 수 있는 구조를 제공하기 위하여 발달에 핵심적인 이해의 구성을 소개하였다.

Simon이 예비 교사들의 곱셈에 대한 수학적 이해를 발달시키고자 실시한 직사각형의 넓이를 구하는 활동에 따르면(Silverman & Thompson, 2008) 그는 자신의 KDU를 바탕으로 예비 교사들이 자신이 갖고 있는 KDU를 구성할 수 있도록 돕는 활동이 무엇인지 고민하였다. 또한 Simon은 구성한 활동을 본인이 아닌 예비 교사가 하는 것임을 인식한 후 교수자인 자신이 고려한 KDU를 발달시킬 수 있도록 과제를 선택하며, 그 과제를 수행하면서 반영적 추상화를 유도하는 발문을 제시하는 교수활동을 설계하였다(Silverman & Thompson, 2008). 이는 교수자가 자신의 KDU가 교육활동에 필요한 이해로 변형되어가는 과정을 보여주는 한 예이며, 이는 교수자의 반영적 추상화를 거쳐 얻어진다(Lee & Shin, 2015). Silverman, Thompson(2008)은 교수자가 학생들의 수학적 개념 형성에 대한 KDU를 발달시킬 수 있는 과제를 선택

1) 본 연구는 주목하다(attend)의 의미로 사용하였다.

하고, 과제 수행과정에서 반영적 추상화를 유발하는 발문을 제공할 수 있었던 근거를 교수자가 스스로 형성한 수학적 개념의 KDU라 제시하였다.

Silverman, Thompson(2008)은 교수자가 MKT를 구성하는 것은 (1) KDU가 학생들의 다른 수학 개념의 학습에 어떻게 도움이 되는지 이해하고, (2) 그러한 학생들이 발달을 돕기 위하여 교사로서 어떤 행동을 취해야 하고, 그 행동들이 어떻게 작동하는지에 대한 이해를 토대로 변형되는 과정이라 기술하였다. KDU는 학습자의 상황에서 생각해보는 교수적 행동(pedagogical actions)을 통하여 학습자들에게 영향력을 미칠 수 있는 잠재적인 교수학적 이해로 변형된다. 그리고 이같은 과정의 반복을 통하여 KDU는 실제 영향력이 있는 교수학적 이해로 변형되면서 교수 활동을 돕는 강력한 MKT를 형성하게 된다(Lee & Shin, 2015). 즉 KDU는 교사로 하여금 어떤 이해가 특정한 수학 아이디어를 이해할 때 중요한 것인가, 더 세련되게 이해하는 학생과 그보다 덜한 이해를 보이는 학생의 차이를 설명할 수 있는 이해는 무엇인가에 대한 질문을 하게하고, 이러한 질문을 통하여 수학교사가 지도의 목표를 설정하게 할 수 있다(Lee & Shin, 2015). [Fig. 1]은 수학적 주제에 대한 학생들의 개념적 이해를 돕기 위하여 그와 관련된 KDU를 구성한 교사들의 교수적 행동 및 이해에 대하여 정리한 것이다.



[Fig. 1] Pedagogical actions and understandings of teachers who have constructed KDU(Lee & Shin, 2015, p.202)

2. 대수적 추론

본 연구는 양적 추론이 수학 학습에 토대가 되어야 한다는 인식론적 관점을 기반으로 대수적 추론을 이해하였다. 양적 추론에서의 양은 대상이나 현상에 대한 개인의 개념적 속성이다(Thompson, 1993). Thompson(1993)은 양과 수를 구분하고, 사람들은 양을 측정하여 그 값을 알아낼 수 있는 대상의 특징으로 생각한다고 주장하였다.

양적 추론은 주어진 상황에서 알려진 양(known)을 조작하는데 사용될 수 있는 스킴과 조작의 구성을 포함한다(Hackenberg, 2005). 양적 관점으로 대수적 추론에 접근하는 것은 미지의 양(unknown)이 알려지지 않았지만 값을 결정할 수 있는 외연량으로 고려된다는 것을 의미한다(Hackenberg & Lee, 2015). 따라서 외연량으로서 미지의 양은 실제로 측정하기 전에 고정된 외연량을 측정할 수 있는 잠재적 결과로 생각할 수 있다.

Hackenberg(2005)는 일차방정식의 구성과 해법의 기초로서 양과 관련된 학생들의 추론을 탐구하기 위해서는 양적 추론 및 대수적 추론을 구별할 것을 주장하며, 학생들의 대수적 추론을 연구하고 제기하는 다른 연구자들의 접근법을 검토하였다. 대수적 추론의 의미는 일반화된 산술, 대수식 표현과 미지수 조작, 절차적 행동의 일반화, 상황 맥락과 문제 분석하기, 상호적 추론 등 학자마다 다양하게 정의된다(Hackenberg, 2005, 2010; Lee, 2017). 본 연구에서는 양적 추론의 관점에서 분수가 포함된 실생활 문제 상황을 일차식으로 표현하고 이를 지도하는 교사들의 교수 지식을 이해하는데 주요한 대수적 추론을 상호적 추론과 연산자로서의 분수 구성하기에 초점을 두어 분석하였다.

1) 상호적 추론

상호적 추론(reciprocal reasoning)이란 두 양 사이의 곱셈적 관계를 표현하거나 추론할 때, 다른 양을 측정하기 위한 단위로 두 양 중 어떤 한 양을 사용 가능하다는 것을 뜻한다. Hackenberg, Lee(2015)는 y가 x의 $\frac{3}{5}$인 경우, x의 $\frac{1}{5}$이 y의 $\frac{1}{3}$이기 때문에, x가 y의 $\frac{3}{5}$라고 추론할 수 있는 경우, 학생이 상호적 추론을 했을 것이라 추정하였다. 따라서 $5x$의 5는 $\frac{5}{3}y$의 $\frac{5}{3}$의 역할과 동일

하다(Hackenberg, 2010, 2014; Hackenberg & Lee 2015; Thompson & Saldanha, 2003). 주어진 문제 상황에서 기준 단위(referent unit)를 설정하여 그 단위로 양을 파악하고, 기준 단위를 잘 전환하는 것은 상호적 추론을 하는데 중요하다. 또한 상호적으로 추론하는 것은 가역적으로 추론할 수 있는 하나의 변형으로, 추론의 결과로 시작하여 그 결과에 대한 출발점을 산출할 수 있는 것을 포함한다(Hackenberg, 2010; Hackenberg & Lee, 2015). 예를 들어, 학생이 다른 막대의 $\frac{3}{5}$과 같이 길이가 표시되지 않은 직사각형 막대로 출발하여 다른 막대를 생성할 수 있다면, 해당 학생이 분수에 대한 가역적 추론을 한 것이다(Hackenberg & Lee, 2015). 특히 미지의 양에 분수를 곱하는 것은 대수식 문제를 해결하는 과정 중 상호적 추론을 하는 데 중요하기 때문에, 학생들이 미지의 양과 변수에 대한 연산자 분수를 어떻게 생각하는지 면밀히 조사할 필요가 있다(Hackenberg, 2013).

2) 연산자로서의 분수 구성하기

연산자(multiplier)로서 분수는 어떤 수, 사물, 집합 등에 적용되는 함수와 같은 작용을 한다(Behr, Harel, Post & Lesh, 1992). 학생들이 '미지의 양을 곱셈적으로 조작한다(operate on unknowns multiplicatively)'는 것은 학생들이 일상적으로 분수와 전체 숫자를 미지의 양의 곱셈으로 사용하고, 양적 상황과 관련 그 의미를 설명할 수 있는 상태를 의미한다(Hackenberg & Lee, 2015). 즉, 학생들이 단순히 대수식 $\frac{3}{5}x$을 표현하는 것에 그치는 것이 아니라, 그 식의 의미를 양적으로 설명할 수 있을 때 학생들은 미지의 양을 곱셈적으로 조작 가능하다. 이와 관련하여 연산자 분수는 단위 분수를 반복 가능한 단위로 볼 수 있는 것과, 3-수준의 단위 구조 등이 연관되어 있다. 미지의 양에 곱하는 수로서 연산자 분수를 구성하기 위해서는 사고에 대한 추상화가 필요하다(Hackenberg, 2014).

3. 단위 구조, 곱셈 개념, 분수 조작

1) 단위 구조

단위 구조는 어떤 양을 단위로 구조화하여 이해할 때, 단위-조정 조작이 일어나는 단위의 수준(levels of unit)에 대한 구조를 뜻한다. 가장 기본적인 단위 조정은 합성 단위를 다른 합성 단위에 삽입(insert)하는 것이다(Steffe, 2003).

자연수에 대하여 2-수준 단위 구조(two-levels-of-units structure)를 내면화한 학생은 2개의 구슬을 24개에서 1개 각각을 하나의 단위(1-수준 단위)로, 이 구조를 유지하면서 24개 전체를 하나의 단위(2-수준 단위)로 보고, 다음 행동에서 이를 결과로 사용하여 조작할 수 있다(Steffe, 2003).

어떤 합성 단위를 3-수준 단위 구조(three-levels-of-units structure)로 구성한다는 것은 합성 단위 24를 세 가지 단위로 이루어진 구조로 표상(representation)할 수 있음을 의미한다(Steffe, 2003). 예를 들어 24개의 막대 과자를 1-단위 24개, 24-단위 1개로 이루어진 구조와 더불어 4-단위 6개로 이루어진 구조로 구성 가능할 때, '3-수준 단위 구조로 재구성하였다.'라고 말할 수 있다.

2) 곱셈 개념

Hackenberg, Tillema(2009)는 학생들의 단위-조정 행동 맥락에서 학생들이 내면화한 단위 구조(Steffe, 2003)를 바탕으로, 자연수에 대한 곱셈 개념(whole number multiplicative concept)을 정의하였으며 학생들이 내면화한 단위 구조에 따라 MC1, MC2, MC3의 3가지 수준으로 구분하였다. 본 연구는 면담을 통하여 확인한 수학교사들의 MC2 수준의 행동 양상의 분할 조작과 반복 조작과 MC3 수준의 행동 양상으로 판단할 수 있는 분할 조작과 반복 조작에 초점을 두어 살펴보고자 하였다.

MC2(second multiplicative concept)수준은 2-수준 단위 구조를 내면화하며, 조작하기 전에 2-수준 단위 조정을 할 수 있다(Hackenberg & Tillema, 2009). 자연수를 합성 단위, 즉 단위의 단위로 볼 수 있다. 또한, 행동을 거쳐 3-수준 단위 구조를 만들어낼 수 있다. 예를 들어, 학생들은 4개의 단위를 8번 반복하여 32, 즉 4개의 단위를 포함하는 8개의 단위의 단위로 3-수준 단위 구조를 만들어 낼 수 있지만, 만들어내는 행동 후에는 그 구조를 유지하지 못하고 8개의 단위가 된다. 또한 이 전의 구조를 유지하면서 이를 8개의 단위를 포함하는 4개의 단위의 단위로 관점을 전환하지 못한다. 즉 단위 조정을 통하여 구조를 만들어 냈을 때. 그것을 결과로 하여 다음 행

동에서 조작의 대상으로 사용할 수 없다(Hackenberg & Lee, 2015). 분수를 측정 가능한 양으로 생각하기 위하여 MC2 수준이 필요하다(Hackenberg, 2013; Steffe & Olive, 2010). MC2 수준에서는 부분-전체로의 분수 의미에 초점을 두고 양적 추론을 하는 경향이 있으며(Lee, 2017), 미지의 양에 대한 상호적 추론에 어려움을 겪는다(Hackenberg & Lee, 2015).

MC3(third multiplicative concept) 수준은 3-수준 단위 구조를 내면화하여, 행동하기 전에 3-수준 단위 조정을 머릿속에서 예상할 수 있다(Hackenberg & Tillema, 2009). 그리고 만들어진 3-수준 단위 구조를 유지하면서 다른 행동에서 사용할 수 있고, 2개의 다른 3-수준 단위 구조를 유연하게 전환할 수 있다. 예를 들어, 4개를 포함하는 8개의 단위의 단위로 32를 보는 관점을 취하고, 이 구조를 유지하면서 8개를 포함하는 4개의 단위의 단위로 32를 볼 수 있다(Hackenberg & Lee, 2015; Hackenberg & Tillema, 2009). MC3 수준은 분수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈에 대한 스킴과 가분수를 수로 생각하는 것을 포함하여, 여러 분수 지식을 구성하는 데 필요하다(Hackenberg, 2013; Steffe & Olive, 2010). MC3 수준에 도달하면 두 미지의 양 사이의 관계를 분수로 나타낼 수 있었고, 미지의 양에 대한 상호적 추론도 가능하다(Hackenberg & Lee, 2015).

3) 분수 지식과 조작

조작(operation)은 경험의 반영을 통한 추상화된 정신적 행동(mental action)으로 스킴의 가장 중요한 구성요소이다(von Glasersfeld, 1995 as cited in Hackenberg, 2010). Steffe(2002)는 분수 스킴을 구성하기 위한 분수 조작을 강조하였으며, 분수 지식과 관련된 기본 조작으로 분할 조작, 반복 조작 등을 제시하였다(Hackenberg, 2013; Steffe & Olive, 2010).

분할 조작(partitioning operation)은 단위를 똑같은 크기의 부분으로 나누는 것이다. 예를 들어 전체를 6등분으로 나누는 것이다.

반복 조작(iterating operation)은 측정으로서 분수를 이해하기 위하여 필요한 핵심조작이다(Steffe, 2002), 예를 들어 $\frac{1}{6}$에서 1을 만들 때, 반복하는 단위인 1을 만들어 반복하는 단위인 $\frac{1}{6}$을 전체와 분리[2)]한 다음에 6번 반복하여 1을 구성하는 것이다.

4. 양적 추론의 관점에서 대수식 쓰기와 분수 지식에 관한 선행 연구

양적 추론을 기반으로 조작적 관점에서 교사와 학생의 대수적 추론을 연구하는 학자들은 공통적으로 학생들의 곱셈 개념이 분수 지식을 구성하는 것에 영향을 준다는 것을 주장한다(e.g., Hackenberg, 2010; Steffe & Olive, 2010). 학생들이 연산자 또는 곱하는 수로서 분수를 구성 가능한가에 대한 여부와, 이것을 구성할 수 있다면 그에 대한 방법을 확인하는 데 학생들의 곱셈 개념의 역할은 중요하다. 알려진 양과 미지의 양에 연산자로서 분수를 생각하는 것은 상호적 추론과 대수식 쓰기 문제해결에서 핵심적이다(Hackenberg, 2010). 이에 본 연구는 대수식 쓰기를 위한 KDU를 대수적 추론의 기초적 조작인 분수 지식에서 찾고자 하였다.

Hackenberg(2005)는 $ax=b$ 꼴의 일차방정식으로 해결 가능한 분수 곱셈 추론 문제들을 사용하여 분할 분수 스킴을 구성한 6학년 학생 4명을 2명씩 한 그룹으로 구성한 다음 각 그룹별 약 35번씩 8개월 동안 교수실험을 하였다. 이 교수실험의 결과를 바탕으로 5개의 역 곱셈 관계 유형 문항을 중심으로 학생들을 분석하였고, $ax=b$ 꼴의 일차방정식을 해결하기 위한 스킴을 구성하고 연산자 분수 개념을 추상화하는데 3-수준 단위를 내면화가 요구되는 것을 확인하였다. 이후 Hackenberg, Lee(2015)는 7, 8, 10학년 학생 18명(각 7, 10, 1명)중 MC2, MC3 수준 각 6명, 총 12명의 학생을 대상으로 45분씩 2번의 면담 및 서면조사를 통하여 MC3 수준 학생들이 대수식을 쓸 때 미지의 양에 곱하는 수로 자연수, 분수를 사용하고, 반복 분수 스킴을 구성한 반면, MC2 수준 학생들은 미지의 양을 표현하는데 문자를 사용하기 보다는 수를 사용하여 대입하는데 집중하는 것을 발견하였다. 이는 대수식 쓰기 문제에서 미지의 양에 곱하는 수로서 분수

2) 분리(disembedding)는 전체를 정신적으로 파괴하지 않고 전체 단위 중에서 한 부분을 떼어내는 것이다(Lee & Shin, 2019; Steffe & Olive, 2010). 예를 들어 전체의 $\frac{1}{6}$을 생각할 때 전체 6개를 그대로 유지하면서 그 중 하나를 떼어내는 것이다.

를 이해하고 상호적 추론을 잘 해내기 위해서 MC3 수준에 도달하는 것이 중요하다는 것을 보여주는 예이다.

Lee, Shin(2011)은 방정식을 배우지 않은 초등학교 5학년 학생들이 일차 방정식을 조작적으로 해결하는 과정에서 자신이 구성한 분수 스킴을 어떻게 사용하고 있으며, 계수가 복잡해짐에 따라 어떤 분수 스킴과 조작을 사용하는지 알아보기 위하여, 초등학교 5학년 학생 2명을 대상으로 일차방정식을 조작적으로 해결하는 과정을 상세히 분석하였다. 분석 결과 학생들은 계수와 상수에 따라 다양한 조작과 분수 스킴을 사용하고, 일차방정식의 해결에서 미지의 양과 알려진 양 사이의 동치관계를 파악하는 데 반복 분수 스킴이 요구된다는 것을 발견하였다.

또한 Lee(2017)의 연구는 스킴 이론을 기반으로 중학생들의 양적 추론 문제해결 과정에서 나타나는 우리나라 중학생들의 곱셈적 사고 수준에 따른 분수 지식과 대수적 추론이 어떻게 연결되는가 분석하였다. Lee(2017)는 곱셈적 관계가 포함된 식에서 대수식 표현 및 대수적 추론을 하기 위해서 반복 분수 스킴의 구성, 연산자 분수의 의미 이해가 요구되는데, 이를 위하여 단위 분수를 반복 가능한 단위로 이해할 수 있어야 함을 강조한다. 특히 곱셈적 관계가 포함된 식에서 문자의 대수적 사용을 위해서는 최소한 3-수준의 단위 구조가 필요하다(Lee, 2017).

이에 선행 연구의 결과를 토대로 3-수준 단위 구조가 내면화되었을 때 확인되는 기준 단위 설정, 분할 조작, 반복 조작은 대수식 쓰기 문제를 해결하는 과정에서 핵심적인 역할을 할 것으로 예상하였다. 이에 본 연구는 위에서 제시한 분수 지식을 대수식 쓰기를 위한 KDU로 판단하고, 수학교사들이 대수식 쓰기 문제 해결과정에서 나타나는 행동 양상을 곱셈 개념의 수준에서 나타나는 특징을 토대로 수학교사들이 KDU에 주목하는가를 분석하고자 하였다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구는 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 연구에 참여한 수학교사 개인이 주목하는 수학적 이해와 수학교사들이 구상한 지도 방법에서 드러나는 교수적 행동 사이의 연관성을 분석하는 것에 목적을 두고 질적 사례 연구 방법을 연구 방법으로 채택하였다.

1. 연구 참여자 및 검사 도구

2019년 8월 3일부터 2019년 8월 30일까지 면담 진행 일시 기준으로 K 대학교 대학원에서 석사 과정에 재학 중인 예비 및 현직 교사 중 연구 참여에 동의를 해준 8명을 초기 연구 참여자로 선정하였다[3]. 본 연구는 대수식 쓰기 문제해결 과정 중 교사가 주목하는 수학적 이해의 차이를 파악하고, 수학적 이해와 교수적 행동 사이의 연관성을 양적 조작 측면에서 확인하는 데 목적이 있다.

이에 수치적 조작으로부터 양적 관계를 파악하는 경향을 보였던 4명은 분석 대상에서 제외하였으며, 양적 조작을 통하여 대수식 쓰기 문제를 해결해 나가는 연구 참여자 4명을 중심으로 분석하였다. 본 면담에 들어가기 전 확인한 연구 참여자들의 정보는 다음과 같다.

먼저 A교사와 C교사는 면담 당시 교육 실습을 막 이수한 예비 교사이며 교실 수업 경험이 거의 없었다. A교사는 주어진 수학 문제를 해결할 때, 맥락을 파악하는 것을 우선하며 주어진 문제를 이미지화는 경향이 있다. C교사는 전공 수학 지식의 수준이 상대적으로 높고, 수학 문제를 해결하는 과정에서 대수식 표현과 같은 구조와 형식에 주의 집중하는 편이다. 또한 E교사와 F교사는 중등 임용고사에 합격하여 공립 중학교에서 5년 이상 경력을 가진 현직 교사이다. E교사와 F교사 둘 다 수학 문제해결 과정에서 맥락을 분석하는데 우선하며, 그 과정에서 도식화하는 것은 중요한 수학 문제해결 전략이라 생각하고 있었다. Heckenberg, Lee(2015)가 제안한 문제를 국내 실정에 맞게 번역과 재구성하는 과정을 거쳐 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계가 진분수인 상황이 내재된 대수식 쓰기 문항(A1)과 곱셈적 관계가 가분수인 상황이 내재된 대수식 쓰기 문항(A2)을 구성하였으며, Silverman, Thompson(2008)과 Lee, Shin(2015)의 문헌을 분석하여 대수식 쓰기 문항을 중학생들에게 지도하는 방법을 구상하도록 하는 문항(T1, T2)들을 개발하였다. 수학교육 전문가 1명과 현직 교사 1명의 검토 의견을 반영하여 문항지 초안의 1차 수정 보완한 다음 예비 면담을 실시하였

[3] 본 연구는 교실 수업 경험이 아닌 개인이 구성한 수학적 이해가 교수적 행동에 영향을 주는가를 확인하고자 하였다. 이에 교수 경험의 차이가 확연히 나는 예비 교사와 현직 교사를 연구 참여자로 고려하였으며, 예비 교사와 현장 교사가 특별히 구분되어야 할 상황을 제외하고는 모든 연구 참여자들을 수학교사로 통칭하였다.

다. 예비 교사 1명, 현직 교사 2명을 임의 선정하여 예비 면담을 실시한 결과를 토대로 문항을 재검토 후 수정하여 타당성을 확보하였다. 본 연구에서 사용한 문항들은 아래와 같다([Table 1], [Table 2] 참고).

[Table 1] Interview questions for equation writing

Types	Interview question
A1	Sikyeong and Changwook are building a tower with wooden blocks. Changwook's tower is $\frac{2}{5}$ the height of Sikyeong's tower. (1) Draw a picture of a given situation. (2) Can you write an equation for this situation? If you could write it, please explain the meaning of your equation. (3) Can you write an equation different from A1-(2)? Please write an equation and explain the meaning of that equation.
A2	The monthly donations from Minyoung's family to social welfare organizations are $\frac{4}{3}$ of the monthly donations from Jaewook's family. (1) Draw a picture of a given situation. (2) Can you write an equation for this situation? If you could write it, please explain the meaning of your equation. (3) Can you write an equation different from A2-(2)? Please write an equation and explain the meaning of that equation.

[Table 2] Interview questions for pedagogical understandings

Types	Interview question
T1/T2	The following questions are asked about the teacher's teaching plan for A1/A2. (1) Describe the reaction of middle school students in solving the equation writing problem of the A1/A2 you expect. (2) How do you want students to understand the equation writing problem in A1/A2? Also, please describe how the equation writing teaching method can be constructed for this purpose. - Intent (3) Describe how the teaching method (teaching plan) you suggested in the T1-(2)/T2-(2) can help middle school students understand the concept of equation writing. Also, please describe the interactions that you expect to occur during the class activities you have organized.

2. 자료 수집 및 분석 방법

면담은 연구 참여자 1명당 총 2차시의 반 구조화된 면담으로 진행되었으며, 면담은 문항지를 작성하는 시간을 포함하여 차시 당 평균 약 60분이 소요되었다. 면담은 연구 참여자와 제1저자가 사전 약속을 통하여 정한 시간에 진행되었다.

1차 면담은 연구 참여자가 면담에 앞서 문항지에 제시된 대수식 문제를 먼저 풀어보게 하고 제1저자는 수학교사들의 문제해결 과정을 관찰하였다. 실질적인 면담은 연구 참여자의 문항지에 실린 문항의 풀이가 완료된 후에 실시되었으며, 연구 참여자가 주어진 문항을 어떻게 해결하였는지 자유롭게 말할 수 있도록 하는 방법으로 이루어졌다. 2차 면담은 연구 참여자가 1차 면담에서 풀이하였던 동일한 대수식 쓰기 문제에 대한 지도 방법을 작성하게 하였다. 1차 면담과 마찬가지로 연구 참여자가 문항지 작성을 완료 후에, 대수식 쓰기 문제의 지도 방법과

이것을 구상하게 된 이유에 대하여 연구 참여자가 자유롭게 말할 수 있도록 진행하였다. 연구 참여자의 문항지 작성 과정과 면담 상황은 모두 촬영되었다. 특히 수학교사들의 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 드러나는 수학적 이해를 파악하고자, 면담 중 관찰되는 수학적 이해는 즉시 관찰일지에 기록하였다.

이를 통해 수집된 두 가지 자료는 다음과 같다. 첫 번째 자료는 연구 참여자의 문항지 작성 과정을 녹화와 동시에 관찰한 결과를 작성한 관찰일지이며, 두 번째 자료는 연구 참여자가 문항지 작성을 마친 후에 그가 작성한 문항지와 반 구조화된 면담으로 진행된 면담을 녹화한 영상이다.

선행 연구 고찰을 통하여 본 연구에서는 대수식 쓰기를 위한 KDU를 양적 관점의 대수적 추론을 근거로 분석하였다.' 그에 따라 1차 면담에서 수집된 자료들을 검토하여, 분수 조작, 단위 조정과 곱셈 개념을 기반으로 연구참여자들 개개인이 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 보이는 행동 양상의 특징들을 분석하고 코딩하였다. 2차 면담 결과로 확인된 개별 연구 참여자의 대수식 쓰기 지도 방법 구상안은 KDU를 가지고 있는 교사들의 교수적 행동 및 이해 과정(Lee & Shin, 2015, p.204)에 따라 개별 연구 참여자의 교수적 행동 양상의 특징을 분석하였다. 이때 1차 면담 자료 분석 결과는 개별연구 참여자가 주목하였던 수학적 이해와 교수적 행동 사이의 연관성을 확인하는 데 사전 정보로 활용하였다. 교사별 정리한 1차와 2차 면담의 분석 자료는 제1저자에 의해 하나의 파일로 종합되었고, 종합한 내용은 본 논문의 다른 저자의 검토 및 논의를 통해 신뢰도를 높일 수 있도록 노력하였다.

Ⅳ. 결과분석

결과분석에서는 연구 참여자들이 두 미지의 양 사이의 관계를 파악하여 대수식을 작성했던 과정과, 그들이 해결했던 대수식 쓰기 문항을 학생들에게 지도하기 위한 방법을 구상하는 과정을 차례로 살펴보았다. 특히, 실험 과정에서 연구 참여자 개개인이 보여준 행동들을 분석한 결과는 공통적인 특징을 보였던 교사들을 중심으로 분류하여 기술하였다. 자세한 내용은 아래와 같다.

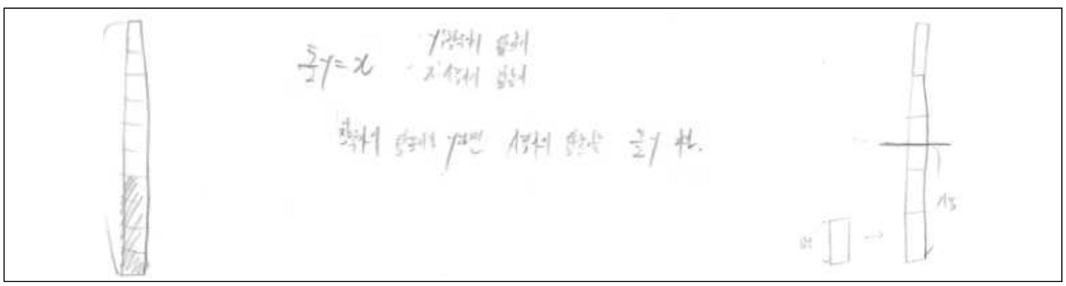
1. A1 문항과 A2 문항을 해결하는 과정에서 나타나는 수학적 이해

1) C교사

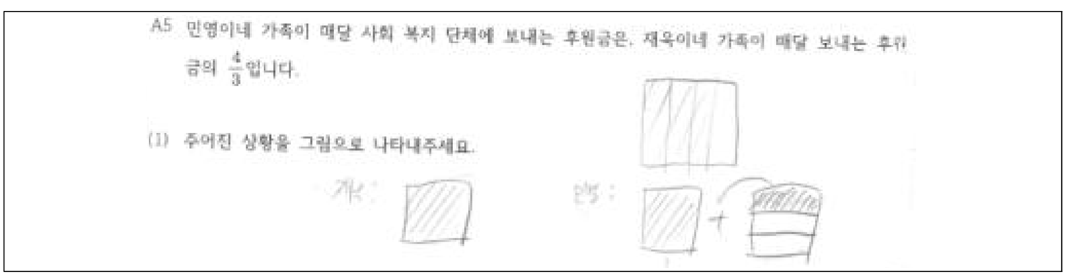
C교사는 A1-(1) 문항의 그림을 설명하는 과정에서 시경이의 탑 높이를 기준으로 설정하여 먼저 시경이의 탑 높이를 나타내는 막대 그림을 그린 다음 이것을 5등분한 것 중 두 조각에 해당하는 부분을 창욱이의 탑 높이를 그림으로 표시한 것이라 답하였다. 그는 양적 관점에서 문제 상황을 그림으로 나타낼 때, 분할 조작만을 사용하였다. 또한 A1-(2) 문항의 식을 세우는 과정에서 C교사는 시경이의 탑 높이를 x, 창욱이의 탑 높이를 y으로 둔다면, 시경이의 탑 높이의 $\frac{2}{5}$배이므로 A1-(1) 문항의 그림에서 설명한 이유와 같은 이유로부터 식 $y=\frac{2}{5}x$, 또는 창욱이의 탑 높이는 $\frac{2}{5}x$ 로 나타낼 수 있다고 설명하였다. 이와 관련하여 제1저자는 C교사에게 $\frac{2}{5}$배는 어떤 의미인지 물어보았고 C교사는 모두 "5등분했을 때 그 것의 두 개에 해당하는 것이 $\frac{2}{5}$배"라고 답하였다. 제1저자는 C교사가 '~의 $\frac{2}{5}$'라는 표현을 자주 쓰는 것과 관련하여 그들이 문항지 답안에서 서술하고 설명 중 계속해서 사용하였던 '~의 $\frac{2}{5}$'는 어떤 의미를 갖는지 질문하였다. C교사는 "전체 높이가 $10m$ 이면 $4m$ 에 해당하는 것과, 전체를 5등분 했을 때, 그 중 2등분한 조각을 $\frac{2}{5}$라고 생각할 수 있어요." 라고 답하였다. 이로부터 제1저자는 C교사가 부분-전체 맥락의 $\frac{2}{5}$에 집중하고 있는 것으로 판단하였다. C교사는 A1-(3) 문항에서 자신이 세운 식은 "창욱이의 탑 높이를 기준 단위로 설정하고 창욱이의 $\frac{5}{2}$만큼에 해당하는 것이 시경이의 탑 높이므로 식 $y=\frac{5}{2}x$을 다른 식으로 제시한 것"이라 설명하였다. 이에 제1저자는 C교사가 A1-(1) 문항에서 답으로 제시한 그림과 A1-(2) 문항의 답안으로 작성한 대수식의 사이의 연관성

을 확인하고자, 대수식 $y=\frac{5}{2}x$에서 $\frac{5}{2}$는 어떤 의미를 가지고 있는지 A1-(1) 문항의 답으로 작성하였던 그림과 관련지어 설명해주길 요청하였다. 이에 대한 답변으로 C교사는 "$\frac{5}{2}$는 전체의 $\frac{1}{2}$에 해당하는 것의 다섯 개로 볼 수 있다."라고 말한 다음 A1-(2) 문항과 연관 지어 생각하게 될 경우에 대하여 설명하려다 한참 동안 고민을 하며 어려움을 토로하였다. 이로부터 C교사는 대수식의 기계적 조작으로 대수식을 표현한 것으로 짐작된다. 또한 제1저자는 대수식 $y=\frac{5}{2}x$ 을 A1-(1) 문항의 그림과 관련지어 설명하길 요청하였고 C교사는 30초가량 고민한 후에 다섯 개의 막대를 그렸다가 지우는 과정을 두 번 반복하였다. 특히 창욱이의 탑 높이를 기준으로 설정하여 시경이의 탑 높이와 비교하는 그림을 그리려고 시도하였으나 이 역시 지우개로 지우고 다시 생각하는 등 계속해서 고민하였으나 어려움을 즉시 해소하지 못했다. 제1저자는 별도의 힌트를 주지 않고 C교사가 생각할 수 있도록 기다려주었으며 약 2분 정도의 시간이 흐른 후에 C교사는 "막대 한 개를 10등분하고 그 것 중 4개의 조각을 색칠한 다음 색칠한 부분을 창욱이의 탑 높이를 나타내는 것"이라 말하였다. 이후 "창욱이의 탑 높이를 다섯 번 반복하여 이어 붙인 다음 이것의 반절, 즉 2등분한 것이 시경이의 탑 높이"라고 설명하였다. C교사가 창욱이의 탑 높이를 10등분한 것 중 4조각을 이어 붙인 것으로 설정한 이유는 다섯 개를 이어 붙인 다음 2등분하는 상황을 고려한 것으로 짐작된다([Fig. 2] 참고).

C교사는 시경이의 탑 높이를 5등분한 것 중 한 조각과 창욱이의 탑 높이를 2등분한 것 중 한 조각이 같다는 사실에 주목하지 않았다. 그는 A2 문항의 A2-(1) 문항 답안에 대한 설명으로 재욱이네 가족의 후원금을 나타내는 막대 그림을 그리고 $\frac{4}{3}$를 1과 $\frac{1}{3}$의 합으로 표현할 수 있기 때문에 [Fig. 3]과 같이 나타낼 수 있다 말하였다. 그리고 두 수학교사는 그들이 그린 A2-(1) 문항의 그림은 민영이네 가족의 후원금은 재욱이네 가족의 후원금을 나타내는 막대 그림과 그 것의 3등분한 것 중 한 조각을 이어 붙인 양으로 나타낸 것이라 말하였다([Fig. 3] 참고). C교사는 재욱이네 가족의 후원금의 $\frac{4}{3}$배가 민영이네 가족의 후원금이기 때문에 재욱이네 가족의 후원금을 x, 민영이네 후원금을 y라고 두었을 때, 민영이네 후원금을



[Fig. 2] Teacher C's drawing for the A1-(3)



[Fig. 3] Teacher C's drawing for the A2-(1)

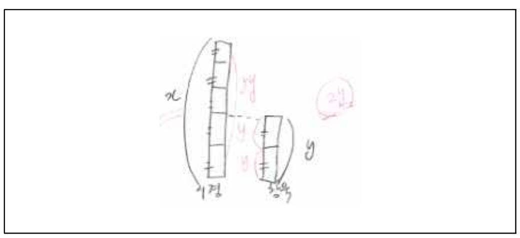
식 $y=\frac{4}{3}x$로 표현하였다고 답하였다. 그들은 또한 A2-(1) 문항의 그림에 대한 설명으로 A2-(2) 문항의 답안으로 작성한 대수식을 설명할 수 있다고 말하였다. 이로부터 C교사가 양적 관점에서 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계를 가분수로 나타날 때, 곱셈적 사고보다 덧셈적 사고가 강하게 작용한 것으로 보인다.

C교사는 민영이네 가족의 후원금을 y, 재욱이네 후원금을 $x=\frac{3}{4}y$로 A2-(3) 문항의 다른 식을 세웠다. 제1저자는 그들이 상호적 추론 과정에서 주목한 대수적 조작을 확인하기 위하여 C교사가 사용한 $\frac{3}{4}$는 어떤 의미를 가지는지 질문하였고, 그에 대한 답으로 C교사는 $\frac{3}{4}$을 전체를 막대 그림으로 나타내었을 때, 4등분한 것 중 3조각에 해당하는 것으로 볼 수 있다고 설명하였다.

위에서 살펴본 C교사의 문제해결 과정으로부터 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계가 진분수인 상황이 주어진 A1 문항과 곱셈적 관계가 가분수인 상황인 A2 문항을 해결하는 과정의 관찰과 문제해결과 관련하여 진행한 면담을 통하여 MC2 수준의 행동 양상의 분할 조작과 반복 조작을 확인할 수 있었다.

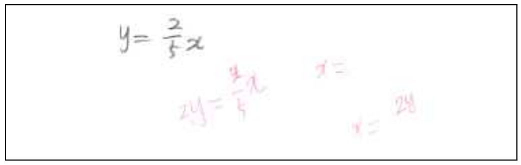
2) F교사

F교사는 창욱이의 탑 높이를 기준으로 설정하여 시경이의 탑을 5등분한 것 중의 두 조각에 해당하는 것을 창욱이의 탑 높이로 생각하고 A1-(1) 문항에 대한 그림을 그렸다고 답하였다([Fig. 4] 참고).



[Fig. 4] Teacher F's drawing for the A1-(1)

또한 이들은 A2-(2) 문항의 답안을 작성할 때 시경이의 탑 높이를 x(또는 a), 창욱이의 탑 높이를 y(또는 b)로 두고, 문제 상황에서 시경이의 탑 높이를 기준으로 설정했을 때, 시경이의 탑 높이의 5등분한 것 중 두 조각에 해당하는 부분이 창욱이의 탑 높이기 때문에 대수식([Fig. 5] 참고)을 표현하였다.

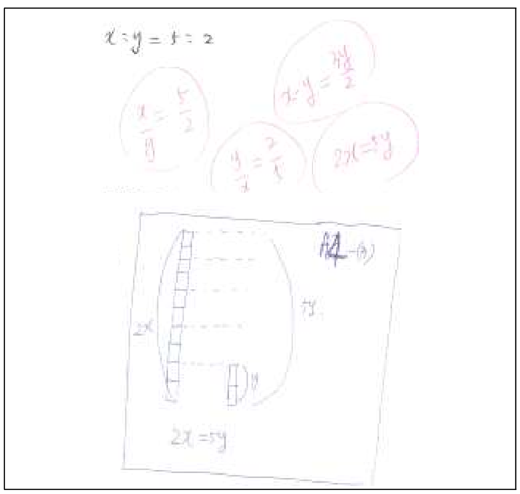


[Fig. 5] Teacher F's response to the A1-(3)

또한 그는 창욱이의 탑 높이를 기준 단위로 설정하여 A1-(2) 문항의 대수식을 세웠다고 말하였다. 그러나 F교사가 창욱이의 탑 높이를 y로 두기 전에 설정한 기준 단위는 창욱이의 탑 높이를 2등분한 것 중 하나를 y로 두는 것을 관찰하였기에 제1저자는 F교사에게 처음에 그림을 그릴 때, 기준과 설명할 때의 기준이 다른 이유를 물었다. 이에 대한 답변으로 F교사는 "처음의 것으로 생각한다면 시경이의 탑 높이가 x인데 창욱이의 탑 높이는 $2y$가 되잖아요. y 앞에 계수가 있는 게 꺼림직해서"라는 말을 하며 창욱이의 탑 높이를 기준으로 설정한 이유를 말하였다. 이에 제1저자는 F교사가 설정하였던 처음의 기준 단위가 왜 불편한가 질문하였고 F교사는 "창욱이의 높이의 $\frac{1}{2}$을 y로 두고 문제 상황에 적절한 식을 세운다면 $2y=\frac{2}{5}x$의 식으로 나타내어야 하지만 이 식에서 문자가 창욱이의 탑 높이를 의미하는 것이 아니기 때문"이라 답하였다. 또한 F교사는 자신이 작성한 A1-(3) 문항의 답안에 대하여 이전에 그린 간격(창욱이의 탑 높이의 $\frac{1}{2}$)이 똑같기 때문에 비율이 일정하다는 것을 알 수 있어서 비례식 $x:y=5:2$로 나타내었다고 말하였다. 이는 F교사는 시경이의 탑 높이를 5등분한 것 중 한 조각과 창욱이의 탑 높이를 2등분한 것 중 한 조각이 같다는 사실에 주목하였음에도 A1-(3) 문항에서 작성한 대수식 $x=\frac{5}{2}y$를 양적 상황으로 설명할 때는 사용하지 않았다. 제1저자는 F교사에게 창욱이의 탑 높이를 y로 두기 전에 설정하였던 y는 F교사가 말한 간격을 뜻하는 것인가 질

문하였고 F교사는 “간격을 y로 두면, 시경이의 탑 높이와 창욱이의 탑 높이 사이의 관계를 등식으로 나타내려니 불편하기 때문에, 창욱이의 탑 높이를 문자 y로 수정하였다.”라고 설명하였다.

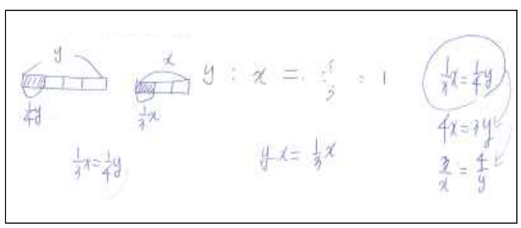
제1저자는 F교사에게 비례식 이외의 다른 식으로는 표현하기 어려운지 질문하였고, F교사는 “뺄셈을 생각하여 $x-y=\frac{2}{3}y$, 곱셈과 나눗셈으로 나타내면, $\frac{x}{y}=\frac{5}{2}$, $\frac{y}{x}=\frac{2}{5}$, $2x=5y$로 나타낼 수 있다.”라고 답하였다. 또한 제1저자는 이 식 들을 A1-(1) 문항의 그림으로 설명가능한지 질문하였고 F교사는 “식 $x-y=\frac{2}{3}y$은 그림으로 설명 가능하지만 나머지 식들은 처음에 세운 비례식에서 떠올린 식이다.”라고 답하였다. 이에 제1저자는 F교사가 주목하는 단위 구조 행동 양상을 확인하기 위하여 대수식 $2x=5y$을 그림으로 설명 가능한지 추가 질문하였으며 F교사는 “x를 두 번 늘리면 $2x$, y는 시경이의 탑 높이 막대 그림의 두 조각이니깐, 이것을 5개를 늘리면 $5y$가 되어 이 높이는 같아요.”라고 답하였다. [Fig. 6]은 F교사가 작성한 A1-(3) 문항의 답안과 그에 대한 부연 설명을 하는 과정에서 그린 그림이다.



[Fig. 6] Teacher F’s drawing for the A1-(3)

F교사는 문항지를 확인하여 A2 문항의 문제 상황을 파악한 후에 가분수인 $\frac{4}{3}$을 그림으로 나타내어야 하는 것에 당황했지만 곧 “재욱이네 가족의 후원금을 기준 단위로 설정한 다음 재욱이네 가족의 후원금 막대 그림과 이것을 3등분한 것의 한 조각을 더한 것이 민영이네 가족의 후원금”이라고 답하였다. 그러나 F교사는 민영이네 가족의 후원금을 나타내는 식이 $\frac{4}{3}x$인 것은 문제 상황을 통하여 즉시 설정하였으며, 그림을 통하여 생각하게 될 경우 전자와 같이 $\frac{4}{3}x=x+\frac{1}{3}x$(또는 $\frac{4}{3}x=\frac{3}{3}x+\frac{1}{3}x$)로도 설명할 수 있다고 답하였다. 이로부터 F교사가 A2-(1) 문항의 답안을 작성할 사용하였던 분할 조작과 분배 조작은 MC2 수준의 행동 양상으로 판단하였다.

F교사는 처음엔 A2-(3) 문항에서 A1-(1) 문항과 마찬가지로 부분-전체 맥락의 $\frac{3}{4}$에 주목하였다. 이를 확인한 제1저자는 A2-(1)과 연관지어 설명해주길 요청하였다. F교사는 A2-(3) 문항의 답을 비례식 $y:x=\frac{4}{3}:1$으로 나타내었다. 또한 이 비례식을 조작하여 $\frac{1}{3}x=\frac{1}{4}y$임을 나타내었다. 그리고 F교사가 이 대수식을 양적 관점으로 설명하는 과정에서 재욱이네 가족의 후원금을 나타내는 막대 그림의 한 조각과 민영이네 가족의 후원금을 나타내는 가족의 후원금을 나타내는 막대 그림의 한 조각이 동일한 양임에 주목하였음을 확인하였다. 또한 A3-(3) 문항의 답으로 제시하였던 대수식에서 나타내었던 것처럼 뺄셈식으로도 다른 식 $y-x=\frac{1}{3}x$ 을 나타내었다([Fig. 7] 참고).



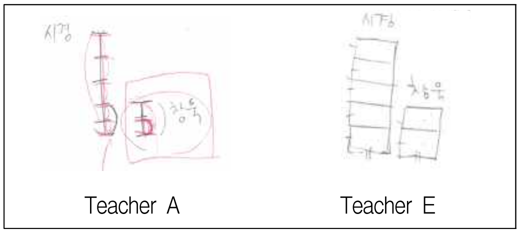
[Fig. 7] Teacher F’s drawing for the A2-(1)

즉 F교사의 문제해결 과정으로부터 두 미지의 양 사이

의 곱셈적 관계가 분수인 상황인 A1 문항과 A2 문항을 해결하는 과정의 관찰과 문제해결과 관련하여 진행한 면담을 통하여 MC2 수준의 행동 양상과 MC3 수준의 행동 양상의 분할 조작과 반복 조작을 모두 확인할 수 있었다.

3) A교사, E교사

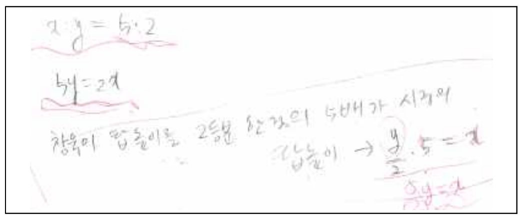
A교사와 E교사 둘 다 A1-(1) 문항의 그림은 주어진 문제 상황으로부터 시경이의 탑 높이를 기준 단위로 설정하여 창욱이의 탑 높이를 시경이의 탑 높이를 5등분한 것의 한 조각을 두 번 반복하여 이어 붙인 형태로 표현하였다([Fig. 8] 참고).



[Fig. 8] Teacher A's and Teacher E' s drawings for the A1-(1)

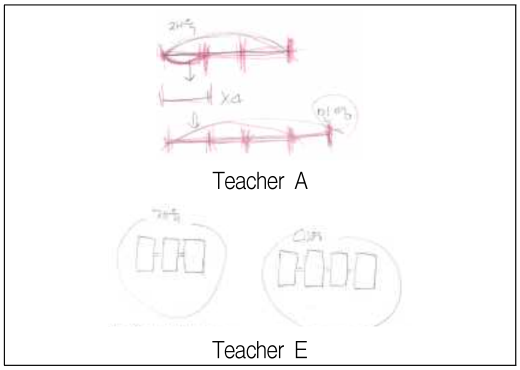
A교사는 “시경이의 탑 높이를 x로 두고, 창욱이의 탑 높이를 y로 두면 A1-(2) 문항의 답안으로 작성하였던 대수식은 그림을 설명하였던 것과 같은 이유로 $y=\frac{2}{5}x$로 나타낼 수 있었다.”라고 설명하였다. E교사는 “A1-(1) 문항의 설명과 A1-(2) 문항의 답안으로 작성한 대수식에 대한 설명이 동일하며 그러므로 (시경)×$\frac{2}{5}$=(창욱)으로 나타낼 수 있다.”고 답하였다. 또한 E교사가 “문자 기호가 아닌 한글로 작성한 이유는 아이들을 대상으로 하는 수업에서 문자로 나타내면 아이들이 문자가 무엇을 나타내는지 파악하지 못하고 헷갈리는 경우가 있기 때문”이라 설명하였다. 그러나 본 연구의 1차 면담은 수학교사 스스로가 주체가 되어 문제를 해결할 때 나타나는 수학적 이해를 확인하는 것에 목적을 가지므로 제1저자는 E교사에게 학생들에게 지도하는 상황을 배제하고 본인 스스로가 문제 상황을 대수식으로 나타내게 된다면 어떻게 표현할 것인지 다시 질문하였다. E교사는 “A1 문항의 문제 상황을 식으로 나타낼 때 함수식으로 나타내는 경향이 많아 시경이의 탑 높이를 x, 창욱의 탑 높이를 y라 놓으면, $y=\frac{2}{5}x$로 나타낼 수 있어요.”라고 답하였다. E교사의 답변으로부터 그가 나타내고자 하였던 대수식은 앞의 A교사가 제시했던 A1-(2) 문항의 답과 동일한 것임을 확인하였다.

A교사와 E교사는 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계에 대한 상호적 추론이 요구되는 A1-(3) 문항을 해결하는 중 A1-(2) 문항에서 표현하였던 대수식과 다른 식으로 나타내기 위하여 창욱이의 탑 높이를 2등분한 것의 한 조각을 기준 단위로 설정하였다. 그리고 “창욱이의 탑 높이를 2등분한 것의 한 조각을 다섯 배 한 것이 시경이의 탑 높이와 같으므로 $\frac{5}{2}y=x$(또는$x=\frac{5}{2}y$)와 같은 식을 세울 수 있다.”라고 답하였다. 특히 A교사와 E교사는 앞서 제시한 식 $\frac{5}{2}y=x$(또는$x=\frac{5}{2}y$) 이외에도 비례식 $x:y=5:2$((시경):(창욱)=5 : 2)이거나 $5y=2x$의 형태로도 나타낼 수 있음을 파악하였다([Fig. 9] 참고).



[Fig. 9] Teacher A' s response to the A1-(3)

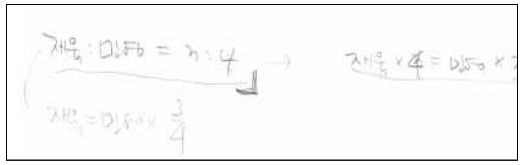
A교사와 E교사는 모두 A2 문항의 문제 상황에서 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계가 가분수가 주어진 까닭에 당황했음을 말하였다. 그러나 A2-(1) 문항의 답안을 작성하고 이를 설명하는 과정에서 큰 불편함을 느끼진 않았다. 그들은 재욱이네 가족의 후원금을 기준 단위로 설정하여 민영이네 가족의 후원금은 재욱이네 가족의 후원금의 $\frac{4}{3}$이므로 재욱이네 가족의 후원금을 막대 그림을 3등분한 것의 한 조각을 4번 반복하여 이어 붙인 것으로 나타내었다([Fig. 10] 참고).



[Fig. 10] Teacher A's and Teacher E' s drawings for the A2-(1)

두 명의 수학교사들은 재욱이네 가족의 후원금을 x, 민영이네 가족 후원금을 y로 두어 재욱이네 후원금의 $\frac{1}{3}$한 양에 해당하는 막대의 4배가 민영이네 가족의 후원금이므로 대수식 $\frac{4}{3}x=y$를 A2-(2) 문항의 답으로 나타내었다. 그들은 면담 중 A2-(2) 문항의 답안을 설명하는 과정에서 자신들이 작성하였던 A2-(1) 문항의 답안([Fig. 10] 참고)을 작성한 이유와 동일하다는 것을 강조하였다. 이로부터 A교사와 E교사가 A2-(1) 문항의 답안에서 나타나는 양적 관점에서의 조작과 A2-(2) 문항의 답안의 대수적 표현의 조작이 유사하다는 것을 확인하였다.

A교사는 대수적 표현 과정에서 상호적 추론이 요구되는 A2-(3) 문항의 답안으로 대수식 $\frac{3}{4}y=x$을 세운 이유를 A교사가 그린 A2-(1) 문항의 그림에서 민영이네 가족의 후원금과 재욱이네 가족의 후원금을 막대 그림으로 비교하였을 때, 민영이네 가족 후원금의 막대 그림을 4등분한 것의 한 조각을 3번 반복하여 이어 붙인 것이 재욱이네 가족의 후원금을 나타내는 막대와 같기 때문이라 하였다. 그러나 E교사는 이전의 A1-(3) 문항에서 나타낸 것과 같이 비례식으로 나타내었다. 제1저자는 E교사에게 비례식이 아닌 다른 식을 세울 수 있는가 물어보았고, E교사는 “또 다른 식은 재욱이네 가족의 후원금의 4배한 것과 민영이네 가족의 후원금을 3배한 것이 같아서 (재욱)×4=(민영)×3과 같은 식을 세울 수 있어요.”라고 답하였다. 이 식은 제1저자가 질문한 후 E교사는 잠시 고민을 한 다음 재욱이네 가족의 후원금과 민영이네 가족의 후원금을 나타내는 양으로 식을 나타내보길 시도하다 멈추고 대수식 (재욱)=(민영)×$\frac{3}{4}$을 생각해 낸 후 이것을 변형하여 나타낸 것이다([Fig. 11] 참고).



[Fig. 11] Teacher F's response to the A2-(1)

관찰과 면담을 통하여 A교사와 E교사가 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계가 분수인 문제 상황이 주어진 A1 문항과 A2 문항을 해결하는 과정에서 MC3 수준 행동 양상의 분할 조작과 반복 조작이 나타났다.

[Table 3] Mathematical understandings in solving equation writing questions

Types	Mathematical understandings	Teacher
A1	set up referent unit part-whole fraction concept partitioning operation iterating operation (MC2 level action)	C
	set up referent unit part-whole fraction concept partitioning operation iterating operation (MC2/MC3 level action)	F
	set up referent unit partitioning operation iterating operation (MC3 level action)	A E
A2	set up referent unit part-whole fraction concept partitioning operation iterating operation (MC2 level action)	C
	set up referent unit part-whole fraction concept partitioning operation iterating operation (MC2/MC3 level action)	F
	set up referent unit partitioning operation iterating operation (MC3 level action)	A E

1차 면담 결과 얻은 자료를 분석하여 대수식 쓰기 문제 해결과정에서 공통적인 행동이 나타났던 연구 참여자별로 분류하고, 그들의 행동 양상을 토대로 그들이 주목하고 있는 수학적 이해를 아래와 같이 정리하였다([Table 3] 참고).

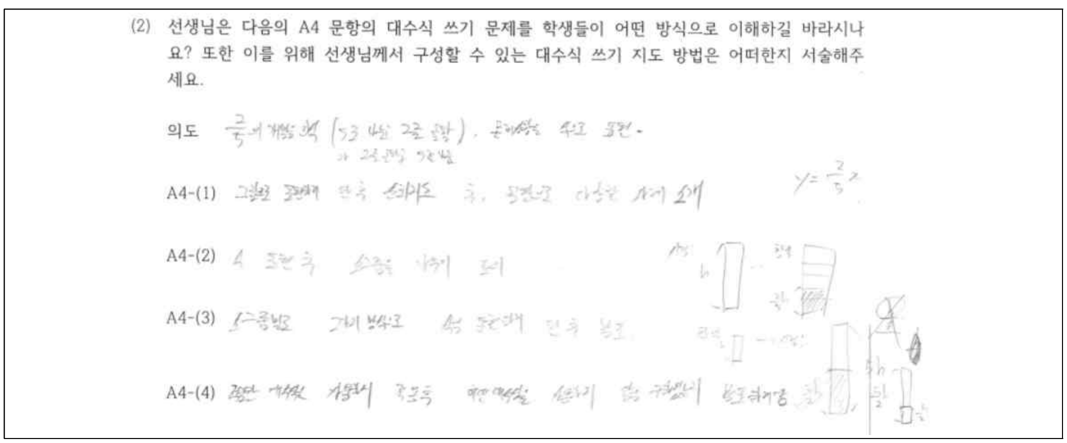
2. T1 문항과 T2 문항 구상과정에서 드러나는 교수적 행동

1) C교사, F교사

C교사와 F교사는 T1-(1) 문항의 답안으로 A1 문항을 처음 접한 중학생들의 반응은 학생들이 A1 문항에서 주어진 분수 상황을 그림으로 나타내어야 하는 것을 당황스러워할 것이라 예상하였다. 그림으로 나타내려 시도는 하지만 실제 그림을 그리는 과정에서 단위 분수가 아닌 진분수와 가분수 상황을 그림으로 표현하는데 곤란함을 느낄 것이라 말하였다. 또한 상호적 추론이 요구되는 다른 식을 세우는 것에도 어려움을 겪을 것이라 답하였다.

위의 두 명의 수학교사들은 자신들이 구상한 T1-(2) 문항의 지도 방법을 통하여 중학생 스스로 미지의 양을 문자로 표현하고 미지의 양 사이에서 곱셈적 관계를 대수식으로 표현할 수 있게 되길 바랐다. 이와 같은 의도를 가지고 C교사와 F교사가 구상한 수업의 공통적인 특징은 학생들에게 문제 상황을 그림으로 표현하고 조작하는 활동 기회를 제공하여 두 미지의 양 사이의 관계를 알게 하는 것에 있었다. 이때 수학교사들이 구상한 지도 방법은 A1 문항을 해결하는 과정에서 그들이 주의 집중하였던 수학적 이해인 부분-전체 사이의 관계 맥락의 분수와 곱셈 개념 수준(MC2, MC3) 행동 양상의 분할 조작과 반복 조작이 투영되었음을 확인하였다.

C교사는 1차 면담 과정에서 A1 문항을 해결하는 과정에서 주목하였던 수학적 이해는 기준 단위 설정, 부분-전체 맥락의 분수, MC2 수준의 행동 양상으로 보이는 분할 조작과 반복 조작이었다. 또한 C교사는 상호적 추론이 요구되었던 A1-(3) 문항을 양적 상황으로 그림으로 표현하는 것에 꽤 어려움을 겪었다. 그러나 2차 면담에서 C교사가 작성한 T1-(2) 문항의 답안은 A1-(3) 문항을 중학생들에게 지도하기 위하여 창욱이의 탑 높이를 다섯 번 이어붙인 다음 그것을 2등분하여 시경이의 탑 높이를 나타내는 방법과, 시경이의 탑 높이를 5등분한 한 조각과 창욱이의 탑 높이를 2등분한 한 조각이 같음을 알게 하여 창욱이의 탑 높이를 2등분한 조각을 다섯 번 이어 붙이는 방법으로 대수식 $x=\frac{5}{2}y$을 지도할 수 있도록 기술하고 있음을 확인하였다([Fig. 12]). 이로부터 C교사가 구상하였던 A1 문항을 중학생들에게 지도하기 위한 방법은 1차 면담에서 확인하였던 수학적 이해뿐만 아니라 MC3 수준의 행동 양상으로 보이는 분할 조작과 반복 조작도 투영되어 있음을 파악할 수 있었다.


(2) 선생님은 다음의 A4 문항의 대수식 쓰기 문제를 학생들이 어떤 방식으로 이해하길 바라시나요? 또한 이를 위해 선생님께서 구성할 수 있는 대수식 쓰기 지도 방법은 어떠한지 서술해주세요.

의도

A4-(1)

A4-(2)

A4-(3)

A4-(4)

[Fig. 12] Teacher C' s response to the T1-(2)

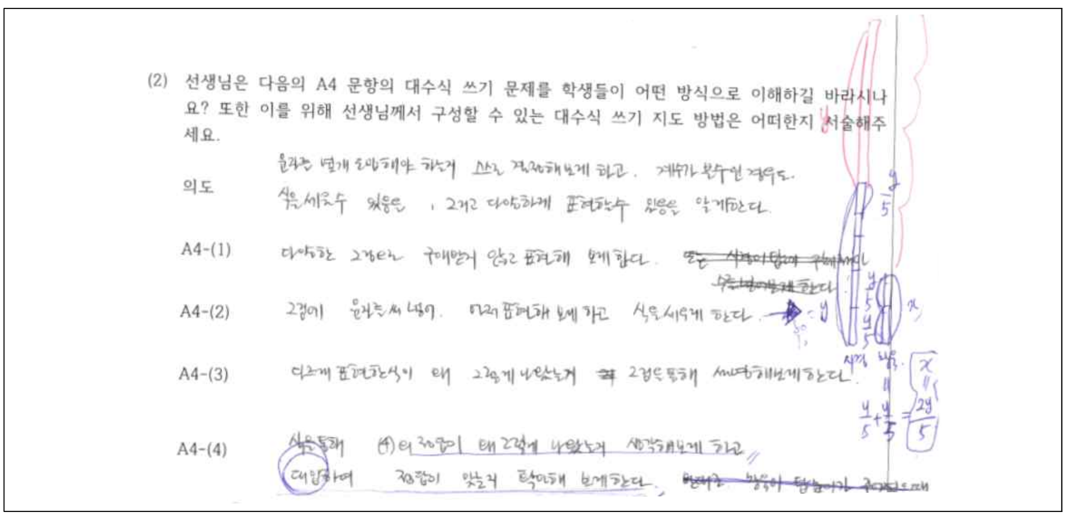
F교사가 T1-(2) 문항의 답안으로 작성한 A1 문항을 지도하기 위한 방법([Fig. 13] 참고)을 통하여 그가 중학생들에게 주어진 문제 상황을 부분-전체 사이의 양적 관계로 파악하여 그림을 그릴 수 있도록 유도하고 이를 토대로 대수식 $y=\frac{2}{5}x$를 세울 수 있도록 지도하고자 하였음을 알 수 있었다.

주어진 문제 상황을 상호적 추론이 요구되는 A1-(3) 문항을 지도할 때 그는 A1-(1) 문항에서 시경이의 탑 높이로 기준 단위로 설정하였던 것을 창욱이의 탑 높이로 기준을 변경한 다음 그림으로 표현하여 지도할 것이라 답하였다. F교사의 A1 문항을 해결하는 과정에서 확인하였던 수학적 이해와 A1 문항을 중학생들을 지도하기 위한 방법에서 드러나는 교수적 행동 사이의 관련성을 파악하고자 하였다. 이로부터 제1저자는 F교사가 학생들이 세워야 할 대수식으로 예상하였던 식 $x=\frac{5}{2}y$ 에 대하여 이 대수식을 학생들에게 양적 관점에서 지도한다면 어떻게 지도할 것인가라는 질문을 하였다. 그에 대한 답으로 F교사는 “창욱이 탑 높이를 다섯 번 반복하여 이어 붙인 다음 그것을 2등분하면 시경이의 길이를 나타낼 수 있어요. 그리고 이거는 이전에 그려뒀던 시경이 높이와 비교해보면”이라고 답하였다. 이로부터 F교사가 중학생들에게 대수식 $x=\frac{5}{2}y$의 양적 관계는 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계보다 $\frac{5}{2}x=2x+\frac{1}{2}x$와 같은 덧셈적 관계에 초점을 두었다고 판단하였다([Fig. 14] 참고). 위의 근거로부터 F교사가 A1 문항을 해결하는 과정에서 수학교사가 주목하였던 기준 단위 설정, MC2 수준의 행동 양상으로 보이는 분할 조작과 반복 조작이 A1 문항을 중학생들에게 지도하기 위한 방법에서 보이는 F교사의 교수적 행동에 투영된 것으로 보인다.

C교사와 F교사는 구체물 또는 막대 그림을 사용하여 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계를 이해하고 이를 대수식으로 표현하는 데 어려움 겪는 학생들에게 구체물 또는 막대 그림의 조작과 대수적 조작을 대응시켜 설명하고자 하였다([Fig. 12], [Fig. 13] 참고).

두 명의 수학교사들은 그들이 구상했던 지도 방법에 다소 차이가 있었음에도 자신들이 구상한 지도 방법을 적용한다면, 후속 학습에서 분수가 계수로 주어진 문제 상황이거나 복잡한 상황이 주어지는 대수식 쓰기 문제를 해결하는 데 도움이 될 수 있을 것이라 생각하였다.

C교사와 F교사는 A2 문항을 처음 접한 중학생들이 문제 상황에서 나타나는 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계가 가분수인 것을 당황할 것이라 예상하였다. 그리고 T2-(1) 문항에 대하여 그들은 이 문제를 처음 접한 중학생들은 주어진 문제 상황을 그림으로 나타내려 시도하지만, 실제 두 미지의 양 사이 관계가 가분수인 상황을 그


(2) 선생님은 다음의 A4 문항의 대수식 쓰기 문제를 학생들이 어떤 방식으로 이해하길 바라시나요? 또한 이를 위해 선생님께서 구성할 수 있는 대수식 쓰기 지도 방법은 어떠한지 서술해주세요.

의도

A4-(1)

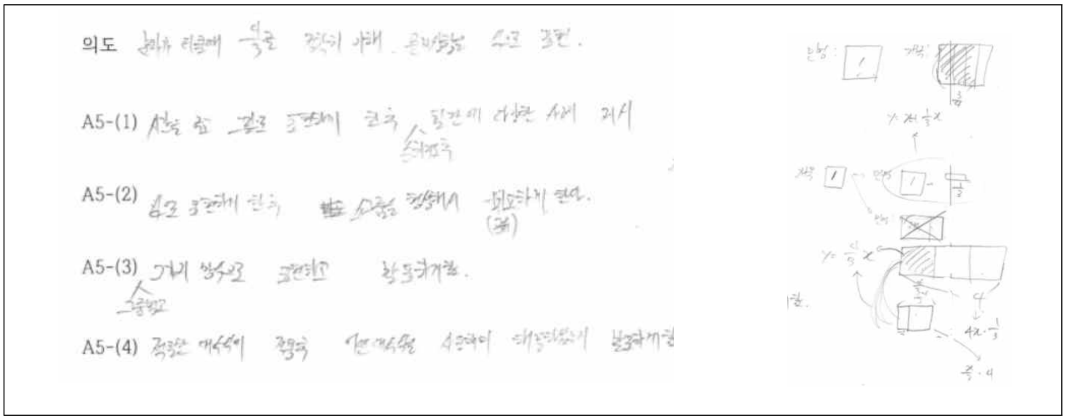
A4-(2)

A4-(3)

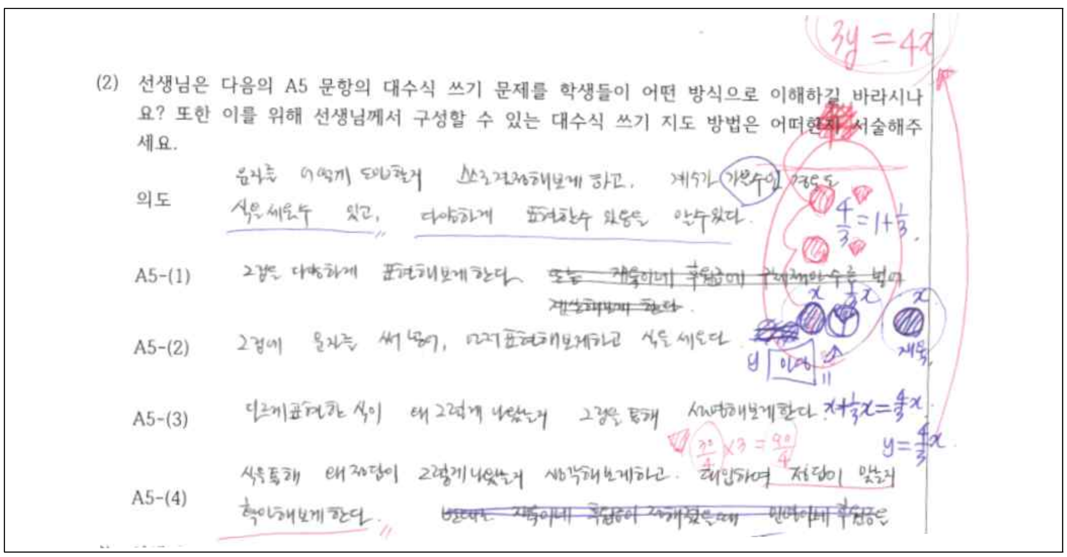
A4-(4)

[Fig. 13] Teacher F’ s response to the T1-(2)

림으로 표현하는 것에 어려움을 겪을 것이라 답하였다 확인하였다. 두 명의 수학교사들은 자신들이 T2-(2) 문항의 답안으로 작성한 지도 방법을 실제 수업에 적용함으로서 중학생들이 스스로 미지의 양을 문자로 표현하고 미지의 양 사이에서 곱셈적 관계를 대수식으로 표현할 수 있을 것이라 기대하였다. 또한 곱하는 수와 연산자 분수의 역할을 하는 $\frac{4}{3}$의 의미를 이해할 수 있길 바란다고 답하였다. 위와 같은 기대를 가진 C교사와 F교사는 A2 문항을 지도하기 위하여 학생들에게 문제 상황을 그림으로 표현하고 이를 조작하는 활동을 제공하여 두 미지의 양 사이의 관계를 지도하고자 하였다. 특히 그들이 구상하였던 조작 활동은 1차 면담 중 A2 문항의 문제해결 과정에서 그들이 주의 집중하였던 수학적 이해인 곱셈 개념 수준(MC2, MC3) 행동 양상의 분할 조작과 반복 조작, 부분-전체 사이 관계 맥락에서 분수의 의미를 투영하고 있었다. C교사와 F교사는 중학생들에게 A2 문항에 주어진 문제 상황을 양적 측면에서 그림으로 그려보게 하고 그림에 문자를 써 넣어보게 한 다음 대수식을 세울 수 있도록 지도 방법을 계획하였다. C교사와 F교사가 주



[Fig. 14] Teacher C' s response to the T2-(2)



[Fig. 15] Teacher F' s response to the T2-(2)

어진 문제 상황을 그림으로 표현할 때 사용한 조작은 1차 면담에서 그들이 A2 문항을 해결할 때 확인하였던 것과 동일하다. 이로부터 A2 문항을 해결하는 과정에서 두 명의 수학교사가 주목하였던 기준 단위 설정, MC2 수준의 행동 양상으로 보이는 분할 조작과 반복 조작이 지도 방법에 투영된 것으로 판단하였다([Fig. 14] ,[Fig. 15] 참고).

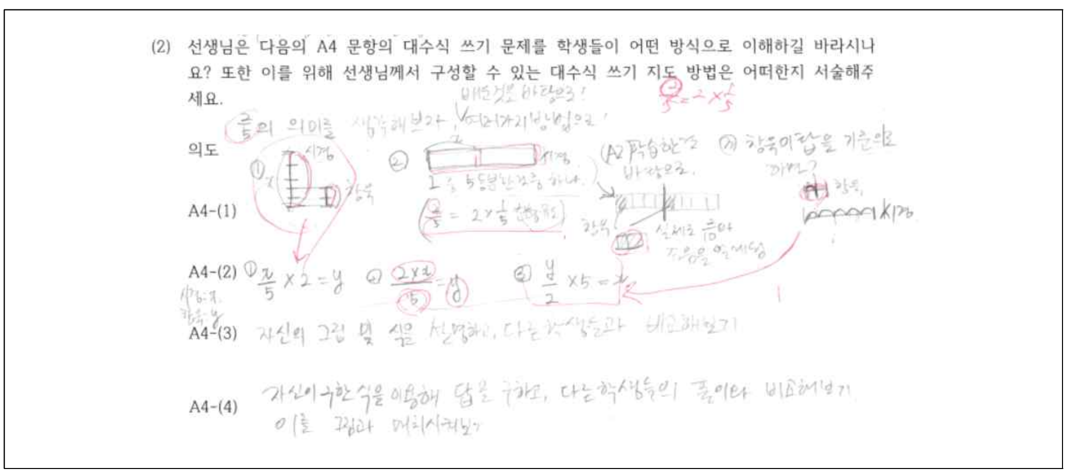
두 명의 수학교사들은 그들이 구상했던 지도 방법에 차이가 있었음에도 공통적으로 자신들이 구상한 지도 방법을 계획을 적용하였을 때 후속 학습에서 계수가 분수가 주어진 문제 상황이거나 보다 복잡한 상황이 주어지는 대수식 쓰기 문제를 해결하는 데 도움이 될 수 있을 것으로 생각하였다. 또한 주어진 문제 상황에서 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계를 대수식으로 표현하는 과정에서 어렵지 않게 연산자 분수와 곱하는 수로서 가분수를 인식할 수 있을 것으로 예상하였다.

2) A교사, E교사

A교사와 E교사가 작성한 T1-(1) 문항의 답안을 통하여서 중학생들이 A1 문항을 처음 접하였을 때 분수가 주어진 문제 상황에 당황스러워 할 것이며, 분수를 계수로 가지는 두 미지의 양을 그림으로 나타내는 것과 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계를 대수적으로 표현하는 것에 어려움과 거부감을 가질 것이라 예상하고 있음을 확인하였다. 또한 기준 단위를 설정하는 것에 어려움을 겪을 수 있음을 우려하고 있었다.

두 명의 수학교사들의 “이 문제에서 $\frac{2}{5}$가 의미하는 것을 알게 하는 것이 수업 목적이에요” 또는 “저라면 진분수 배수(곱하는 수)를 잘 파악하도록 지도할 것 같아요.”와 같은 답변으로부터 그들은 자신이 구상한 지도 방법 적용한 수업을 통하여 학생들이 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계를 파악하고 이를 대수식으로 표현할 수 있길 바라고 있음을 확인하였다. 이와 동시에 주어진 문제 상황에서 곱하는 수와 연산자 분수로서 $\frac{2}{5}$의 의미를 파악하는 것에 목적을 두고 지도 방법을 구상한 것으로 보인다. A교사와 E교사의 T1-(2) 문항의 답안과 면담을 통하여 그들이 구상한 지도 방법은 문제 상황에 대한 다양한 조작 활동 상황을 제공하고, 이를 토대로 대수식을 이끌어 내고자 함을 확인할 수 있었다. 또한 그들은 두 미지의 양을 나타낸 그림을 사용하여 중학생들이 비례 관계를 이해하게 하고 비례식으로도 나타내도록 지도 방법을 구상하였다([Fig. 16] 참고).

이는 그들이 T1-(2) 문항의 답안으로 작성한 지도 방법은 A1 문항에서 A교사와 E교사가 주목하였던 수학적 이해인 MC3 수준 행동 양상의 분할 조작과 반복 조작이 투영된 것으로 보인다. 두 명의 수학교사는 학생들이 자신의 수업을 통하여 곱하는 수와 연산자 분수로서 $\frac{2}{5}$을 인식하고 이를 표현하게 되는데 도움을 줄 수 있다고 주

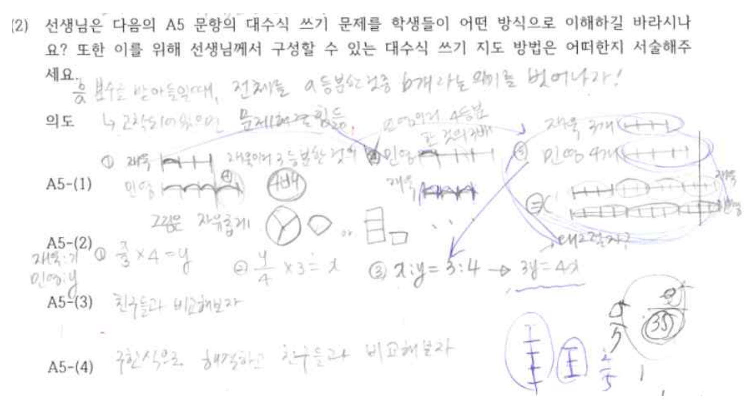


[Fig. 16] Teacher A’s response to the T1-(2)

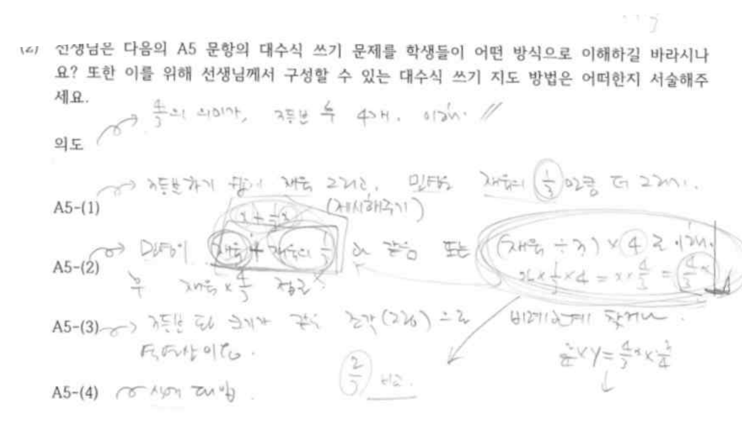
장하였다. 또한 그들은 기준 단위를 설정하여 문제 상황을 그림으로 표현하는 것에 어려움을 겪는 학생들에게 A1 문제 상황을 막대 그림으로 나타내고 시경이의 탑 높이를 기준으로 설정하여 5등분하고, 5등분한 한 조각을 2개를 이어붙이는 활동을 제공하여 기준 단위 설정을 할 수 있도록 할 것이라 답하였다.

A교사와 E교사는 A1-(1) 문항을 해결하는 과정에서 설정하였던 기준 단위를 변경하여 양적 관점에서 대수식을 이끌어내도록 지도하고자 하였다. 그들은 모두 자신들이 구상한 지도 방법을 적용한 수업은 학생들의 문제해결 능력 강화하고, 다른 식으로 표현하는 능력(상호적 추론 능력)을 기르는 데 도움을 줄 것으로 생각하였다. 또한 그들이 작성한 T1-(4) 문항의 답안으로부터 자신들이 구상한 지도 방법은 중학생들이 후에 미지의 양에 곱하는 수가 분수인 대수식을 나타내어야 하는 문제를 해결하는 데 도움을 줄 것이라 예상하고 있음을 확인하였다.

T2-(1) 문항의 답안을 통하여 A교사와 E교사는 A2 문항을 처음 접한 중학생들이 가분수가 주어진 문제 상황에 당황스러워할 뿐만 아니라 가분수를 계수로 가지는 두 미지의 양을 그림으로 표현하고, 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계를 파악하여 대수식으로 표현하는 것에 대한 어려움과 거부감을 가질 것이라 예상하였다. 또한 기준 단위를 설정하는 것에 혼돈을 겪을 수 있음을 우려하고 있었다. 그들은 면담을 통하여 위와 같은 어려움을 갖는 중학생들을 대상으로 하여 A2 문항을 지도하기 위한 방법을 구상하였으며, 자신들이 구상한 지도 방법을 적용한



Teacher A



Teacher E

[Fig. 17] Teacher A's and Teacher E' s responses to the T2-(2)

수업을 통하여 중학생들이 두 미지의 양 사이의 곱셈적 관계를 파악하고 이를 대수식으로 표현할 수 있을 것이라 예상하였다. 이와 동시에 주어진 문제 상황에서 곱하는 수와 연산자 분수 $\frac{4}{3}$의 의미를 파악할 수 있을 것이라 기대하고 있었다. 이를 학습 목표로 둔 A교사와 E교사가 작성한 T2-(2) 문항의 답안에 자신들이 구상한 지도 방법은 문제 상황에 대한 다양한 조작 활동 상황을 제공하고, 대수식을 이끌어 내도록 유도할 것이라 기술하였다([Fig. 17] 참고). 두 명의 수학교사들은 면담 진행 중 자신의 지도 방법을 A2 문항의 문제 상황에서 주어진 두 미지의 양 사이의 관계를 그림으로 나타내고 이것을 비례식으로 세울 수 있도록 지도할 것이라 설명하였다. A교사와 E교사는 학생들이 자신의 지도 방법을 적용한 대수식 쓰기 수업을 통하여 기준 단위를 설정하여 문제 상황을 그림으로 표현하는데 어려움을 겪는 학생들에게 A2 문제 상황을 막대 그림으로 그려 재욱이네 가족의 후원금을 기준으로 하여 3등분하고 그것 중 한 조각을 4개 이어붙이는 활동을 통하여 기준 단위를 파악할 수 있도록 유도하고자 하였다([Fig. 17] 참고). 특히 E교사는 학생들에게 A2 문항을 지도할 때, $\frac{4}{3}x=x+\frac{1}{3}x$로 변형하는 조작에 주의 집중하는 학생들에게 $\frac{4}{3}x=\frac{x}{3}\times 4$의 조작 상황을 생각할 수 있도록 A2 문항 지도 방법을 구상하였다([Fig. 17] 참고).

특히 E교사는 학생들에게 A2 문항을 지도할 때, $\frac{4}{3}x=x+\frac{1}{3}x$로 변형하는 조작에 주의 집중하는 학생들에게 $\frac{4}{3}x=\frac{x}{3}\times 4$의 조작 상황을 생각할 수 있도록 A2 문항 지도 방법을 구상하였다([Fig. 17] 참고). 이로부터 수학교사들이 중학생들에게 A2 문항을 지도하기 위하여 구상한 방법에는 A2 문항에서 그들이 주목하였던 수학적 이해인 MC3 수준 행동 양상의 분할 조작과 반복 조작이 투영되어 있다고 판단하였다. A교사와 E교사는 상호적 추론이 요구되는 A2-(3) 문항은 A2-(1) 문항에서 설정하였던 기준 단위를 변경하는 것을 강조하고 변경된 기준 단위를 조작하여 대수식 $x=\frac{3}{4}y$을 세울 수 있도록 지도하고자 하였다. A교사와 E교사가 작성한 T2-(4) 문항 답안으로부터 자신들이 구상한 지도 방법을 적용한 수업은 학생들의 문제해결 능력 강화하고, 상호적 추론 능력을 기르는 데 도움을 줄 것이며, 또한 가분수인 연산자 분수를 사용하여 대수식을 나타내어야 하는 대수식 쓰기 문제를 해결하는 데 양적 상황에서 생각하는 힘을 길러줄 것이라 예상하였다.

연구 참여자들이 작성한 대수식 쓰기 문제 지도 방법에서 공통적인 행동 양상을 보였던 수학교사들을 분류한 다음, 그들이 보였던 주요 특징들을 정리하였다. 정리된 내용은 아래와 같다([Table 4] 참고).

[Table 4] Mathematical understandings reflected on the pedagogical action of mathematics teachers

Types	Mathematical understandings reflected on the pedagogical action	Teacher
T1	set up referent unit part-whole fraction concept partitioning operation iterating operation (MC2 level action)	-
	set up referent unit part-whole fraction concept partitioning operation iterating operation (MC2/MC3 level action)	C F
	set up referent unit partitioning operation iterating operation (MC3 level action)	A E
T2	set up referent unit part-whole fraction concept partitioning operation iterating operation (MC2 level action)	-
	set up referent unit part-whole fraction concept partitioning operation iterating operation (MC2/MC3 level action)	C F
	set up referent unit partitioning operation iterating operation (MC3 level action)	A E

이는 1차 면담 결과로부터 대수식 쓰기 문제에 대한

수학교사들의 수학적 이해를 정리한 표와 유사하다. 뿐만 아니라 T1 문항과 T2 문항의 구상과정에서 드러나는 교수적 행동에 투영된 수학적 이해의 범주에 해당하는 수학교사들과 A1 문항과 A2 문항을 해결하는 과정에서 나타나는 수학적 이해의 범주에 해당하는 수학교사들은 대응 관계가 있음을 확인하였다([Table 3], [Table 4] 참고).

그러나 C교사가 작성한 T1 문항과 T2 문항의 답안에서 드러나는 교수적 행동에 투영된 수학적 이해는 1차 면담에서 확인했던 A1 문항과 A2 문항의 해결과정에서 C교사가 주목하였던 수학적 이해와 다소 차이가 있었다 ([Table 4] 참고).

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 우리나라 중등학교 수학교사들이 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 주목하고 있는 수학적 이해와 대수식 쓰기 문제를 지도하는 방법에서 드러나는 교수적 행동 사이의 연관성을 확인하는 것에 목적을 둔다. 실험 결과분석을 토대로 내린 결론은 아래와 같다.

첫째, 선행 연구(Choi, 2010; Hackenberg & Lee, 2015; Hackenberg, 2010, 2014, 2016; Lee & Shin, 2011; Lee, 2017)에 대한 문헌 검토와 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 나타나는 수학교사들의 행동 양상을 분석함으로써 3-수준 단위 구조가 내면화되었을 때 확인되는 기준 단위 설정, 분할 조작, 반복 조작을 대수식 쓰기를 위한 KDU로 판단할 수 있었다. 수학교사의 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 특정 수학적 이해의 발현 유무가 그들의 수학적 이해의 구성 여부를 판단할 수 있는 것이 아니다. 이에 본 연구는 수학교사들이 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 주목하는 수학적 이해에 초점을 두고 분석하였다.

1차 면담을 실시하여 수집한 자료를 분석 결과 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 나타나는 수학교사들의 행동을 공통적으로 나타나는 행동의 특징에 따라 분류되었으며, 이로부터 수학교사가 주목하는 수학적 이해는 크게 대수식 쓰기를 위한 KDU를 중심으로 범주화되었다. 특히 자료 분석 결과에 따르면 본 연구에 참여한 4명의 연구 참여자 중 C교사와 F교사가 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 대수식 쓰기를 위한 KDU에 주목하지 않았다는 것은 흥미로운 결과이다.

본 연구를 설계하던 초반, 제1저자가 세웠던 ‘예비 교사와 현직 교사의 교실 수업 경험보다는 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 그들이 주목하는 수학적 이해가 교수적 행동에 더 영향을 미칠 것’이라는 가정을 본 연구의 결과 분석을 통해서 확인할 수 있었다.

실제 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 수학교사들이 주목하는 수학적 이해는 그들이 교실 수업 준비 경험에 영향을 받지 않았다. 오히려 면담을 통하여 과거 초등학교 시절의 수학 수업 등과 같은 개인적인 경험에 많은 영향을 받은 것임을 확인할 수 있었다. 즉, 대수식 쓰기 문항의 해결 방법에서 중요한 역할을 하는 단위 조정과 분수 조작 상황 기회를 충분히 가지는 것은 대수식 쓰기를 위한 KDU를 구성하는 데 핵심적이다.

둘째, 2차 면담을 실시하여 수집한 자료를 분석한 결과로부터 연구 참여자들이 구상한 대수식 쓰기 지도 에서 확인되는 교수적 행동이 그들이 대수식 쓰기 문항을 해결하는 과정에서 주목하였던 수학적 이해를 투영하고 있음을 확인하였다. 수학교사의 수학적 이해가 MKT로 구성될 것이라 보는 Gess-Newsome(1999)의 MKT의 변형적 관점의 한 사례로 들 수 있다. 이는 교사 지식 연구자들이 변형적 관점으로의 MKT에 관심을 두고 연구할 필요가 있음을 암시한다.

또한 선행 연구에서 제언하는 대수식 쓰기 지도 방법(e.g., Choi, 2010; Hackenberg & Lee, 2015; Lee & Shin, 2011; Lee, 2017)과 유사한 지도 방법을 구상한 연구 참여자들은 대수식 쓰기 문제해결 과정에서 대수식 쓰기를 위한 KDU에 주목하고 있음을 확인하였다. 반면에 그렇지 않은 지도 방법을 구상하였던 연구 대상자들은 대수식 쓰기를 위한 KDU에 주목하고 있지 않음을 확인하였다. 이와 같은 연구 분석 결과는 KDU가 수학교사가 가진 특정 수학 개념의 ‘수학적 이해’로부터 ‘영향력 있는 교수학적 이해’로 변형되기 위한 기저라는 선행 연구(Lee & Shin, 2015; Lee & Shin, 2011; Silverman & Thompson, 2008)의 결과와 맥을 같이한다.

본 연구는 수학교사의 대수식 쓰기를 위한 KDU에 초점을 두고 진행한 연구이며, 대수 영역을 비롯한 수학 과목의 여러 영역에서 수학교사의 KDU에 대한 후속 연구가 실행되길 기대하며 다음과 같이 제언한다.

수학적 이해가 실제 영향력 있는 교수적 행동의 변형

되는 과정은 교사의 지식 형성과정으로 볼 수 있다. 교사의 지식 형성과정은 한 인지 주체의 지식 형성과정으로 기존 지식에 기반한 반성 활동을 거쳐 더 높은 수준으로 재구성된다. 특히 수학교사가 구성한 특정 수학 개념의 KDU는 그들이 가진 '잠재적인 교수학적 이해'가 실제 학생들에게 수학 개념을 지도함으로써 작용되는 '영향력 있는 교수학적 이해'로 구성되는데 핵심적인 역할을 할 것이다. 이에 KDU가 예비 교사의 '수학적 이해'가 '영향력 있는 교수학적 이해'로 변형되도록 돕는 예비 교사교육 커리큘럼 개발에 방향을 제시할 수 있을 것으로 보인다.

아울러 대수 교수 학습 상황에서 교사가 학생들이 수학적 개념을 구성하는데 중요한 KDU의 발달을 돕는 과제를 선택하고 수행하면서, 반영적 추상화가 일어날 수 있도록 하는 교수 방법 설계의 기초 자료가 될 것으로 기대된다. 이는 학교 현장의 수학교사들에게 대수식 쓰기의 교수 학습 지도를 위한 참고 자료의 역할, 수학교사의 대수식 쓰기 지도 방법에서 드러나는 교수적 행동을 반성할 수 있는 기준을 제공할 것으로 보인다. 더 나아가 초등학교와 중등학교의 교육과정을 연결하는 대수 학습을 위한 교재 개발에 기여하는 바가 있을 것이다.

마지막으로 학생의 학습 과정에서 핵심적인 역할을 하는 KDU를 MKT의 출발점으로 고려하는 것은 변형적 관점의 MKT 연구의 발전가능성을 시사한다. 그러나 현재 KDU에 대한 연구는 부족한 실정이다. 또한 본 연구도 소수의 수학교사들을 대상으로 진행된 것이며, 교수적 행동을 교사들의 '구상'에만 집중하여 탐색하였다는 점은 연구 결과로부터 얻은 결론을 일반화하기에는 어려움이 있다. 이에 수학교사의 KDU와 관련한 추가적인 연구가 요구되는 바이다. 아울러 대수 영역뿐만 아니라 함수 영역, 기하 영역, 통계 영역 등 수학 과목의 여러 영역에서 수학교사의 KDU를 규명하고, 교사 지식으로서 KDU가 실제 영향력 있는 교수학적 이해로 변형되는 과정에 대하여 보다 많은 연구가 이루어지길 바란다.

참 고 문 헌

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Contents knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.296-333). New York: Macmillan.

Choi, K. (2010). A Study on a fraction Instruction via partitioning and iterating operations. *School Mathematics, 12*(3). 411-424.

Gess-Newsome, J. (1999). Pedagogical content knowledge: an introduction and orientation. In J. Gess-Newsome & N. G. Lenderman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 3-17). Dordrecht: Kluwer Academic.

Hackenberg, A. J. (2005). *Construction of algebraic reasoning and mathematica caring relations.* Unpublished doctoral dissertation, The University of Georgia, Athens.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction, 28*(4), 383-432.

Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 538-563.

Hackenberg, A. J. (2014). *Musings on three epistemic algebraic students.* In L. P. Steffe, K. C. Moore, & L. L. Hatfield (Eds.), Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing (pp. 81-124). Laramie, WY: University of Wyoming Press.

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2015). Relationships between students' fractional knowledge and equation writing. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(2), 196-243.

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2016). Students' distributive reasoning with fractions and unknowns. *Educational Studies in Mathematics, 93*(2), 245-263.

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 1-18.

Han, H. (2016). A study on pre-service mathematics teachers' MKT. *Communications of Mathematical Education, 30*(1), 101-120.

Kang, H., & Choi, E. (2021). Pre-service teachers' errors and difficulties in task modification focusing on cognitive demand. *The Mathematical Education, 60*(1), 61-76.

Kang, H. Y., Go, E. S., Kim, T. S., Jo, W. Y., Lee, K. H., & Lee, D. H. (2011). Mathematics teachers' perspecti- es on competencies for good teaching and perspective teacher education. *School Mathematics, 13*(4), 633-649.

Kang, Y. R., Jo, J. S., & Kim, J. H. (2012). Analysis of elementary teachers' Specialized Content Knowledge (SCK) for the word problems of fraction division. *Communications of Mathematical Education, 26*(3), 301-316.

Kim, H. G. (2012). Elementary pre-service teachers' Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) on number and operations. *Communications of Mathematical Education, 26*(1), 71-84.

Kim, S. H., Shin, J., & Lee, S. J. (2018). A Theoretical analysis of students' solving equal sharing problems with the framework of steffe's partitioning operations and its application. *School Mathematics, 20*(1), 17-42.

Kwon, M. S., Nam, S. I., & Kim, S. R. (2009). Adapting U.S. multiple-choice items to measure Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) in Korea. *The Mathematical Education, 48*(4), 399-417.

Lee, H. M., & Shin, I. (2011). Case study on the fractional scheme for enhancing the connection between the arithmetic and the algebraic thinking. *Education of Primary School Mathematics, 14*(3), 261-275.

Lee, J. R. (2017). *An analysis on the relationships between middle school students' construction of fractional knowledge and algebraic reasoning*. Master's thesis. Korea National University of Education, Cheongju.

Lee, S. J., & Shin, J. (2011). Preservice teachers' Key Developmental Understandings (KDUs) for fraction multiplication. *Journal of the Korean School Mathematics Society 14*(4), 447-449.

Lee. S. J., & Shin, J. (2015). A study on teacher knowledge from an integrative and transformative perspective. In J. H. Kim, & Kwon, N. Y. (Eds.), *Korean Society of Mathematics Education Year Book 2015*(pp. 191-209). Seoul: Kyungmoonsa.

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. Proclamation of the Ministry of Education #2015-75 [Annex 8].

Moon, J. S., & Kim, G. (2015). Measuring and analyzing teachers' Mathematical Knowledge for Teaching [MKT] of functions. *School Mathematics, 17*(3), 469-492.

Park. M. G. (2015). The implications of teacher knowledge studies and the direction of future research. In J. H. Kim, & Kwon, N. Y. (Eds.), *Korean Society of Mathematics Education Year Book 2015*(pp. 223-241). Seoul: Kyungmoonsa.

Shin, J., & Lee, S. J. (2019). Conceptual analysis for solving a missing value problem using a proportional relationship. *Journal of Educational Research in Mathematics, 29*(2), 227-250.

Silverman, J., & Thompson, P. T. (2008). Toward a framework for the development of Mathematical Knowledge for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 11(6)*, 499-511.

Simon, M. A. (2006). Key Developmental Understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 359-371.

Song, G. Y., & Pang, J. S. (2013). Domestic research trends of teacher knowledge in mathematics. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 16*(1), 265-287.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 267-307.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding scheme. Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 237-295.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York, NY: Springer.

Sunwoo, J., & Pang, J. S. (2019). Domestic research trends of mathematics teacher education: Focused on the journals published since 2000 by the Korean Society of Mathematics Education. *The Mathematical Education, 59*(1), 121-138.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics, 25*(3), 165-208.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics(pp 95-113)*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Yi, I., & Cho, S. (2011). Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) in differentiation at the high school level. *Journal of Research in Curriculum Instruction, 15*(2), 391-414.