산업융합연구 제19권 제4호 pp. 23-28, 2021
ISSN 2635-8875 / e-ISSN 2672-0124
DOI : https://doi.org/10.22678/JIC.2021.19.4.023

오일러 방진 게임 퍼즐 규칙 알고리즘

이상운
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 교수

Puzzle Rule Algorithm of Euler Square Game

Sang-Un Lee
Professor, Dept. of Multimedia Engineering, Gangneung-Wonju National University

요 약 본 논문은 미해결 문제로 알려진 36 장교문제($n=6$)와 관련된 오일러 방진 퍼즐 게임 문제에 대해 $n=[3,\infty]$의 문제를 풀 수 있는 일정한 패턴 규칙을 찾고자 시도하였다. 이 문제의 해는 현재까지 $[3,10]$에 대해 $n=6$만 존재하지 않고 나머지 모든 숫자에 대한 해는 존재하는 것으로 알려져 있다. 또한, 기존 연구는 특정 숫자 n에 대해 컴퓨터 프로그램으로 랜덤한 배정 결과를 찾고자 하여 $n=[11,\infty]$에 대해서는 해를 찾기가 쉽지 않아 미해결 과제로 남아있다. 기존 연구는 $n=[3,10]$으로 한정시킨 반면에, 본 논문은 $n=[3,\infty]$영역에서 어떠한 n의 값에 대해서도 해를 찾을 수 있는 일반화된 패턴을 찾고자 시도하였다. 본 논문에서는 $n=odd, 4k\,even,\ 4k+2\,even$의 세 부분으로 분할하여 $n=odd$와 $4k\,even$ $(n/2=even)$에 대한 간단하면서도 일정한 패턴을 찾는데 성공하였다. 그러나 $4k+2\,even(n/2=odd)$에 대해서는 패턴을 찾지 못하였다.

키워드 : 오일러 방진, 홀수, 4k 짝수, 4k+2 짝수, 정규 패턴

Abstract This paper finds the regular pattern of $n=[3,\infty]$ for Euler square game related with $n=6(6\times 6=36)$ thirty-six officer problem that is still unsolved problem. The solution of this problem is exists for $n=[3,10]$ without $n=6$. Also, previous researchers finds the random assigned solution for specific number using computer programming. Therefore, the solution of $n=[11,\infty]$ Euler squares are unsolved problem because of anything but easy. This paper attempts to find generalized patterns for domains that have been extended to $n=[3,\infty]$, while existing studies have been limited to $n=[3,10]$. This paper classify the $n=[3,\infty]$ into $n=odd, 4k\,even,\ 4k+2\,even$ of three classes. Then we find the simple regular pattern solution for $n=odd$ and $4k\,even(n/2=even)$. But we can't find the regular pattern for $4k+2\,even(n/2=odd)$.

Key Words : Euler square, Odd number, 4k even number, 4k+2 oddly even number, Regular pattern

1. 서론

레온하르트 오일러(Leonhard Euler, 1707.4.15. ~ 1783.9.18.)는 기하학, 미적분학, 삼각함수, 대수학, 정수론과 연속체 물리학, 달 운동 등 수학의 모든 분야에서 동시대에 가장 뛰어난 수학자 중 한명이었다. 특히, n개의 정사각형 내에 그리스 문자와 라틴 문자 또는 문자와 숫자 쌍이 가로, 세로 어느 방향으로든 한번 씩만 들어가는 그레코-라틴 방진(Graeco-Latin square)의 오일러 방진(Euler square)을 연구하였으며, 홀수와 $4k,(k=1,2,\cdots)$ 짝수에 대해서는 해가 존재함을 실 예를 들어가며 입증(demonstrated method)하였고, $4k+2(n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4))$는 해가 존재하지 않음을 추측(conjecture)하였다. 이러한 결과는 1984년 일본의 니코리 퍼즐회사가 본격적으로 게임을 만들어 인기를 끌면서 세계로 확산되는 계기를 제공하였다[1].

여기서는 그리스와 라틴 문자의 두 집합 대신에 문자집합(C)과 숫자집합(N)이라고 표현한다. 오일러 방진은 두 집합 C와 N에 n개 순서쌍 (c,n)이 $n\times n$ 정방행렬의 각 셀에 배치를 하는데 있어 $A,B,\cdots,X$와 $1,2,\cdots,n$의 쌍이 행과 열에 한 번씩만 존재하도록 퍼즐을 맞추

*Corresponding Author : Sang-Un Lee(sulee@gwnu.ac.kr)
Received May 27, 2021 Revised June 25, 2021
Accepted August 20, 2021 Published August 31, 2021

는 문제이다[2].

$n=3,4,5$ 오일러 방진 해는 위키피디아에 제시되어 있다[2]. 또한, $n=6,7,8,9$ 오일러 방진의 해를 찾고자 시도하였으나 $n=6$에 대해서는 해를 찾지 못하고 있다[3-6].

$n=6$의 오일러 방진 문제를 36-장교 문제(36 officer problem)이라고 한다[7-8]. 이 문제는 6개 대대(A, B, C, D, E, F)에 대령, 중령, 소령, 대위, 중위와 소위(1, 2, 3, 4, 5, 6) 지휘 장교들로 구성된 군단에 신임 군단장인 소장이 취임식을 갖고자 한다. 이 소장은 취미가 고상하여 6개 대대의 계급별 대표 장교 6명을 차출하여 행과 열에 각 대대와 각 장교들이 중첩되지 않도록 정렬하였을 경우에 한해, 취임식을 거행하고자 하였다. 그러나 이러한 정렬 방법을 찾지 못해 아직까지도 이후로도 영원히 취임식을 거행하지 못할 것으로 판단된다. 왜냐하면, Gaston Tarry는 1901년에 $n=6$에 대해 전수조사법(exhaustion) 조사 결과 해가 존재하지 않음을 증명하였기 때문이다.

$4k+2(n\equiv 2(\bmod 4))$는 해가 존재하지 않을 것이라는 오일러의 추측이 잘못되었음을 증명하기 위해, 1959년 Bose와 Shrikhande[9]은 $n=22$에 대해 해가 존재함을, Parker[10,11]는 $n=10$에 대해 UNIVAC 1206 군용 컴퓨터를 이용해 해가 존재함을 증명하였다.

본 연구 주제는 스도쿠와 유사한 게임분야의 퍼즐 맞추기 게임의 일부 종류로 본 문제를 풀 수 있는 정형화된 규칙을 찾을 수 있다면 컴퓨터 게임분야에 스도쿠와 마찬가지로 하나의 퍼즐 게임 아이템으로 대중화 시킬 수 있다고 생각되어 연구를 수행하게 되었다.

본 논문은 $n=[3,\infty]$에 대한 오일러 방진 해를 찾기 위해 n을 홀수(odd), $k=1,2,\cdots$인 $4k$ 짝수(even)와 $4k+2$ 짝수(oddly even)로 분류하여 퍼즐을 맞추는 패턴을 찾고자 하는데 그 목적이 있다. 짝수를 $4k$와 $4k+2$로 세분화한 이유는 $4k/2$는 짝수, $(4k+2)/2$는 홀수가 되기 때문이다. 따라서 Odd, $4k$ Even과 $4k+2$ Oddly even에 대한 퍼즐 맞추기 패턴을 찾기 위해 2장에서는 오일러 방진에 대한 기존 연구 결과를 고찰해 보고, 3장에서는 Odd와 $4k$ Even에 대한 퍼즐 맞추기 패턴을 제안한다. 4장에서는 3장에서 제안한 Odd와 $4k$ Even에 대한 특정 숫자 몇 개씩에 대한 적용성 여부를 검증한다.

2. 오일러 방진 게임 연구 문제점

$n=3,4,5$에 대한 오일러 방진의 해는 Fig. 1에 제시되어 있다[2].

Aα	Bγ	Cβ
Bβ	Cα	Aγ
Cγ	Aβ	Bα

Order 3

Aα	Bγ	Cδ	Dβ
Bβ	Aδ	Dγ	Cα
Cγ	Dα	Aβ	Bδ
Dδ	Cβ	Bα	Aγ

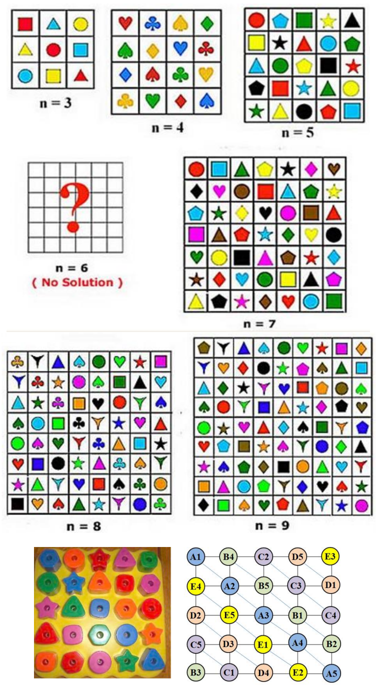
Order 4

Aα	Bδ	Cβ	Dε	Eγ
Bβ	Cε	Dγ	Eα	Aδ
Cγ	Dα	Eδ	Aβ	Bε
Dδ	Eβ	Aε	Bγ	Cα
Eε	Aγ	Bα	Cδ	Dβ

Order 5

Fig. 1. Orthogonal square

또한, $n=6,7,8,9$에 대해 오일러 방진의 해를 찾고자 시도하였다. 그러나 Fig. 2에서 보는 바와 같이 $n=3,4,5,7,8,9$에 대한 해는 존재하는데 반해, $n=6$은 해가 존재하지 않는다[3]. 여기서의 특징은 n이 홀수이면 대각선으로 배치하면 해를 얻을 수 있기 때문에 오일러 방진을 대각 방진(Orthogonal square)이라고도 한다.



$n=5$ diagonalization solution

Fig. 2. The solution of Euler Square

$n=10$에 대한 오일러 방진의 해는 Bright et al.[11]을 비롯하여 다양한 랜덤 배치 패턴이 존재하며, Fig. 3에 제시하였다.

A 1	B 2	C 3	D 4	E 5	F 6	G 7	H 8	I 9	J10
G 4	**C 9**	J 2	E 3	D 1	H 5	F 8	B 7	A10	I 6
F 7	G 1	**E10**	I 2	H 3	D 9	B 5	J 4	C 6	A 8
J 5	F 4	G 9	**H 6**	A 2	B 3	D10	I 1	E 8	C 7
D 6	I 5	F 1	G 10	**B 8**	C 2	J 3	A 9	H 7	E 4
I 3	D 8	A 5	F 9	G 6	**J 7**	E 2	C10	B 4	H 1
H 2	A 3	D 7	C 5	F10	G 8	**I 4**	E 6	J 1	B 9
C 8	E 7	H 4	B 1	J 9	I10	A 6	**D 2**	G 3	F 5
E 9	H10	B 6	J 8	I 7	A 4	C 1	G 5	**F 2**	D 3
B10	J 6	I 8	A 7	C 4	E 1	H 9	F 3	D 5	**G 2**

A 1	E 8	B 9	H 7	C10	J 4	I 6	D 5	G 2	F 3
I 7	**B 2**	F 8	C 9	H 1	D10	J 5	E 6	A 3	G 4
J 6	I 1	**C 3**	G 8	D 9	H 2	E10	F 7	B 4	A 5
F10	J 7	I 2	**D 4**	A 8	E 9	H 3	G 1	C 5	B 6
H 4	G10	J 1	I 3	**E 5**	B 8	F 9	A 2	D 6	C 7
G 9	H 5	A10	J 2	I 4	**F 6**	C 8	B 3	E 7	D 1
D 8	A 9	H 6	B10	J 3	I 5	**G 7**	C 4	F 1	E 2
B 5	C 6	D 7	E 1	F 2	G 3	A 4	**H 8**	I 9	J10
C 2	D 3	E 4	F 5	G 6	A 7	B 1	I10	**J 8**	H 9
E 3	F 4	G 5	A 6	B 7	C 1	D 2	J 9	H10	**I 8**

A1	G 6	B 9	F 3	J 7	C10	E 8	I 2	D 5	H 4
E 6	**B 2**	H 7	C 1	G 4	J 8	D10	F 9	A 3	I 5
B 4	F 7	**C 3**	I 8	D 2	H 5	J 9	E10	G 1	A 6
H 2	C 5	G 8	**D 4**	A 9	E 3	I 6	J 1	F10	B 7
G10	I 3	D 6	H 9	**E 5**	B 1	F 4	A 7	J 2	C 8
J 3	H10	A 4	E 7	I 1	**F 6**	C 2	G 5	B 8	D 9
C 9	J 4	I10	B 5	F 8	A 2	**G 7**	D 3	H 6	E 1
I 7	D 1	J 5	A10	C 6	G 9	B 3	**H 8**	E 4	F 2
F 5	A 8	E 2	J 6	B10	D 7	H 1	C 4	**I 9**	G 3
D 8	E 9	F 1	G 2	H 3	I 4	A 5	B 6	C 7	**J10**

Fig. 3. The solution of $n=10$ Euler Square

종합하면, $4k+2(n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4))$는 해가 존재하지 않을 것이라는 오일러 추측(conjecture)이 틀렸다는 데 초점을 맞추어 $n\geq 10$에 대해 컴퓨터 프로그램으로 랜덤한 배정으로 찾고자 시도하고 있으며, 특정 n에 대한 정형화된 패턴을 찾는 방법은 연구가 되지 않고 있다. 따라서 3장에서는 n이 어떠한 경우에도 적용할 수 있는 오일러 방진 퍼즐 맞추기의 정형화된 패턴을 제안한다.

3. 오일러 방진 퍼즐 맞추기 패턴 알고리즘

본 장에서는 n=odd(홀수)와 n=$4k$ even(짝수)로 구분하여 각각에 대한 오일러 방진 퍼즐 패턴을 제안한다. 제안되는 퍼즐 맞추기 패턴은 초등학생도 이해할 수 있는 수준의 아주 간단한 규칙임을 알 수 있다.

3.1 n=odd(홀수) 퍼즐 패턴

[방법 1]

- 1행 : A1 기준, 보폭 $\{s_C, s_N\}$={1,1} Cycle 순서로 배치(문자와 숫자: 동일 순서 쌍)
- 1열 : 보폭 $\{s_C, s_N\}$={1,2} cycle 순서로 배치(숫자 : 홀수, 짝수)
- [2,n] 행의 [2,n]열 : 보폭 $\{s_C, s_N\}$={1,1} Cycle 순서로 배치

[방법 2]

- 행과 열 Index $i=1,2,\cdots,n$
- 초기치 : 1행 : $A1, B1, \cdots, n1$으로 기준 설정, 2행~n행 : 각 문자의 i 번째 숫자 배치

	Row	Column
Character	OK	**Not OK**
Number	**Not OK**	OK
Char:Num	OK	

- 1열 고정, 2열~n열 : $i-1$ step Up rotation (shifting) [숫자 행 맞춤]

	Row	Column
Character	OK	Not OK
Number	**Not OK**	OK
Char:Num	OK	

- 1행 고정, 2행~n행 : $i-1$ step Left rotation (shifting)[문자 열 맞춤]

	Row	Column
Character	OK	**Not OK**
Number	**OK**	OK
Char:Num	OK	

3.2 n=even(짝수) $4k$ 퍼즐 패턴

- 문자 C, 숫자 N 행렬 : 2개 묶음 단위로 취급
- 1행 : $A, B, \cdots, n$과 $1, 2, \cdots, n$ 배정
- $[2, n/2]$ 행 : 각 묶음 단위가 첫 번째 열 단위에 오도록 Cycle rotation(shifting)
- $[n/2+1, n]$ 행 : C$[1, n/2]$ 행의 값을 역으로 배치

	Row	Column
Character	OK	OK
Number	OK	OK
Char:Num	**Not OK**	

- 문자 A 위치에 대해 숫자 위치 값이 $1, 2, \cdots, n$이 한번 씩만 나오도록 숫자 행 매칭
- N[1,1]은 1로 고정
- N$[n/2, 2]$ 셀부터 우상 대각선 방향으로 N$[2, n/2]$ 셀까지의 값인 $n, n-1, \cdots, n/2+2$를 연속하여 선택
- N$[1, n/2+1]$ 값 $n/2+1$을 n열에서 찾아 좌상 대각선 방향으로 $n/4+1$까지 값을 연속하여 선택
- 미 선택된 $n/4$값을 n행에서 선택, 좌상 대각선 방향으로 2까지 연속 선택
- 문자 C 행렬의 A의 열 위치와 동일하게 N 행렬의 숫자 위치가 일치하도록 N 행렬의 행 변경

	Row	Column
Character	OK	OK
Number	OK	OK
Char:Num	**OK**	

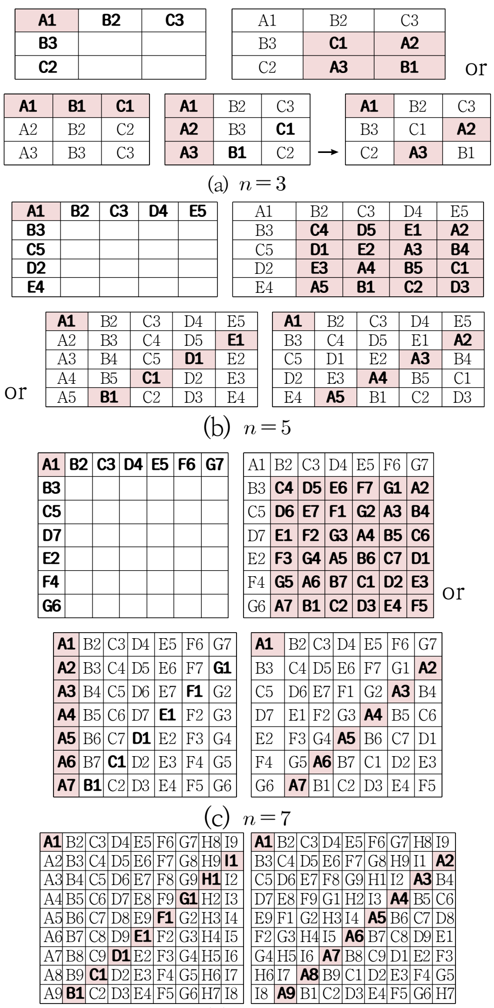
- 문자:숫자 = 정답

4. 적용 및 결과분석

$n=odd$(홀수) 오일러 방진에 대해 제안된 알고리즘을 $n=3,5,7,9$에 적용한 결과는 Fig. 4와 같다. (a)의

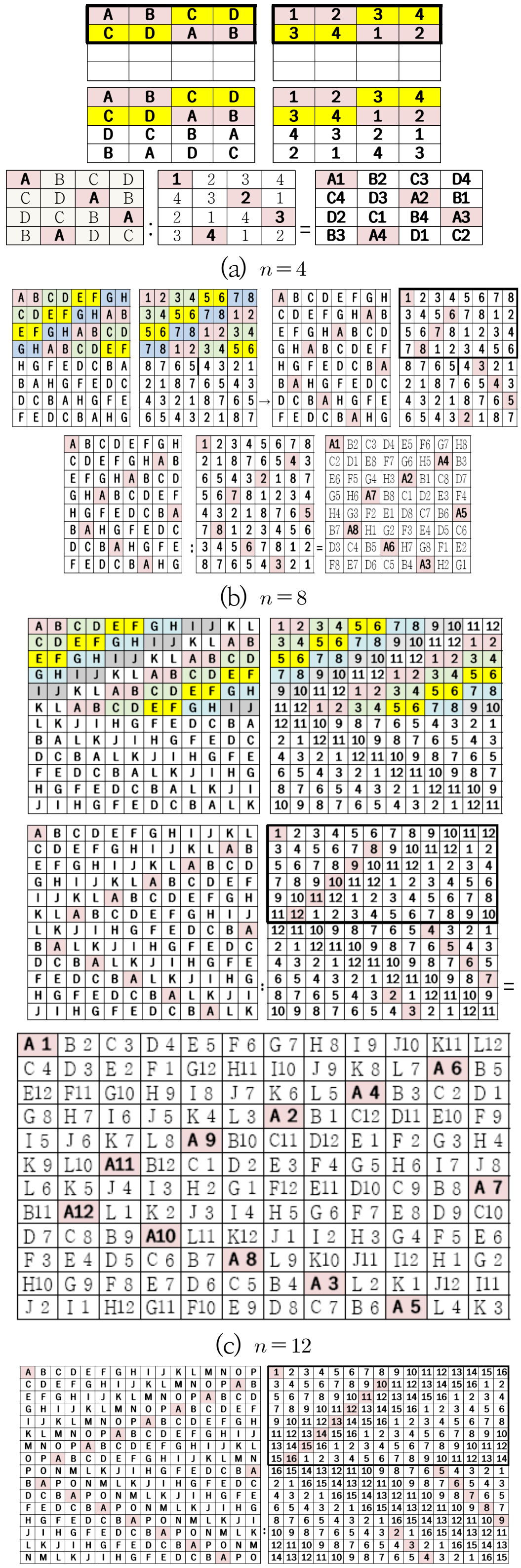
$n=3$을 예로 들면, 3.1절에서 제시한 [방법 1]에 따라 1행과 1열을 배열하고, $[2,n]$ 행의 $[2,n]$열 에 대해 보폭 $\{s_C,s_N\}$={1,1} Cycle 순서로 배치하는 정형화된 패턴으로 해를 쉽게 얻을 수 있었다.

$n=even$(짝수)인 $4k(n/2=even)$ 오일러 방진에 대해 제안된 알고리즘을 $n=4,8,12,16,20$에 적용한 결과는 Fig. 5와 같다. (a)의 $n=4$를 예로 들면, 3.2절에서 제시한 방법의 정형화된 패턴으로 해를 쉽게 얻을 수 있었다.

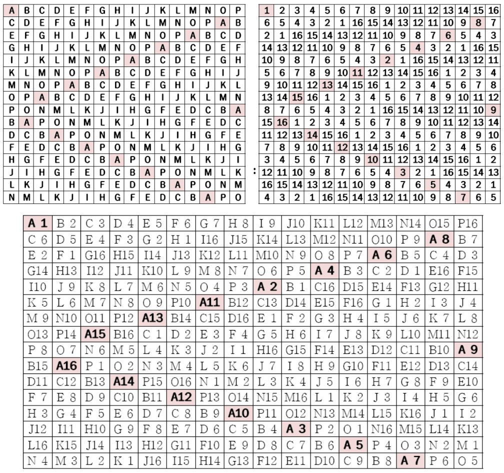


(a) $n=3$ (b) $n=5$ (c) $n=7$ (d) $n=9$

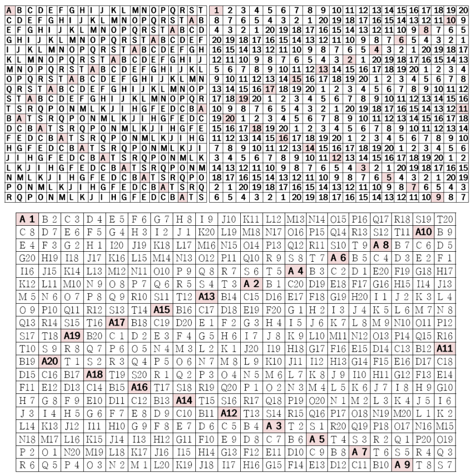
Fig. 4. $n=odd$ Solution of Euler square puzzle



(a) $n=4$ (b) $n=8$ (c) $n=12$



(d) $n=16$



(e) $n=20$

Fig. 5. $n=4k\,even$ **Solution of Euler square puzzle**

5. 결론 및 향후 연구

본 논문에서는 $n=[3,\infty]$의 범위에서 n이 어떠한 수로 주어지든지 상관없이 일반적으로 퍼즐 맞추기 규칙을 적용할 수 있는 오일러 방진 퍼즐 맞추기 패턴을 찾고자 하였다. 그러나 n이 홀수 또는 짝수에 따라 배치할 수 있는 패턴 방식이 달라지기 때문에 n이 홀수나 짝수에 상관없이 오일러 방진 퍼즐에 적용할 수 있는 유일한 패턴은 없는 실정이다.

따라서 본 논문에서 제안된 방법은 $k=1,2,\cdots$에 대해 n을 홀수($4k\pm1$), $4k$ 짝수와 $4k+2$ 짝수로 분류하였으며, 각각에 적합한 패턴을 찾고자 하였다.

다양한 시도 끝에 n을 홀수와 $4k$ 짝수($n/2=$짝수)에 대해서는 3장에서 제안한 알고리즘으로 해를 구하는 일반화된 패턴을 찾았다는데 의의가 있다고 생각된다. 그러나 $4k+2$ 짝수($n=6,10,14,\cdots$)에 대해서는 $n/2=$홀수로 $n=odd$ 또는 $n=4k\,even$ 패턴을 적용할 수 없어 적합한 패턴을 찾지 못하였다.

만약, $n=4k+2(n/2=odd)$ 짝수인 10, 14, 18, …의 패턴을 찾을 수 있다면, $n=6$인 36-장교문제의 해가 존재하지 않음을 검증할 수 있을 것이다. 따라서 $n=4k+2\,even$의 오일러 방진 패턴은 추후 계속적으로 연구할 예정이다.

REFERENCES

[1] Wikipedia. (2020). Leonhard Euler. https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

[2] R. J. Martin & S. Nadarajah, (2014). Wiley StatsRef: Graeco-Latin Square Designs. John Wiley & Sons, Ltd.
DOI : 10.1002/9781118445112.stat05895

[3] T. Phillips & S. Brook. (2016). *Latin Squares in Practice and in Theory.* American Mathematical Society. http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-latinii1

[4] S. T. Dougherty. (1994). A Coding-Theoretic Solution to the 36 Officer Problem. Designs. *Codes and Cryptography, 4(2),* 123-128.
DOI : 10.1007/BF01578866

[5] D. Klyve & L. Stemkoski. (2006). Greaco-Latin Squares and a Mistaken Conjecture of Euler. *College Mathematics Journal, 37(1),* 2-15.
DOI : 10.2307/27646265

[6] D. A. Preece & B. J. Vowden. (1995). Graeco-Latin Squares with Embedded Balanced Superimpositions of Youden Squares. *Discrete Mathematics, 138(1-3),* 353-363.
DOI : 10.1016/0012-365X(94)00217-7

[7] C. Bright. (1996). Finding Graeco-Latin Squares. Maplesoft.
https://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=154499

[8] J. H. Lint, R. M. Wilson & R. M. Wilson. (2001). A Course in Combinatorics: 22. Orthogonal Latin Squares. Cambridge University Press. ISBN:9780521006019

[9] R. C. Bose, S. S. Shrikhande & E. T. Parker. (1960). Further Results on the Construction of

Mutually Orthogonal Latin Squares and the Falsity of Euler's Conjecture. *Canadian Journal of Mathematics, 12,* 189-203.
DOI : 10. 4153/CJM-1960-016-5

[10] E. T. Parker. (1959). Orthogonal Latin Squares. *Proceedings of National Academy of Sciences of the U.S.A, 45(6),* 859-862.
DOI : 10.1073/pnas.45.6.859

[11] C. Bright, J. Gerhard, I. Kotsireas & V. Ganesh. (2019). Effective Problem Solving using SAT Solvers. *Proceedings of the Maple Conference, Sep. 2019,* arXiv:1906.06251v2

이 상 운(Sang-Un Lee) [정회원]

· 1987년 2월 : 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
· 1997년 8월 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
· 2001년 2월 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
· 2003년 3월~2004년 3월 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
· 2004년 4월~2007년 3월 : 국립원주대학 여성교양과 조교수
· 2007년 3월 ~ 2015년 3월 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
· 2015년 4월~현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
· 관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 분석과 설계 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 최적화 알고리즘
· E-Mail : sulee@gwnu.ac.kr