

# 복합재료 회전체의 휨진동에 관한 연구

박승진\*, 이승현\*\*

## A Study on Bending Vibration of Laminated Rotating Disc

Park, Sung-Jin\*, LEE, Seung-Hyeon

**Abstract** : In this study, the vibration characteristics were theoretically analyzed by modeling a free isotropic rotating disk with an outer periphery with a fixed inner periphery, paying attention to disks used as storage devices for information devices, especially magnetic disks, magneto-optical disks, and compact disks in which the head and disk are non-contact. Illuminate with Composite materials represented by fiber-reinforced plastics (FRP) have high specific strength (strength/density) and specific stiffness (narrowness/density). It is used in the elements, and its use is rapidly expanding. Under this circumstance, the disk currently manufactured using an isotropic material made of various plastic materials such as aluminum or polycarbonate as a base material is an extremely anisotropic material made of a composite material, and the circumferential stiffness of the disk is made of reinforcing fibers in the circumferential direction. It is modeled as an anisotropic rotating disk with increased , and its influence on the vibration characteristics is revealed.

**키 워 드** : 회전원판, 복합재료, 휨진동

**Key Words** : Rotating Disc, Laminated, Bending Vibration

## 1. 서 론

### 1.1 연구의 배경 및 목적

최근 과학기술의 발전으로 인해 기술 혁신은 괄목할 만한 성장이 이루어 지고 있으며, 정보화 시대 인터넷에 대표되는 각종 네트워크가 비약적으로 확충해 왔다. 멀티미디어 시대의 현대사회에서 정보기기 산업에서는 이 같은 사회의 요구에 따라 기기의 소형 고성능화, 고속처리화, 경량화가 급속히 진행되고 있다. 오래전부터 기본 구조요소로서 다양하게 이용된 회전원판은 대형 계산기로부터 퍼스널 컴퓨터에 이르는 각종 컴퓨터에서 정보의 기억·저장 장치의 주요 요소로 사용 되어 왔다. 대표적으로 하드 디스크 장치(HDD)나 플렉시블 디스크 장치(FDD)에 내장되는 자기디스크나 플로피 디스크, CD-ROM 장치나 광자기 디스크 장치(MO)에 사용되는 콤팩트 디스크, 광자기 디스크 등과 각종 원판이 사용되고 있다. 이들에서 다루어지는 정보는 문자·음성·화상·동영상 등이며 그 데이터량은 점점 증가하고 있다. 최근 기억장치는 방대한 정보량을 취급하기 때문에 정보가 고밀도화되고 데이터 입출력 시 접근시간 단축때문에 디스크의 회전 속도가 점점 고속화하고 있다.

하드 디스크 장치는 고정된 교환 불가능한 정밀디스크를 사용하기 때문에 고속회전 영역에 있어서 데이터의 로딩 및 신뢰성도 향상되고 있다. 이에 대해 CD-ROM 장치에서 사용하는 디스크는 쉽게 교환 가능하며 서로 다른 디스크를 사용하기 때문에 회전축 중심과 디스크 중심의 차이, 디스크의 변이나 불균일한 두께 등이 원인이 되어 발생하는 관성력에 의한 진동을 유발한다. 예전에는 회전수가 500rpm 이었지만 현재는 5000~6000rpm의 속도로 회전하며 픽업 위치에 따라 디스크의 회전수가 변화하는 등 많은 진동 유발 요인을 지니고 있다. 이와같은 고속회전 영역에서 디스크 자체의 동적 특성으로서 회전판의 면외방향의 휨진동에 의한 불안정 현상이 자주 발생하게 된다. 그 결과 기록재생 에러의 신뢰성 저하, 디스크나 헤드의 손상 등의 문제가 발생하게 되었다. 또한 계산기를 포함한 이들 기기는 소형 경량화되어 자동차나 비행기 및 로켓 등에 탑재되었으며, 이와같은 환경에서는 엔진이나 주행시의 진동이나 충격 등 외부로부터의 가진력이 디스크에 작용하고 경우에는 공진현상을 일으키는 등 상태가 좋지 않은 상황에 놓이게 되었다. 고밀도화되어 고속회전하고 있는 디스크의 1트랙을 헤드가 정확하게 추적하는 위치 결

\* 인천대학교 도시과학대학 도시공학과 교수

\*\* 인천대학교 도시과학대학 도시건설공학과 대학원

정 제어는 매우 정밀한 기술이 필요로 하기 때문에 그 모체인 디스크가 진동을 수반하지 않는 안정된 회전이 필요하게 된다. 그러므로 정보기기에 있어서 회전원판의 동적거동이나 진동특성을 정확하게 파악한다는 것은 매우 중요한 과제다.

본 연구에서는 정보기기의 기억장치로 사용되는 디스크 특히 헤드와 디스크가 비접촉인 자기 디스크, 광자기 디스크 및 콤팩트 디스크에 주목하여 이들 내주가 고정된 외주로 자유로운 등방성의 회전원판을 모델화하여 진동 특성을 이론적으로 밝힌다. 섬유 강화 플라스틱(FRP)으로 대표되는 복합재료는 높은 비강도(강도/밀도)와 비강성(협성/밀도)을 가지고 있으며, 기계의 고성능화, 경량화를 위해 첨단 공업 재료로서 등방성 재료를 대신하여 많은 구조 요소에 사용되고 있으며 그 용도는 급속히 확대되고 있다. 이러한 상황으로 현재 알루미늄이나 폴리카보네이트 등의 각종 플라스틱 재료 이루어진 등방성 재료를 모재로 하여 제작되어 있는 디스크를 복합재료로 만든 극이방성 재료로 모재를 사용하여 디스크의 원주 방향으로 강화 섬유로 이루어진 원주 방향의 강성을 높인 이방성 회전 원판으로서 모델화하여 그 진동 특성에 대한 영향을 밝힌다.

또한 회전 원판이 정지 상태에서 임의의 회전수로 바뀔 때 각가속도는 일정하다고 간주하며, 원판의 동적 거동을 위해 각가속도로 가속되는 원판을 등방성의 각속도에 대한 원판의 동적거동의 이론 해석을 실시한다. 해석결과에 따라 수치 해석을 실시하여 고유원진동수, 구동점 임피던스 및 진동모드 등을 구하고, 각속도, 각가속도, 내부 감쇠 등의 파라미터가 등방성 회전원판의 진동특성에 미치는 영향을 회전원판에 대한 안정성을 갖는 수치해석의 타당성을 검증하였다.

## 2. 등방성 회전체의 이론해석

극이방성 회전원판의 진동을 해석에서 기초자료를 제공하기 위해 우선 기본적인 회전원판의 진동특성에 대해 Fig 1.에서 보인 등방성 회전원판의 진동해석을 실시한다. 해석으로는 판두께가 일정한 박육 회전원판에 대한 탄성이론에 의거하여 공간에 고정된 정지좌표 공간상의 기초식을 유도한다. 관성력과 원심력의 영향을 고려한 힘의 평형방정식과 복소 탄성율을 이용하여 내부 (구조) 감쇠를 고려한 운동방정식을 해석하는 것으로서 일정 각속도로 회전하는 경우와 일정 각가속도로 가속되는 경우의 고유치 해석과 정상 응답해석을 실시한다.

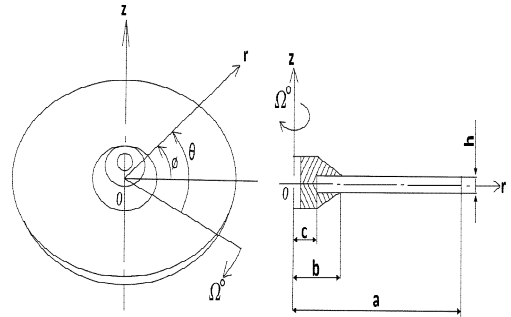


Fig 1. 회전원판 좌표계

### 2.1 진동수방정식

회전원판의 운동방정식, 응력성분과 면외방향 변위함수에 의해 외력이 작용하지 않은 경우에 대해서 운동방정식을 유도하고 진동수 방정식을 구한다. 또한 외력에서 공간으로 고정된 한점  $(\xi_0, \phi_0)$ 에서 조화 기진력이 원판에 작용하는 경우의 정상 응답해석을 해석하고 무차원 변위와 전달함수를 구한다.

운동방정식의 우변을 0으로 하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left( C_{mn}(\tau) \cos(n\phi) + S_{mn}(\tau) \sin(n\phi) \right) (1+i\delta_E) \xi \nabla^4 R_{mn}(\xi) + \left[ \left\{ \frac{\partial^2 C_{mn}(\tau)}{\partial \tau^2} + 2n\Omega \frac{\partial S_{mn}(\tau)}{\partial \tau} - n^2 \Omega^2 C_{mn}(\tau) \right\} \cos(n\phi) + \left\{ \frac{\partial^2 S_{mn}(\tau)}{\partial \tau^2} - 2n\Omega \frac{\partial C_{mn}(\tau)}{\partial \tau} - n^2 \Omega^2 S_{mn}(\tau) \right\} \sin(n\phi) \right] \xi R_{mn}(\xi) - \left\{ C_{mn}(\tau) \cos(n\phi) + S_{mn}(\tau) \sin(n\phi) \right\} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{mn}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{n^2}{\xi} \sigma_{\phi} R_{mn}(\xi) \right] \right\} = 0$$

$$\nabla^4 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]^2$$

.....(1)

식(1)의 해를 갤러킨법을 적용하여 구하고, 식(1)에  $R_{ql}(\xi) \sin(n\phi)$ ,  $R_{ql}(\xi) \cos(n\phi)$ 을 곱하고  $\xi$ 에  $\epsilon \sim 1$ 까지  $\phi$ 에  $0 \sim 2\pi$ 까지 적분한다. 또한  $\phi$ 에 대해  $0 \sim 2\pi$ 로 적분한 결과는  $l=0$ 과  $l \neq 0$ 으로 하면, 절원의 급수의 항수  $m$ 을  $M$ 까지로 하고 절점 직경을  $n=1$ 로 하여 고유진동모드의 직교성은 식(1)에서 식(2)을 구할 수 있다.

$$\sum_{m=0}^M \zeta_1 \left( I_{qml}^{(1)} \frac{\partial^2 C_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} - I_{qml}^{(2)} \frac{\partial S_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qml}^{(3)} C_{ml}(\tau) \right) = 0$$

$$\sum_{m=0}^M \zeta_2 \left( I_{qml}^{(1)} \frac{\partial^2 S_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} + I_{qml}^{(2)} \frac{\partial C_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qml}^{(3)} S_{ml}(\tau) \right) = 0$$

.....(2)

$$I_{qml}^{(1)} = \int_{\xi}^l \xi R_{ml}(\xi) R_{ql}(\xi) d\xi, \quad I_{qml}^{(2)} = 2l\Omega I_{qml}^{(1)}$$

$$I_{qml}^{(3)} = (1+i\delta_E) \int_{\xi}^l \xi \nabla^4 R_{ml}(\xi) R_{ql}(\xi) d\xi - (l\Omega)^2 I_{qml}^{(1)}$$

$$- \int_{\xi}^l \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{ml}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{l^2}{\xi} \sigma_{\varnothing} R_{ml}(\xi) \right) R_{ql}(\xi) d\xi$$

식(2)를 전개하여 벡터와 매트릭스를 사용하여 정리하면 운동방정식 식(2)은 식 (3)으로 나타낼 수 있다.

$$[A] \ddot{x}(\tau) + [B] \dot{x}(\tau) + [C] x(\tau) = 0$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \zeta_1 I_{qml}^{(1)} & 0 \\ 0 & \zeta_2 I_{qml}^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \zeta_1 I_{qml}^{(2)} \\ \zeta_2 I_{qml}^{(2)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \zeta_1 I_{qml}^{(3)} & 0 \\ 0 & \zeta_2 I_{qml}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$x(\tau) = \begin{Bmatrix} C_{ml}(\tau) \\ S_{ml}(\tau) \end{Bmatrix}$$

$m, q = 0, 1, 2, \dots, M, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L$

여기서,  $\dot{\phantom{x}}$  은 무차원 시간  $\tau$ 에 대한 미분을 나타낸다. 식(2)의 해를  $\{x(\tau)\} = \{X\} e^{i\psi\tau}$ 로 하고,  $\Psi$  은 회전원판의 고유원 진동수  $\omega_n$ 을 다음 식으로 무차원화 한 값이다. 이러한 해를 식(2)에 대입하면 식(3)를 구할 수 있다.

$$[[C] + i\Psi[B] - \Psi^2[A]]\{X\} = 0$$

$$\Psi^2 = \frac{\rho h a^4 \omega_n^2}{D}$$

.....(3)

따라서 무차원 고유원 진동수  $\Psi$ 는 임의의 일정 각속도  $\Omega$ 에 대해 위 식의 진동수 방정식을 유도하면 구할 수 있다.

### 2.2 정상응답해석

회전원판에 외력  $P(\xi, \phi, \tau)$ 이 작용하고 있을 때 운동방정식에 고유치 해석을 해석 한 것과 마찬가지로 변위 근사함수인 갤러킨법을 적용한다. 또한 급수의 항수를  $M+1$ 으로 하여 모드의 직교성으로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$[A] \{\ddot{x}(\tau)\} + [B] \{\dot{x}(\tau)\} + [C] \{x(\tau)\} = \{Q(\tau)\}$$

$$\{Q(\tau)\} = \begin{Bmatrix} \int_0^{2\pi} \int_{\xi}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\xi}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) d\xi d\phi \end{Bmatrix}$$

$m, q = 0, 1, 2, \dots, M, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L$

.....(4)

회전원판의 조화외력  $\{Q(\tau)\} = \{q\} e^{i\lambda\tau}$ 일 때, 운동방정식 (4)의 해를  $\{x(\tau)\} = \{X\} e^{i\lambda\tau}$ 로 각각 대입하여 정상응답을 구하면 다음 식으로 나타낼 수 있다. 여기서  $\lambda$ 은 조화 외력의 무차원 기진원 진동수를 나타낸다.

$$\{x(\tau)\} = [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{q\} e^{i\lambda\tau}$$

.....(5)

크기  $F$ 의 외력  $F e^{i\lambda}$ 이 공간에 고정된 정지 좌표계의 한 점  $(\xi_0, \phi_0)$ 에서 회전하는 원판에 작용하는 경우 식(5)의 일반력  $\{Q(\tau)\}$ 은 디랙의 델타 함수를 이용하면 식(6)의 벡터로 나타낼 수 있다.

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) \xi d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) \xi d\xi d\phi \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} F R_{ql}(\xi_0) \cos(l\phi_0) \xi_0 \\ F R_{ql}(\xi_0) \sin(l\phi_0) \xi_0 \end{Bmatrix}$$

$$= F \{p\}$$

.....(6)

식(6)으로 근사한 면의 방향변위  $u(\xi, \phi, \tau)$ 의 급수 항수를 절점 직경에 대해  $n=0 \sim L$ 까지 중첩시켜 절점 원에서  $m=0 \sim M$ 으로 하며 벡터의 형식으로 변환하면 식(7)이 된다.

$$u(\xi, \phi, \tau) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \{\cos(n\phi) \sin(n\phi)\} \{x(\tau)\} R_{mn}(\xi)$$

.....(7)

식(6)에 식(7)을 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{u(\xi, \phi, \tau)}{F} = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \{\cos(n\phi) \sin(n\phi)\} \dots \dots \dots (8)$$

식(8)은 공간으로 고정된 정지 좌표계의 한 점  $(\xi_0, \phi_0)$ 에서 조화 기진된 회전 원판의 무차원 변위이다. 물체에 힘이 작용하면 물체는 변위, 속도, 가속도 등이 생기며 일반적으로 이러한 입력과 출력의 비율, 즉 현상의 전달 상태를 나타내는 함수를 전달함수라고 하며 컴플라이언스(변위 / 힘), 모빌리티(속도 / 힘), 액셀러레이턴스(가속도 / 힘), 동적 강성(힘 / 변위), 구동점 임피던스(힘 / 속도), 동적질량(힘 / 가속도)가 있다.

본 논문에서는 공간에 고정된 정지 좌표계의 임의 한 점  $(\xi_0, \phi_0)$ 에서 작용하는 조화 기진력과 그 점에서 속도와의 비인 구동점 임피던스를 구한다. 조화 기진력을 크기  $F^*$ 의 외력  $F^* e^{i\omega t}$ 로 나타내며, 임의 한 점  $(\xi_0, \phi_0)$ 이 작용할때 그 점에서의 변위를  $u^*$ 라고 하면 구동점 임피던스  $Z$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$Z = \frac{F^* e^{i\omega t}}{\partial u^* / \partial t} \dots \dots \dots (9)$$

단, \*는 유차원량을 나타내며,  $u^* = au$ ,  $F^* = (D/a^3)F$ 라고 하면 공간으로 고정된 정지 좌표계의 임의 한 점  $(\xi_0, \phi_0)$ 에서 무차원화한 구동점 임피던스는 다음 식으로 표시된다.

$$\left| \frac{Z}{i\omega M_S} \right| = \left| \frac{1}{\pi(1-e^2)\lambda^2 S_I} \right| \dots \dots \dots (10)$$

여기서  $M_S$ 는 원판의 질량이다.

### 3. 등방성 회전원판의 진동특성

#### 3.1 수치해석 해의 수렴

힘의 평형방정식과 회전원판의 운동방정식은 면의방향 변위를 급수로 나타내는 함수로 근사하고 갤러킨법을 적용하여 해를 구하였다. 따라서 구한 이론식으로 부터 수치해석에 의해 해를

구한 경우 일반적으로 그 항수를 크게 하면 해석된 해는 정밀해로 수렴해 가고 있다.

따라서 본 수치해석에서 해의 수렴성을 알아보기 위해 회전하지 않은 원판에 대해 진동수방정식을 해석하고, 급수의 항수( $M$ )을 변화 시켰을 때 각 진동 모드에 대한 고유원 진동수를 해석하였다.

수치 계산에 의해 구한 고유원 진동수의 값과 정밀해로 구해진 고유원 진동수와 비교함으로써 해의 수렴성을 검토하였다.

Table 1은 회전하지 않은 원판의 각( $m, n$ )모드의 무차원 고유원진동수( $\psi$ )를 급수의 항수( $M$ )을 2~6으로 변화시켜 해석한 결과이며, 원판의 형상 치수, 재료 물성치 등의 값은 식(11)에 나타낸 각 값을 사용하였다.

Table 안의 각 수치는 식(12)를 이용해 무차원화 한 원판의 고유원진동수이다. 표 안의 항수 아래에 적혀진 숫자  $6 \times 6, \dots$ 는 항수로 전개했을 때의 진동수방정식이 6행 6열, ...의 행렬식이 되는 것을 나타낸다.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = 0.3, \eta = 0.3 \\ \delta_E = 0.0, \Omega = 0.0, \nu = 0.3 \end{array} \right. \dots \dots \dots (12)$$

$$\psi^4 = \frac{\rho h a^4 \omega_n^2}{D}$$

Table 1에서 알 수 있듯이 해석된 Takashi 등이 구한 정밀해를 비교하면, (0.1)모드~(1.5)모드의 고유원진동수는  $M=5$ 에서 충분히 수렴하고 있다. 이상의 결과로부터 이후의 수치계산에서는 모두  $M=5$ 로 계산하였다.

표 3.1. 무차원 고유원 진동수의 수렴여부

$M$		2	3	4	5	6	(34)
$m$	$n$	6×6	8×8	10×10	12×12	14×14	Takashi
0	1	2.564	2.560	2.560	2.560	2.560	2.560
	2	2.827	2.822	2.821	2.821	2.821	2.821
	3	3.648	3.645	3.644	3.644	3.644	3.644
	4	4.700	4.699	4.698	4.698	4.698	4.698
	5	5.794	5.793	5.793	5.793	5.793	5.793
1	1	6.693	6.683	6.681	6.681	6.681	6.681
	2	7.152	7.142	7.139	7.138	7.138	7.138
	3	7.892	7.883	7.879	7.878	7.877	7.877
	4	8.852	8.845	8.840	8.839	8.839	8.839
	5	9.952	9.946	9.940	9.939	9.939	9.939
2	1	11.244	11.220	11.218	11.218	11.217	11.217
	2	11.553	11.540	11.539	11.537	11.536	11.536
	3	12.078	12.077	12.075	12.072	12.070	12.070
	4	12.826	12.819	12.818	12.811	12.809	12.809
	5	13.796	13.741	13.739	13.728	13.726	13.726

3.2. 고유원진동수와 각속도와와의 관계

Fig 2는 각 매개변수를 식(12)로 설정하여 진동수 방정식을 해석하고 각각의 각속도에 대한 무차원 고유원진동수를 나타내었다. 세로축은 무차원 고유원 진동수( $\Psi$ ), 가로축은 무차원각속도( $\Omega$ )으로 0~12까지 구한 것으로, 절점직경에 관해서는  $L=9$ 까지 계산하였고, 그림에서 보인  $(m, n)$ 은 앞의 숫자가 절점 원의 수, 뒤의 값이 절점직경의 수를 의미하며, 각각  $m, n$ 개일 경우의 고유진동모드를 나타내고 있다. 실선은 절점원을 가지지 않는( $M=0$ ) 고유진동모드의 경우에 대응하고, 일점 쇄선은 절점원이 1개( $M=1$ )인 고유진동모드일 경우 무차원 고유원진동수를 나타낸다.

$$\begin{cases} \epsilon = 0.3, \eta = 0.3 \\ \delta_E = 0.0, \end{cases} \dots\dots\dots(13)$$

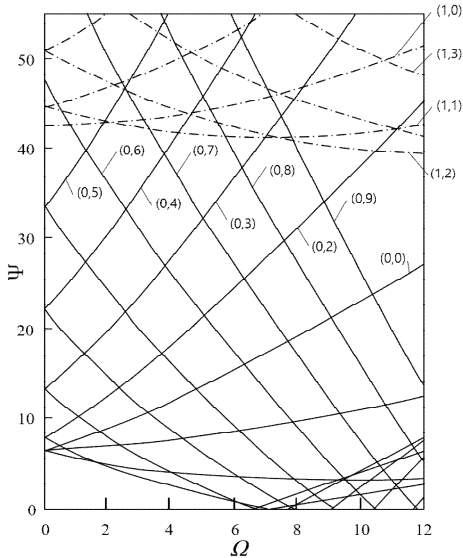


Fig 2. 무차원 원형 진동 고유 진동수와 각도와의 관계  
 ————— : 절점이 없는 고유진동모드  
 - - - - - : 절점을 1개 가진 고유진동모드

절점원을 가지지 않는 고유진동모드의 고유진동수  $\Psi$ 은 0에서 높은 진동수까지 넓은 범위에 걸쳐 분포하고 있으며, 일점쇄선으로 나타나는 절점원의 고유원진동수는  $\Psi$ 이 높은 영역으로만 나타나고 있다. 이는 공학적으로 문제가 되는 고유원진동수는 절점직경과 절점원을 갖지 않는다.  $(0,0)$ 의 고유진동모드와 절점직경만을 가지는 고유진동모드  $(0,n)$ 이라 할 수 있다. 따라서 이하에서는 절점원을 가진 진동모드에 대해 생각하지 않고 수치해석 결과는  $(0,0), (0,n)$ 모드의 결과만 표시하는 것으로 한다.

$(0,0)$ 모드의 고유원진동수는 각속도가 증가함에 따라 단조롭게 증가하며, 절점직경만을 가진 진동모드의 고유원진동수는 회전하고 있지 않는 경우 ( $\Omega=0$ )에는 각 모드에 대해 한 개가 존재하지만 원판이 회전함으로써, 고유원진동수가 2개 존재하게 된다. 이것은 공간으로 고정되어 정지 좌표계에서 고유원진동수를 관측하기 위해서 발생하는 현상으로 설명할 수 있다. 원판과 함께 회전하는 회전 좌표계의 고유원진동수는 각 고유진동모드에 대해 하나 존재한다. 하지만 공간으로 고정된 정지좌표에서 봤을 경우, 원판의 면내를 회전방향으로 전파하는 파는 그 전파속도가 원판의 회전각 속도만큼 누적된다. 반대로 회전방향과 반대방향으로 전파되는 파의 속도는 감소된다. 이와같은 일종의 도플러효과에 의해 회전원판의 고유원진동수는 2개 존재하게 된다. 또한 고유원진동수가 높은 쪽의 진동모드는 절점직경이 시간이 지남에 따라 원판의 회전방향과 같은 방향으로 회전하는 진동모드가 되고, 낮은 쪽의 진동모드는 회전방향과 반대로 회전하는 진동모드가 된다. 그리고 이러한 진동모드에서의 고유원진동수에서는 각각 진행파, 후퇴파의 진동수라고 부르기로 한다. 또한 절점직경이 2개 이상 있는 모드의 후퇴파의 진동수는 각속도가 증가함에 따라 감소하고 거의 0이 되며 이후 다시 증가한다. 이 진동수가 0이 되는 각속도를 위험 속도라고 하며  $(0,n)$ 모드의 진행파와 후퇴파의 진동수를 합하여  $n$ 차 고유진동수 곡선이라고 부르기로 한다. 위와 같이 회전원판의 고유원진동수는 각각 각속도에 대해 넓은 진동수 범위로 분포하고 있다. 이에 따라 외력의 진동수가 고유원진동수를 통해 공진현상을 일으키는 불안정 영역이 많이 존재한다. 특히  $\Omega=6.5$ 를 넘어서면 비교적 진동수 낮은 영역에서는 위험 속도를 통과하고 증가한 후 후퇴파의 고유원진동수와 위험속도 통과전에 감소하는 후퇴파의 고유원진동수가 중첩된 상태가 되어 공진상태가 발생하기 쉬운 항상 불안정 현상이 되는 영역이라 할 수 있다.

Fig 3은 원판을 모터의 축에 고정하는 허브의 영향을 조사하기 위해 이론상 허브가 없는 경우와 허브를 설치 한 경우 각각의 고유 진동수 곡선을 해석하여 Fig.2와 동일하게 나타내었다. 실선으로 나타낸 고유 진동수 곡선은 허브가 없을 경우에 대응하며, 허브의 영향을 고려하여 계산한 결과를 일점 쇄선으로 나타내었다. 원판에 회전축의 끼워 맞춘 구멍의 직경과 허브의 외경의 차이가 커지게 되면각속도의 작은 범위에서는 고유진동수  $\psi$ 의 차이는 그다지 없지만 각속도가 커지면 그 차이는 커지게 된다. 또한 절점직경의 수가 증가하면 그 차이는 확대된다. 그리고 허브의 영향을 고려했을 때 위험 속도의 값은 허브가 없을 때의 값보다 작아진다.

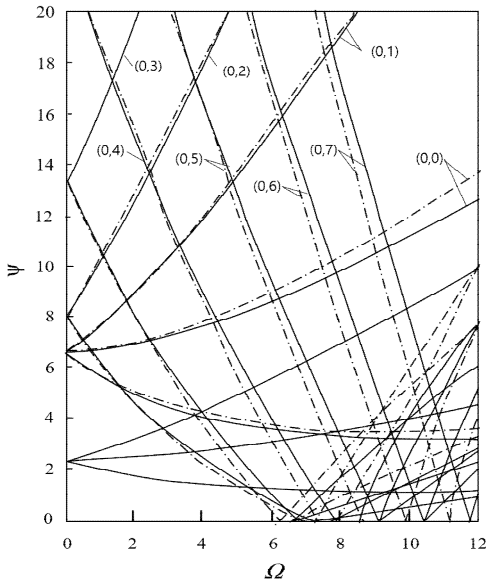


Fig 3..무차원 원형 진동 고유 진동수와 각 연속도와의 관계  
 ————— :  $\epsilon = 0.3, \eta = 0.2$   
 - · - · - · - · - · :  $\epsilon = 0.3, \eta = 0.15$

**3.3. 구동점 임피던스 진동모드**

Fig 4. ~ 6에 각속도  $\Omega$ 가 1.0, 2.0, 3.00일 때의 구동점 임피던스 수치를 나타낸다. 각 매개변수는 절점직경에 대해서는  $L=7$ 까지 고려하여 계산하였다.

$$\begin{cases} \epsilon = 0.3, \eta = 0.2, \nu = 0.3, \tau = 1.0 \\ \delta_E = 0.001, \xi_0 = 1.0 \sim 0.4, \phi_0 = 0.0 \end{cases} \dots\dots\dots(14)$$

각각의 그림은 가로축에 조화기진진동수, 세로축에 무차원화한 구동점 임피던스, 각각의 각속도에 대한 구동점 임피던스를 해석하였다. 각 단위에서 차례대로 원판에 작용하는 조화 외력의 작용위치를 원판 외주에서 중심을 향하여 4군데로 이동시킬 때의 구동점 임피던스를 나타낸다. 또한 각각의 그림에서 등방성 원판의 감쇠계수를  $\delta_E = 0.001 \sim 1.0$ 의 범위로 변화시켜 그림으로 나타내었다.

이러한 구동점 임피던스의 값이 작은 쪽으로 돌출하는 피크의 가진진동수는 원판의 각각의 고유진동모드에서 공진하는 공진점을 나타내며, 진동수방정식으로 구한 고유원동수와 일치한다. 위에서 서술한 공진점은 각각속도와 고유진동수 곡선과의 교점이되는 진동수와 같다. 반대로 큰 방향으로 돌출하는 피크의 진동수는 반공진점이며 그 가진진동수에서 기진했을 경우 기진점에서 변위가 0되는 진동수를 구할 수 있다.

원판의 내부 감쇠를 나타내는  $\delta_E$ 가 구동점 임피던스에 미치는 영향은 값이 커지면 공진점, 반공진점의 피크가 저하된다. 어떤 각속도에  $\delta_E = 0.1$  이상이 되면 거의 피크는 나타나지 않게 된다. 특히 Fig 4의  $\lambda_{1f}$ , Fig 5의  $\lambda_{2d}$ , Fig 7의  $\lambda_{3f}$ 의 공진점에서는,  $\delta_E = 0.05$  이상으로 피크는 소멸된 것으로 봐야할 것이다. 이러한 공진점은 (0,3)모드에서 고차모드의 후퇴파에 크게 작용한다. 따라서 (0,3) 고차 모드보다 고차 모드의 후퇴파에 대해 크게 작용한다. 이 현상은 각속도가 높은 경우에도 마찬가지이며 특히  $\Omega=8$  이상에서 가진진동수가 낮을 때 나타나는 높은 피크는 Fig 8에 나타난 위험속도 통과 후 증가하는 후퇴파의 고유원진동수와 감소하는 후퇴파의 고유 원형 진동이 중첩되어 공진현상을 일으키는 다수의 기진동 진동수에 대응하고 있다. 이들 많은 피크에 대해서도 내부 감쇠가  $\delta_E = 0.05$  이상에서 거의 소멸하고 있다.

기진위치가 원판중앙에 가까워지면 반공진점이 공진점에 접근하게 된다. 이와 같이 상향과 하향의 피크가 접근하여  $\delta_E$ 의 값이 약간 큰 커지게 되는 것만으로 개별 피크는 급격하게 저하되며  $\delta_E = 0.001$ 의 피크가 발생하여 날카로워진다.

Fig 8 ~ 9에서  $\Omega=1.0, 2.0, 3.0, 4.0$  일 때 공진시 각 진동 모드를 그림으로 나타내었다.

$$\begin{cases} \epsilon = 0.3, \eta = 0.2, \nu = 0.3, \tau = 1.0 \\ \delta_E = 0.01, \xi_0 = 1.0 \sim 0.4, \phi_0 = 0.0 \end{cases} \dots\dots\dots(15)$$

이러한 진동 모드는 계산된 변위 진폭 분포의 최대 값을  $|u_{max}/F| = 100$ 으로 하고, 20 간격으로 그 등고선을 세선으로 표시하였다. 또한 굵은 실선 부분은 회전 원판의 진폭이 0이 되는 점이며, \*는 기진점을 나타내었다. 기진 진동수 아래에 기입한  $|u_{max}/F|$  값은 해석된 그 진동모드 변위진폭의 최대값이다.

Fig 8-9와 같이 회전원판의 진동 특성은 후퇴파가 위험 속도를 통과하기 전의 각속도의 영역 ( $\Omega \leq 6$ )에서 절점 직경수가 0~4개의 진동 모드에 의존한다. 기진진동수가 증가함에 따라  $\Omega = 1.0$ 에서 절점 직경수가 각각 1, 2, 0, 1, 2, 3개 가진 진동 모드의 순으로 나타난다.  $\Omega = 3.0$ 에서 2, 1, 3, 0, 1, 4개인 진동모드 순으로 나타난다. 이와 같이 기진진동수가 증가함에 따라 나타나는 공진점에서의 진동 모드는 각속도의 차이에 따라 달라진다. 그 때 발생하는 최대 진폭은 나타나는 진동 모드에 의존한다. 따라서 주어진 회전수와 기진진동수에 대한 원판의 거동은 어떤 진동 모드에 의존하는지를 파악함으로써 쉽게 추측 할 수 있다. 또한 이 그림들 중에서 공진진동수가 다른 (0,1) 모드가 2개 존재한다. 이들 최초로 나타나는 공진진동수가 낮은 진동 모드지만, 시간이 지남에 따라 절점직경이 원판의 회전 방향과 반대 방향으로 회전하는 후퇴파의 진동모드이다. 즉 회전 방향과 같은 방향으로 지름이 회전하는 절점 진행파의 진동 모드이다. 그림에서 나타낸 기진위치가 외주 근처에 있을 때, 변위 진폭 레벨의 작은 영역이 외주까지 확대된 것을 알 수 있다.

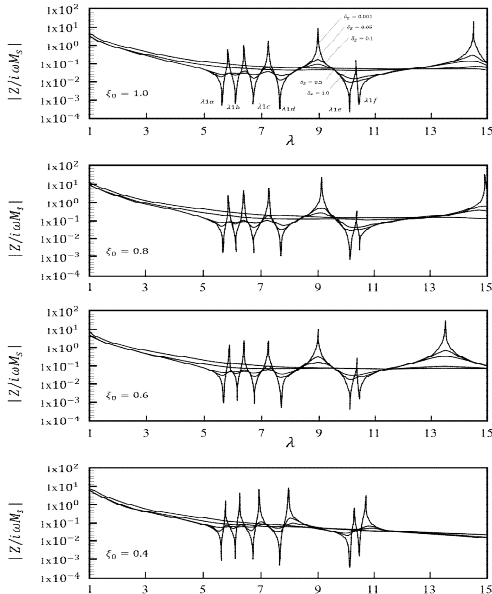


Fig 4. 구동점 임피던스 ( $\Omega = 1.0$ )

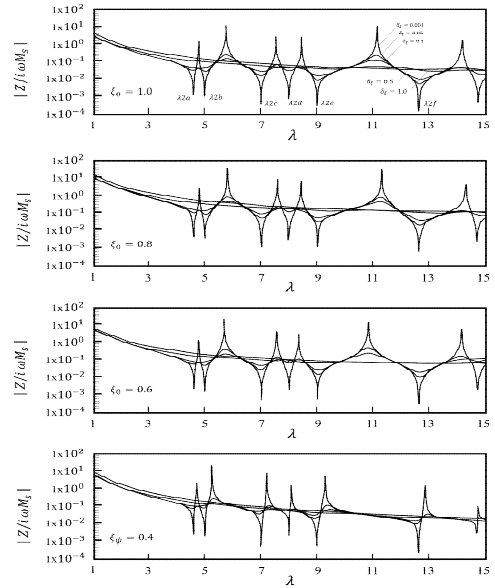


Figure 5. 구동점 임피던스 ( $\Omega = 2.0$ )

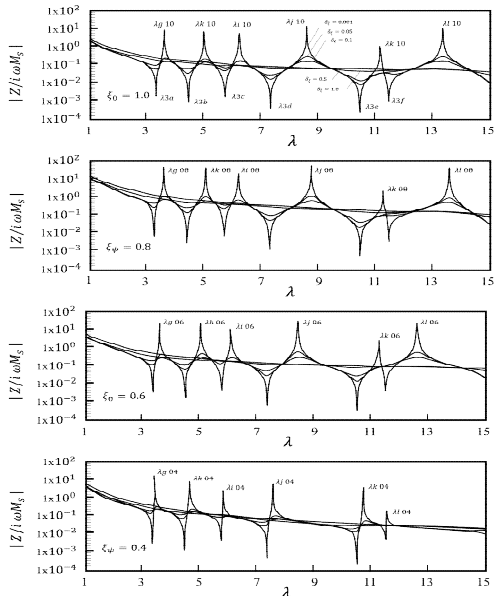


Fig 6. 구동점 임피던스 ( $\Omega = 3.0$ )



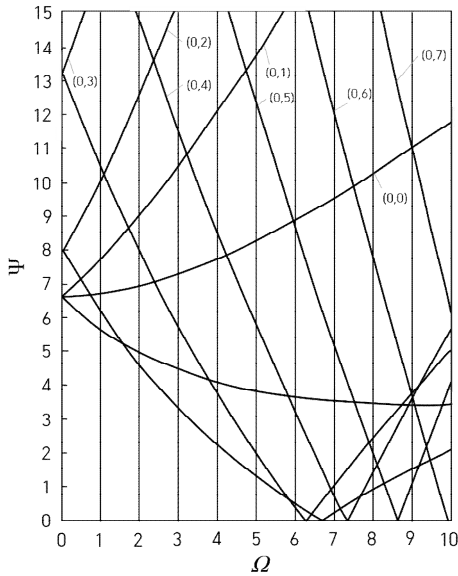


Fig 7..무차원 기진진동수와 각속도와의 관계  
 $\epsilon = 0.3, \eta = 0.2$

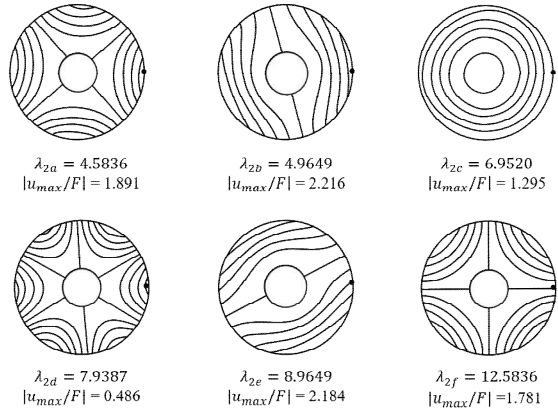


Figure 9. 공진점 진동 모드

### 3.5. 결론

등방성 회전 원판의 각 기초식을 기초로 수치해석을 실시하였으며, 무차원 고유원 진동수와 각속도, 각도와의 관계를 진동수방정식으로 해결하였다.

그 결과 고유진동모드는 진동수가 높을 경우에만 존재하고 있는 것을 알 수 있다. 일반적인 문제로 공학적으로 중요한 진동모드는 (0, 0) 및 절점직경을 갖는 고유 진동모드이다. 이들 절점 직경을 갖는 고유 진동모드의 고유원 진동수는 공간에 고정된 정지좌표계에서 원판이 회전함으로써 진행파와 후퇴파 두 개의 진동수가 나타나고, 절점 직경을 2개 이상 갖는 진동모드의 후퇴파진동수는 각속도가 커짐에 따라 감소하고 고유원 진동수가 0이 되는 위험속도를 갖는다.

그 위험속도를 통과한 후에는 진동수가 상승하며 등방성 회전원판의 무차원 고유원 진동수는 각 각속도에 대해 매우 많이 존재한다. 그래서 외력의 진동수가 이들 고유원 진동수와 일치하고 공진현상을 일으키는 불안정 영역이 넓은 범위로 확대되어 가고 있다.

본 연구에서는 정보기기의 기억장치로 이용되고 있는 디스크에 주목하여, 그 동적 진동이나 진동 특성을 파악하기 위해, 해당 디스크를 내주는 고정된 두께가 얇은 회전 원판로 모델링하였고 수치해석법은 갤러킨법을 적용하여 이론적으로 분석했다. 탄성 계수를 복소수를 이용하여 표현함으로써 내부 (구조) 감쇠를 고려하였으며, 고유치 해석과 한 점에서 조화기진 될 때 응답 해석을 하여, 수치계산에 의해 고유진동수, 전달 함수와 진동모드를 구하고 감쇠와 회전 그리고 극이방성의 영향 등 각 매개 차이가 회전 원

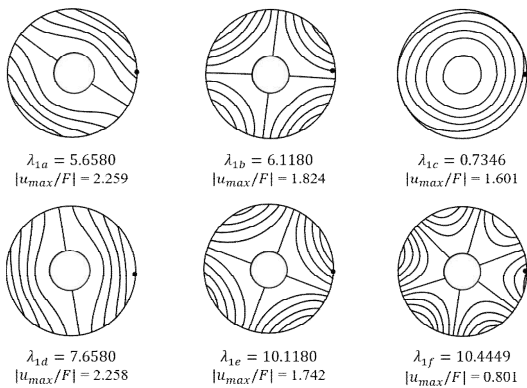


Fig 8. 공진점 진동 모드

판의 진동 특성에 미치는 영향을 검토하였다.

## REFERENCES

- [1] Lamb,H- and Southwell,R.V.(1921), " The Vibration of a Spinning Disk ", Proceedings of The Royal Society of London, 99, 272.
- [2] Southwell,R.V.(1922), " On the Free Transverse Vibration of a Uniform Circular Disc Clamped at its Centre;and on the Effects of Rotation ", Proceedings of The Royal Society of London, 101, 133.
- [3] Tobias,S.H. and Arnold,R.N. (1957), " The Influence of Dynamical Imperfection on the Vibration of Rotating Disks ", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 171, 669.
- [4] Iwan,W.D. and Stahl,K.J. (1973), " The Response of an Elastic Disk With a Moving Mass System " , Transactions of the ASME , foizcmal of Applied Mechanics, ,445.
- [5] Iwan,W.D. and Moeller,T (1976), " The Stability of a Spinning Elastic Disk With a Transverse Load System ", Transactions of the ASME , foizcmal of Applied Mechanics, 48, 485.
- [6] Benson,R.C. and Bogy,D.B. (1978), " Deflection of a Very Flexible Spinning Disk Due to a Stationary Transverse Load " , Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics, 45, 636.
- [7] Hutton,S.G.,Chonan,S. and Lehmann,B.F. (1987), " Dynamic Respones of a Guided Circular Saw " ' Journal of Soicnd and Vibration, 112-3, 527.

논문투고일 2021년 06월 07일  
논문심사일 2021년 06월 24일  
논문게재일 2021년 06월 30일