

# 5개의 연결부를 가지는 역진자형 석조문화재의 동적 해석모델 및 안정성 연구

최재성<sup>1\*</sup>

## A Study on Dynamic Analysis Model and Stability of Stone Cultural Properties of Inverted Pendulum Type with 5 Joints

Jae-Sung Choi<sup>1\*</sup>

**Abstract:** Architectural cultural properties suffer a lot of damage due to various environmental factors. In order to preserve damaged cultural properties, preventive preservation and long-term preservation management are becoming more important. Therefore, research on a scientific non-destructive testing method applicable to regular inspection is required. For related research, DangGan with a high flag-pole shape was selected as the subject of study among various cultural properties. Among the preserved DangGans, a basic study was conducted on the analysis technique to evaluate the structural stability by selecting Treasure No. 49 Naju SeokDangGan. An idealized model was presented and a multi-degree of freedom equation of motion was derived. In addition, an equation for estimating the critical stiffness value for each joint position is presented.

**Keywords:** Architectural cultural property, Inverted pendulum, MDOF, Lagrange, Structural stability, Critical stiffness

### 1. 서론

오랜 세월 동안 보존되어 관리되고 있는 건축문화재들은 보호시설 내에서 관리되는 다른 형태의 문화재들과는 다르게 다양한 환경적 요인들로 인해 많은 손상이 발생된다. 손상된 문화재를 보존하기 위해서는 직접적인 보존처리를 실시하는 것도 중요하지만 최근에는 예방보존 및 장기적인 보존관리가 중요해지고 있다. 예방적 문화재 관리체계 마련을 위해 문화재의 정기조사 및 안전점검, 안전방재 기술 개발, 문화재 내진 진단 프로세스 구축 등 문화재 안전방재 전반의 연구가 수행되고 있는 가운데, 정기적인 점검 시에 적용 가능한 과학적인 비파괴 검사 방법에 대한 연구가 요구되고 있다.

본 논문은 건축문화재 중에서 높이가 높은 기둥과 같은 형상의 당간의 안정성을 정량적으로 평가하기 위한 분석 기법에 대한 기초적인 연구에 관한 것이다. 이를 위해 현대 제어 이론을 적용한 제어 알고리즘 연구에 많이 적용되는 역진자형 시스템의 이론을 적용하고자 한다.

5개의 간주석으로 구성된 보물 제49호 나주 석당간의 이상화된 모델을 제시하고 수학적 모델식을 유도하였다. 유도된

수학 모델에서 동적 안정성을 보수적으로 확인할 수 있는 연결부의 임계 회전 스프링강성 식을 제시하였다.

### 2. 문화재 현황

#### 2.1 당간과 당간지주의 기원과 형태

당간과 당간지주의 일반적인 현황에 대한 자료는 Eom(2007)가 체계적으로 정리하였으며, 간단하게 개요를 정리하면 다음과 같다.

한국의 불교미술은 4세기 후반 불교의 전래와 동시에 목조(木造)·석조(石造) 등의 조형물이 건립·조성되면서 시작되었다. 현존하는 석조미술품 중에는 조각을 제외하고 양과 질에서 석탑이 대표적이며, 필요에 따라 건조한 석조물로 석조부도, 석등, 석비, 당간지주, 석조 등이 있다. 이 중에서 당간지주는 당간을 세우기 위한 시설이며, 당간(幢竿)은 직접적으로 당(幢)을 걸기 위하여 기대와 같이 높이 세우는 부분으로 일반적으로 철, 돌, 나무 등으로 제작되었다. 지금까지 당간과 당간지주에 대한 연구는 석탑, 석불, 석등 등에 비하여 많지 않은 실정이지만, 국가지정문화재로 지정되어 있는 당간지주의 수량은 상당하다. 현재 한국에는 많은 당간지주가 남아 있는데, 완전하지는 않지만 당간까지 남아있는 것은 8기(基) 정도이며, 당간지주는 남북한을 합하여 총 100여기 정도인데, 대부분이 남한 지역에 집중되어 있다(Eom, 2007).

<sup>1</sup>정회원, 유노빅스이엔씨(주), 연구소장

\*Corresponding author: phdr007@naver.com

UNOVICS ENC Co.,Ltd, #707, U-space1-A, 660, Daewangpangyo-ro, Bundang-gu, Seongnam-si, Gyeonggi-do, 13494, Korea

•본 논문에 대한 토의를 2021년 7월 31일까지 학회로 보내주시면 2021년 8월 호에 토론결과를 게재하겠습니다.

당은 당간의 정상부에 거는 깃발과 같은 형태의 장엄물이라 할 수 있다. 당간지주와 당간을 세우는 목적은 당을 걸기 위한 것이며, 조형물을 세우는 의의가 당에 결집되어 있었다고 할 수 있다. 따라서 당의 형태와 문양, 제작 수법 등은 당간과 당간지주를 건립하는 의의를 이해하는데 결정적인 근거임에도 불구하고 현재 남아있는 유물이 많지 않은 실정이다(Eom, 2007).

당간과 당간지주는 Fig. 1과 같이 크게 기단부(基壇部), 간대부(竿臺部), 지주부(支柱部), 당간부(幢竿部)로 주요 구성 부분이 세분된다. 당간지주의 하부에는 기단과 간대석을 마련하여 두 지주와 당간을 견고하게 세우게 된다. 간대석은 두 지주 사이에 마련되어 당간을 받치는 부분이다. 지주부는 당간을 견고하게 지탱하기 위하여 두 개의 지주로 마련된다. 그리고 당간을 높게 세울 때 견고하게 고정하기 위하여 지지 내면에 간공(杆孔)이나 간구(杆溝)를 시공하여 간을 끼우도록 한다. 간(杆)은 당간에서 간공이나 간구와 연결하여 고정하는 별도의 부재이다(Eom, 2007).

## 2.2 나주 석당간 일반 현황

나주 동점문 밖 석당간(이하 나주 석당간)은 고려시대에 세워진 것으로 추정되고 있으며, 나주읍성의 동문인 동점문 밖에 세워졌던 석조당간으로 전남 나주시 성북동 229-9번지에 위치하고 있다. Fig. 2(a)는 해체 복원 공사 이전, (b)는 해체 복원 이후의 전경이다.

Fig. 3는 각 부위별 명칭이다. 당간은 사찰입구에 세워두는

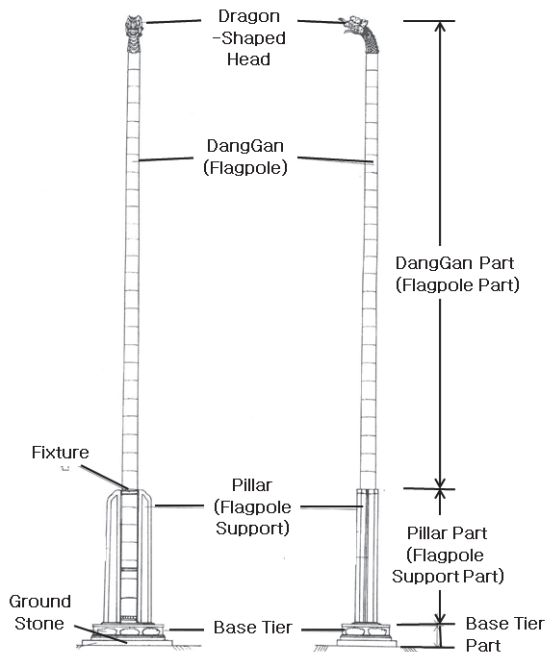


Fig. 1 The typical dangan system of the configuration (Eom, 2007)

것으로, 절에 행사가 있을 때 당(幢)이라는 깃발을 달아두는데 이 깃발을 걸어두는 길쭉한 장대를 당간이라 하며, 당간을 양쪽에서 지탱해 주는 두 돌기둥을 당간지주라 한다. 대개는 당간이 목재여서 소실되어 양쪽 지주만 남아 있는데, 나주 석당간은 돌로 만들어져 당간이 함께 남아 있어 중요한 유산이며, 1963년 1월 21일에 보물 제49호로 지정되었다. 당간은 5개 돌을 서로 맞물리게 하여 세웠는데, 아래는 굵고 올라갈수록 차츰 가늘어져 안정감 있다(KISS, 2011).

## 2.3 구조 현황

나주 석당간에 사용된 석재는 화강암이며, 당간은 5개의 간



(a) Before restoration (b) After restoration

Fig. 2 The whole view of Naju SukDangGan

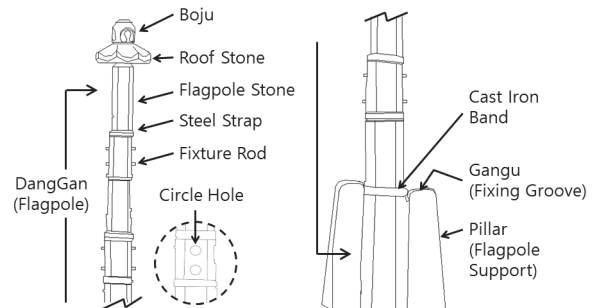


Fig. 3 The name of members (KICST, 2004)

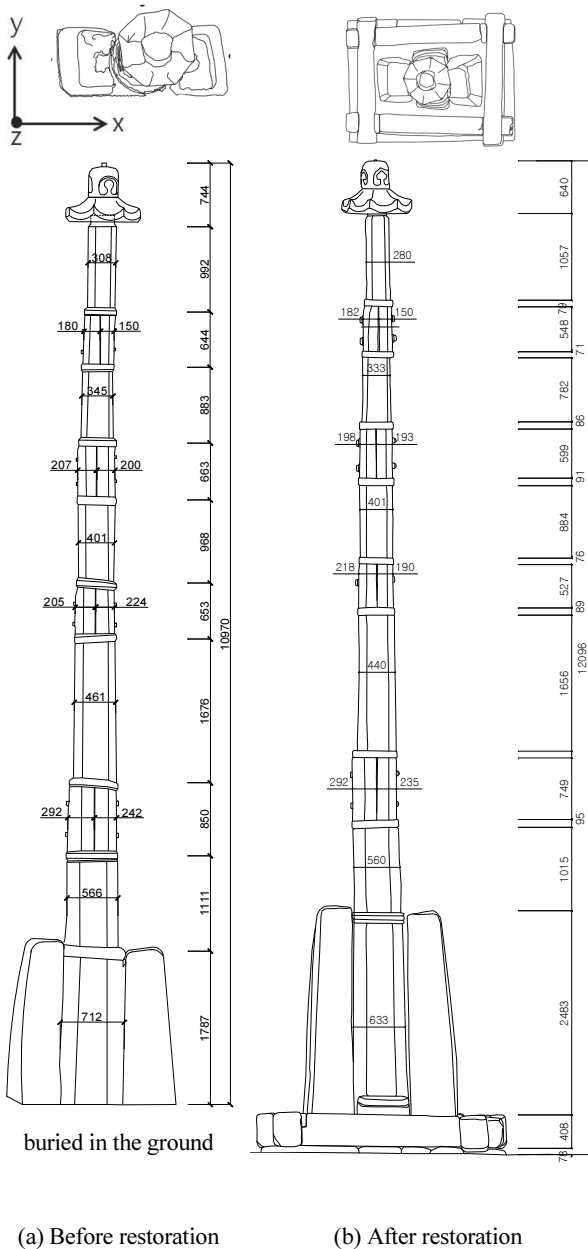
주석을 서로 맞물리게 하여 세웠는데, Fig. 4와 같이 아래는 굵고 올라갈수록 차츰 가늘어진다. Fig. 5에서 보여지 듯이 맞물릴 때 상·하에 철 띠쇠를 두르고 2개의 원공에 간봉을 넣어 고정하였다. 당간과 지주는 Fig. 6(c), (d)와 같이 당간에 띠쇠를 두른 후 지주의 안쪽에 마련된 받침돌 윗면에 구멍을 파서 이를 고정시키는 방식으로 연결되어 있다(CHA, 2021; KICST, 2004).

특이사항으로 Fig. 4와 같이 복원 전에는 주변의 성토로 인해 당간 및 지주가 현재의 지면 아래로 약 1.2 m 묻혀 있었으나, 복원 시에는 발굴조사를 통해 성토된 토사를 제거하여 해

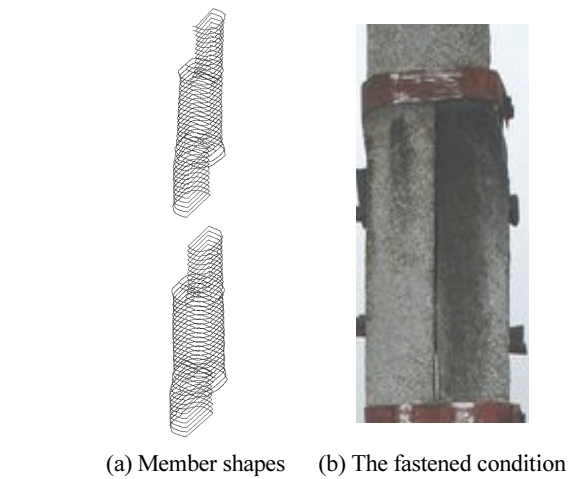
당 부위가 완전히 노출되도록 하였다.

나주 석당간의 정밀안전진단 보고서(KICST, 2004)에 의하면, Fig. 6와 같이 나주 석당간에 균열, 표면박리, 입자박락, 흑화현상 등의 성능저하 양상이 조사되었다. 또한 1/85~1/75의 비교적 큰 기울기를 나타내고 있었는데, 기울기를 감소시키는 대책이 필요한 것으로 조사 보고되었다.

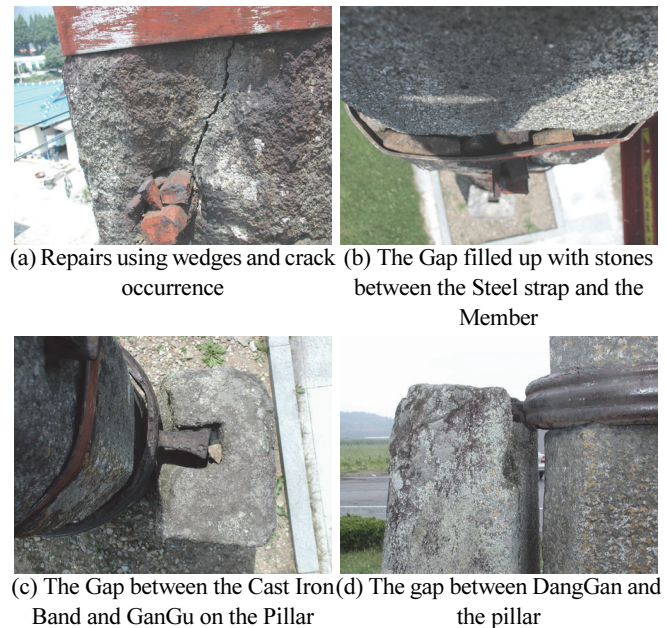
이후에 해체 및 복원 공사가 실시되었으며, 보수, 보강을 실시한 내용을 조사한 KISS(2011)의 보고서에 의하면, 해체 복원 전에 조사된 균열 부위를 보수하였고, 절단된 부위와 접합 부에서 균열이 깊은 부위는 보강하였다. 수평변위는 해체 전에



**Fig. 4** The dimensions of Naju SukDangGan (KICST, 2004; KISS, 2011)



**Fig. 5** Examples of member shapes and the fastened condition (KICST, 2004; KISS, 2011)



**Fig. 6** Examples of structural performance degradation before restoration (KICST, 2004; KISS, 2011)

발생된 변위와 복원 후를 비교하면 X방향에서 199 mm, Y방향에서 140mm 정도 좌측면과 정면으로 바로 잡아졌으며 방향에 따라 기울기가 1/177과 1/540로 작아진 것으로 조사되었다.

### 3. 역진자형 구조물의 수학적 모델링

#### 3.1 모델링의 이상화

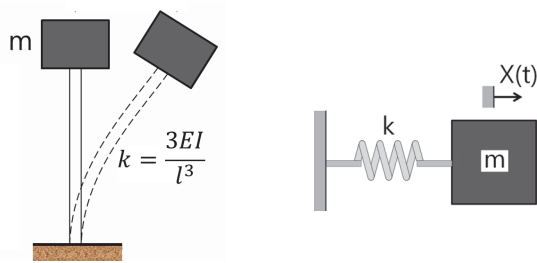
##### 3.1.1 기존 연구 사례

아래는 굽고 올라갈수록 차츰 가늘어지는, 얇고 긴 기둥 형상의 나주 석당간을 Fig. 7 및 Fig. 8과 같은 단순 모델로 가정할 수 있다(Choi and Cho, 2021).

Fig. 7은 구조물의 크기를 무시하고 분포된 질량을 상부 한 지점의 집중 질량 모델이다. 지지구조는 하나의 스프링으로 근사화하여 1자유도 모델을 구할 수 있다. 단, 간주석 간의 접합은 강접합, 지면에 고정된 상태는 완전고정으로 가정한다. 또한 Fig. 5(c), (d)와 같이 측면 지주와 당간의 결속력이 약하여 측면 지주의 영향은 고려하지 않을 수 있다.

두 번째 모델은 Fig. 8과 같이 측면의 4면이 선형적으로 경사져서 단면이 변하는 보에 대한 모델이다. 기존의 연구 사례에서는 Bernoulli-Euler 및 Timoshenko 보 이론을 적용하여 모드 차수의 증가에 따른 이론별 주파수 파라미터  $\lambda$ 를 제시하고 고유진동수를 계산할 수 있도록 제시하였다(Downs, 1977; Karnovsky and Lebed, 2000).

기둥 형상인 당간의 단순화를 위해 이 두 모델을 적용하는



(a) Idealization of the structure (b) Equivalent spring-mass system

Fig. 7 Modeling of the structure as spring-mass system

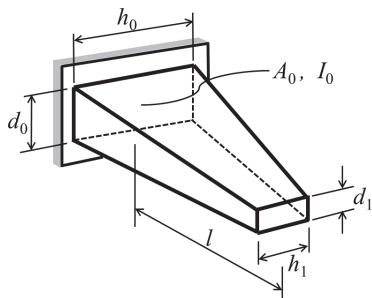


Fig. 8 Doubly-Tapered beam (Karnovsky and Lebed, 2000)

것은 편리성을 제공해 줄 수 있다. 그러나 대부분의 당간이 짧은 기둥(간주석)이 연속적으로 적층된 구조로 되어 있음을 고려하고, 인접된 간주석과의 연결 상태를 감안한 모델은 아니 때문에 개선된 모델의 개발이 필요하다.

Fig. 10과 같은 역진자형 시스템은 제어 분야에서 다변수 (Multivariable), 비선형(Nonlinear), 비정상적(Unsteady) 시스템의 전형적인 모델로서 현대 제어 이론 연구에 이상적인 시스템으로 인식되어 지고 있다(Yadav et al., 2012). 또한 휴머노이드의 동작, 특히 걷는 동작에서의 자세 안정화에 대한 연구에도 역진자형 시스템이 활용된다. 한 발 지지 상태의 로봇을 외다리 로봇이라고 할 때, 이는 링크가 2개인 이중 역진자 (Double Inverted Pendulum) 문제라고 볼 수 있다. 단순 역진자 시스템은 링크의 한쪽 끝에 구동기가 설치되나 이 경우에는 두 링크 사이에 구동기가 설치되는 형태이다(Kim, 2002). 이러한 연구들은 바닥으로부터 전달되는 외란에 의한 역진자 시스템의 운동을 예측하고 각 링크 간의 관절부 등에 설치된 구동장치들을 제어하여 시스템이 넘어지지 않고 안정된 상태를 유지시키거나 바닥 장치를 움직여 상부 진자의 상태를 안정화하는 제어 알고리즘 개발이 주요 목적이다.

##### 3.1.2 역진자형 모델의 적용

Fig. 10은 일반적인 당간의 얇고 긴 기둥 형상을 역진자 형상의 기둥으로 이상화 한 모델이다. 이때 기둥은 강체 요소로 가정한다. 강체는 전체 크기 또는 위치 변동에 비하여 형상의

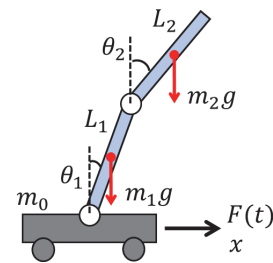


Fig. 9 Double inverted pendulum system

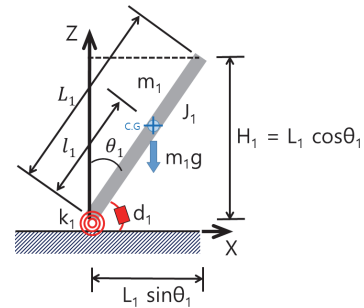


Fig. 10 Single inverted pendulum



변화를 무시할 수 있는 요소로서, 해당 구조요소의 모든 위치들 간의 거리 변화가 없는 경우를 의미한다. 또한 집중 질량 모델과 달리 강체 모델은 구조요소의 회전도 추가적으로 검토된다(Meriam and Kraige, 2013).

나주 석당간은 5개의 간주석으로 구성되어 있으므로 Fig. 11과 같이 5개의 짧은 기둥으로 구성된 역진자로 이상화될 수 있다. 관절부에 구동기가 있어서 안정적 자세 유지가 가능한 기계장치와 달리, 외부적인 보조 장치 없이 안정적으로 서 있어야 하므로 각 기둥의 연결부는 회전스프링 요소와 감쇠 요소로 연결되어 있는 것으로 가정하였다. 또한 Fig. 6(c)와 같이 당간과 지주의 연결상태가 매우 느슨하여 지주의 영향은 작다고 가정하고 이상화된 모델에서 제외하였다.

Fig. 10과 Fig. 11에서  $L_i$ 는 기둥의 길이,  $l_i$ 은 무게 중심까지의 거리,  $J_i$ 은 질량 관성모멘트(Mass Moment of Inertia),  $m_i$ 은 기둥의 질량,  $\theta_i$ 은 수직축에 대한 회전각 변위이며 시간의 함수이다. ‘지면(기단)-기둥(당간)’ 및 ‘기둥(당간)-기둥(당간)’ 연결지점에서는 회전 스프링 요소  $k_i$ 와 감쇠요소  $d_i$ 로 연결되어 있다. 여기서, 지면(기단)-기둥(당간)’ 위치의  $k_1$ 은 Fig. 12와 같이 지면에 일부 묻혀있는 기단과 그 위에 얹혀있는 당간간의 연결 강성이다. 따라서 지반 상태 및 기단의 근입 상태에 따라  $k_1$  값은 영향을 받을 수 있으나 수학 모델에서는 별도로 구분하지 않았다. 그러나 강성을 추정할 수 있는 현장 시험이 진행된다면 지반의 영향이 반영된  $k_1$  값이 추정될 수 있을 것

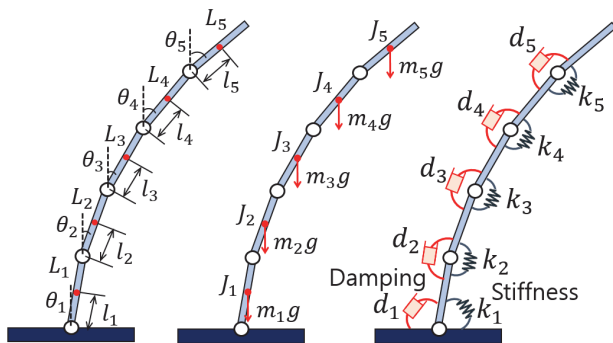


Fig. 11 Multiple inverted pendulum

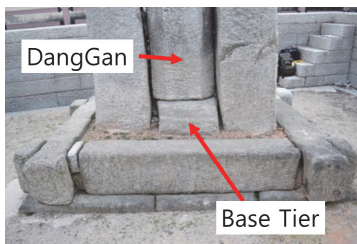


Fig. 12 Connection status between the base tier and DangGan (NRICH, 2018)

으로 판단된다.

### 3.2 라그랑지(Lagrange) 방법을 이용한 운동방정식 유도

역진자형 모델의 운동방정식을 수식화하기 위해서 라그랑지 방법을 적용한다.

뉴턴(Newton)의 벡터법은 자유도가 큰 계에서 대수학적인 어려움이 있고, 에너지 방법은 1자유도계에 국한되는 하나의 방정식만을 제공하는 단점이 있다. 가상일 방법은 자유도가 큰 계에 대해서도 효과적인 도구이나 힘을 벡터로서 취급해야 한다는 점에서 완전한 스칼라 방법은 아니다. 라그랑지 방법은 스칼라양인 운동에너지, 위치에너지 및 일을 일반화된 좌표로 표현하는 완전한 스칼라 법칙이다(Thomson, 1993).

라그랑지 방정식은 식 (1)과 같이 표현된다. L은 라그랑지안(Lagrangian)으로 운동에너지와 위치에너지의 차이이며, 식 (2)와 같이 정의된다. 그리고 D는 감쇠에너지, Q는 일반화 힘(Generalized Force),  $q_i$ 는 일반화 좌표(Generalized Coordinates)이다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

$$L = T - P \quad (2)$$

각 기둥별 질량 중심들의 위치는  $x_i, z_i$ 의 직교 좌표계로 표현이 가능하다. 그러나 적층된 구조의 특성상, 상하부 기둥들의 좌표가 연성되어 상부 좌표는 하부 좌표에 종속적인 좌표로 표현된다. 이러한 종속적인 좌표를 독립적인 좌표로 비연성화하기 위해  $x_i, z_i$ 를 식 (3)~(12)와 같이  $\theta_i$ 에 대한 좌표계로 변환한다.

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (3)$$

$$z_1 = l_1 \cos \theta_1 \quad (4)$$

$$x_2 = L_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (5)$$

$$z_2 = L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \quad (6)$$

$$x_3 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \quad (7)$$

$$z_3 = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \quad (8)$$

$$x_4 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 \quad (9)$$

$$z_4 = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \quad (10)$$

$$x_5 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 + L_4 \sin \theta_4 + l_5 \sin \theta_5 \quad (11)$$

$$z_5 = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 + L_4 \cos \theta_4 + l_5 \cos \theta_5 \quad (12)$$

식 (1)에서 외력이 없는 자유진동 상태를 가정하면, 외력에

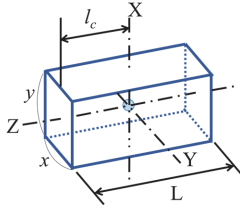


Fig. 13 Dimension symbols for mass moment of inertia

의한 비보존력인  $Q_i$ 는 제거된다. 또한 일반화 좌표  $q_i$ 를  $\theta_i$ 로 치환하여 식 (1)을 다시 표현하면 식 (13)과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial P}{\partial \theta_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_i} = 0 \quad (13)$$

운동에너지 T는 강체의 직선 및 회전 운동을 모두 고려하면 식 (14)와 같다. 여기서 속도는  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$ 이다.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (14)$$

식 (14)에서 J는 질량중심에서의 관성모멘트로서, Fig. 13과 같은 균질한 직육면체의 경우에 식 (15), (16)과 같으며, 이후 표기에서는 회전축을 의미하는 아래 첨자 XX, YY를 생략한다(Meriam and Kraige, 2013).

$$J_{XX} = \frac{1}{12} m (x^2 + L^2) \quad (15)$$

$$J_{YY} = \frac{1}{12} m (y^2 + L^2) \quad (16)$$

위치에너지 P는 중력 위치에너지( $P_p$ )와 스프링에 의한 탄성 위치에너지( $P_s$ )를 고려한다. 이때, k는 스프링상수이다.

$$P = P_p + P_s = mgh + \frac{1}{2} k \theta^2 \quad (17)$$

감쇠에너지 D는 식 (18)과 같으며, d는 감쇠 상수이다.

$$D = \frac{1}{2} d \dot{\theta}^2 \quad (18)$$

상기 식들을 이용하여 T, P, D를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \\ &= \frac{1}{2} C_{m1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_{m2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} C_{m3} \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} C_{m4} \dot{\theta}_4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} C_{m5} \dot{\theta}_5^2 + C_{m6} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &+ C_{m7} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + C_{m8} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) \\ &+ C_{m9} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_1 - \theta_5) + C_{m10} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ &+ C_{m11} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + C_{m12} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_2 - \theta_5) \\ &+ C_{m13} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) + C_{m14} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) \\ &+ C_{m15} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_4 - \theta_5) \end{aligned} \quad (19)$$

여기서,

$$C_{m1} = m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2 + m_4 L_1^2 + m_5 L_1^2 + J_1$$

$$C_{m2} = m_2 l_2^2 + m_3 L_2^2 + m_4 L_2^2 + m_5 L_2^2 + J_2$$

$$C_{m3} = m_3 l_3^2 + m_4 L_3^2 + m_5 L_3^2 + J_3$$

$$C_{m4} = m_4 l_4^2 + m_5 L_4^2 + J_4$$

$$C_{m5} = m_5 l_5^2 + J_5$$

$$C_{m6} = m_2 L_1 l_2 + m_3 L_1 L_2 + m_4 L_1 L_2 + m_5 L_1 L_2$$

$$C_{m7} = m_3 L_1 l_3 + m_4 L_1 L_3 + m_5 L_1 L_3$$

$$C_{m8} = m_4 L_1 l_4 + m_5 L_1 L_4$$

$$C_{m9} = m_5 L_1 l_5$$

$$C_{m10} = m_3 L_2 l_3 + m_4 L_2 L_3 + m_5 L_2 L_3$$

$$C_{m11} = m_4 L_2 l_4 + m_5 L_2 L_4$$

$$C_{m12} = m_5 L_2 l_5$$

$$C_{m13} = m_4 L_3 l_4 + m_5 L_3 L_4$$

$$C_{m14} = m_5 L_3 l_5$$

$$C_{m15} = m_5 L_4 l_5$$

$$P = (P_{p1} + P_{p2} + P_{p3} + P_{p4} + P_{p5}) + (P_{s1} + P_{s2} + P_{s3} + P_{s4} + P_{s5})$$

$$\begin{aligned} &= C_{mg1} \cos \theta_1 + C_{mg2} \cos \theta_2 + C_{mg3} \cos \theta_3 + C_{mg4} \cos \theta_4 \\ &+ C_{mg5} \cos \theta_5 + \frac{1}{2} C_{k1} \theta_1^2 + \frac{1}{2} C_{k2} \theta_2^2 + \frac{1}{2} C_{k3} \theta_3^2 \\ &+ \frac{1}{2} C_{k4} \theta_4^2 + \frac{1}{2} C_{k5} \theta_5^2 - C_{k5} \theta_1 \theta_2 - C_{k6} \theta_2 \theta_3 \\ &- C_{k7} \theta_3 \theta_4 - C_{k8} \theta_4 \theta_5 \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,

$$C_{mg1} = (m_1 l_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1 + m_4 L_1 + m_5 L_1) g$$

$$C_{mg2} = (m_2 l_2 + m_3 L_2 + m_4 L_2 + m_5 L_2) g$$

$$C_{mg3} = (m_3 l_3 + m_4 L_3 + m_5 L_3) g$$

$$C_{mg4} = (m_4 l_4 + m_5 L_4) g$$

$$C_{mg5} = (m_5 l_5) g$$

$$C_{k1} = k_1 + k_2, C_{k2} = k_2 + k_3, C_{k3} = k_3 + k_4$$

$$C_{k4} = k_4 + k_5, C_{k5} = k_2, C_{k6} = k_3, C_{k7} = k_4$$

$$C_{k8} = k_5$$

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5$$

$$= \frac{1}{2} C_{d1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_{d2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} C_{d3} \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} C_{d4} \dot{\theta}_4^2$$

$$+ \frac{1}{2} C_{d5} \dot{\theta}_5^2 - C_{d5} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - C_{d6} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - C_{d7} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - C_{d8} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5$$
(21)

여기서,

$$C_{d1} = d_1 + d_2, C_{d2} = d_2 + d_3, C_{d3} = d_3 + d_4$$

$$C_{d4} = d_4 + d_5, C_{d5} = d_2, C_{d6} = d_3, C_{d7} = d_4$$

$$C_{d8} = d_5$$

비선형적인 역진자형 모델을 선형화하기 위해서 진동에 의해 발생하는 회전 변위 각도  $\theta$ 와  $\theta^2$ 는 매우 작다고 가정한다. 식 (19)~(21)을 이용하여 식 (13)의 편미분방정식을 풀어서 정리하면 식 (22)~(26)과 같은 5개의 미분방정식을 얻을 수 있다. 이 방정식이 역진자형으로 모델링된 석조 문화재의 5자유도 운동방정식이다.

$$C_{m1} \ddot{\theta}_1 + C_{m6} \ddot{\theta}_2 + C_{m7} \ddot{\theta}_3 + C_{m8} \ddot{\theta}_4 + C_{m9} \ddot{\theta}_5 + C_{d1} \dot{\theta}_1$$

$$- C_{d5} \dot{\theta}_2 + (C_{k1} - C_{mg1}) \theta_1 - C_{k5} \theta_2 = 0$$
(22)

$$C_{m6} \ddot{\theta}_1 + C_{m2} \ddot{\theta}_2 + C_{m10} \ddot{\theta}_3 + C_{m11} \ddot{\theta}_4 + C_{m12} \ddot{\theta}_5 - C_{d5} \dot{\theta}_1$$

$$+ C_{d2} \dot{\theta}_2 - C_{d6} \dot{\theta}_3 - C_{k5} \theta_1 + (C_{k2} - C_{mg2}) \theta_2 - C_{k6} \theta_3 = 0$$
(23)

$$C_{m7} \ddot{\theta}_1 + C_{m10} \ddot{\theta}_2 + C_{m3} \ddot{\theta}_3 + C_{m13} \ddot{\theta}_4 + C_{m14} \ddot{\theta}_5 - C_{d6} \dot{\theta}_2$$

$$+ C_{d3} \dot{\theta}_3 - C_{d7} \dot{\theta}_4 - C_{k6} \theta_2 + (C_{k3} - C_{mg3}) \theta_3 - C_{k7} \theta_4 = 0$$
(24)

$$C_{m8} \ddot{\theta}_1 + C_{m11} \ddot{\theta}_2 + C_{m13} \ddot{\theta}_3 + C_{m4} \ddot{\theta}_4 + C_{m15} \ddot{\theta}_5 - C_{d7} \dot{\theta}_3$$

$$+ C_{d4} \dot{\theta}_4 - C_{d8} \dot{\theta}_5 - C_{k7} \theta_3 + (C_{k4} - C_{mg4}) \theta_4 - C_{k8} \theta_5 = 0$$
(25)

$$C_{m9} \ddot{\theta}_1 + C_{m12} \ddot{\theta}_2 + C_{m14} \ddot{\theta}_3 + C_{m15} \ddot{\theta}_4 + C_{m5} \ddot{\theta}_5 - C_{d8} \dot{\theta}_4$$

$$+ C_{d8} \dot{\theta}_5 - C_{k8} \theta_4 + (C_{k5} - C_{mg5}) \theta_5 = 0$$
(26)

식 (22)~(26)의 운동방정식을 질량-스프링-감쇠계와 비감쇠의 질량-스프링계의 행렬식으로 정리하면 각각 식 (27), (28)과 같다.

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$
(27)

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$
(28)

여기서,

$$\boldsymbol{\theta}^T = \{ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^T = \{ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4 \ \dot{\theta}_5 \}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}^T = \{ \ddot{\theta}_1 \ \ddot{\theta}_2 \ \ddot{\theta}_3 \ \ddot{\theta}_4 \ \ddot{\theta}_5 \}$$
(29)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} C_{m1} & C_{m6} & C_{m7} & C_{m8} & C_{m9} \\ C_{m6} & C_{m2} & C_{m10} & C_{m11} & C_{m12} \\ C_{m7} & C_{m10} & C_{m3} & C_{m13} & C_{m14} \\ C_{m8} & C_{m11} & C_{m13} & C_{m4} & C_{m15} \\ C_{m9} & C_{m12} & C_{m14} & C_{m15} & C_{m5} \end{bmatrix}$$
(30)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_{d1} & -C_{d5} & 0 & 0 & 0 \\ -C_{d5} & C_{d2} & -C_{d6} & 0 & 0 \\ 0 & -C_{d6} & C_{d3} & -C_{d7} & 0 \\ 0 & 0 & -C_{d7} & C_{d4} & -C_{d8} \\ 0 & 0 & 0 & -C_{d8} & C_{d8} \end{bmatrix}$$
(31)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} C_{kmg1} - C_{k5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{k5} & C_{kmg2} - C_{k6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{k6} & C_{kmg3} - C_{k7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{k7} & C_{kmg4} - C_{k8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_{k8} & C_{kmg5} \end{bmatrix}$$
(32)

$$C_{kmg1} = (C_{k1} - C_{mg1})$$
(33)

$$C_{kmg2} = (C_{k2} - C_{mg2})$$
(34)

$$C_{kmg3} = (C_{k3} - C_{mg3})$$
(35)

$$C_{kmg4} = (C_{k4} - C_{mg4})$$
(36)

$$C_{kmg5} = (C_{k5} - C_{mg5})$$
(37)

## 4. 동적 안정성 검토

### 4.1 임계 강성 유도

식 (32)의 강성 행렬식에서 대각원소인 식 (33)~(37)에 의하면, 강성항  $C_{ki}$ 가 중력항  $C_{mgi}$ 만큼 감소되고 있음을 알 수 있다. 여기서, 중력항  $C_{mgi}$ 는 자중  $m_i g$ 과 그 자중이 작용되는 높이  $l_i$ 에 대한 항이다. 그리고  $C_{ki} = C_{mgi}$ 이면 해당 위치에 작용하는 자중에 의해 시스템이 불안정해질 수 있는 임계 상태에 도달하게 된다(Chopra, 2017). 따라서, 시스템의 자중  $m_i g$ 과 높이  $L_i$ 가 일정하다면, 식 (33)~(37)이 0이 될 때의 강성을 임계 강성,  $k_{cri}$ 이라 할 수 있다. 따라서 식 (33)~(37)로부터 위치별  $k_{cri}$ 은 식 (38)~(42)와 같이 계산된다. 여기서,  $w_i$ 는 지면으로부터  $i$ 번째 강체 요소의 자중으로서,  $w_i = m_i g$ 이다.

$$k_{cri1} = w_1 l_1 + w_2 (L_1 - l_2) + w_3 (L_1 - L_2 + l_3)$$

$$+ w_4 (L_1 - L_2 + L_3 - l_4)$$

$$+ w_5 (L_1 - L_2 + L_3 - L_4 + l_5)$$
(38)

$$k_{cr2} = w_2 l_2 + w_3 (L_2 - l_3) + w_4 (L_2 - L_3 + l_4) + w_5 (L_2 - L_3 + L_4 - l_5) \quad (39)$$

$$k_{cr3} = w_3 l_3 + w_4 (L_3 - l_4) + w_5 (L_3 - L_4 + l_5) \quad (40)$$

$$k_{cr4} = w_4 l_4 + w_5 (L_4 - l_5) \quad (41)$$

$$k_{cr5} = w_5 l_5 \quad (42)$$

최하단의 무게 중심 높이  $l_1$ 은 식 (38)의  $k_{cr1}$ 에만 있으나, 최상단의  $l_5$ 은 식 (38)~(42)의 모든  $k_{cri}$ 에 있다. 즉,  $i$ 번째 위치의  $l_i$ 은  $i$ 번째 위치 이하만 있다.

식에서 '-' 부호의 항은 구조물의 안정성 확보를 위해 요구되는 강성 값, 즉 임계 강성 값을 낮추는 항이다. '+' 부호의 항은 안정성 확보를 위해 요구되는 강성 값을 증가시키는 항이다. 이는 전도를 유발하는 회전력과 전도에 저항하는 복원력과 관련된다.

따라서,  $w_i$ 와  $L_i$ 가 일정한 경우,  $i$ 번째 기둥에서의 무게 중심의 높이 변화는  $i$ 번째를 포함한 하부의 기둥들 간의 연결 강성에 영향을 주며, 특히 특정 위치에서는 안정성 확보를 위해 요구되는 강성 값이 커질 수 있음을 알 수 있다.

#### 4.2 나주 석당간의 임계 강성 추정

Table 1은 유도된 임계 강성 식을 이용해서 나주 석당간의 간주석 연결부위별 임계 강성을 계산한 결과이다. 무게  $w_i$ 를 계산하기 위한 부피와 밀도 정보는 기술원의 보고서(KICST, 2004) 정보를 인용하였다. 우선, 밀도는 나주 석당간의 구조 검토시 적용된 값인  $2,570 \text{ kg/m}^3$ 을 사용하였다. 부피는 석당간의 3D 스캔 자료로 작성된 캐드 도면으로 3D 모델 작성하여 계산하였다. 단, 옥개석의 무게는 고려되지 않았다.

개별 간주석의 높이  $L_i$ 은 Fig. 4에서의 제원 정보를 활용했고, 높이 구간은 Fig. 14와 같이 설정하였다. 무게 중심까지 높이  $l_i$ 은 3D 모델에서 계산된 값을 사용하였으며, 무게 중심 계산은 재료 특성이 균질하다는 가정이 적용되었다.

임계 강성을 계산한 결과, 값이 가장 큰 곳은 '지면-1단' 연결부이며, 강성값  $k_{cr1} = 128.64 \text{ kN-m/rad}$ 으로 계산되었다. '1단-2단'부터는 급격히 값이 작아져서 최상단 연결부  $k_{cr5}$ 는  $k_{cr1}$ 와 비교되었을 때  $k_{cr1}$ 의 약 2% 수준으로 상대적으로 작은

**Table 1** Critical stiffness by position - Naju SukDangGan

No.	w [kN]	L [m]	l [m]	$k_{cr}$ [kN-m/rad]	ratio [%]
#1	38.95	3.68	1.64	128.64	100
#2	15.13	2.61	1.18	43.24	34
#3	6.78	1.63	0.78	11.73	9
#4	4.51	1.54	0.69	5.69	4
#5	2.93	1.37	0.66	1.93	2

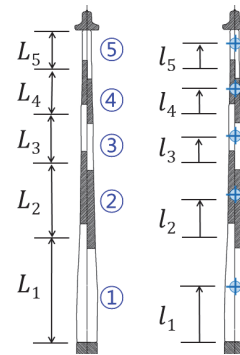
강성 값을 가져도 안정성이 유지될 수 있음을 알 수 있다.

나주 석당간의 '지면-1단' 연결부와 '1단-2단' 연결부에서 요구되는 임계강성이 다른 연결부보다 높아서 1단 간주석의 하단 연결부와 상단 연결부의 결합상태가 구조 안정성에 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 이러한 분석 결과는 1단 간주석의 양 측면에서 두 개의 지주가 전체 당간을 견고하게 지탱하도록 건조했던 옛 기술자들의 기술이 매우 과학적이었음을 보여주는 결과이다.

Table 2는 중간에 연결부가 없으며 회전스프링으로 지지된 가늘고 긴 기둥(Fig. 15)의 좌굴하중 식으로부터 유도된 좌굴 임계강성식(Kim et al., 1996)인 식 (43)으로부터 계산된 결과이다.

$$k_{b,cr} = PL \quad (43)$$

식 (43)에서 P는 좌굴에 대한 임계하중으로 기둥의 자중과



**Fig. 14** Heights and the center of gravity



**Fig. 15** Buckling of a column with a rotating spring

**Table 2** Critical buckling stiffness by position and height

No.	P [kN]	L [m]	$k_{b,cr}$ [kN-m/rad]	$k_{b,cr} / k_{cr}$	Remark
#1	68.30	10.83	739.67	5.7	Weights from ① to ⑤
#2	29.35	7.15	209.83	4.9	from ② to ⑤
#3	14.22	4.54	64.56	5.5	from ③ to ⑤
#4	7.44	2.91	21.64	3.8	④ and ⑤
#5	2.93	1.37	4.01	2.1	Only ⑤



같다고 가정한다. P는 각 위치별 당간의 자중과 상부의 자중을 더한 하중을 적용하며, 높이 L은 하중이 더해진 당간들의 높이의 합이다. 따라서 최상단의 당간은 해당 당간의 무게와 높이만 고려되나, 최하단의 당간은 전체 당간의 무게와 높이가 고려되면서, 높이 변화에 따른 지지부에서의 임계 좌굴강성이 5가지 경우로 계산되며 Table 2와 같다.

Table 1의 위치별 임계강성  $k_{cr}$  과 Table 2의 동일 높이별 임계강성  $k_{b,cr}$  을 비교한 결과를 Table 2의  $k_{b,cr}/k_{cr}$  항에 정리했다. 상부에 적재되는 무게와 높이가 증가될수록 그 차가 증가되어서, 최상단의 강성은 2.1배 차이가 나지만, 최하단의 지면 위치의 강성은 5.7배 차이 남을 알 수 있다. 이는 연결부에서 전도시키려는 회전력과 반력에 의한 복원력이  $k_{cr}$  의 계산 결과에 반영되었고,  $k_{b,cr}$  에는 복원력이 반영되지 않았기 때문인 것으로 판단된다.

Table 3은 5개의 간주석 중에서 임의의 간주석 하나의 무게 중심 높이가 기존 높이 보다 낮아 질 때 위치별로  $k_{cr}$  에 미치는 영향을 분석한 자료이다.

무게 중심의 높이 변경은 3단 및 5단 간주석에 대해서 기존 높이보다 20%를 낮추었다. 3단만 변경된 경우에는 3단의 무게 중심보다 상부에 위치하는  $k_{cr4}$ ,  $k_{cr5}$  의 값에는 영향을 주지 않고, 3단의 무게 중심의 하부에 해당하는  $k_{cr1}$ ,  $k_{cr2}$ ,  $k_{cr3}$  에는 영향을 주었다.

5단의 무게 중심 높이만 낮춘 경우에는 모든  $k_{cr}$  값이 변경된 무게 중심 위치보다 낮게 위치하고 있어서 전체 위치에서의 값 변화가 있다.

일반적으로 무게 중심이 낮아지면 구조물의 안정성이 개선된다. 그러나 기존 무게 중심 높이에서의  $k_{cr}$  과 변경된 무게 중심 높이가 적용된 경우의  $k_{cr}$  의 변화율 계산 결과를 비교해 보면, 안정성을 위해 최소로 요구되어지는 임계 강성 값을 낮추는 '↓' 부호가 아닌 '↑' 부호가 나타남을 확인할 수 있다. 따라서 앞서 언급한 바와 같이, 일부 부재의 무게 중심이 변경될 경우에

는 특정 위치에서의 임계 강성 값이 증가되어서 안정성을 유지하기 위해 더 높은 강성 값을 요구할 수 있음을 확인하였다.

## 5. 결론

건축문화재 중에서 높이가 높은 기둥 형상의 당간의 안정성 분석 기법 연구를 위해 역진자형 시스템의 이론을 적용하였다.

5개의 간주석으로 구성된 보물 제49호 나주 석당간의 이상화된 모델을 제시하고, 5자유도의 수학적 모델식을 유도하였다. 그리고 유도된 식을 이용하여 연결부 위치별 임계 강성 값을 추정할 수 있는 식을 제시하였다.

유도된 임계 강성 식은 부재의 무게와 높이, 무게 중심의 높이 등의 간단한 정보만 알면 안정성 평가를 위한 임계 강성을 추정하는 것이 가능하며, 역진자형 구조의 문화재 또는 일반 구조물에 적용할 수 있을 것으로 판단된다. 다만 오랜 세월 보존되어 오면서 노후된 석재의 강도를 고려한 파손 가능성 예측에 관한 분석은 추가적으로 진행되어야 한다.

문화재들에 대해 정기적으로 강성 조사를 하여 데이터베이스를 구축하여 강성 변화 추이를 분석하거나, 복원 및 보강 공사 전·후의 강성 변화를 조사하여 상태를 평가하고자 한다면, 조사 대상 문화재의 조사 또는 시험결과를 반영하여 현재 상태를 정량적 정보로서 자료화해야 한다.

정형화하기 어려운 형상, 구조와 성능 저하 상태를 가지는 문화재들이라도 각 문화재들의 정기적 조사 자료는 시간 경과와 환경 변화에 따른 해당 문화재의 상태 변화 양상을 파악할 수 있도록 하여 과학적 관리를 가능하도록 한다.

향후 연구에서는 현장시험을 통해 취득한 진동시험 자료와 본 논문에서 제시된 운동방정식을 이용하여 회전 스프링강성을 구하는 방법에 대한 연구를 진행하고자 한다. 현장 시험 자료를 이용하여 정량적 상태 분석을 할 수 있는 방안에 대한 지속적인 연구가 이루어진다면 다양한 환경적 요인들로 인해 많은 손상이 발생하는 건축문화재의 예방적 차원의 보존 및 장기적인 보존관리를 위한 비파괴 검사 방법으로 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

**Table 3** Comparison of the effect of the change in the height of the center of gravity of a single member

No.	Basic Heights	Only #3 20% Lower Heights		Only #5 20% Lower Heights	
	$k_{cr}$ [kN-m/rad]	$k_{cr}$ [kN-m/rad]	Rate of Change [%]	$k_{cr}$ [kN-m/rad]	Rate of Change [%]
#1	128.64	127.58	-0.8	128.25	-0.3
#2	43.24	44.30	2.4	43.62	0.9
#3	11.73	10.67	-9.0	11.34	-3.3
#4	5.69	5.69	0.0	6.07	6.8
#5	1.93	1.93	0.0	1.54	-20.0

## References

- Eom, G. P. (2007), Buddhist Banner Pole and Stone Posts in Korea, Hakyoun, 15-23, 118-134.
- Korea Institute of Construction Safety Technology (KICST). (2004), Report on the Precision Safety Diagnosis of Naju Suk-Dang-Gan, KICST, Korea, Seoul, 1-165.
- Korea Institute of Structural Safety (KISS). (2011), Structural Safety Evaluation Report after Restoration of Naju Suk-Dang-

- Gan, Report, KISS, Korea, Gwangju Metropolitan City, 1-117.
4. Cultural Heritage Administration (CHA). (2021), Korea National Heritage Online. Korea, Daejeon: Naju SukDangGan. Available at: <http://www.heritage.go.kr/heri/idx/index.do>.
  5. Choi, J. S., and Cho, C. H. (2021), Estimation of Dynamic Characteristics Before and After Restoration of the Stone Cultural Heritage by Vibration Measurement, *Journal of the Korea Institute for Structural Maintenance and Inspection*, KSMI, 25(1), 103-111.
  6. Downs, B. (1977), Transverse Vibrations of Cantilever Beams Having Unequal Breadth and Depth Tapers, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 44, 737-742.
  7. Karnovsky, I. A., and Lebed, O. I. (2000), Formulas for Structural Dynamics: Tables, Graphs and Solutions, McGraw-Hill, 355-395.
  8. Yadav, S. K., Sharma, S., and Singh, N. (2012), Optimal Control of Double Inverted Pendulum Using LQR Controller, *IJARCS*, 2(2), 189-192.
  9. Kim, H. S. (2002), A Study on the Posture Stabilization of Single Leg Robot, KAIST, Master's thesis, 1-11.
  10. Meriam, J. L., and Kraige, L. G. (2013), *Dynamics*, Wiley, 7th ed., Ch. 1, Ch. 5, Ch. 6., and App. B.
  11. Thomson, W. T. (1993), *Theory of Vibration with Applications*, Prentice Hall, 4th ed., Ch. 7.
  12. Chopra, A. K. (2017), *Dynamics of Structures*, Pearson, 5th ed., Ch.1.
  13. National Research Institute of Cultural Heritage (NRICH). (2018), *Periodic Survey of Nationally Designated Buildings and Cultural Properties 2017*, Korea, 3, 406-419.
  14. Gere, J. M., Timoshenko, S., *Mechanics of Materials*, Kim, M. S., Bang, S. H., Yang, W. H., Chang, D. I., and Cho, H. N. (1996), Cheong-Moon-Gak Publishing Co., Korea, 2nd., Ch. 11.

Received : 02/01/2021

Revised : 03/22/2021

Accepted : 04/12/2021

---

**요 지** : 건축문화재들은 다양한 환경적 요인들로 인해 많은 손상이 발생된다. 손상된 문화재를 보존하기 위해서 예방보존 및 장기적인 보존관리가 더욱 중요해지고 있다. 그래서 정기적인 점검 시에 적용 가능한 과학적인 비파괴 검사 방법에 대한 연구가 요구되고 있다. 관련된 연구를 위해서, 여러 문화재들 중에서 높은 깃대 형상의 당간을 연구 대상으로 선정하였다. 보존되고 있는 당간들 중에서 보물 제49호 나주 석당간을 선정하여, 구조 안정성을 평가하기 위한 분석 기법에 대한 기초적인 연구를 진행하였다. 이상화된 모델을 제시하고, 다자유도 운동방정식을 유도하였다. 그리고 연결부 위치별 임계 강성 값을 추정할 수 있는 식을 제시하였다.

**핵심용어** : 건축문화재, 역진자, 다자유도, 라그랑지, 구조 안정성, 임계 강성

---