韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2021.24.2.103
2021. 4. 제 24권, 제 2호, 103-114

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
April. 2021, Vol. 24, No. 2, 103-114

소수 나눗셈의 몫과 나머지에 대한 논점과 개선 방안

이 화 영 (한국과학창의재단 선임연구원)

본 연구는 소수 나눗셈에서의 '몫'과 '나머지' 용어 사용의 문제점을 인식하고 이를 개선하기 위한 방안을 탐색하였다. 지금까지의 선행 연구와 현행 교과서를 분석한 결과, '몫', '나머지' 용어 사용에 대해 연구자마다 상이한 견해를 주장한 근원에 나눗셈 알고리즘에서의 q, r값과 계산 결과의 해석에 따른 결과 값과 남는 양을 동일하게 보는 데에 원인이 있음을 밝히고, 소수 나눗셈의 '몫'과 '나머지' 취급에 대한 일관된 관점과 교과서 개선 방안을 제안하였다. 즉, 나눗셈 알고리즘 $b=a\times q+r$에 의한 소수 나눗셈의 결과인 q, r을 '몫', '나머지'로 보고, 문제 맥락에 따라 q와 같거나 작은 양을 최종적인 '결과 값'으로, 결과 값을 취하고 난 잔여량을 '남는 양'으로 지칭할 것을 제안하였다. 또한, 몫을 반올림하여 나타낸 근삿값을 '몫'으로 지칭하지 않을 것을 제안하였다.

I. 서론

초등학교 자연수의 나눗셈에서 '몫'과 '나머지'를 교과서에서 한 번 정의하면 수의 범위가 소수로 확장되어 소수의 나눗셈을 다루더라도 이를 다시 정의하지 않는다. 그러나 자연수 나눗셈에서의 몫과 나머지는 비교적 명백한 반면, 소수 나눗셈에서는 어디까지를 몫으로 보고, 어디부터를 나머지로 보아야 하는지는 다소 불명확하다. 예를 들어, '리본 15m를 4m씩 똑같이 자르려고 합니다. 4m짜리 리본 조각의 수와 남는 리본의 길이를 구하세요.'와 같은 문제에서는 몫이 '3개', 나머지가 '3m'이지만, '리본 16.4m를 똑같이 3등분으로 자르려고 합니다. 자른 리본 조각의 길이와 남는 리본의 길이를 구하세요.'와 같은 문제에서는 몫과 나머지를 특정하기가 쉽지 않다.

소수 나눗셈에서 몫과 나머지에 대한 연구는 김창수, 전영배, 노은환(2011), 박교식, 권석일(2012), 김진환, 박교식(2013), 강흥규(2014; 2016), 최근배(2015), 정상태(2016) 등이 있으나, 연구의 결과로 주장하는 바는 관점의 차이가 있다. 연구자에 따라 정수와 유리수 범위 각각에서 몫과 나머지의 성립 여부를 다르게 보고 있으며, 이에 따라 '몫'과 '나머지' 용어의 사용에 있어서도 서로 다른 제안을 제시하고 있다. 김창수, 전영배, 노은환(2011)은 유한소수 나눗셈에서 몫과 나머지가 유일하게 존재함을 보임으로써 성립함을 보였고, 김진환, 박교식(2013)은 정수 범위에서의 유클리드 알고리즘을 유리수 범위로 확장할 수 있다는 것을 보인 반면, 강흥규(2014; 2016) 및 최근배(2015)는 '몫'과 '나머지'의 성립은 정수 범위 내로 한정하였다. 박교식, 권석일(2012)은 유한소수의 나눗셈에서 '몫' 용어가 나눗셈의 결과를 의미하기도 하고 나눗셈의 결과를 반올림한 근삿값을 의미하기도 한다는 사용상의 비일관성을 지적하고, 후자의 경우 '몫'이라고 지칭하지 않아야 한다고 권고하였다.

이렇듯 소수 나눗셈에서의 '몫'과 '나머지'는 그 의미하는 기준이 모호함으로 인해 초등학교 교과서에서도 각 교육과정 시기마다 '나눗셈의 답', '나눗셈을 분수로 나타내기', '나눗셈의 몫' 등 혼용하거나 일관성 없이 다루어져 왔다(강흥규, 2014)고 볼 수 있으며, 이로 인해 학생들의 개념 이해에 대한 혼란이 예상 가능하다. 교과서에서는 교수학적 이유로 수학적 개념을 엄밀하게 다루기에 앞서 학생의 수준과 교수학적 상황에 맞게 과도기적이거나 엄밀하지 않은 표현과 방법을 사용하기도 한다. 그러나 박교식, 권석일(2012)이 지적하였듯이, 이러한 표현과 방법이 가져올 수 있는 혼란에 대해 조치를 취할 필요가 있다.

따라서, 본 연구는 그간 소수 나눗셈에서의 몫과 나머지에 대해 지적되어 왔던 문제점의 논지를 선행 연구들을 살펴봄으로써 종합적으로 정리하고, 2015 개정 초등학교 수학 교과용 도서에서 '몫'과 '나머지' 용어를 어떻게 다루고 있는지 살펴보고 개선 방안을 논의하고

* 접수일(2021년 4월 12일), 심사(수정)일(2021년 4월 21일), 게재확정일(2021년 4월 28일)
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 소수 나눗셈, 유리수의 나눗셈, 나눗셈 알고리즘, 몫, 나머지, 결과 값, 남는 양

자 한다. 본 연구에서는 나눗셈의 분수 표현을 유리수에 포함하여 다룬다.

II. 소수 나눗셈의 '몫'과 '나머지' 문제점에 대한 관점

초등학교 단계에서 유리수의 나눗셈에 대한 연구는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈에 대한 지도 방안을에 대한 것이다. 박교식, 송상헌, 임재훈(2004)은 예비 초등 교사들이 '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '2로 나누기'로 오해하는 오류를 많이 보이며, 단위 비율의 결정, 곱셈의 역연산으로서의 나눗셈의 의미에 대한 이해가 매우 부족함을 밝혔다. 김명운, 장경윤(2009)은 의미있는 분수 나눗셈 학습을 위해서는 맥락화가 필요함을 강조하였다. 분수의 나눗셈에서 포함제는 그 몫이 이산량인 경우 남는 양이 발생할 수 있고, 연속량인 경우에는 분수로 그 몫을 표현할 수 있다고 하였다. 김정원(2017)은 소수의 나눗셈은 분수의 나눗셈으로 바꾸어 계산할 수 있으므로 이러한 내적 연결성을 드러내어 지도하는 것이 의미가 있음을 강조하였다. 강완(2013)은 분수의 사칙계산 알고리즘은 위치적기수법과 관련성이 적으며, 오늘날의 실생활과의 관련성이 적은데 비해 '$7.2 \div 2.4 - (2\frac{1}{2} \times 0.4 + 1\frac{3}{4})$과 같이 지나치게 복잡한 소수와 분수의 혼합 계산은 지양할 것을 제안하였다.

유리수 나눗셈에서의 몫과 나머지에 대한 연구는 여러 연구자들(김창수 외, 2011; 박교식, 권석일, 2012; 김진환, 박교식, 2013; 강홍규, 2014; 최근배, 2015; 정상태, 2016)에 의해 수행되었다. 이장에서는 본 논문의 초점인 소수 나눗셈의 몫과 나머지에 대한 선행연구의 내용을 상세히 살펴본다.

김창수 외(2011)는 나눗셈에서 '몫'과 '나머지' 두 가지를 정하는 것은 결국 '몫' 혹은 '나머지' 하나의 결정에 관한 문제로 보았다. 사실, 곱셈과 덧셈의 성질에 의해 나머지가 결정되면 몫은 나머지에 의해 결정되고, 몫이 결정되면 나머지가 결정된다(김창수 외, 2011, p.310). 측정단위를 고려하지 않고 나눌 수 없는 양을 계산상으로 나눈 몫은 공평하지도 않으며 현실과도 괴리되므로, 나눗셈에서의 '등분'의 개념은 주어진 맥락의 측정단위를 고려해야 하며, 이에 따라 나머지를 다루어야 한다고 지적하였다. 즉, '나머지'를 '나누기를 공평하게 완수한 후 남는 양'으로 보는 것이 바람직하며 유한소수에서 '나머지'가 발생되는 나눗셈에서는 제수와 피제수의 측정단위와 '몫'의 단위를 고려해야 함을 제안하였다. 예를 들어, '15개의 사탕을 두 사람에게 똑같이 나누어 주려고 합니다. 몫은 얼마입니까?'라는 문제가 있을 때 사탕은 측정 단위가 '개'이다. 따라서 몫을 7.5개라고 하는 것은 억지스러우며 7개씩 나누어 주고 1개가 남는 것이 자연스럽기 때문에, 몫은 7이며, 나머지는 1이 된다. 또한, 이 연구에서는 유한소수 나눗셈에서 몫과 나머지가 성립함을 아래와 같이 수학적으로 증명하였다.

> 임의의 두 양의 유한소수 a, b에 대하여, $0 \le p < \overline{(a,b)} \cdot b$이고 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = p^{\odot}$이면서 $a = bq + p$를 만족하는 p, q는 유일하게 존재한다. 이 때의 p를 '나머지'라 하며, q를 '몫'이라 한다.(임의의 유한소수 a에 대하여, a의 소수점 아래 최저자리의 단위값을 $a^{\odot}$라 한다.) (김창수 외, 2011, p.324)

즉, 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘은 $a = b \times q + p$(a, b는 정수, $0 < q$, $0 \le p < a$)로 나타내어지며, p와 q의 존재성과 유일함을 보임으로써 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘은 정수에서 확장 가능함을 보였다. 더불어, 초등학교에서 나머지를 나타내는 방법으로 $a \div b = c + \frac{d}{b}$와 같은 표현을 제안하였다.

박교식, 권석일(2012)은 2007 개정 초등학교 수학 5학년 2학기와 6학년 1학기 교과서에서 소수 나눗셈에서의 몫과 나머지를 명료하게 취급하지 않는다고 지적하였다. 특히, (자연수)÷(자연수) 맥락과 관련해서만 '몫' 용어가 제시됨으로써, "(자연수)÷(자연수)의 계산 결과만이 몫이다"는 관념을 줄 수 있다고 지적하였다. 또한, 교과용 도서에서 '소수 나눗셈에서 몫과 나머지를 구할 때의 몫은 자연수이고, 나머지는 유일하다', '소수 나눗셈에서의 몫이 소수를 나누어떨어지지 않을 때만 몫을 반올림한다'는 부적절한 관념을 심어줄 수 있음을 지적하였다. 또한, 교과서에서 '몫' 용어를 (자연수)÷(자연수) 맥락에서는 사용하지만 (소수)÷(자연수), (자연수)÷(소수) 맥락에서는 사용하지 않았고, (소수)÷(소수) 맥락에서는 교과서에서는 사용하지 않았는

데 지도서에서는 사용하는 등 일관되지 않음을 지적하였다. 이 연구에서는 소수 나눗셈에서의 몫 용어 사용의 개선 방안으로 "24÷2와 2.4÷2의 값을 비교하여 보시오."와 같은 표현보다는, "24를 2로 나눈 몫과 2.4를 2로 나눈 몫을 비교하여 보시오."와 같이 '몫' 용어를 명확히 제시할 것을 제안하였다. 또한, 나눗셈의 결과가 몫이며, 나눗셈의 결과를 반올림하여 나타낸 근삿값 자체를 몫이라고 지칭하지 않아야 하며, 필요한 경우 "몫을 자연수 부분, 또는 소수 몇째 자리까지 나타낸 것"이라는 표현을 사용할 것을 제안하였다. '나머지' 용어 사용에 대해서는 교과서에서 몫을 어떻게 한정하느냐에 따라 나머지가 상대적으로 결정되는 상황을 제시해야 한다고 하였다.

김진환, 박교식(2013)은 정수 범위의 나눗셈 알고리즘을 유리수 범위로 확장할 수 있음을 보였다. 두 유리 수 a, b $(b>0)$에 대하여 $a=qb+r$, $0 \le r < b$을 만족하는 정수 q와 유리수 r가 유일하게 존재하고, q를 몫, r을 나머지라고 정의하였다. 또한, $\frac{38}{5} \div \frac{6}{5}$에 대해 동수누감 절차를 통해 제수인 $\frac{6}{5}$보다 작고 0보다 큰 나머지 $\frac{2}{5}$가 있으며, 이에 상응하는 몫은 6임을 보임으로써 유리수 범위의 나눗셈에서도 유일한 나머지가 존재한다는 것을 보였다.

강홍규(2014)는 '나눗셈의 몫'이라는 표현이 서로 다른 맥락에서 사용되어 모순을 야기한다고 지적하였다. 예컨대, $7 \div 3 = 2 \cdots 1$ 에서 2가 몫인데 비하여, $7 \div 3 = \frac{7}{3}$ 에서 $\frac{7}{3}$이 몫으로, 서로 다르므로 모순이다. 또한 $a = b \times n + r$ 에서 r은 나머지(reminder)라고 하지만, n은 특별한 명칭이 없고, 'quotient'는 나눗셈이라는 연산 과정이 요약된 '하나의 수'를 의미하는 것이지 n을 나타낼 때 쓰는 용어가 아니며, 자연수에만 한정하지도 않는다고 하였다. 이 연구에서는 '몫' 용어는 '몫과 나머지가 있는 나눗셈' 상황에서만 나머지와 구분된 나눗셈의 결과로 사용할 것과, $b \div a = \frac{b}{a}$에서는 $b \div a$의 '값' 또는 '나눗셈의 값'으로 사용할 것을 제안하였다. 또한, 강홍규(2016)에서는 몫과 나머지는 정수에서만 성립하며 소수에서는 성립할 수 없다고 주장하며, 그 이유에 대해 다음과 같이 언급한다.

> 엄밀하게 수학적으로 볼 때, 몫과 나머지는 유클리드 정역(Euclidean domain(예를 들면 정수)에서만 성립할 수 있는 법칙으로서, 나눗셈에 대하여 닫혀있는 체(Field)로서의 소수에서는 성립할 수 없는 개념이다(김응태, 박승안, 1989; 김명운, 2009). 굳이 유클리드 정역을 말하지 않더라도, 나눗셈이 수행을 소수 범위로 확장하면 나머지가 0이 아닌 한 확장된 장제법을 적용하여 나눗셈을 계속할 수 있기 때문에, 특정 지점에서 나눗셈을 중단하고 자연수에서처럼 몫과 나머지를 정의하기가 곤란하다(강홍규, 2016, p.386).

최근배(2015)는 몫과 나머지의 문제는 정수 범위에서만 성립하며 유리수 범위에서는 몫만 있다고 주장하였다. 그 예로, '길이가 11.5m인 실을 1.6m씩 잘라서 풍선을 묶는 데 사용하려고 합니다. 풍선을 묶고 남는 실은 몇 m인지 알아봅시다(교육과학기술부, 2012, p.28; 최근배, 2015에서 재인용)'라는 문제를 예로 다음과 같이 설명하였다. "(이 문제는) 현실 상황이지만 (11.5÷1.6을 분수로 계산하는 방법과 나눗셈 알고리즘으로 계산하는 방법)은 수학적 상황의 활동으로 볼 수 있다. 그러나 수학적인 관점에서 보면, 몫과 나머지의 문제는 정수 범위에서는 의미가 있지만 유리수 범위에서는 몫만 있을 뿐 나머지는 없다(최근배, 2015, p.32)".

정상태(2016)는 학생들이 몫과 나머지를 어떻게 인식하는지 조사하였다. 특히 (자연수)÷(소수)의 경우 (자연수)÷(자연수)의 형태로 전환하여 몫의 소수점을 찍는 지도 방식에 대해 고찰하고, 6학년 학생 121명을 대상으로 소수의 나눗셈에서 몫과 나머지에 대한 이해를 검사하였다. 맥락이 주어지지 않은 58÷1.4에 대해 몫과 나머지를 구분하여 답을 적게 한 문항에 대한 학생 반응 분석 결과, 정답[1]에 이른 학생은 전체의 6.7%에 불과하였다. 오답으로 구분된 70개의 사례를 분석한 결과, 몫을 41, 나머지를 6으로 응답한 학생이 36명으로 51.4%에 해당하였고, 몫을 $41\frac{3}{7}$ 또는 $\frac{290}{7}$, 나머지를 기록하지 않은 학생이 6명(8.56%) 등으로 나타났다. 이를 통해 알 수 있는 점은 학생들이 소수 나눗

1) 몫과 나머지를 '구분하여' 답할 때, 정답은 매우 다양하다. 몫 41과 나머지 0.6, 몫 41.4와 나머지 0.04, 몫 41.42와 나머지 0.012 등이다.

셈에서 소수점의 위치에 대해 이해하지 못하는 경우가 많으며, 실생활 문맥이 주어지지 않은 나누어떨어지지 않는 소수 나눗셈에서는 나머지를 특정하기 곤란하므로, 기존에 배운 지식을 활용하여 나눗셈의 몫을 분수의 형태로 표현하기도 한다는 것이다. 이를 통하여, 연구자는 세로 나눗셈을 통한 몫과 나머지 표현뿐만 아니라 분수 형태로 몫과 나머지를 표현하는 방안을 제안하였다.

위와 같이 파악한 소수 나눗셈에서의 '몫'과 '나머지'와 관련된 여러 연구자들의 논지를 정리하면 다음의 몇 가지로 표현할 수 있다.

- 소수 나눗셈에서도 자연수 나눗셈과 마찬가지로 몫과 나머지가 성립하는가?
- 몫이 소수인 경우 몇째 자리까지를 몫으로 볼 것이며, 이때의 나머지는 얼마인가?
- 몫을 반올림하여 나타낸 값은 '몫'인가?

이러한 논점에 대해 지금까지 연구자들의 연구 결과를 종합하면 다음과 같다.

첫째, 소수 나눗셈의 몫과 나머지가 성립하는가에 대한 것이다. 김창수 외(2011)는 유한소수 범위에서 나눗셈의 몫과 나머지의 존재성과 유일성을 증명하였다. 박교식, 권석일(2012)도 동일한 견지에서 나눗셈의 계산 결과가 '몫'이며, 몫에 의해 상대적으로 '나머지'가 결정되어야 한다고 하였다. 반면, 강흥규(2014; 2016)는 소수 나눗셈에서는 나머지가 0이 아닌 한 장제법을 적용하여 나눗셈을 계속할 수 있기 때문에, 자연수에서처럼 몫과 나머지를 특정하기가 곤란하며 몫과 나머지는 정수 범위에서만 성립한다고 하였다. 최근배(2015)도 몫과 나머지는 수학적으로 정수 범위에서만 성립하며 유리수 범위에서 '나머지'는 없다고 보았다. 즉, 수학적으로는 몫과 나머지가 없으며 맥락적 상황에서 몫과 나머지가 정해진다고 하였다. 여기에서 '몫', '나머지'를 일차적인 계산값으로 보는 관점과 문제의 최종적인 결과 값으로 보는 관점의 차이를 인식할 수 있다. 즉, 김창수 외(2011)와 박교식, 권석일(2012)의 연구에서는 '몫', '나머지'를 일차적인 계산값으로 보는 반면, 강흥규(2014; 2016), 최근배(2015)에서는 '몫', '나머지'를 문제 해결의 최종적인 결과 값으로 보고 있다. 또한, 나눗셈 정리(division algorithm) '자연수 a, b에 대하여 $b=aq+r$(단, $0<q$, $0\le r<a$)를 성립시키는 q와 r이 각각 유일하게 존재한다(강흥규, 2014; 최근배, 2015)'는 제수와 피제수를 자연수로 한정하고 있으므로, 제수와 피제수가 자연수가 아닌 나눗셈에 대해 q와 r이 각각 존재하지 않는다고 보는 것은 논리적으로 충분하지 않다. 즉, 소수 나눗셈에서도 '몫'과 '나머지' 자체가 없다고 말할 수 없으며, 물론 이 때의 '몫'과 '나머지'는 유클리드 정역(정수)에서만 한정되지는 않는다. 김창수 외(2011)에 따르면, 유리수 정역에서도 나눗셈의 결과로 q와 r이 유일하게 존재한다.

둘째, 몫이 소수인 경우 어디까지를 몫으로 보아야 하는가(이 때의 '나머지'는 어떻게 결정되는가)에 대한 것이다. 나눗셈이 필요한 다양한 생활 맥락에서 합리적인 결과로써 '몫'과 '나머지'를 취하는 것은 때때로 계산식에서의 q, r과 일치하지 않는 경우가 있다. 예컨대, 김창수 외(2011)가 제시한 포함제 문제 "[1] 무게가 1.75kg인 철봉의 길이를 재어 보았더니 0.5m였다. 이 철봉 1m의 무게는 몇 kg인가?", "[2] 1.75L의 우유를 0.5L씩 나누어주면 몇 사람에게 나누어줄 수 있는가?"를 살펴보자. 두 문제 모두 $b=aq+r$(단, $0<q$, $0\le r<a$)을 만족시키는 유일한 식은 $1.75=0.5\times3.5+0$으로서, 이 때의 유일한 q와 r은 각각 3.5와 0이다. 그러나 [1]에서 몫은 무게에 관련되므로 $1.75\div0.5=3.5$에 의하여 유리수 범위에서 허용되어 3.5kg이 된다. 반면, [2]에서의 몫은 사람 수에 관련되므로 유리수가 될 수 없고 자연수 3(명)이여야 하므로, $1.75\div0.5=3\cdots0.5$다. [2]의 답인 3은 '몫'이라고 지칭할 수 있는가? 결국, 몫이 소수인 경우 문제 맥락에 따라 답을 어디까지로(q전체 또는 q의 부분) 보고, 그에 따른 남는 양도 결정해야 한다. 이와 관련하여 김명운, 장경윤(2009), 김창수 외(2011)는 유리수체(體)에서 나머지는 '나머지'라는 용어 대신에 '남는 양'이라는 용어를 사용할 것을 제안한 바 있다.

셋째, 몫을 반올림하여 나타낸 값을 '몫'으로 보아야 하는가에 대한 것이다. 박교식, 권석일(2012)에 따르면, 나눗셈의 결과가 몫이며, 나눗셈의 결과를 반올림하여 나타낸 근삿값 자체를 몫이라고 지칭하지 않아야 한다고 밝히고 있다. 즉, $b=aq+r$(단, $0<q$, $0\le r<a$)에 의한 q값은 '몫'이지만, 이를 반올림한 값은 '몫을 반올림한 값'이지, '몫'이 아니라는 것이다.

결국 위와 같은 논쟁점들은 나눗셈 알고리즘

$b=aq+r$과 장제법을 사용한 계산에서 q, r과 맥락 문제에서 구하고자 하는 결과 값 및 그에 따라 남는 양을 동일하게 간주함으로써 발생되는 문제로 환원된다.

III. 관점의 일관성 정립과 교과서 개선 방안

'몫'에 해당하는 영어 'quotient'는 Cambridge Dictionary(2021)에 의하면 일상어로서는 "어떤 것의 특별한 정도 또는 양[2)]"으로서, "여럿으로 나누어진 각 부분(국립국어원, 1999) 또는 각 부분의 양(고려대학교 민족문화연구원, 2021)"을 나타내는 우리나라의 '몫'과는 그 의미상 다소 차이가 있으나, 수학 용어로서는 "나눗셈의 결과"로 우리나라의 '몫'과 동일하게 쓰인다. 외국 수학교육 문헌에서 quotient의 사용을 살펴보면, Bassarear(1997)는 "나눗셈은 n이 0이 아닌 $a \bullet n=b$인 경우에 한하여 $b \div n=a$로 정의되며, b를 피제수, n을 제수, a를 quotient라고 한다(p.123)"라고 쓰고 있다. Beckmann(2008, p.290)는 "A, B가 자연수, 분수, 소수인지에 상관없이 $A \div B$ 나눗셈 문제에서 그 결과를 quotient"라고 제시하였다. Deschamp, Evatt, Munsey, Page, Palosuo, Preston, & van Zyl(2010)도 $10 \div 3=3,1(reminder)$로 제시하면서 여기서 10은 dividend, 처음의 3은 divisor, 두 번째의 3은 quotient로 해설하고 있다. Cavangh(2000, p.185)도 나머지가 있는 나눗셈에서 나머지를 제외한 나눗셈의 결과를 quotient로 제시하였다. 즉, 영어권에서도 quotient는 '몫'과 마찬가지로, 나눗셈의 결과를 의미하며, 나머지가 있는 나눗셈에서 나머지를 제외한 나눗셈의 결과를 의미한다. Fitzgerald(2011, p.114)는 소수의 나눗셈에서의 quotient를 언급하고 있다. 3.00÷8을 할 때, "피제수에 소수점을 적어 넣는다. 소수점을 quotient까지 곧바로 위로 적어 넣는다(Add a decimal point and zeros to the dividend. Bring the decimal point straight up to the quotient.)"라고 제시하고 있다. 즉, 이를 통해 보았을 때, 소수 나눗셈에서 quotient도 '몫'과 마찬가지로 그 사용에 있어서 모호함을 안고 있다고 할 수 있다. 이러한 모호함을 해소하기 위해서는 관점의 명확한 기준을 세우고 이에 따라 '몫', '나머지' 용어 사용의 일관성을 추구할 필요가 있다.

Ⅱ장에서 살펴보았듯이, 유한소수의 나눗셈에서 알고리즘에 의한 나눗셈 결과인 q, r과 계산 결과의 최종적인 해석에서 최종적인 결과 값을 서로 구분하지 않고 이들을 '몫'과 '나머지'로 단순히 지칭하는 것은 혼란을 초래한다. 유한소수의 나눗셈에서 제수가 단위량이 되어 등분하는 경우에는 몫이 소수일 수 있다. 그러나 포함제의 경우는 결과가 자연수가 되어야 하므로 나눗셈의 결과가 소수라 하더라도 자연수 부분만을 최종적인 결과 값으로 취해야 한다. 다시 말해, 유한소수 나눗셈의 '몫'과 '나머지'에 관해 발생하는 논쟁점들은 $b=aq+r$ 알고리즘에 의한 계산에서의 q, r과 나눗셈 문제 맥락에서 최종적으로 구하고자 하는 결과(와 이에 따라 남는 양)를 동일시함으로 인해 발생한다고 할 수 있으므로, 이들을 구분할 필요가 있다.

김진환, 박교식(2013)의 연구에 의해 정수 범위의 나눗셈 알고리즘이 유리수 범위로 확장될 수 있음이 뒷받침되며, 김창수 외(2011)에 의하여 유한소수 나눗셈의 알고리즘 $b=aq+r$에서 q는 '몫'이고 r은 '나머지' 이다(단, $0<q$, $0 \leq r<a$). 박교식, 권석일(2012)에 따르면 나눗셈의 결과가 '몫'이며, 나눗셈의 결과를 반올림하여 나타낸 값은 몫이 아니다. 이를 통하여, 소수의 나눗셈에서 탈맥락화된 알고리즘에 의한 계산 결과인 q와 r이 각각 '몫'과 '나머지'라는 것을 알 수 있다. 반면, 계산 결과를 포함제 맥락에 맞게 자연수 부분까지 취한 값이라든가, 소수 몇째 자리까지 나타낸 값은 '몫'이라고 볼 수 없다는 것을 도출할 수 있다. 즉, 문제 맥락에 따라 q와 같거나 적은 최종적인 '결과 값'과 결과 값을 취한 후 '남는 양'이다. '결과 값'과 '남는 양'은 각각 '몫', '나머지' 용어와 구분하여 지칭할 수 있다. 이를 일종의 기준으로 정리하면 다음과 같다.

[기준 1] 소수 나눗셈 알고리즘 $b=aq+r$에서 q는 '몫'이고 r은 '나머지'이다(단, $0<q$, $0 \leq r<a$).
[기준 2] 문제 맥락에 따라 q와 같거나 적은 양을 최종적인 '결과 값'으로, 결과 값을 취한 후의 잔여량을 '남는 양'으로 지칭한다. ('결과 값'과 '남는 양'은 q, r과 구분하며 '몫', '나머지'로 지칭하지 않는다.)
(보조 기준 1) 소수 나눗셈의 몫 q를 반올림하여 나타낸 근삿값은 '몫'이 아니며 '결과 값'이다.

2) a particular degree or amount of something

위 기준을 적용하여 아래 문제에서 6.4를 2로 나누면 나눗셈에 의해 몫은 3.2, 나머지는 0이지만, 이를 문제의 맥락 즉, 포함제 맥락에 맞게 구한 결과 값은 3, 이에 따라 남는 양은 0.4L이다.

> 물 6.4L를 한 사람에 2L씩 나누어 줄 때 나누어 줄 수 있는 사람 수와 남는 물의 양을 구하려고 합니다. 몇 사람에게 나누어 줄 수 있고, 이 때 남는 물의 양은 얼마입니까?
>
> $6.4 = 2 \times 3.2 + 0 \quad \Rightarrow \quad 6.4 = 2 \times 3 + 0.4$
>
> 몫 ↲ ↳ 나머지 결과 값 ↲ ↳ 남는 양
>
> • 답: 3명에게 나누어 줄 수 있고, 남는 물의 양은 0.4L입니다.

이러한 기준에 따를 때 맥락 문제에서는 나눗셈 계산에 의한 몫에서 어디까지를 맥락에 맞게 결과 값으로 취할 것인가를 정하고, 이에 따라 남는 양을 정하면 맥락에 맞는 합리적인 문제 해결에 도달하면서도 '몫', '나머지' 용어와 충돌하지 않는다. 이는 "24를 2로 나눈 몫과 2.4를 2로 나눈 몫을 비교하여 보시오."와 같이 '몫' 용어를 명확히 제시할 것을 제안한 박교식, 권석일(2012)의 관점과 일치한다. 또한 맥락 문제에서의 '결과 값'과 '남는 양'을 용어로 강조하지 않고 맥락에서의 값들의 속성을 직접 언급하면, 학생들 입장에서 탈맥락화가 덜 되기 때문에 이해가 용이하다.

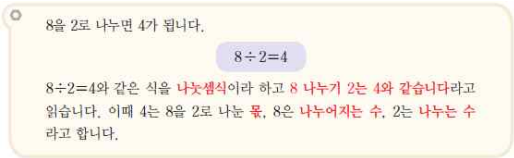
이상과 같이 소수 나눗셈에서 '몫'과 '나머지' 용어에 대한 관점을 종합적으로 정리하였으며, 이에 따라 2015 개정 초등학교 교과서에서 다루고 있는 소수 나눗셈 부분에 대한 구체적인 개선 방안을 제시하고자 한다.

2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에서 나눗셈은 자연수의 등분제와 포함제 맥락으로 도입된다. 등분제는 전체의 양을 똑같이 몇 부분으로 나누었을 때 한 부분이 차지하는 양을 구하는 나눗셈이다. 포함제는 전체의 양을 일정한 양으로 나누었을 때, 몇 부분으로 나누어질 수 있는 지 부분의 수를 구하는 나눗셈이다.

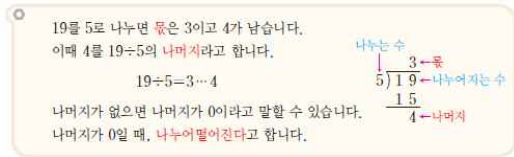
나눗셈은 [표 1]과 같이 3학년 1학기에서 나머지가 없는 자연수의 나눗셈으로부터 다루어진다. '몫'은 3학년 1학기의 자연수의 나눗셈([그림 1])에서, '나머지'는 3학년 2학기에서 자연수의 나눗셈에서 자연수인 몫이 구해지고 남는 수로 제시된다. 6학년 1학기, 6학년 2학기의 소수의 나눗셈이 제시되며, 3학년 2학기에서 자연수의 나눗셈을 세로식으로 쓰는 방법을 다루면서 세로식에서 몫의 위치를 다시 제시([그림 2])하는 것을 제외하면, 수의 확장에 따라 '몫'과 '나머지'는 다시 정의되지 않는다.

[표 1] 2015 개정 교과서의 소수 나눗셈 관련 내용
[Table 1] Contents related division of decimals of 2015 revised Math textbook

학기	세부 내용
3-1	나머지가 없는 (자연수)÷(자연수)
3-2	나머지가 있는 (자연수)÷(자연수)
4-1	나머지가 없는 (자연수)÷(자연수)
6-1	몫이 1보다 작은 소수인 (소수)÷(자연수) ※ 예: 1.32÷2=0.66
	몫이 자연수로 나누어 떨어지지 않는 (자연수)÷(자연수) ※ 예: 5÷4=1.25
6-2	(소수)÷(소수)
	(자연수)÷(소수)
	몫이 나누어떨어지지 않는 나눗셈에서 몫을 반올림하여 나타내기



[그림 1] '몫' 도입(교육부, 2019a, p.52)
[Fig. 1] Introduction of 'quotient' (MoE, 2019b, p.52)



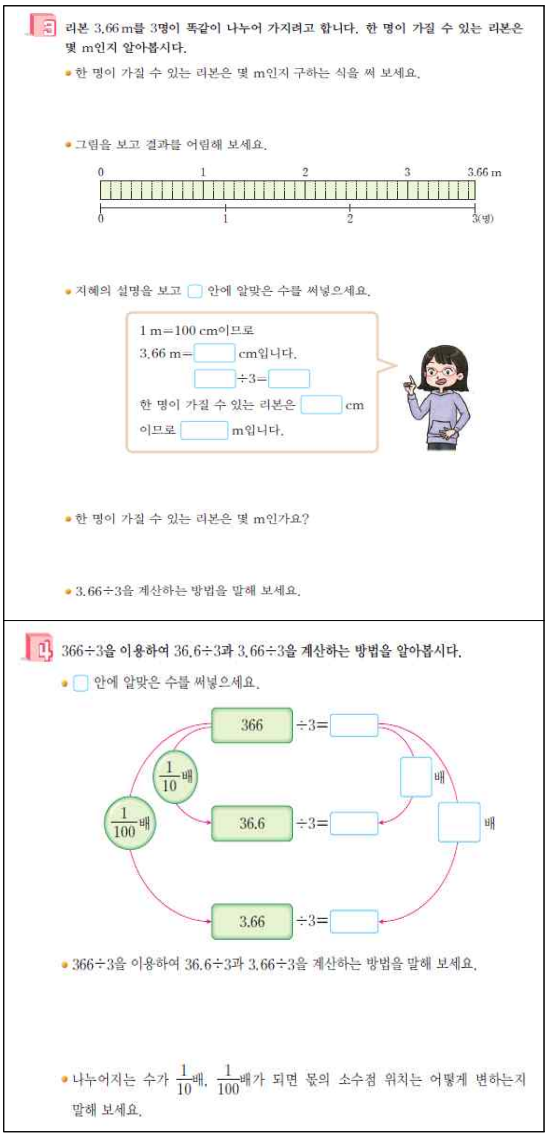
[그림 2] '나머지' 도입(교육부, 2018, p.43)
[Fig. 2] Introduction of 'reminder' (MoE, 2018, p.43)

앞에서 제안한 기준에 의해 [6-1], [6-2] 교과서, 익힘책에서 '몫' 용어를 살펴본 결과, 대부분 맥락적 상황에서는 '몫' 용어를 사용하는 대신 맥락에 맞는 값의 속성 자체를 지칭하였다. [6-1]에서는 '한 명이 가질

수 있는 리본은 몇 m인가요?(p.52)'와 같이 제시([그림 3])하며, [6-2]에서도 '확대 복사 한 사진의 가로는 원래 사진의 가로의 몇 배인가요?(p.37)'와 같이 제시한다. 반면, 수학적 상황 즉, 계산식이나 알고리즘 자체를 다룰 때에는 '몫' 용어를 사용하는 것을 알 수 있었다. [6-1] 3단원 소수의 나눗셈에서 '(자연수)÷(자연수)의 몫을 소수로 나타내어 볼까요', '몫의 소수점 위치를 확인해 볼까요', [6-2] '몫을 반올림하여 나타내어 볼까요'와 같이 차시명과 맥락이 배재된 계산 상황에서 '~몫의 소수점 위치는 어떻게 변하는지 알아보세요([그림 3] 아래)'와 같이 '몫' 용어를 직접 사용한다.

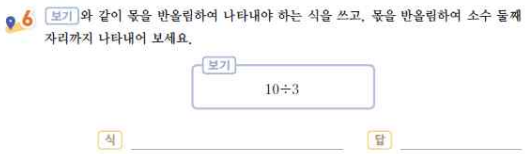
이와 다르게 수학적 상황에서 '몫' 대신 값의 속성을 제시하거나, 맥락적 상황에서 '몫'이라고 제시되는 경우가 있는지 조사해 본 결과, 교과서와 익힘책에서는 수학적 상황에서는 '몫'으로 제시하며 맥락적 상황에서는 값의 속성을 일관성 있게 제시하고 있었다.

나머지가 있는 소수의 나눗셈은 유일하게 [6-2]에서 '나누어 주고 남는 양을 알아볼까요' 차시(교육부, 2019d, pp.42-43)에서 '(소수)÷(자연수)' 맥락에서만 다루고 있다. 차시명에서도 '나머지'라는 표현을 사용하지 않고 '나누어 주고 남는 양'으로 표현하며, 문제와 활동 지시어에서도 '나누어 주고 남는 페인트', '(나누어 주고) 남는 물의 양', '남는 리본의 길이' 등과 같이 '나머지' 표현을 매우 피하고 있음을 알 수 있다. 여기서 원래 나눗셈의 몫은 자연수가 포함된 소수인데, 다루는 나눗셈 맥락에 의하여 취하게 되는 결과 값은 자연수 부분이 된다. 즉, 앞에서 제안한 기준에 비추어 보았을 때 소수의 나눗셈을 수학적으로 끝까지 완수한 결과로서의 '나머지'가 아니라, 문제 맥락에 따라 남는 양을 다루기 때문에 '남는 양'이라는 표현을 '나머지'와 구분하면서도 일관성 있게 사용한 것이 바람직하다고 보인다. 그러나 여기서는 피제수가 소수이고 제수가 자연수인 경우만 간단히 다루고 있는데, 학생들로 하여금 맥락에 알맞은 결과 값을 취하고, 이에 따라 남는 양을 정하도록 이해시키기 위해서는 제수가 소수인 '남는 양'이 있는 맥락을 다루어보게 할 수 있다. 가령, '14.7m의 리본이 있습니다. 기둥 사이에 4.2m씩 붙인다면 몇 곳에 붙일 수 있습니까?'와 같은 맥락의 문제는 계산에 의하여 $14.7 \div 4.2 = 3.5$라는 몫을 얻지만, 맥락에 알맞은 '결과 값'은 3(곳)이고, '남는 양'은 0.5m가 된다. 이와 마찬가지로, 피제수가 자연수이고 제수가 자연수이거나 소수인 경우도 다루어 볼 수 있으며, 때로는 몫이 나누어떨어지지 않는 경우도 다루게 할 수 있다.



[그림 3] 맥락적 상황과 수학적 상황에서의 '몫' 표현 (교육부, 2019b, pp.52-53)

[Fig. 3] Expressions for 'quotient' in contextual and mathematical conditions(MoE, 2019b, pp.52-53)


6 보기와 같이 몫을 반올림하여 나타내야 하는 식을 쓰고, 몫을 반올림하여 소수 둘째 자리까지 나타내어 보세요.

보기

10÷3

식 _____ 답 _____

[그림 4] 몫을 반올림하는 소수 나눗셈 문제(교육부, 2019e, p.29)
[Fig. 4] Problem for division of decimal with rounding the quotiont

몫을 반올림하여 나타내는 경우는 [6-2] 2. 소수의 나눗셈 단원에서 '몫을 반올림하여 나타내어 볼까요' 차시에서 다루고 있으며, 교과서와 익힘책 모두 몫이 무한소수(순환소수)인 경우만을 제시하고 있다([그림 4]). 그러나, 몫을 반올림하는 것은 끝이 나지 않는 무한소수 몫이 나올 경우뿐만 아니라, 문제 상황의 맥락에 따라 올릴지, 버릴지, 반올림할지 또는 무한소수 또는 유한소수인 몫의 소수 몇째 자리까지의 결과를 원하는지에 따라서도 필요한 처리 방법이다. 예컨대, 10÷2.4의 계산 결과는 맥락에 따라 처리 방법을 결정할 수 있도록 지도되어야 한다. 정상태(2016)가 제시하였듯이, '10달러가 있다. 2.4달러짜리 빵을 산다면 몇 개 살 수 있는가?'의 문제가 제시된다면 4개의 빵을 살 수 있고, 이 경우 나머지를 '버림' 하는 상황에 해당한다. '10리터의 물을 2.4리터짜리 물통에 담는다면, 통은 몇 개 필요한가?'의 문제에서는 5개의 물통이 필요하게 되며, '올림'하는 상황이 된다. 또한, '10달러가 있다. 2.4달러짜리 빵을 산다면 몇 개 살 수 있고, 거스름돈은 얼마 남는가?'의 문제를 통해서는 자연수 몫을 구한 후 남는 수는 모두 나머지로 간주해야 한다. 또한, 몫이 유한소수이더라도 원하는 결과 값의 범위에 맞게 반올림할 수 있도록 지도해야 할 필요가 있다. 예를 들어, [6-2] 익힘책 29쪽의 5번 문제를 변형하여 '번개가 친 곳에서 8km 떨어진 곳에서는 번개가 친 지 약 1분 뒤에 천둥소리를 들을 수 있습니다. 번개가 친 곳에서 5km 떨어진 곳에서는 번개가 친 지 몇 분 뒤에 천둥소리를 들을 수 있는지 몫을 반올림하여 소수 첫째 자리까지 나타낸 값으로 구해보세요.'와 같은 문제는 $5 \div 8 = 0.625$인데 소수 둘째 자리에서 반올림하여 0.6초(즉, 36초)라는 결과 값을 얻을 수 있다. 일본 교과서 5-2(啓林館, 2014)에서도 $18 \div 3.2$의 몫 5.625를 일의 자리까지의 값으로 나타내도록 하는 문제를 제시하고 있다.

또한, '몫을 반올림하여 일의 자리까지 나타내어 보세요'와 같은 표현이 많이 사용되고 있다. 여기에서는 나눗셈의 계산 결과를 '몫'으로 표현하고 있으나, 그것을 반올림하여 나타낸 수를 지칭하는 표현이 별도로 없다보니, 몫을 반올림하여 일의 자리까지 무엇을 나타내어 보라는 것인지 문장의 구성이 불완전하게 제시되어 있으며, '몫'이라는 표현이 나눗셈의 결과로서와 그것을 반올림한 값 둘 다를 의미하는 것으로 받아들여질 수 있다. 만약 '몫'과 근삿값을 구분하여 표현한다면, '몫을 반올림한 값을 일의 자리까지 나타내어 보세요'와 같이 제시할 필요가 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 논문에서는 지금까지 소수 나눗셈의 '몫'과 '나머지'에 대한 연구자들의 다양한 주장들을 분석하고 이를 종합하였다. 나눗셈 알고리즘 $b = a \times q + r$에 의한 소수 나눗셈의 결과 q, r을 '몫', '나머지'로 보며, 이를 문제 상황의 문맥에 따라 q와 같거나 작은 양을 합리적인 '결과 값'으로, 결과 값을 취하고 잔여량을 '남는 양'으로 볼 것을 제안하였다. 이 때 결과 값과 남는 양은 q, r과 구분하여 '몫', '나머지'라고 지칭하지 않되, '결과 값', '남는 양'을 가급적 용어로써 강조하지 않으며, q를 반올림하여 나타낸 근삿값도 '몫'으로 지칭하지 않을 것을 제안하였다.

이러한 기준을 통해 2015 개정 초등학교 수학과 교과서를 살펴보고 개선 방안을 제안하였다.

[6-1], [6-2] 교과서에서 수학적 상황이나 계산식, 알고리즘 자체에서 q를 다룰 때에는 '몫' 용어를 사용하고, 맥락적 상황에서는 맥락에 맞는 값의 속성을 제시하여 일관성을 유지하고 있음을 알 수 있었다.

나머지가 있는 소수의 나눗셈에서는 '나머지'라는 용어 사용을 피하고 나눗셈 맥락에 의해 '나누어 주고 남는 양', '남는 리본의 길이' 등으로 맥락에 맞는 값의 속성을 제시하고 있었다. 그러나, 피제수가 소수이고 제수가 자연수인 경우만 다루고 있어, 맥락에 알맞은 결과 값을 취하고 이에 따라 남는 양을 정할 수 있게 이해시키기 위해서는 제수가 소수인 '남는 양'이 있는

맥락을 다루어 볼 것을 제안하였다.

몫을 반올림하여 나타내는 경우는 다양한 문제 맥락을 통해 몫을 올림, 버림, 반올림 중 어떻게 처리하는 것이 합리적인지 판단할 수 있도록 지도해야 함을 제안하였다. 또한, 몫이 무한소수(순환소수)인 경우만을 제시하고 있었는데, 몫을 반올림하는 것은 문제 맥락에 따라 몫의 소수 몇째 자리까지의 결과를 원하는지에 따라서도 반올림할 필요가 생기므로, 몫이 유한소수이더라도 원하는 결과 값의 범위에 맞게 반올림하는 경우도 지도할 필요가 있음을 제안하였다. 또한, '몫을 반올림하여 일의 자리까지 나타내어 보세요'와 같은 표현은 몫을 반올림하여 일의 자리까지 무엇을 나타내어 보라는 것인지 문장의 구성이 불완전하게 제시되기 때문에 여기서 '몫'이라는 표현이 나눗셈의 결과로서와 그것을 반올림한 값 둘 다를 의미하는 것으로 받아들여질 수 있기 때문에 '몫을 반올림하여 일의 자리까지 나타낸 값을 구해보세요'와 같은 표현을 제안하였다.

지금까지 소수 나눗셈에서 그 의미가 모호했던 '몫', '나머지'를 여러 연구자들의 견해를 종합하여 일관성을 정립하고, 초등학교 수학에서 소수 나눗셈의 '몫'과 '나머지' 지도 시 개선 방안을 몇 가지 제안하였다. 이밖에도 소수 나눗셈 지도에 대한 개선 방안을 발전적으로 몇 가지 더 논의할 수 있다.

첫째, 교과서에서 소수 나눗셈을 다룰 때 '몫'과 '나머지'를 명확히 정의 또는 안내할 필요가 있다. 김창수 외(2011, p.310)에서도 지적하였듯이, 유한소수에서의 '몫'과 '나머지'의 의미가 무엇인지에 대한 고민 없이 습관적으로 정수에서의 나눗셈 알고리즘을 유한소수에서도 그대로 적용해 옴으로써 그동안 많은 혼란이 이어져왔다고 볼 수 있다. 그러나 본고에서 밝혔듯이, 유한소수 나눗셈의 지도 상황에서는 '몫'과 '나머지' 뿐만 아니라 '결과 값'과 '남는 양'을 고려해야 하며, 이러한 개념들이 일관성 있게 사용되도록 교과서에서 명확히 제시할 필요가 있다.

둘째, 소수 나눗셈에서는 계산 결과로 합리적인 결과 값을 구할 수 있도록 지도해야 한다. 계산 결과에만 집중하고 연산이 가지는 의미의 가치를 간과하면, 일반적인 수학 지식으로 의미 있는 정립과는 거리가 먼 고립된 기교로 귀착될 수 있다(Gravemeijer & Galen, 2003; 김진환 외, 2013에서 재인용). 예컨대, 소수 나눗셈의 포함제 맥락에서 계산 결과, 몫이 소수로 나오는 경우에는 '3명', '3묶음' 등 결과 값을 자연수까지로 취하고, 그에 따라 피제수에서의 잔여량을 남는 양으로 해석할 수 있어야 한다. 또한, 나눗셈 계산으로 얻어진 몫을 올림, 버림, 반올림 등을 통해 합리적인 결과 값으로 도출할 수 있어야 한다.

셋째, 수학 용어를 일상용어와 구분하여 사용할 수 있는 방안 강구가 필요하다. 김창수 외(2011), 최근배(2015) 등도 일상용어를 수학 용어로 사용하기 위해서는 좀 더 엄밀하게 고려되어야 할 필요가 있다'고 하였다. 우리나라에서 '몫', '나머지'를 수학 용어로써 사용한 기원은 알 수 없으나, '몫'은 수학 용어이기 이전에 '여럿으로 나누어 가지는 각 부분(표준국어대사전, 2021)'을 의미하는 일상용어로서, 등분제의 결과와는 일치하지만 포함제와 단위비율의 결정맥락에 의한 결과와는 그 일상적 의미가 어긋나며, 이에 따른 학생들의 개념 혼란의 가능성도 배제하기 어렵다. '나머지' 또한 '어떤 한도에 차고 남은 부분(표준국어대사전, 2021)' 또는 '어떤 일을 하다가 마치지 못한 부분(표준국어대사전, 2021)'이라는 일상적 의미를 가진다. 일본 교과서(啓林館, 2014; 學校図書, 2015)에서는 나눗셈 알고리즘에서 '몫'에 해당하는 용어를 '商(장사 상)'으로 표기하고 있는데, 이 용어는 '어떤 수를 다른 수로 나누어서 얻은 수((주)오픈마인드, 2021)'로서 일상용어와는 구분하여 사용하고 있는 것으로 보인다. 대한제국 당시의 수학교과서인 정선산학(精選算學)에서도 장제법에서 몫에 해당되는 수를 "商數"로 표기하고 있다.

지금까지 본 논문에서 소수 나눗셈에서 '몫'과 '나머지'에 대한 모호한 관점을 일관성 있는 기준을 통해 정리하고 지도상의 개선 방안을 제시하였다. 이러한 연구 결과는 차후에 교육과정 및 교과서 개발 시 참고가 될 것으로 기대하며, 향후에도 수학에서 모호한 개념과 용어들을 명확히 하려는 후속 연구들이 활발히 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

강완(2013). 2009 개정 초등학교 수학과 교육과정 및 교과서 분석: 개선을 위한 네 가지 문제점. 학교수학, 15(3), 569-583.

Kang, W. (2013). An Analysis on Elementary Mathematics Curricula and Textbooks of 2009 Revised Version in Korea- Four Issues to be Improved. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics, 15(3),* 569-583.

강흥규(2014). 초등수학에서 '나눗셈으로서의 분수(b÷a=b/a)' 개념 지도에 관한 연구-한국의 역대 초등수학 교과서에 대한 분석을 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 18(3), 425-439.

Kang, H. (2014). A Study on the Teaching of a 'a Concept of Fraction as Division(b÷a=$\frac{b}{a}$)' in Elementary Math Education; Based on a Analysis of the Korean successive Elementary Math Textbooks, Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 18(3), 425-439.

강흥규(2016). 초등수학교육에서 장제법 지도에 관한 연구. 한국초등수학교육학회지, 20(3), 371-391.

Kang, H. (2016). A Study on the Teaching of Long Division Algorithm in Elementary Mathematics Education, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 20(3),* 371-391.

국립국어원(1999). 표준국어대사전.

National Institute of Korean Language. (1999). *Standards Korean Dictionary.*

국립국어원(2021). 표준국어대사전.

National Institute of Korean Language. (2021). *Standards Korean Dictionary.*

고려대학교민족문화연구원(2021). 고려대한국어대사전.

Research Institute of Korean Studies, Korea University (2021). *Korean Dictionary of Korea University.*

교육부(2018). 초등학교 3~4학년군 수학, 수학 3-2. ㈜천재교육.

Ministry of Education (2018). Elementary School 3~4 Mathematics, *Mathematics 3-2.* Chunjae corp.

교육부(2019a). 초등학교 3~4학년군 수학, 수학 3-1. ㈜천재교육.

Ministry of Education (2019a). Elementary School 3~4 Mathematics, *Mathematics 3-1.* Chunjae corp.

교육부(2019b). 초등학교 5~6학년군 수학, 수학 6-1. ㈜천재교육.

Ministry of Education (2019b). Elementary School 5~6 Mathematics, *Mathematics 6-1.* Chunjae corp.

교육부(2019c). 초등학교 5~6학년군 수학, 수학 익힘 6-1. ㈜천재교육.

Ministry of Education (2019c). Elementary School 5~6 Mathematics, *Mathematics Workbook 6-1.* Chunjae corp.

교육부(2019d). 초등학교 5~6학년군 수학, 수학 6-2. ㈜천재교육.

Ministry of Education (2019d). Elementary School 5~6 Mathematics, *Mathematics 6-2.* Chunjae corp.

교육부(2019e). 초등학교 5~6학년군 수학, 수학 익힘 6-2. ㈜천재교육.

Ministry of Education (2019e). Elementary School 3~4 Mathematics, *Mathematics 6-2.* Chunjae corp.

김명운, 장경윤(2009). 맥락화를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈의 지도. 학교수학, 11(4), 685-706.

Kim, M., & Chang, K. (2009). Teaching Multiplication & Division of Fractions through Contextualization. Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics. *School Mathematics, 11(4),* 685-706.

김정원(2017). 수학의 내적 연결성을 강조한 5학년 분수 나눗셈과 소수 나눗셈 수업의 실행 연구. 수학교육학연구, 27(3), 351-373.

Kim, J (2017). An Action Research on Instruction of Division of Fractions and Division of Decimal Numbers : Focused on Mathematical Connections. *Journal of Educational Research in Mathematics, 27(3),* 351-373.

김진환, 박교식(2013). 나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘의 확장에 관한 연구. 수학교육학연구, 23(1), 17-35.

Kim, J. & Park, K. (2013) A Study of Extension of Division Algorithm and Euclid Algorithm. *Journal of Educational Research in Mathematics, 23(1),* 17-35.

김창수, 전영배, 노은환(2011). 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘(Division algorithm). 수학교육, 50(3), 309-327.

Kim, C.; Jun, Y. & Roh, E. (2011). The Division Algorithm for The Finite Decimals. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A., *The Mathematics Education. 50(3),*

309-327.

네이버(2021). 한자사전. https://hanja.dict.naver.com/hanja?q=%E5%95%86&cp_code=0&sound_id=0 (검색일 : 2021.4.10.)

Naver (2021). Dictionary of Chinese Character. Retieved from https://hanja.dict.naver.com/hanja?q=%E5%95%86&cp_code=0&sound_id=0

박교식, 송상헌, 임재훈(2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. 학교수학, 6(2), 235-239.

Park, K.; Song, S. & Yim, J (2004). A Study on Understanding of the Elementary Teachers in Pre-service with Respect to Fractional Division. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics, 6(3),* 235-249.

박교식, 권석일(2012). 우리나라 초등학교 수학 교과서의 소수 나눗셈에서의 몫과 나머지 취급에서 나타나는 부적절한 관념과 그 개선에 관한 연구. 수학교육학연구, 22(4), 445-458.

Park, K. & Kwon, S. (2012). A Study on Impropernotions Appeared in Dealing With Quotient and Reminder in Division for Decimal Numbers in Korean Elementary Math Textbooks and Its Improvements. *Journal of Educational Research in Mathematics, 22(4)*, 445-458.

정상태(2016). 소수 나눗셈에서 몫과 나머지에 관한 소고. 초등수학교육, 19(3), 193-210.

Jeong, S. (2016). A Study on the Quotient and Remainder in Division of Decimal. J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C., *Education of Primary School Mathematics, 19(3)*, 193-210.

㈜오픈마인드 (2021). 한자사전. https://hanja.dict.naver.com/hanja?q=%E5%95%86&cp_code=0&sound_id=0. (검색일 : 2021.4.11.)

OpenMind (2021), Dictionary of Chinese Character, Retrieved from https://hanja.dict.naver.com/hanja?q=%E5%95%86&cp_code=0&sound_id=0

최근배(2015). 한국과 미국(Harcourt Math)의 초등수학 교과서 비교 분석: 분수와 소수의 도입과 연산을 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 19(1), pp. 17-37.

Choi, G. (2015). A Comparative Study of Elementary School Mathematics Textbooks of Korea(2007 Curriculums) and America(Harcourt Math): Focused on The Introductions and Operations of Fractions and Decimals. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 19(1).* 17-37.

Bassarear, T. (1997) *Mathematics for Elementary School Teachers.* MA: Houghton Mifflin company

Beckmann, S. (2008) *Mathematics for Elementary Teachers,* 2nd Edition, Boston: Pearson.

Cambridge Dictionary (2021). Retieved from https://dictionary.cambridge.org/ko/%EC%82%AC%EC%A0%84/%EC%98%81%EC%96%B4/quotient

Cavanagh, M. C. (2000). *A Mathematics Handbook : Math to know,* MA: Great Source Education Group.

Deschamp, N.; Evatt, M.; Munsey, L.; Page, M.; Palosuo, L.; Preston, P. & van Zyl, M. (2010). Help Your Kids with Math: A Unique Step-by-step Visual Guide. New York: DK.

Fitzgerald, T. R. (2011) *Math Dictionary for kids: The essential guide to Math terms, strategies, and tables.* TX: Prufrock Press.

啓林館 (2014). 算數5. 東京.

學校図書 (2015). 小學校 算數 5年.

Exploring the Issues and Improvements of the Quotient and the Reminder of the Decimal Division

Lee, Hwayoung
Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity
602 Seolleung-ro, Seoul, Republic of Korea, 06097
E-mail : hylee@kofac.re.kr

In this study I recognized the problems with the use of the terms 'quotient' and 'reminder' in the division of decimal and explored ways to improve them. The prior studies and current textbooks critically analyzed because each researcher has different views on the use of the terms 'quotient' and 'reminder' because of the same view of the values in the division calculation. As a result of this study, I proposed to view the result 'q' and 'r' of division of decimals by division algorithms $b=a\times q+r$ as 'quotient' and 'reminder', and the amount equal to or smaller to q the problem context as a final 'result value' and the residual value as ‘remained value’. It was also proposed that the approximate value represented by rounding the quotient should not be referred to as 'quotient'.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : division of decimal, division of rational number, division algorithm, quotient, reminder, result value, the amount left