

최적 타원 생성 알고리즘 기반 2상 기포 유동 영상 처리 기법

명재원* · 조설희* · 이용희** · 김성호** · 박영철*** · 신원규[†]

Image processing method of two-phase bubbly flow using ellipse fitting algorithm

Jaewon Myeong*, Seolhee Cho*, Woonghee Lee**
Sungho Kim**, Youngchul Park*** and Weon Gyu Shin[†]

Abstract In this study, an image processing method for the measurement of two-phase bubbly flow is developed. Shadowgraphy images obtained by high-speed camera are used for analysis. Some bubbles are generated as single unit and others are overlapped or clustered. Single bubbles can be easily analyzed using parameters such as bubble shape, centroid, and area. But overlapped bubbles are difficult to transform clustered bubbles into segmented bubbles. Several approaches were proposed for the bubble segmentation such as Hough transform, connection point method and watershed. These methods are not enough for bubble segmentation. In order to obtain the size distribution of bubbles, we present a method of splitting overlapping bubbles using watershed and approximating them to ellipse. There is only 5% error difference between manual and automatic analysis. Furthermore, the error can be reduced down to 1.2% when a correction factor is used. The ellipse fitting algorithm developed in this study can be used to measure bubble parameters accurately by reflecting the shape of the bubbles.

Key Words : Image processing(영상 처리), Bubbly flow(기포 유동), Image segmentation(영상 분할), Watershed(워터셰드), Ellipse fitting(타원 피팅)

1. 서론

기포는 높은 에너지 효율과 질량, 열전달률을 갖고 있어 공동 현상, 생물 반응, 석탄 액화, 수처리 기술과 같은 여러 산업 분야에서 사용된다.⁽¹⁾ 기포의 크기가 작아질수록 비표면적은 커지며, 물질 전달 효율과 파열에너지가 증가하므로 기포 공정 성능에 영향을 미친다.⁽²⁾ 따라서 많은 산업 설비에서 기포의 크기는 매우 중요한 변수로 작용한다.

기포의 크기를 측정하는 방법은 관입식(intrusive)와 비관입식(non-intrusive)로 나뉜다. 관입식 방법으로는 모세관 흡입 프로브(capillary suction probe),

[†] Department of Mechanical Engineering,
Chungnam National University, Professor
E-mail: wgshin@cnu.ac.kr

* Department of Mechanical Engineering,
Chungnam National University, Daejeon 34134,
Korea, Graduate Student

** Department of Energetic Materials &
Pyrotechnics, Hanwha Corporation
Defense R&D Center, Daejeon 34101, Korea

*** Agency for Defense Development, P.O.
BOX 3, Daejeon 34186, Korea

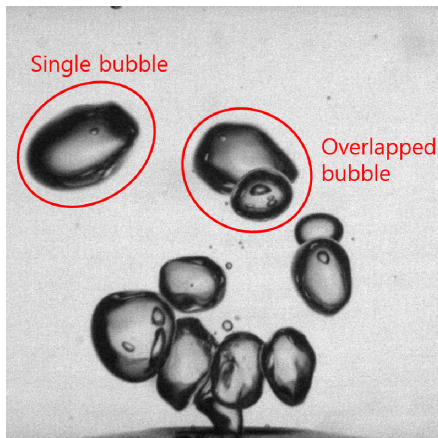


Fig. 1. Single bubbles and overlapped bubbles in the bubble image

광학 파이버 프로브(optical fiber probe) 등이 있으며, 비관입식 방법에는 위상도플러 유속계(phase doppler anemometry), 고속 촬영(high-speed photography) 등이 있다.⁽³⁾ 비관입식 방법은 유동에 간섭을 일으키지 않기 때문에 관입식 기법에 비해 주로 사용되고 있다. 위상도플러 유속계는 레이저를 이용한 측정기로서 정확도가 높은 반면 장비 가격이 고가인 편이다. 이에 반해 고속 촬영은 비교적 장비가 저렴하며, 기포 유동의 직접적인 가시화와 분석이 가능하다는 점에서 유리하다. 고속 촬영 영상은 그림자 기법(shadowgraphy technique)⁽⁴⁾으로 촬영되며, 촬영 대상 뒤에 적절한 강도의 균일한 광원을 사용하여 관측한다. 촬영된 영상은 기포의 분석을 위해 영상 처리(image processing)가 필요하다. 기포의 영상 처리는 Fig. 1과 같이 크게 단일 기포(single bubble) 처리와 겹쳐진 기포(overlapped bubble) 처리로 나눌 수 있다. 대부분의 단일 기포는 겹쳐진 기포에 비해 영상 처리가 수월하다. 원본 영상을 흑백 이진화 영상으로 변환하여도 기포 각각의 경계가 독립적이므로 경계를 통해 바로 기포의 매개 변수를 얻을 수 있고 오차 또한 상당히 낮다.^(5,6)

겹쳐진 기포를 분리하는 방법에는 크게 허프 변환(Hough transform), 연결점법(Connecting point method), 워터셰드(Watershed)가 있다. 각 방법은 시간, 정확도 등 개별적인 장단점이 존재한다. 세 가지 방법의 사용만으로는 기포의 기하학적 특징을 정확하게 파악하기 어려우므로 보정 작업을 거

쳐 정확도를 높여야 한다. 또한, 과도하게 겹쳐지거나 일그러진 기포는 수동 분석해야 하는 경우도 빈번하다. 허프 변환은 직선, 원, 타원 등 도형 검출에 많이 사용되는 방법으로 기본적으로 Standard Hough Transform(SHT)과 Probabilistic Hough Transform(PHT)이 있다. SHT는 모든 화소를 저장하고 PHT는 확률적으로 화소를 선택하여 저장한다는 차이가 있다.^(7,8) 두 방법 모두 큰 저장공간과 긴 수행 시간이 요구되기 때문에 Lei 등⁽⁹⁾이 개선한 Randomized Hough Transform (RHT)이 많이 사용되고 있다. RHT는 타원 방정식을 간소화하여 계산시간은 단축시켰으나, 여전히 전체 화소수가 늘어날수록 수행시간이 늘어나는 문제점이 있었다. Zhang 등⁽¹⁰⁾은 연결점법을 응용하여 겹쳐진 기포 경계를 평균 거리 편차를 통해 개별 기포로 분리하였다. 연결점법은 기포의 형상 인식에 효율적이거나 처리 속도가 오래 소요된다는 단점이 있었다. 반면 워터셰드는 단순 분할 과정을 거치기 때문에 처리 속도가 빠른 편이다. Lau 등⁽¹¹⁾은 단일 기포와 기포 덩어리를 구분하고, 겹쳐진 기포에 워터셰드 알고리즘을 응용하여 기포를 분리하였다. 또한 분리된 기포는 원으로 변환하여 크기 분포를 분석했다. 분석결과에 따르면 기체 hold-up이 0.068인 경우 워터셰드를 하지 않았을 때 기포 데이터 손실률은 94%에 육박하였으나 워터셰드를 적용하였을 때 손실률이 31%로 감소하는 효과를 나타냈다. 그러나 기포를 원형으로 변환하였기 때문에 기포의 형상을 반영하지 못하였다.

본 연구에서는 2상 기포 영상에서의 워터셰드 알고리즘과 최적 타원 생성 알고리즘을 기반으로 기포 검출 및 크기 측정 알고리즘을 개발한다. 개발된 알고리즘은 영상 상에서 나타나는 단일 기포와 겹쳐진 기포 모두 처리할 수 있도록 하였다. 또한 수동으로 측정하였을 때와 알고리즘을 통해 자동으로 측정하였을 때의 크기를 비교하여 개발한 알고리즘의 오차를 분석한다.

2. 실험 및 영상 획득

본 연구에서는 기포 발생장치를 이용한 실험을 수행하여 기포 영상을 획득했다. Fig. 2는 단일 공

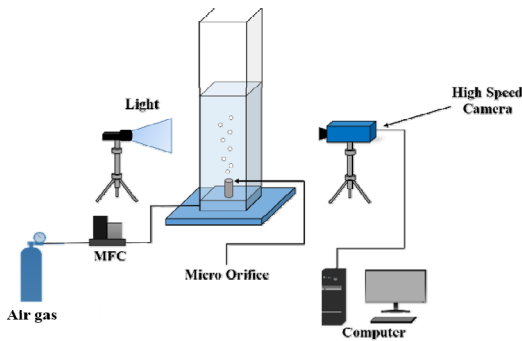


Fig. 2. Experimental schematic diagram

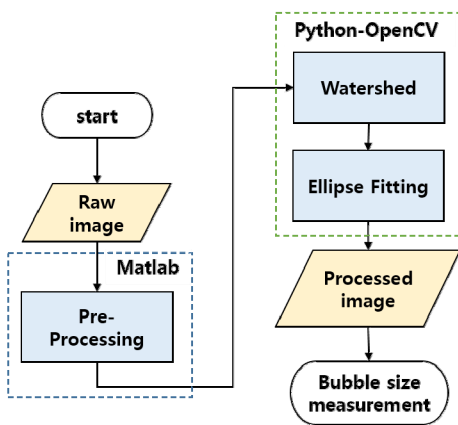


Fig. 3. Flowchart of image processing algorithm

극 오리피스를 이용한 기포 발생장치의 도식도이다. 수조는 광학적 왜곡을 최소화하기 위하여 사각형으로 설계하였으며, 가로 100 mm, 세로 100 mm, 높이 1000 mm이다. 실험은 50 μm 판형 오리피스를 사용하여 DI-water에 2 bar 공기를 통과시켜 기포를 발생시켰다. 단일 기포와 결합 및 붕괴로 인해 겹쳐진 기포를 모두 분석하기 위하여 1.3~18 ccm 범위의 공기를 주입하였다. 영상은 고속 카메라

를 이용하여 3000 fps로 촬영되었다. 수조 뒷면에 분광 필름을 붙여 카메라가 균일한 광원으로 영상을 얻도록 하였다. 기포 영상은 역광으로 비치는 조명에 의해 그림자 영상(shadow image)으로 기록되었다. 영상의 크기는 4.099 mm \times 3.728 mm이며, 해상도는 4.124 mm/pixel이다. 각각의 사진에는 5~20 개의 타원형 기포가 나타나며, 총 10965 개의 사진이 검증에 이용되었다.

3. 영상 처리

영상은 MATLAB - Image Processing Toolbox와 Python - OpenCV를 사용하여 처리하였다. 영상을 통해 기포의 면적과 모양 등 기포의 주요 형상 변수를 얻을 수 있다. 이 변수를 이용하여 장단축 직경, 부피, 등가 직경(equivalent diameter)을 계산하였다. 영상 분석 알고리즘은 다음의 4가지 작업으로 구성된다. 원본 영상을 (a) 전처리 과정을 통해 영상을 보정, (b) 워터셰드 알고리즘을 이용하여 기포의 경계를 통해 겹쳐진 기포를 분할, (c) 적합한 타원으로 변환, (d) 원본 영상과 타원 영상 결합 및 기포 매개 변수 데이터를 엑셀로 추출한다.

3.1 영상 전처리

전처리 단계에서 고속 카메라 영상은 Fig. 4와 같이 여러 필터를 거친다. 영상을 전처리하는 이유는 이진화 영상을 사용하여 처리 속도를 개선하고 명확한 경계 영상을 얻을 수 있기 때문이다. 먼저 원본 영상 Fig. 4(a)를 회색조 8bit 영상으로 변환한 다음, 가우시안 블러(Gaussian Blur) 처리⁽¹²⁾를 통해 배경의 불균일한 노이즈를 1차적으로 제거한다

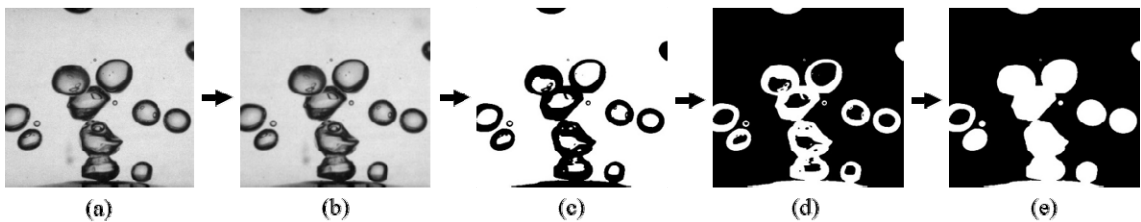


Fig. 4. Image pre-processing, (a) original image, (b) Gaussian blur by 2 pixels, (c) binarization by Otsu's algorithm, (d) invert image process and (e) bubble hole filling

(Fig. 4(b)). Fig. 4(c)는 Otsu 알고리즘⁽¹³⁾을 적용하여 이진화 영상으로 변환한 영상이다. Otsu 알고리즘은 영상 히스토그램(histogram)을 분석하여 임계치를 자동으로 계산하고 0~255 사이 픽셀(pixel)의 최적 임계값으로 경계를 나눈다. 픽셀은 0~255 사이의 강도(intensity)를 가지며 0은 검정색, 255는 흰색이다. Otsu 알고리즘이 임계값을 정하는 과정은 식 (1)~(5)로 서술하였다. 여기서 i 는 히스토그램 픽셀 강도에 대한 변수로, t 는 임계 픽셀 강도, I 는 전체 픽셀 강도이며 P 는 픽셀 강도에 따른 히스토그램 도수, q 는 가중치, μ 는 평균, σ 는 분산을 의미한다. 히스토그램의 두 개의 피크(peak)에 대해 가중치와 평균, 분산을 구한다.

$$q_1(t) = \sum_{i=1}^t P(i), \quad q_2(t) = \sum_{i=t+1}^I P(i) \quad (1)$$

$$\mu_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^t iP(i)}{q_1(t)}, \quad \mu_2(t) = \frac{\sum_{i=t+1}^I iP(i)}{q_2(t)} \quad (2)$$

$$\sigma_1^2(t) = \sum_{i=1}^t [i - \mu_1(t)]^2 \frac{P(i)}{q_1(t)} \quad (3)$$

$$\sigma_2^2(t) = \sum_{i=1}^I [i - \mu_2(t)]^2 \frac{P(i)}{q_2(t)} \quad (4)$$

구해진 가중치와 평균, 분산을 바탕으로 식 (5)의 클래스 내 분산과 식 (6)의 클래스 간의 분산을 계산한다.

$$\sigma_w^2(t) = q_1(t)\sigma_1^2(t) + q_2(t)\sigma_2^2(t) \quad (5)$$

$$\sigma_b^2(t) = q_1(t)q_2(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t))^2 \quad (6)$$

Otsu 알고리즘에서 최적 임계값은 식 (5)와 식 (6)의 분산비를 최대로 하는 값이다. 이진화 영상에서 기포는 뚜렷한 경계를 가지게 되며 내부가 비어있는 형상으로 나타난다. Fig. 4(d)와 (e)는 영상을 흑백 반전시킨 후 기포 내부를 채워 전처리 과정을 마무리하는 단계이다.

3.2 기포 분리 알고리즘

단일 기포의 경우 이 과정을 생략할 수 있으나 기포 덩어리에서는 반드시 기포를 분리하는 과정이 필수적이다. 기포 유동 과정에서 다른 기포와 맞닿거나 겹쳐지는 영상의 경우 전처리 과정을 거

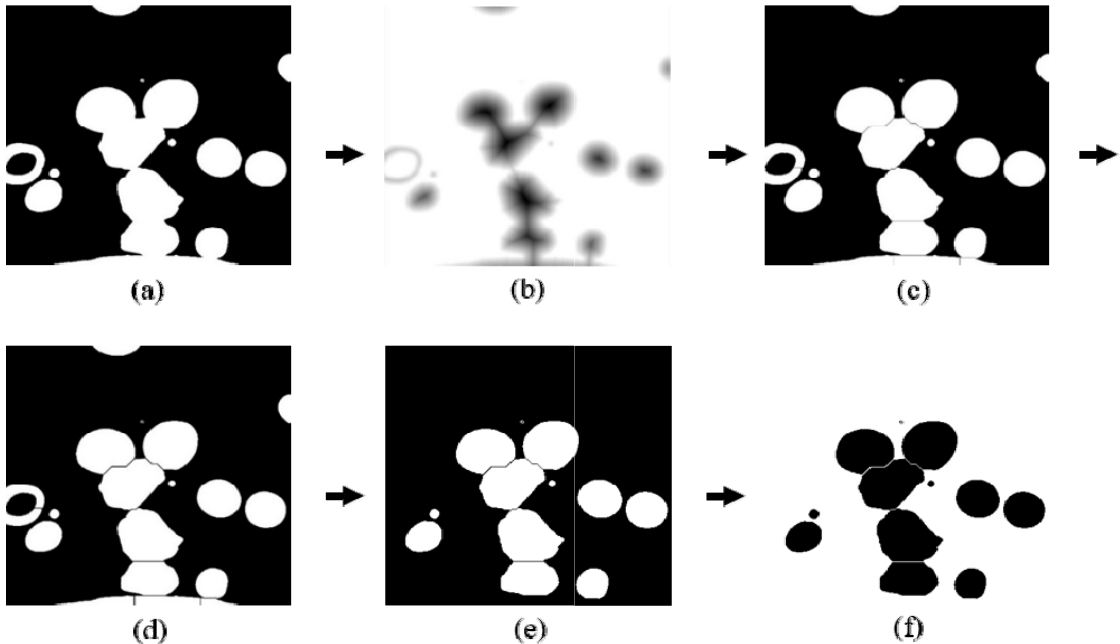


Fig. 5. Watershed algorithm, (a) dilation process, (b) distance transform, (c) watershed, (d) erosion process, (e) remove boundary bubbles and (f) invert image process

치면 겹쳐진 다수 기포가 하나의 덩어리로 인식된다. 따라서, 기포 데이터를 분석하는데 상당한 오차가 발생하기 때문에, 덩어리로 합쳐진 기포들을 개별 기포로 인식하거나 분리하는 과정이 필요하다.

주어진 영상에서 목표로 하는 영역만을 분리해 내기 위하여 영상 분할(image segmentation)을 사용했다. 영상 분할은 모서리 또는 영역 기반으로 나뉘는데, 워터셰드(watershed)는 영역 기반 방법 중 하나이다. 영상의 픽셀 강도를 높이로 간주하여 높은 픽셀값을 봉우리, 낮은 픽셀값을 골짜기로 표현하고 이 2차원 지형에 물을 채웠을 때 둘러싸인 웅덩이 영역을 하나의 지형으로 인식해 영역을 분할하는 알고리즘이다.⁽¹⁴⁾

Fig. 5(b)는 이진 영상에 대한 거리 변환(distance transform)을 계산한 영상이다. 거리 변환 영상을 반전하여 밝은 픽셀은 높은 고도, 어두운 픽셀은 낮은 고도를 나타내는 지형으로 처리한다. Fig. 5(c)는 거리 변환을 바탕으로 워터셰드를 완료한 영상이다. 워터셰드가 완료된 영상은 기포의 경계가 선형적으로 분할되었다. 워터셰드 이후 영상 가장자리에 위치해 온전한 형상이 나타나지 않는 기포의 픽셀 강도를 0으로 설정하여 Fig. 5(e)와 같이 제거하였다. Fig. 5(a)와 (d)는 워터셰드 처리 전후로 적용한 팽창과 침식 연산을 나타낸다. 기포의 경계가 Fig. 5(c)처럼 얇은 선으로 나타나면 최적 타원 생성에서 각각의 영역으로 인식하지 못하는

경우가 생기므로, 팽창 연산된 영상에 워터셰드 처리한 뒤 침식 연산하여 기포 사이의 경계를 뚜렷하게 하였다. Fig. 5(f)는 마지막으로 영상을 흑백 반전시키는 과정이다.

3.3 기포 모델 생성 알고리즘

Fig. 6(a)는 최적 타원 생성을 위해 먼저 워터셰드 처리된 영상의 경계를 검출한 영상이다. 경계에서 최소 감지 경계 크기와 면적을 지정하여 이상치(outlier)를 제거할 수 있다. 워터셰드 영상은 겹쳐진 기포 내부 경계를 고려하지 않고 전체 경계 픽셀 정보로만 자르기 때문에 나뉜 경계가 기포의 실제 크기와 차이가 있다. 따라서 감지 경계를 바탕으로 Fitzgibbon 등^(15,16)의 알고리즘을 기반으로 최적 타원 생성을 적용하였다. Fitzgibbon 등이 제안한 타원 생성 알고리즘은 2D 점 집합에서 직접 최소제곱법(Direct least square method)을 이용하여 가장 최적의 타원을 계산하였다. 직접 최소제곱법은 비반복적(non-iterative) 연산으로 모델을 생성하므로 수행시간이 빠르고 이상값의 영향을 적게 받는다. 또한, 시행 마다 같은 결과를 출력한다는 장점이 있어 타원 모델 생성으로 주로 사용된다.⁽¹⁰⁾

원뿔 영역(Conic section)의 단면을 잘랐을 때 나타나는 원, 타원, 포물선, 쌍곡선은 모두 이차곡선에 포함된다. 일반적인 이차곡선의 방정식은 식(7)

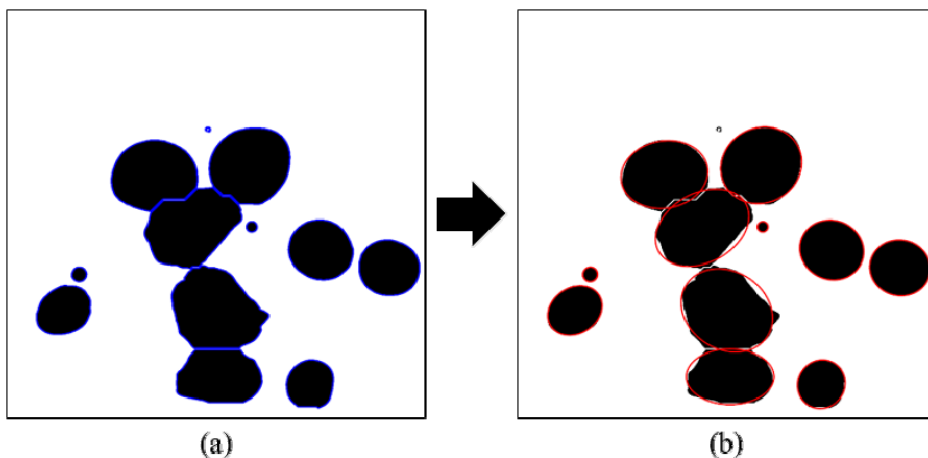


Fig. 6. Ellipse fitting algorithm, (a) contour detection process, (b) ellipse fitting process using detected boundaries.

로 정의된다. 식(8)은 이차곡선을 타원으로 만들기 위한 판별식이다. Fitzgibbon 등은 불완전 구속조건인 판별식을 등가 근사를 통해 식(9)로 완전 구속조건을 부여하였다.

$$F(\alpha, \chi) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (7)$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad (8)$$

$$4ac - b^2 = 1 \quad (9)$$

이차곡선의 계수를 찾아내기 위하여 대수적 방법을 통해 계산한다. 여기서 α 는 이차곡선의 계수에 대한 행렬이며, χ 는 변수에 대한 행렬이다. 식(11)은 완전 구속조건을 부여함으로써 대수적 거리를 최소화하는 행렬을 구성해 얻은 연립방정식의 첫 번째 방정식이다. 행렬 C는 구속조건에 대한 행렬이다. 행렬 D는 설계 행렬을 의미하며, 알고리즘은 각 기포 경계의 픽셀을 입력값을 받으므로 n은 기포 경계에 해당되는 픽셀 좌표의 개수이다.

$$\alpha = [a \ b \ c \ d \ e \ f]^T, \chi = [x^2 \ xy \ y^2 \ x \ y \ 1]^T \quad (10)$$

$$\alpha^T C \alpha = 1 \quad (11)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$D = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

2차 구속조건이 있으므로, 식(14)의 일반화된 고유값(λ) 시스템 방정식을 사용할 수 있으며 S는 $D^T D$ 의 산포 행렬(Scatter matrix)이다. 연립방정식을 통해 산포 행렬 S의 고유벡터와 고유값으로 6개의 해를 구한다. 이 중 최소 고유값을 가지는 행렬 S의 고유벡터를 통해 가장 최저 잔차를 가지는 계수 행렬을 계산한다. Fig. 6(b)는 감지된 경계에 최적 타원 생성 알고리즘을 적용하여 기포 모델을 생성한 영상 결과이다.

$$D^T D \alpha = S \alpha = \lambda C \alpha \quad (14)$$

3.4 영상 분석 결과

Clift 등⁽¹⁷⁾은 기포와 관련된 무차원수인 에트뵈스 수(Eötvös number, Eo)와 레이놀즈 수(Reynolds number, Re)를 계산하여 기포 형태를 spherical cap, skirted, dimpled ellipsoidal-cap, ellipsoid, spherical 형태로 분류하였다. 본 연구에 적용하면 Eo는 0.25 ~ 0.31의 값을 가지며, Re는 100보다 작은 값을 가지므로 구형 기포로 분류된다. Clift의 기포 형태 분류에서 사용되는 무차원수는 기포가 안정적으로 상승하여 종단 속도(terminal velocity)에 도달한 시점에서의 등가직경과 상승속도를 사용한다. 실험 영상은 기포 발생 직후 떠오르는 순간을 관측하였기 때문에 구형 영역임에도 불구하고 타원형 기포가 관측되었다.

Zhu 등⁽⁶⁾의 결과에 따르면 기포 도심의 y 좌표가 3.5 mm 이하일 때 오리피스에서 발생한 기포는 성장 및 탈착, 진동 등으로 불안정하게 움직이며, 3.5 mm 이상일 때 오리피스에서 발생한 기포는 일정한 크기로 상승한다. 안정적으로 상승하는 기포를 측정하기 위해 타원 모델 중 도심 y 좌표가 500 ~ 600 픽셀 영역을 지나는 타원만 추출하였다. 기포의 크기를 구하기 위하여 분류된 타원 모델에서 다양한 파라미터를 획득하였다. 모형화 된 기포는 단축을 기준으로 하는 회전 타원체로 가정하였으며 기포의 중심, 타원 장단축 직경, 면적, 부피, 등가 직경을 엑셀로 출력하여 정확도 분석에 사용하였다.

알고리즘 오차 분석을 위해 ImageJ 영상 처리 소프트웨어를 사용하여 수동으로 이미지를 분석하였다.^(18,19) 실험 영상에서의 기포는 타원형 기포로 나타났기 때문에 최소 및 최대 직경을 측정하여 타원 면적을 구하고 이를 통해 등가 직경을 산출하였다. 또한, 수동 측정 방법의 신뢰성을 위해 각 실험 조건마다 기포 평균 직경이 더 이상 변화를 보이지 않을 때까지 샘플의 개수를 충분히 확보하여 분석했다.^(20,21)

Fig. 7은 변환된 타원을 엑셀로 출력하여 알고리즘 단계에 따라 측정된 등가 직경과 수동으로 측

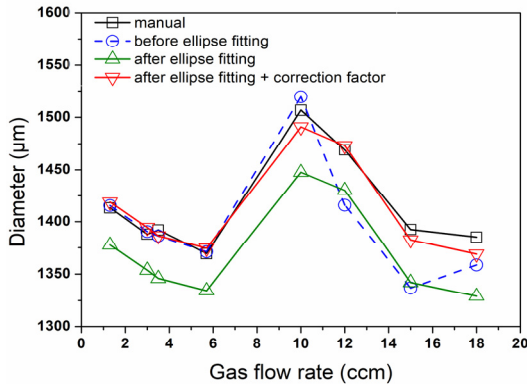


Fig. 7. Comparison of equivalent diameter of bubbles between manual and algorithm assisted analysis.

정한 등가 직경을 비교한 그래프이다. 알고리즘 단계는 최적 타원 생성 이전, 최적 타원 생성, 보정된 최적 타원 생성으로 나눠 분석하였다. 최적 타원 생성이 이뤄지기 전 단계는 겹쳐지는 기포가 나타나는 10~18 ccm에서 워터셰드 처리를 함으로써 겹쳐진 기포들 사이의 경계가 선형적으로 분할되었기 때문에 불균일한 오차가 나타났다.

최적 타원 모델을 생성함으로써 전 유량에서 수동 측정에 비하여 평균 3.14% 정도 작게 측정되었다. 또한, 최적 타원 생성과 수동 모두 그래프의 모양이 거의 흡사하고, -y축으로 평행 이동한 모양이 나타났다. 이를 통해 알고리즘이 대부분의 기포를 적합 타원으로 변환시킬 때 크기를 작게 평가한다는 것을 알 수 있었으며, 알고리즘의 크기 출력에서 보정계수를 부여함으로써 오차를 줄일 수 있었다. 최종적으로 보정계수 1.03을 적용하였을 때 최대 오차가 1.16%까지 감소하였으며 평균 오차는 0.23%로 나타났다.

4. 결론

본 연구는 2상 기포 유동 영상에서 기포 크기를 측정하는 알고리즘을 개발하였다. 단일 기포와 겹쳐진 기포 모두 측정하기 위하여 다양한 유량으로 공기를 오리피스에 통과시켜 기포 발생 실험 영상을 획득하였다. 기포 영상에서 나타나는 겹쳐진 기포 무리를 측정하기 위하여 워터셰드와 최적 타원

변환 알고리즘을 결합하였다. 워터셰드 알고리즘은 겹쳐진 기포 무리에서 각각의 기포 객체를 분리하는데 효과적이거나 기포 단면이 직선으로 나뉘어 기포의 실제 경계와 차이가 발생한다. 워터셰드 처리된 기포를 최적 타원 모델로 변환함으로써 다양한 기포의 형상을 반영할 수 있었다. 또한, 알고리즘 분석결과 수동으로 측정하였을 때와 비교하여 평균 3.14%의 오차가 발생하였고, 보정계수를 추가하여 측정하였을 때 최대 1.16%의 오차까지 개선 가능했다.

후 기

본 연구는 (주)한화과 국방과학연구소의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

REFERENCE

- 1) W. Lauterborn, C.D. Ohl, 1997, "Cavitation bubble dynamics," *Ultrasonics sonochemistry*, Vol. 4, pp. 65-75.
- 2) Temesgen, T., Bui, T. T., Han, M., Kim, T. I. and Park, H., 2017, "Micro and nanobubble technologies as a new horizon for water-treatment techniques: A review," *Advances in colloid and interface science*, Vol. 246, pp.40-51.
- 3) Vazquez, A., Sanchez, R. M., Salinas-Rodriguez, E., Soria, A., & Manasseh, R., 2005, "A look at three measurement techniques for bubble size determination." *Experimental thermal and fluid science*, Vol. 30, pp.49-57.
- 4) Settles, G. S., 2001, *Schlieren and shadowgraph techniques: visualizing phenomena in transparent media*. Springer Science & Business Media.
- 5) Zhu, X., Xie, J., Liao, Q., Chen, R., and Wang, H., 2014, "Dynamic bubbling behaviors on a micro-orifice submerged in stagnant liquid," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 68, pp.324-331.
- 6) Shi, H., Jiang, H., Liu, Y., and Chen, R., 2020, "Bubble dynamics and mass transfer characteristics

- from an immersed orifice plate,” *Journal of Chemical Technology & Biotechnology*.
- 7) Hough, P. V., 1962, U.S. Patent No. 3,069,654. Washington, DC: U.S. Patent and Trademark Office.
 - 8) Kiryati, N., Eldar, Y., and Bruckstein, A. M., 1991, “A probabilistic Hough transform,” *Pattern recognition*, Vol. 24, pp. 303-316.
 - 9) Xu, L., Oja, E., and Kultanen, P., 1990, “A new curve detection method: randomized Hough transform (RHT),” *Pattern recognition letters*, Vol 11, pp. 331-338.
 - 10) Zhang, W. H., Jiang, X., and Liu, Y. M., 2012, “A method for recognizing overlapping elliptical bubbles in bubble image,” *Pattern Recognition Letters*, Vol. 33, pp.1543-1548.
 - 11) Lau, Y. M., Deen, N. G., and Kuipers, J. A. M., 2013, “Development of an image measurement technique for size distribution in dense bubbly flows,” *Chemical Engineering Science*, Vol. 94, pp.20-29.
 - 12) Haddad, R. A., and Akansu, A. N., 1991, “A class of fast Gaussian binomial filters for speech and image processing,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 39, pp.723-727.
 - 13) Otsu, N., 1979, “A threshold selection method from gray-level histograms,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern*, Vol. 9, pp.62-66.
 - 14) Beucher, S., 1979, “Use of watersheds in contour detection,” In *Proceedings of the International Workshop on Image Processing*. CCETT.
 - 15) Fitzgibbon, A. W. and Fisher, R. B., 1996, “A buyer's guide to conic fitting,” *University of Edinburgh, Department of Artificial Intelligence*, pp.513-522.
 - 16) Fitzgibbon, A., Pilu, M. and Fisher, R. B., 1999, “Direct least square fitting of ellipses,” *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, Vol. 21, pp. 476-480.
 - 17) Clift, R., Grace, J. R., and Weber, M. E., 2005, “Bubbles, drops, and particles,” *Courier Corporation*.
 - 18) Abramoff, M. D., Magalhães, P. J. and Ram, S. J., 2004, “Image processing with ImageJ,” *Biophotonics international*, Vol. 11, pp. 36-42.
 - 19) Rasband, W.S. ImageJ. U.S. National Institutes of Health, Bethesda, MD, USA, Available online: <http://imagej.nih.gov/ij>
 - 20) Plais, C. and Augier, F., 2016, “Effect of liquid viscosity on mixing times in bubble columns,” *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, Vol 50, pp. 969-974.
 - 21) Heeres, A. S., Heijnen, J. J., van der Wielen, L. A. and Cuellar, M. C., 2016, “Gas bubble induced oil recovery from emulsions stabilised by yeast components,” *Chemical Engineering Science*, Vol 145, pp. 31-44.