The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)
Vol. 21, No. 2, pp.103-109, Apr. 30, 2021. pISSN 2289-0238, eISSN 2289-0246

https://doi.org/10.7236/JIIBC.2021.21.2.103
JIIBC 2021-2-15

통신신호처리를 위한 Jacket 행렬의 특성(特性)

Characteristics of Jacket Matrix for Communication Signal Processing

이문호*, 김정수**

Moon-Ho Lee*, Jeong-Su Kim**

요 약 1893년 불란서 Hadamard가 발표한 직교 Hadamard 행렬에 대해 이문호교수는 1989년에 Center Weight Hadamard로 새롭게 정의하여 발표했고 1998년에는 Jacket 행렬을 발견했다. Jacket 행렬은 Hadamard 행렬을 일반화한 것이다. 본 논문에서는 Symmetric Jacket 행렬을 구해 중요한 속성과 패턴을 분석하고 Jacket 행렬의 행렬식과 Eigenvalue을 얻는 방법을 제시하며 Eigen decomposition를 사용하여 이를 증명했다. 이러한 계산은 신호 처리 및 직교 코드 설계에 유용하다. 행렬의 체계를 분석하기 위해 DFT, DCT, Hadamard, Jacket 행렬로 비교해 본다. Galois Field의 대칭 행렬에서 Jacket 행렬의 element-wise inverse 관계를 수학적으로 증명하고 직교 성질 AB=I 관계를 유도했다.

Abstract About the orthogonal Hadamard matrix announced by Hadamard in France in 1893, Professor Moon Ho Lee newly defined it as Center Weight Hadamard in 1989 and announced it, and discovered the Jacket matrix in 1998. The Jacket matrix is a generalization of the Hadamard matrix. In this paper, we propose a method of obtaining the Symmetric Jacket matrix, analyzing important properties and patterns, and obtaining the Jacket matrix's determinant and Eigenvalue, and proved it using Eigen decomposition. These calculations are useful for signal processing and orthogonal code design. To analyze the matrix system, compare it with DFT, DCT, Hadamard, and Jacket matrix. In the symmetric matrix of Galois Field, the element-wise inverse relationship of the Jacket matrix was mathematically proved and the orthogonal property AB=I relationship was derived.

Key Words : Hadamard matrix, Center Weight Hadamard, Jacket matrix, AB=I

Ⅰ. 서 론

본 논문은, “A Beautiful Question: Why Symmetric?”, AIMEE 2019.[1], 세상에서 가장 아름다운 것이 무엇인가, 대칭(symmetry: change without change)이다.

본 논문은 A Beautiful Question의 두 번째 후속편이다.

1893년 불란서 수학자 Hadamard에 의해 제안된 Hadamard 행렬(matrix)은 직교성(orthogonality)을 가지며, 음성신호와 영상신호의 변환 및 부호화에 매우

*정회원, 전북대학교 전자공학부
**정회원, 숭실사이버대학교 ICT공학과 (교신저자)
접수일자 2021년 2월 22일, 수정완료 2021년 3월 22일
게재확정일자 2021년 4월 9일
Received: 22 February, 2021 / Revised: 22 March, 2021 / Accepted: 9 April, 2021
**Corresponding Author: kjs@mail.kcu.ac
Dept. of ICT Engineering, Korea Soongsil Cyber Univ., Korea

유용하게 쓰인다[2]-[4]. Hadamard 변환은 Hadamard 행렬 원소 중 ±1에 의해 이루어지므로, 단지 신호의 가산과 감산만으로도 변환을 수행할 수 있어 Hardware의 단순화 및 고속화로 통신 및 신호처리에 꼭 필요한 기술이다. 따라서 Hadamard 행렬은 영상 부호화 분야, 대역확산통신, 디지털 신호처리, Quantum신호처리, 암호화 등에서 널리 사용되고 있다.

본 논문에서 제안된 Jacket 행렬은 Hadamard 행렬을 일반화하여 행렬요소가 ±1, $\pm 2^n$, $\pm j$, $\pm w$로 set를 확장하였다. 기본 아이디어는 하중 Hadamard (WH:Weighted Hadamard) 행렬로부터 출발하고있다. Jacket 행렬의 정의는 어떤 행렬의 역행렬은 그 행렬요소의 역(Inverse)으로 구할 수 있고 Hadamard 행렬은 Jacket 행렬의 특수한 경우에 속하며 Hadamard 행렬과 Jacket 행렬은 필드(Field)개념에서는 같지만 실수에서는 Hadamard 행렬이±1이지만 Jacket 행렬은 ±1, $\pm 2^n$을 나타낼 수 있다.

제안된 Jacket 행렬을 [A]*[B]=상수(常數) 단위(單位 Identity)행렬로 나타냈다. 직교하면 Parseval 정리가 성립되어 에너지 보존이 성립된다. Jacket 행렬에서는 직교(orthogonal)하여 전력에너지는 변환 전이나 변환 후에 같다. 대칭 행렬에서 [A][B]=[I]가 됐고 역(逆), element-wise inverse 관계를 수학적으로 증명했다.

석가(釋迦)는 육신(肉身)과 영혼(靈魂)이 '하나다' 즉 A*B=1(A*B=A*1/A=1), 가톨릭에서 나(A)는 門(B)이다. A=B, B=A, AB=1과 상사(相似)한 Jacket 행렬에 대한 성질을 논하고 AB=I 관계를 유도한다.

본 논문은 2장은 제안된 Jacket 행렬, 3장은 Rank 2의 대칭 Jacket 행렬, 4장은 Jacket 행렬의 속성 및 특성, 그리고 5장 결론을 맺는다.

II. 제안된 Jacket 행렬:[A]n[B]n=[I]n

'왜 여자들은 립스틱 짙게 바르는 화장을 하는가?. TV 뉴스 앵커는 왜 화면중심에 잡는가?'. 답은 '눈에 잘 보이게 하기 위해서(荷重Image Enhancement)'이다. 이문호 교수는 1984년 6월 공학박사논문연구 '립스틱 짙게 바르고'의 디지털영상 Enhancement주제를 다뤘다. 1990년 일본 동경대 전자과박사학위에서도 수학과 하드웨어로 이를 증명했다. 1998년 12월, 독일북서부 아흔(Aachen) 공대 연구실에서 '립스틱 짙게 바르고' 이 문제는 화면행렬의 가운데 하중(荷重Weighting값 2)을 줘 해결한 것을 일반화했을 때 재미있는 현상이 송신측과 수신측 행렬(行列) 화소(畫素) 상호간에 역(逆Element-wise Inverse)관계란 특징을 갖을 발견했다. 세상에 누구도 내 놓지 않는 새로운 이름을 고심하던 때 독일 A. Noll 교수가 "네가 발견한 것이 네가 입고 있는 자켓(Jacket)이고, 자켓은 뒤집어서 입고 그대로도 입고 간편히 위에 걸처 나갈 수 있는 옷. 그것을 이문호 교수가 우연히 발견(Serendipity)했다. 아인슈타인이 특수상대성이론에서 보면 에너지는 질량과 빛 속도의 제곱인데, 에너지를 질량으로 나누면 빛의 속도의 제곱이 상수(常數,Constant)인데, 이문호 교수는 이런 관계를 행렬로 풀었고, 즉 [A]*[B]=상수(常數)가 단위(單位 Identity)행렬, [A]행렬의 역행렬(逆行列)이 [B] 행렬이다." 조언을 해주었다. 그림 1에서 데카르트 좌표를 통해 공간 4분면의 Hadamard 행렬과 푸리에 관계, Jacket 행렬를 비교했다.

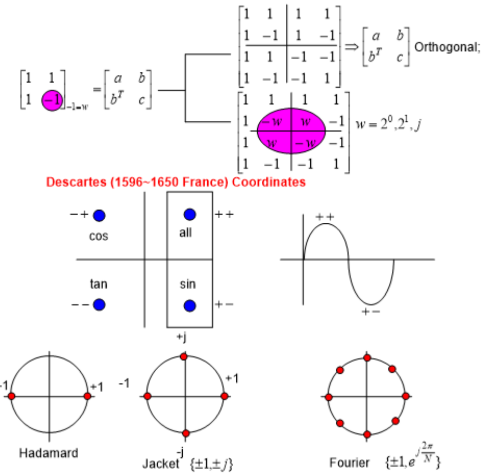


그림 1. Key Idea : 공간 4분면의 Hadamard 행렬과 푸리에 관계

Fig. 1. Key Idea: Hadamard matrix and Fourier relation in spatial quadrant

희소 행렬(Sparse matrix)은 Hadamard 행렬과 하중 Hadamard(center weighted Hadamard)을 곱했다. 여기서 Jacket 행렬로 정의했다[5][6].

정의 1. : 정사각형 행렬 $[J]_{m\times m}=[J_{ij}]_{m\times m}$이라고 하고, 역행렬이 단순히 element-wise inverse에 의해 구해지면, 즉 $[J]^{-1}_{m\times m}=\frac{1}{C}\left[\frac{1}{J_{ij}}\right]^{T}_{m\times m}$, 1 ≤i, j≤m경우 $[J]^{-1}_{m\times m}=\frac{1}{C}\left[\frac{1}{J_{ij}}\right]^{T}_{m\times m}$. 여기서 C는 0이 아닌 상수인

경우에 Jacket 행렬, $[J]_{N\times N}$은 다음과 같다.

$$[J]_m = \begin{bmatrix} j_{0,0} & j_{0,1} & \cdots & j_{0,m-1} \\ j_{1,0} & j_{1,1} & \cdots & j_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ j_{m-1,0} & j_{m-1,1} & \cdots & j_{m-1,m-1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

역(Reverse)은

$$[J]_m^{-1} = \frac{1}{C}\begin{bmatrix} \frac{1}{j_{0,0}} & \frac{1}{j_{0,1}} & \cdots & \frac{1}{j_{0,m-1}} \\ \frac{1}{j_{1,0}} & \frac{1}{j_{1,1}} & \cdots & \frac{1}{j_{1,m-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{j_{m-1,0}} & \frac{1}{j_{m-1,1}} & \cdots & \frac{1}{j_{m-1,m-1}} \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

여기서 C는 행렬의 정규화 된 값이고 T는 transpose이다.

이진 Hadamard 행렬, $H=(h_{ij})$는 크기가 $N\times N$, $N=2^n$이고 $N=4n$인 정방 행렬(square matrix)로 정의된다.

i. 모든 entries는 ± 1

ii. 두 개의 다른 행은 직교(orthogonal)하다. 즉, $\sum_k h_{ik}h_{jk}=0$이다. 다음과 같이 표현한다.

$$[H]_N \cdot [H]_N^T = N[I]_N \tag{3}$$

여기서 $[I]_N$은 크기 $N\times N$의 단위 행렬이다.

한편, 표1에서 처럼 행렬의 크기를 임의로 확장함은 QPSK 행렬에서 증명했다.

$N\times N$ Jacket Hadamard 행렬로 구현했다.

H를 h차의 Hadamard 행렬인 경우

1. $HH^T=hI_h$
2. $|\det H|=h^{\left(\frac{1}{2}\right)h}$
3. $HH^T=H^TH$
4. 모든 Hadamard 행렬은 첫 번째 행과 열 +1의 모든 요소를 포함하는 Hadamard 행렬과 동일하다. (정규화라고 함). 즉, 첫 번째 행 +1,+1은 DC分이고 두 번째 행 +,-는 AC分이다.
5. $h=1,2,$ 또는 $4n$, n은 정수.
6. H가 $4n$차의 정규화 된 Hadamard 행렬이면 첫 번째 행을 제외한 모든 행 (열)에는 $2n$ 마이너스 1과 $2n$ 플러스 1이 각 행 (열)에 있다. 또한, 어떤 행 (열)의 n 빼기 1은 서로 다른 행 (열)의 n 빼기 1과 겹친다.

정의 2. : Hadamard 행렬은 Jacket 행렬이다.

증명 : Hadamard의 element

$$(h_{ij})^{-1} = (h_{ij}) \tag{4}$$

Hadamard 행렬의 항목은 모두 ± 1이고

$$[H]_N^{-1} = \frac{1}{N}[H]_N^T = \frac{1}{N}\left[(h_{ij})\right]^T = \frac{1}{N}\left[(h_{ij})^{-1}\right]^T \tag{5}$$

따라서 정의 2가 증명된다.

Ⅲ. Rank 2의 대칭 Jacket 행렬(Symmetric Jacket Matrix)

Jacket 패턴의 기본 사항과 관련 속성을 분석하기 위해 먼저 기본 형식인 Rank 2의 Symmetric Jacket 행렬를 구한다. 중요한 속성과 패턴이 있다.

다음과 같이 임의의 2x2 대칭 패턴이 주어지면

$$[S]_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -c \end{bmatrix}, \tag{6}$$

a,b,c는 임의 수(arbitrary number)

정리 : 2x2 대칭 Jacket 행렬 패턴은 다음과 같다.

$$[J]_2 = \begin{bmatrix} a & \sqrt{ac} \\ \sqrt{ac} & -c \end{bmatrix} \text{ 또는, } [J]_2 = \begin{bmatrix} a & -\sqrt{ac} \\ -\sqrt{ac} & -c \end{bmatrix} \tag{7}$$

여기서 재킷 행렬(Jacket Matrix)의 항목은 0이 아니다.

증명 : 2x2 대칭 행렬 패턴이 식(1)을 가져야 하는 경우

$$[S]_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{c} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

그때

$$[S]_2 \cdot [S]_2^{-1} = [I]_2$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -c \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{c} \end{bmatrix} = [I]_2, \tag{9}$$

따라서

$$\frac{1}{2}\left(a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}\right)=1,$$

$$\frac{1}{2}\left(a\cdot\frac{1}{b}+b\cdot\frac{-1}{c}\right)=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(b\cdot\frac{1}{a}-c\cdot\frac{1}{b}\right)=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}\right)=1,$$

여기서

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{c}=0 \text{ 및 } \frac{b}{a}-\frac{c}{b}=0, \tag{10}$$

그러므로

$$\frac{ac-b^2}{bc}=0 \text{ 및 } \frac{b^2-ac}{ab}=0, \quad (11)$$

다음과 같다.

$$b=\pm\sqrt{ac}. \quad (12)$$

Lemma : 직교 대칭 2x2 Jacket 행렬은 행렬의 항목이 0이 아닌 경우 항상 Hadamard 행렬을 고려한다.

증명 : 직교 속성은

$$[J]_2 \cdot [J]_2^T = 2[I]_2, \quad (13)$$

다음과 같다.

$$[J]_2^T = 2\cdot [J]_2^{-1}. \quad (14)$$

$[J]_2=\begin{bmatrix} a & \sqrt{ac} \\ \sqrt{ac} & -c\end{bmatrix}$이면 다음을 얻는다.

$$[J]_2^T=\begin{bmatrix} a & \sqrt{ac} \\ \sqrt{ac} & -c\end{bmatrix}=2\cdot[J]_2^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{\sqrt{ac}} \\ \frac{1}{\sqrt{ac}} & -\frac{1}{c}\end{bmatrix}. \quad (15)$$

$[J]_2=\begin{bmatrix} a & -\sqrt{ac} \\ -\sqrt{ac} & -c\end{bmatrix}$이면 다음을 얻는다.

$$[J]_2^T=\begin{bmatrix} a & -\sqrt{ac} \\ -\sqrt{ac} & -c\end{bmatrix}=2\cdot also[J]_2^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{\sqrt{ac}} \\ -\frac{1}{\sqrt{ac}} & -\frac{1}{c}\end{bmatrix} \quad (16)$$

분명히 해결책은 $a=c=1$. 따라서 Jacket 패턴은 다음과 같다.

$$[J]_2=\begin{bmatrix} a & \sqrt{ac} \\ \sqrt{ac} & -c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}, \quad (17)$$

또한

$$[J]_2=\begin{bmatrix} a & -\sqrt{ac} \\ -\sqrt{ac} & -c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1\end{bmatrix}, \quad (18)$$

이것들은 전형적인 2x2 Hadamard 행렬을 나타낸다.

Ⅳ. Jacket 행렬의 속성 및 특성

Jacket 행렬의 속성, 즉 행렬식과 Eigenvalue을 얻는 방법을 제시한다. 이러한 계산은 신호 처리 및 직교 코드 설계에 매우 유용하다. 제안방식에서는 복잡성이 적은 간단한 수학적 모델을 사용하여 값을 계산하는 몇 가지 결과를 제공한다.

▶ Jacket 행렬의 Determinant과 Eigenvalue

Rank 2의 대칭 패턴이 주어지면

$$[S]_2=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -c\end{bmatrix}, \quad (19)$$

Determinant는

$$\det([S]_2)=(-ac-b^2)=-(ac+b^2), \quad (20)$$

가장 큰 행렬식은 $ac\rangle 0, b^2\rangle 0$인 경우에만 얻을 수 있다.

Rank 2의 대칭 Jacket 패턴이 주어지면

$$[J]_2=\begin{bmatrix} a & \sqrt{ac} \\ \sqrt{ac} & -c\end{bmatrix}, \quad (21)$$

Determinant는

$$\det([J]_2)=(-ac-ac)=-(ac+ac)=-2ac, \quad (22)$$

ac를 최대화하는 것은 행렬식을 최대화하는 것을 의미한다. 그렇지 않으면 다음과 같이 된다.

$$\det([J]_2)=-2ac\le a^2+c^2. \quad (23)$$

증명:

$$a^2+c^2\ge -2ac, \quad (24)$$

그러므로

$$a^2+2ac+c^2=(a+c)^2\ge 0. \quad (25)$$

따라서 $[J]_2$의 최대 행렬식은 a^2+c^2이다.

Rank 4의 대칭 Jacket 패턴이 주어지면

$$[J]_4=\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ b & -c & c & -b \\ b & c & -c & -b \\ a & -b & -b & a\end{bmatrix}, \quad (26)$$

Determinant는 다음 식(27)과 같이 계산할 수 있다.

$$\det([J]_4)=\det(C)\det(C-B^TA^{-1}B), \quad (27)$$

여기서, $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -c\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b & a \\ c & -b\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -c & -b \\ -b & a\end{bmatrix}$,

그리고 $[J]_4=\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C\end{bmatrix}$

다음 식에서 증명된다.

$$\det\left(\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I\end{bmatrix}\right)=1, \quad (28)$$

다음 식(29)으로 구해진다.

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ B^T & C\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C\end{bmatrix}\right)=\det(A)\det(C), \quad (29)$$

따라서, $\det(AB)=\det(A)\det(B)$에 의해

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I\end{bmatrix}\right)$$
$$=\det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ B^T & C-B^TA^{-1}B\end{bmatrix}\right)=\det(A)\det(C-B^TA^{-1}B). \quad (30)$$

결과는 식(31)과 같다.

$$\det([J]_4)=16ab^2c. \quad (31)$$

대칭 패턴 $[S]_2=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -c \end{bmatrix}$이 주어지면 Eigenvalue와 Eigenvector는 다음과 같다.

$$Eig([S]_2)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{c^2+2ac+a^2+4b^2} \\ 0 \\ \\ -\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{c^2+2ac+a^2+4b^2} \end{bmatrix}, \tag{32}$$

Eigenvector는

$$EV([S]_2)=\begin{bmatrix} \dfrac{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{c^2+2ac+a^2+4b^2}}{b} \\ 1 \\ \dfrac{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{c^2+2ac+a^2+4b^2}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

간단히, Jacket 패턴 $[J]_2=\begin{bmatrix} a & \sqrt{ac} \\ \sqrt{ac} & -c \end{bmatrix}$은 식(34)이다.

$$Eig([J]_2)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+6ac} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+6ac} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Eigenvector는 식(35)와 같다.

$$EV([J]_2)=\begin{bmatrix} \dfrac{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{c^2+6ac+a^2}}{\sqrt{ac}} \\ 1 \\ \dfrac{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{c^2+6ac+a^2}}{\sqrt{ac}} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

또한 대칭적인 Jacket 패턴은 다음과 같이 나타낸다.

$$[J]_4=\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ b & -c & c & -b \\ b & c & -c & -b \\ a & -b & -b & a \end{bmatrix}, \tag{36}$$

$$Eig([J]_4)=\begin{bmatrix} -2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}, \tag{37}$$

Eigenvector는 식(38)으로 표현된다.

$$EV([J]_4)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{38}$$

Eigen decomposition를 사용하여 증명할 수 있다.

$$EV([J]_4)Eig([J]_4)(EV([J]_4))^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ b & -c & c & -b \\ b & c & -c & -b \\ a & -b & -b & a \end{bmatrix}=[J]_4 \tag{39}$$

Jacket 행렬은 Galois Field에서 실수, 복소수에서 스퀘어 대칭 행렬(square symmetric matrix)이며 Hadamard 행렬의 일반화이며 또한 Diagonal block-wise 역행렬(Diagonal block-wise inverse matrix)이다. 스퀘어 행렬 차수 n의 A 행렬은 다음과 같고

$$AA^*=A^*A=nI_n \tag{40}$$

A^*는 A의 inverse entries 행렬의 transpose이다.

Jacket 행렬 4×4의 일반식은 다음과 같다.

$$[A]_4=\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ b & -c & c & -b \\ b & c & -c & -b \\ a & -b & -b & a \end{bmatrix},\quad [B]_4=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{c} & \frac{1}{c} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}, \tag{41}$$

$$[A]_4[B]_4=4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=4[I]_4,\quad [A]_4[B]_4=4[I]_4 \tag{42}$$

그림 2에서는 Jacket 행렬의 체계를 보여준다.

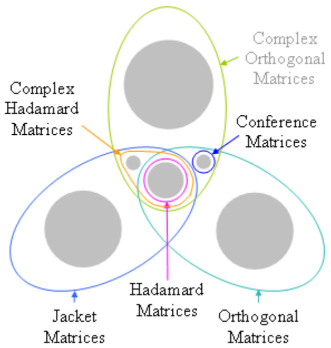


그림 2. 행렬 유형의 계층
Fig. 2. Hierarchy of matrix types

왼쪽 타원 circle이 Jacket 행렬, 오른쪽 타원 circle은 직교 행렬, 상위 타원이 복소 직교 행렬이며 가운데가 Hadamard 행렬이다.

표 1. DFT/DCT/Hadamard/Jacket 행렬
Table 1. DFT/DCT/Hadamard/Jacket matrix

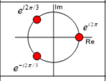
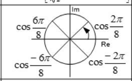
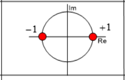
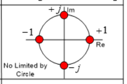
	DFT (1822) J. Fourier	DCT(1974) N. Ahmed, K.R. Rao,et.	Hadamard (1893) J. Hadamard	Jacket(1989)* Moon Ho Lee
Formula	$X(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)w^{nk}$ $n=0,1...N-1, w=e^{-j2\pi/N}$	$[C_N]_{m,n}=\sqrt{\frac{2}{N}}k_m\cos\frac{m(n+\frac{1}{2})\pi}{N}$ $m,n=0,1,\ldots,N-1$	$[H]_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ $[H]_n=[H]_{n/2}\otimes[H]_2$	$[J]_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&j&-1\\1&j&-j&1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$ $[J]_n=[J]_{n/2}\otimes[H]_2 \quad n>4$
Forward	$N=3$ $F_3=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&w&w^2\\1&w^2&w\end{bmatrix}$ $w=e^{-i2\pi/3}$	$N=4$ $[C]_4=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\C_8^1&C_8^3&C_8^5&C_8^7\\C_8^2&C_8^6&C_8^6&C_8^2\\C_8^3&C_8^7&C_8^1&C_8^5\end{bmatrix}$ $C_8^i=\cos\frac{i\pi}{8}$	$(-1)^{\bigoplus_{k=0}^{n-1}i_kj_k}$ $[H]_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$	$(-1)^{\bigoplus_{k=0}^{n-1}i_kj_k}w^{(i_{n-2}\oplus i_{n-1})(j_{n-2}\oplus j_{n-1})}$ $[J]_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-w&w&-1\\1&w&-w&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$ w=1: Hadamard w=2: Center Weighted Hadamard
Inverse	Element-Wise Inverse $F_3^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&w^{-1}&w^{-2}\\1&w^{-2}&w^{-1}\end{bmatrix}$	Block-Wise Inverse $[C]_4^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&C_8^1&C_8^2&C_8^3\\\frac{1}{\sqrt{2}}&C_8^3&C_8^6&C_8^7\\\frac{1}{\sqrt{2}}&C_8^5&C_8^6&C_8^1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&C_8^7&C_8^2&C_8^5\end{bmatrix}$	Element-Wise Inverse $[H]_4^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$	Element-Wise Inverse or Block-Wise Inverse $[J]_4^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1/w&1/w&-1\\1&1/w&-1/w&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$
Circle				
Kronecker	$[DFT]_N\otimes[DFT]_N\neq[DFT]_{2N}$	$[DCT]_N\otimes[DCT]_N\neq[DCT]_{2N}$	$[H]_N\otimes[H]_N=[H]_{2N}$	$[J]_N\otimes[J]_N=[J]_{2N}$
Size	2^n or p :p is prime	2^n	$2^n, 4n$	*Arbitrary*

표 1에서 DFT, DCT, Hadamard, Jacket 행렬의 특징을 비교했다.

V. 결 론

본 논문에서는 Jacket 행렬의 속성, 즉 행렬식과 Eigenvalue을 얻는 방법을 제시한다. 이러한 계산은 신호 처리 및 직교 코드 설계에 매우 유용하다. 제안방식에서는 수학적 모델을 사용, 값을 계산하여 결과를 얻었다. Rank 2의 Symmetric Jacket 행렬을 구해 중요한 속성과 패턴을 분석했고 Jacket 행렬의 행렬식과 Eigenvalue을 얻는 방법을 제시했다. 또한 Rank 4의 대칭 Jacket 패턴에 대해서 Eigenvalue와 Eigenvector을 구하고 Eigen decomposition를 사용하여 증명했다. 마지막으로 DFT, DCT, Hadamard, Jacket 행렬의 특징을 비교했다.

직교하면 Parseval 정리가 성립되어 에너지 보존이 성립된다. Jacket 행렬에서는 직교(orthogonal)하여 전력 에너지는 변환 전이나 변환 후에 같다. Galois Field (실수, 복소수 포함)의 대칭 행렬에서 Jacket 행렬는 직교하며 [A][B]=[I], 역(逆), element-wise inverse 관계를 수학적으로 증명했다.

References

[1] Moon Ho Lee, Jeong Su Kim, “A Beautiful Question: Why Symmetric?”, Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III, pp. 136-147, 2019.
DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-030-39162-1_13

[2] Moon-Ho Lee, Jeong-Su Kim, “Why Won't the Field Wall Collapse in the Typhoon? : Mathematical Approach to Non-orthogonal Symmetric Weighted Hadamard Matrix Ⅰ”, The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (JIIBC), Vol. 19, No. 5, pp. 211-217, 2019.
DOI : https://doi.org/10.7236/JIIBC.2019.19.5.211

[3] Jeong Su Kim, Moon Ho Lee, “Energy Efficiency Enhancement of Macro-Femto Cell Tier”, The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (JIIBC), Vol. 18, No. 1, pp. 47-58, 2018.
DOI :https://doi.org/10.7236/JIIBC.2018.18.1.47

[4] Moon Ho Lee, and m. Kaveh, “Fast Hadamard Transform based on a Simple Matrix Factorization,” IEEE Trans. ASSP, Vol. ASSP-34, No. 6, Dec. 1986, pp.1666,-1997.
DOI: 10.1109/TASSP.1986.1164972

[5] Moon Ho Lee, "The Center Weighted Hadamard Transform", IEEE Transactions on Circuits Syst. Vol. 36, No. 9, pp. 1247-1249, Sept.1989.
DOI: 10.1109/31.34673

[6] M. H. Lee, X. D. Zhang, W. Song and X. G. Xia, “Fast reciprocal Jacket transform with many parameters,” IEEE Trans. on Circuits and Syst.-I, Regular papers, Vol. 59, No. 7, July 2012.
DOI: 10.1109/TCSI.2011.2177013

저 자 소 개

이 문 호(정회원)

- 1984년 전남대학교 전기공학과 박사, 통신기술사
- 1985년~1986년 미국 미네소타 대학 전기과 포스트닥터
- 1990년 일본동경대학 정보통신공학과 박사
- 1970년~1980년 남양MBC 송신소장
- 1980년 10월~2010년 2월 전북대학교 전자공학부 교수
- 2009년 4월~2013년 월 WCU-2 연구책임교수
- 2015 국가연구개발 우수성과 100선
- 현재 전북대학교 전자공학부 초빙교수
- 주관심분야 : 무선이동통신, 통신이론, Molecular communication

김 정 수(정회원) 교신저자

- 1998년 : 전북대학교 정보통신공학과 석사
- 2003년 : 전북대학교 컴퓨터공학과 박사
- 2002년 6월 ~ 현재 : 숭실사이버대학교 ICT공학과 부교수
- 주관심분야 : 이동통신, IoT