

이차곡선 수업에서 공학도구 사용과 수작업 교구 활동에 대한 예비 수학교사들의 인식

김소민¹⁾

본 연구에서는 이차곡선 지도 방안으로써 수작업 교구인 Wax-paper를 이용한 활동과 공학도구인 GeoGebra를 이용한 활동에 대한 예비 수학교사들의 인식을 조사하였다. 수도권 소재의 한 사범대학 수학교육과 학부생 20명을 대상으로 이차곡선에 대한 교구와 공학도구 활용 수업을 진행한 후, 두 가지 수업 방법에 대한 인식 설문조사를 시행하였다. 본 연구 결과에 따르면, 예비 수학교사들은 이차곡선 학습 및 지도에서 전반적으로 공학도구의 활용을 선호했으며, 공학도구의 활용이 시각화를 통해 직관적 사고에 도움이 되며, 다양한 수학적 성질 탐구를 가능하게 함으로써 개념 이해와 흥미 유발에 도움을 준다고 생각하였다. 그러나 학생 또는 교사의 미숙한 공학도구 사용에 대한 우려를 지속적으로 나타냈으며, 예비 수학교사들이 인식한 교구와 공학도구 활용의 장단점은 상호보완적이었다. 이와 같은 연구 결과를 토대로 수학수업에서 각 교구와 공학도구가 가진 특성에 맞게 상호보완적으로 활용하길 제안하며, 학생 또는 교사의 공학도구 사용 능력에 영향을 받지 않는 수업 자료의 개발 및 보급이 필요하다는 시사점을 제시한다.

주요용어 : 이차곡선, 공학도구, GeoGebra, 교구, 예비 수학교사, 교사교육

I. 서론

컴퓨터와 인터넷 그리고 AI(인공지능)의 등장으로 과학과 기술의 진보는 우리의 생활과 교육환경을 드라마틱하게 바꾸고 있다. Van de Walle(1998)에 따르면 계산기와 컴퓨터는 학교수학에 다음 세 가지 중요한 영향을 미쳤다. 첫째, 길고 지루한 계산과 같은 낮은 수준의 계산 능력의 중요성을 크게 감소시켰다. 둘째, 중요한 아이디어에 새로운 교육적 접근을 제공한다. 셋째, 테크놀로지는 우리가 가르칠 수 있는 것에 변화를 가져왔다. 이렇게 학교의 수학교육 환경 또한 발전하여, 학생들이 수업 시간에 수학적 개념, 원리 또는 수학적 아이디어 등을 계산기, 컴퓨터, 태블릿 등의 공학도구를 사용하여 실제로 구현하고, 눈으로 확인하고, 수학적 사실을 발견하는 경험을 할 수 있다. 따라서 이러한 수학교육의 환경 변화는 학생들의 수학적 지식의 획득과 발전을 위한 큰 출발점이 된다.

National Council of Teachers of Mathematics(NCTM)는 수학 수업에서 학생들과 교사들의 적극적인 공학도구의 활용을 권장하고 있는데(NCTM, 2000; 2014), 특히 교구와 공학도구의 사용이 학생들의 탐구와 수학적 아이디어의 이해, 수학적 추론, 그리고 수학적 사고의 의사소통을 용이하게 할 수 있다고 본다. 따라서 다양한 교구와 공학도구가 수학의 의미 있는 학습을 위해 교실의 필수불가결한

* MSC2010분류 : 97D40, 97U60, 97U70

1) 인하대학교 강사 (thals8410@gmail.com)

특징으로 강조되고 있음을 알 수 있다(NCTM, 2014; Kim, 2017). 또한 한국의 2015 개정 수학과 교육과정에서도 문제 해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천이라는 6가지 수학 교과 역량 중 정보 처리 역량을 통해 공학도구 활용의 중요성을 제시하고 있다. 정보 처리 역량은 “다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력”(교육부, 2015, p. 4)으로 이를 함양하기 위한 강조 사항 중 하나로서, “계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 교수·학습 상황에서의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용”할 수 있도록 해야 함을 언급하고 있다(교육부, 2015, p. 39).

한편, 연구자들은 교육자들이 테크놀로지가 학습 환경에 미치는 영향을 일상적으로 평가하는 것이 장기적으로 시사하는 바를 위해 필수적이라고 하였다(Stacy & Cain, 2015; Ose Askvik, van der Weel, & van der Meer, 2020). 따라서 시대적 변화와 사회적 요구에 따라 수학 교수·학습을 위한 다양한 프로그램, 소프트웨어, 모바일 앱 등이 개발되고, 수학 수업에서의 공학도구 활용이 점차 강조되면서 기존의 손으로 조작하는 활동 또는 교구 등의 역할을 디지털 기기가 대신하는 경우가 증가하고 있는 지금, 수학 수업에서 손으로 조작하는 활동 또는 교구와 공학도구의 사용을 비교 또는 평가해 보는 것이 중요하다고 할 수 있다. 또한 과거에는 효과적이었고 성공적 이었던 물리적 교구가 오늘날의 학생들에게도 최선의 학습 도구인가? 물리적 교구 활용 시 종종 일어나는 구체물에서 추상적 개념으로 연결되기 위해 필요한 요소들의 생략 등을 고려해 볼 때, 공학도구에서 추상적 개념으로 전환은 좀 더 용이한가? 두 방법을 다 사용하는 것에 이점이 있는가? 그렇다면 사용 순서가 중요한가? 등에 대한 질문들은 교사 교육자들이 관심 가져야 하는 부분이고, 교사 양성기관에서 이러한 연구를 수행할 수 있는 이상적인 환경을 제공하는 것이 중요하다(Hunt, Nipper, & Nash, 2011, p. 1). 즉, 수학 수업에서 같은 수학적 개념 또는 주제에 대해 구체물을 이용한 활동과 공학도구 활용 중 어떤 방법이 교수·학습에 더 효과적인지, 어떤 방법을 선호하는지, 그 이유가 무엇인지에 대한 연구가 필요한 것이다. 특히 예비 수학교사들은 학생의 입장으로 그리고 곧 교사가 될 입장으로 이 두 가지 방법을 경험하고 비교할 최적의 위치에 있다고 볼 수 있다. 예비 수학교사들은 수작업 활동과 공학도구 활동 모두를 경험함으로써 두 가지 방법에 대한 자신들의 생각 및 태도 등을 명확히 인식할 수 있으며, 이를 통해 그들이 제공할 수 있는 또는 제공하고자 하는 교육환경에 대한 인지와 학습 기회를 얻을 수 있을 것이다.

따라서 본 연구에서는 포물선, 타원, 쌍곡선 등의 이차곡선을 지도하기 위한 방법으로 수작업 교구 활동과 공학도구인 GeoGebra를 모두 경험하고 이 두 가지 방법에 대한 예비 수학교사들의 인식을 살펴보고자 하였다. 또한 이를 통해 수작업 활동과 공학도구를 활용하는 수학 수업에 대해 교사교육 영역에서의 개선방향을 탐색해 보고 시사점을 제안해보고자 한다. 본 연구에서의 연구문제는 다음과 같이 설정하였다.

이차곡선의 지도 방법으로써 수작업 과제인 Wax-paper 활동과 공학도구인 GeoGebra 활동에 대한 예비 수학교사들의 인식은 어떠한가?

II. 이론적 배경

1. 수학 교구와 공학도구 활용을 위한 교수학적 원리

수학 교수·학습 과정에서 교구와 공학도구 등의 활용과 관련된 이론적 논의가 부족한 가운데, 이경화, 정혜윤, 강완, 안병곤, 백도현(2017)은 교구와 공학도구를 활용한 수학 지도에 대한 현상을 이해하

는 이론적 관점으로써 수학 교구의 교수학적 원리를 제시하였다. 이경화 외(2017) 연구에서는 교구를 효과적인 수업을 위해 활용되는 도구라는 넓은 의미로 정의하여 이에 공학도구를 포함하였다. 수학 교구 및 공학도구를 활용한 수학 교수·학습에 관련된 선행연구를 바탕으로 수학 교구 활용의 역할과 성격을 분석함으로써 도출한 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리는 다음과 같다.

첫째는 활동의 원리로, “활동을 통해 수학을 이해하고 학습하도록 한다”(이경화 외, 2017, p. 204)는 의미이다. 이 원리는 교구를 활용하는 활동을 통해 학생들이 구체적이고 물리적인 경험을 하고 이를 바탕으로 수학의 구조와 본질을 이해하고 학습하도록 한다는 뜻이다. Piaget, Dewey, Skemp, Dienes 등 이미 많은 학자들이 수학 학습의 원리로 활동을 강조하였으며, 이러한 활동의 원리를 반영한 수학 교구의 활용은 지도하고자 하는 수학 내용, 학생의 심리 발달, 수학 수업에 영향을 미치는 제반 요인 등을 균형 있게 고려한 것을 말한다.

둘째는 도구의 원리로, “활용되는 수학 교구가 도구로서 기능과 역할을 해야 한다”(p. 205)는 의미이다. 이 원리는 학생들로 하여금 교구가 제공하는 특정 기능 또는 활동의 필요성을 인식하고 적절한 정도의 숙련된 솜씨로 교구를 도구로써 활용하도록 한다는 뜻이다. 이러한 도구의 원리를 반영한 수학 교구의 활용은 수학 교구의 잠재적 개념과 절차를 분석하고 학생들의 반응을 예측하는 등의 사고 실험을 거친 후에야 가능하다. 또한 수학 교구가 도구의 원리를 만족하면서 학습의 매개체로 작용하기 위해서는 ‘도구의 발생(instrumental genesis)’이 이루어져야하는데, 이는 도구 자체가 가진 다양한 기능과 용법이 주체에게 인식되는 ‘도구 사용(instrumentation)’ 단계와 도구 사용에 숙련 될수록 주체가 복합적이고 입체적인 도구 활용법을 고안하게 되는 ‘도구화(instrumentalization)’ 단계를 거친다 (Trouche, 2004; 이경화 외, 2017, 재인용).

마지막은 학습의 원리로, “수학 교구 활용 결과가 학습 촉진이어야 한다”(p. 207)는 의미이다. 이 원리는 수학 교구 활용은 유목적적으로 이루어져야 하며, 학습 촉진을 궁극적인 목표로 한다는 뜻이다. 학습은 교구로 하는 경험 자체에서 일어나는 것이 아니라 경험에 대한 사고 활동에 의해 가능하기 때문에, 학습의 원리를 반영한 수학 교구의 활용은 구체적이고 물리적인 경험과 더불어 그 경험에 대한 사고 활동을 구현해야 한다. 수학 수업에서 교구 활용 경험을 통해 “무엇을 알게 되었고, 알아낸 것을 어떻게 표현할 수 있는지, 그 표현이 뜻하는 바가 무엇이며 어떻게 상징화 또는 개념화 할 수 있는지를 긴밀하게 탐구하도록”(p. 207) 함으로써 수학적 개념을 형성할 수 있다(김수미, 2000; 장문봉 외, 2008; 이경화 외, 2017, 재인용).

앞서 제시한 수학 교구의 활용을 위한 세 가지 교수학적 원리는 위계가 없으며 서로 상호 관련성이 높다. 이들 원리를 고려하여 수학 교구 및 공학도구를 사용한다면 단지 학생들의 흥미를 높이는 수단이 아닌 수학 학습을 촉진하는 데 도움이 될 것이다.

2. 수학교육과 공학도구의 활용

수학 수업에서 계산기, 컴퓨터 소프트웨어, 휴대용 기기, 인터넷 기반 또는 모바일 앱 등의 활용은 학생들이 수학적 아이디어를 조사하고, 수학적 추측을 발전시키며, 추상적인 수학적 개념의 시각화 및 이해를 할 수 있도록 돕는다(NCTM, 2000; Shin, Smith, & Kim, 2018, p. 156). 또한 김남희, 박경미 (2008)에 따르면 수학 학습에서 공학도구 사용의 장점으로 다음 네 가지를 들고 있다. 첫째, 구체적 사고와 추상적 사고의 연결이다. 공학도구의 시각적인 조작 기능 및 여러 가지 표상을 잘 활용하면 추상적인 수학적 개념, 정리, 관계 등을 구체화하여 이해하는 데 도움이 된다. 둘째, 사고력 중심의 수학교육 추구이다. 공학도구를 사용하여 문제해결의 본질적인 부분이 아닌 복잡한 계산이나 대수적인 문자식 처리를 신속하게 대행함으로써 사고력 중심의 교수·학습 활동에 집중할 수 있다. 셋째, 수학교육의 학습 원리 구현이다. 공학도구 활용으로 Dienes의 수학적 다양성의 원리 등과 같은 수학 학습

원리를 구현할 수 있다. 마지막으로 추론과 증명을 위한 직관적 탐구 활동 제공이다. 공학도구가 제공하는 그래프, 애니메이션, 동영상, 시뮬레이션 등과 같은 다양하고 직관적인 탐구활동은 증명 전에 연역해야 할 사실에 관한 직관적 이해 및 관찰에 의한 발견 과정을 제공할 수 있다(김남희, 박경미, 2008, p. 19). 이러한 장점들은 수학 학습에서 공학도구 활용에 대한 그 필요성을 더욱 증가시키고 있다.

그동안 수학교육에서 공학도구의 활용에 관한 수많은 연구들이 행해져 왔다. 수학 교수·학습과 관련된 공학도구 활용에 관한 최근 연구들을 대략적으로 살펴보면, 다양한 공학도구 중에서도 동적 기하 환경(Dynamic Geometric Environments) 소프트웨어 또는 ‘움직이는 수학 소프트웨어(Dynamic Mathematics Software)’인 GeoGebra(최경식, 2012)나 Algeomath 등을 대상으로 한 연구가 많았다. 또한 이를 활용한 수학적 개념의 지도 방안, 교수법 등의 연구(김근배, 최옥환, 박달원, 2018; 양성현, 강옥기, 2011)와, 공학도구 활용 수업이 학생들의 수학 학습 및 정의적 측면에 미치는 영향에 관한 연구(공민숙, 강윤수, 2014; 김무진, 이종학, 김원경, 2014; 박래성, 권종겸, 이동엽, 2019), 그리고 공학도구 활용에 관한 교사 및 예비교사들의 인식(고상숙, 박만구, 한혜숙, 2013; 김동중, 김대상, 최상호, 2018)과 Technological Pedagogical Content Knowledge(TPACK)을 분석한 연구(변운성, 김선희, 2020; Kim, 2018) 등을 찾아 볼 수 있다.

공학도구를 활용한 수학 개념의 지도 방안 또는 공학도구 활용이 학습에 미치는 영향에 관한 연구들의 경우, 공학도구가 가진 특성을 이용해 학생들의 수학적 개념의 이해를 돕거나 오류를 수정하도록 하였다. 예를 들면, 양성현, 강옥기(2011)의 연구에서는 GeoGebra의 대표적인 특징인 역동적인 시각적 표상의 구현과 대수적, 기하적 조작과 표상의 연결성을 활용하여 포물선의 지도 방안을 제시하였다. 김근배, 최옥환, 박달원(2018)의 연구 또한 GeoGebra의 역동적인 작도 기능과 표상 구현 기능, 그리고 빠른 피드백을 활용하여 타원의 초점 작도에서 유추와 분석적 방법이 어떻게 작용하는지 그 과정을 연구하였다.

공학도구의 활용이 학생들의 수학 학습 또는 정의적 측면에 미치는 영향에 대한 연구들은 대부분 긍정적인 결과를 보고하였는데, 먼저 고등학교 수학 영재를 대상으로 GeoGebra 기반 교수·학습 자료를 개발 및 적용한 김무진, 이종학, 김원경(2014)의 연구의 경우, 수학 영재들은 GeoGebra를 활용한 일반화 문제의 증명, 수학적 모델링 문제와 관련된 심화문제 해결과정에서 다양한 창의적, 논리적 사고, 직관과 통찰, 수학적 추론, 사고의 유연성 등의 인지적 특성을 나타냈다고 보고했다. Algeomath 활용 수업이 중학교 학생들의 수학 학업 성취도와 학습태도에 미치는 효과를 조사한 박래성, 권종겸, 이동엽(2019)의 연구에서는 전통적인 교구를 사용한 수업보다 공학도구를 활용한 기하 단원 수업에서 학생들의 수학 학업 성취도와 학습태도에 유의미한 긍정적 효과가 있는 것으로 나타났다. 공민숙, 강윤수(2014)의 연구에서도 마찬가지로 수학 수업에서 GeoGebra의 활용은 학생들의 정의적 영역에 긍정적인 영향을 준다고 나타났다. GeoGebra를 이용해 삼각함수의 극한을 지도하는 과정에서 고등학생들은 극한과 관련된 자신들의 오류를 인식하고 교정할 수 있었을 뿐 아니라, 수학에 대한 흥미가 생기고, 적극적인 참여 태도를 보였으며, 자기 주도적 학습을 하였다.

이렇게 여러 가지 장점이 있는 공학도구를 실제 학교현장에서 활용할 것인지 여부를 결정하는데 있어서 공학도구 활용에 대한 교사의 신념, 태도 또는 인식은 매우 중요한 요인이다(Ertmer, 2005; Kim, 2018). 공학도구 친화적 거꾸로 수업(Technology-friendly flipped classroom)이 예비 수학교사들의 공학도구 활용에 관한 인식에 미치는 영향을 분석한 김동중, 김대상, 최상호(2018)의 연구를 살펴보면, 예비교사들은 개별학습 과정으로 공학도구 사용에 관한 동영상 강좌를 사전에 시청하고, 협동학습 과정으로 실제 수업시간에 조별 과제 및 프로젝트를 실습하였다. 이를 통해 예비교사들은 공학도구의 시각화의 효과성, 조작과 탐구의 효율성을 경험함으로써 공학도구 활용이 학생들의 수학학습 과정에서 수학적 개념 이해, 문제 해결, 수학에 대한 흥미와 동기 유발에 도움을 줄 수 있다고 인식하였다(p.

471). 한편, 교수·학습 과정이 아닌 과정중심 평가에서의 공학도구 활용에 대한 교사들의 인식을 조사한 고상숙, 박만구, 한혜숙(2013)의 연구에 따르면, 교사들은 교구 또는 공학도구의 활용이 학생들의 수학 학습에 대한 흥미 유발 및 수학적 지식의 이해를 돕는다는 긍정적인 인식을 가지고 있었으나, 평가에서 교구 또는 공학도구 활용의 필요성에 대해서는 소극적인 입장을 보여 주었다. 그러나 수학 과정중심 평가에 교구 또는 공학도구의 활용을 허용한다면, 학생들의 수학학습 과정을 강조하고 학습 상태를 보다 정확하고 종합적으로 파악할 수 있는 연구보고서, 프로젝트, 토론 등의 다양한 대안적 평가 방법을 적극적으로 활용할 것이라고 응답했다.

3. 수학교육과 수작업 활동 및 교구의 활용

NCTM(2014)과 2015 개정 수학과 교육과정에서도 언급하고 있듯이 손으로 작업하는 수학 교구 또한 여전히 수학을 배우기 위한 중요한 도구라고 할 수 있다. 여기서 말하는 교구에 대한 의미는 넓게는 “물리적 개입을 통해 추상화 될 수 있는 수학적 아이디어를 표현하는 물체”(Young, 1983, p. 12)로, 좁게는 “여러 감각에 호소하며, 아동에 의해 만져지고, 옮겨지거나 재배열될 수 있으며, 그 외에 방법으로 다루질 수 있는 물체”(Kennedy, 1986, p. 6)로 정의하고 있다. 본 연구에서는 수학적 주제를 이해하는데 사용되는 손으로 다루는 모든 물체를 지칭하는 Kelly(2006)의 정의를 선택하였는데, 이는 교구를 “문제해결 과정에서 특정한 수학적 주제나 주제들에 대한 이해의 깊이를 명확하게 보여주기 위해 사용될 수 있는 실재하는 물체, 도구, 모델, 또는 메커니즘”(p. 184)이라고 보았다.

수학 수업에서 이러한 수학 교구를 활용하면 학생들의 수학에 대한 흥미 또는 학습동기를 유발할 수 있으며, 그들이 수학적 지식을 심층적으로 이해할 수 있도록 돕는다(고상숙, 박만구, 한혜숙, 2013; 안병근, 2018; 이경화 외, 2017; Saidu & Bunyamin, 2016). 이는 구체물 조작을 통해 구체와 추상 사이의 간격을 좁혀줌으로써 수학적 추상화나 형식화 과정에 자연스럽게 접근할 수 있도록 해주며, 보다 폭넓은 경험을 통해 관계적 이해를 높이고, 탐구 능력과 의사소통 능력에도 도움이 될 수 있기 때문이다(안병근, 2018, p. 39).

수학 교구 활용에 관한 선행연구들 역시 수학 교구를 활용한 교수·학습 방법에 관한 연구(김남희, 2000, 2001; 김미화, 김성준, 2009; 장훈, 2008)와 수학 교구의 활용이 학생들의 인지적 측면(신종석, 표용수, 2011; 정동권, 2001; 황우형, 김명선, 2001)과 정의적 측면(최창우, 손숙현, 2002; 신종석, 표용수, 2011)에 미치는 영향에 관한 연구로 크게 나뉘 볼 수 있다.

예를 들면, 김남희(2000, 2001)의 연구들에서는 수학수업에서 탱그램과 기하판을 효과적으로 활용할 수 있도록 각 교구의 특징을 이용하여 수학적 개념과 내용을 구체화 하여 다루는 지도 방법의 예를 제시하였다. 또한 수학 교구의 활용 효과에 대한 연구를 살펴보면, 먼저 초등학생을 대상으로 한 사다리꼴 넓이 구하기 수업에서 기하판의 활용 사례를 분석한 정동권(2001)의 연구결과에서는 학생들의 인지적 측면을 향상을 볼 수 있었다. 기하판 활용을 통해 조작과 수학적 사고를 자연스럽게 연결시키고, 구체적인 상황에서 추상적인 일반화를 가능하게 할 수 있었을 뿐만 아니라 활발한 수학적 의사소통을 촉진하였다. 최창우, 손숙현(2002)은 수학 교구의 활용이 인지적 측면인 학습능력과 정의적 측면인 수학적 성향에 미치는 영향에 대해 연구하였다. 수학 교구를 활용한 클럽 활동을 통해 학생들은 능력 수준에 따라 다른 측면의 향상을 보였다. 하 수준의 학생들의 경우 도형 학습능력에 긍정적 효과가 있었고, 중 수준 학생들의 경우 공간감각력과 직관적 사고가 향상되었다. 상 수준 학생들의 경우 응용문제를 생각하거나 확산적인 사고를 하는데 도움이 되었다. 정의적 측면에서는 전반적으로 수학에 대한 자신감, 흥미 등이 높아지고, 수학문제를 계속 탐구하려는 태도를 보였다. 따라서 수학수업에서의 수학 교구 활용은 공통적으로 구체물 조작에서 추상적 사고로의 확장을 통해 수학적 관계의 탐구 및 수학적 성질의 발견에 적절한 것으로 나타났다.

4. 교구와 공학도구를 비교한 선행연구

이경화 외(2017)가 제시한 수학 교구의 교수학적 원리 중 도구의 원리에 따르면, 활용되는 교구 및 공학도구의 기능과 역할을 인식하고, 이를 수학 학습에 효과적으로 활용하기 위해서는 학생들이 어느 정도 숙련된 도구 사용 능력과 이를 바탕으로 새로운 방법을 고안하고 활용하는 ‘도구 사용’ 단계와 ‘도구화’ 단계를 거쳐야한다. 그러나 물리적 교구의 경우, 공학도구에 비해 사용법이 간단하여 능숙하게 사용하기 쉽지만, 용도가 고정되어 있는 경우가 많으며 수정·보완하여 활용하기 어려운 경우가 많고, 이에 반해 공학도구는 교구보다 사용법이 복잡하여 능숙하게 사용하기까지 시간이 많이 소요되지만, 자유도가 커 직접 활동자료를 구성하거나 기존의 자료를 수정·보완하여 활용하는 것이 가능하다. 이처럼 도구의 원리가 교구와 공학도구에 적용 되는 부분에서 발생하는 차이점 등이 수학 수업에서 교사나 학생의 도구 활용에 영향을 줄 것이라고 생각한다. 따라서 본 연구에서는 수학 교수·학습 과정에서 활용되는 교구와 공학도구를 구별된 도구로 보고, 두 도구의 활용을 비교하는 것이 필요하다고 보았다.

지금까지 살펴본 선행연구에 의하면, 수학수업에서 각 공학도구의 활용이나 교구의 활용은 학생들의 수학 학습 촉진이나 학습동기 유발 측면에서 긍정적인 역할을 한다는 것을 알 수 있었다. 그렇다면 수학교사 또는 예비 수학교사는 수학적 개념이나 주제를 효과적으로 가르치기 위해 공학도구를 사용할 것인가 교구를 사용할 것인가 고민해보지 않을 수 없다. 하지만 앞선 국내 연구들 중에서는 동일한 수학적 개념 및 주제에 대한 공학도구 사용과 교구 사용을 동시에 비교한 연구는 매우 드물었다. 교구와 공학도구 사용을 모두 다룬 연구로써, 교구 및 공학도구를 평가에 활용하기 위한 기반을 조성하기 위해 한국과학창의재단에서 실시한 고상숙 외(2013)의 연구에서는 교구나 공학도구를 활용해야만 해결이 가능한 평가 문항을 개발하고 학교현장에서 학생들을 대상으로 개발된 평가를 시행하였다. 그 결과, 초·중학교 학생들의 경우 문항에서 요구했던 것 보다 창의적이며 심화된 답을 제시하였고, 학생 스스로 문제를 확장하여 해결하려는 모습이 보였다. 고등학생의 경우, 공학도구의 사용이 성취 수준이 낮은 학생들임에도 불구하고 난이도가 높은 문제에 도전하고 해결하도록 동기부여의 역할도 한 것으로 나타났다. 따라서 평가에서 교구나 공학도구를 사용함으로써 평가와 동시에 수학적 지식의 확장 또는 수학적 능력의 향상과 같은 학습이 이루어질 가능성이 보였다. 또한 이 연구에서는 초·중·고등학교 학생들을 상대로, 평가 시 전통적인 지필도구 사용을 교구나 공학도구 사용과 비교하였다. 그 중 교구와 공학도구 모두를 지필도구와 각각 비교한 중학교급에서는 지필도구보다 교구를 선호하는 비율이 지필도구보다 공학도구를 선호하는 비율보다 높았다. 지필도구와 각 교구와 공학도구를 비교한 결과를 직접 비교하는 것은 무리가 있지만, 이를 통해 공학도구 보다 교구의 사용을 더 선호 한다고 조심스럽게 추측은 해 볼 수 있다. 하지만 직접 비교가 아닐뿐더러 동일한 수학적 개념 또는 주제에 대해 교구와 공학도구, 이 두 가지 방법을 모두 사용해 평가를 실시한 것이 아니기 때문에 여전히 교구와 공학도구 활용을 비교하는 연구가 필요하다.

외국 문헌의 경우도 같은 수학적 주제를 다루면서 교구와 공학도구 활용을 직접 비교한 연구는 많지 않았는데, 구체물인 물리적 교구와 웹 기반 가상 교구 활용을 비교한 연구(Hunt, Nipper, & Nash, 2011; Kilgo & White, 2014)가 대부분이었다. Hunt et al.(2011)는 2008년에서 2010년까지 3년간 총 78명의 중학교급 예비 수학교사들을 대상으로 패턴 블록, Fraction Circles, Cuisenaire Rods, 주판 등의 구체물 교구와 이와 비슷한 기능을 가지고 같은 개념을 다루는 웹 기반 가상 교구의 활용을 비교하는 연구를 시행하였다. 예비교사들은 두 교구 모두 활용하여 분수, 정수, 십진법이 아닌 수 등을 학습한 후, 어느 교구가 사용하기 쉬운지, 개념적 이해에 도움이 되는지, 다른 장단점은 무엇인지 등에 대한 설문조사에 응답하였다. Hunt et al.(2011)의 연구 결과에 따르면, 예비교사들은 구체물 교구가 사용하

기 쉽고 개념적 이해를 구축하는 데 더 도움이 된다고 응답했으나, 두 가지 교구를 모두 사용할 때에 학생들의 수학적 개념 이해나, 학생들을 위한 차별화된 수업 제공에 더 도움이 된다고 언급했다. 또한 구체적 교구를 통해 개념적 이해를 효과적으로 구축하게 되며, 가상 교구를 통한 후속 활동으로 추상으로의 연결이 용이해지는 것으로 보인다고 주장하였다.

분수와 소수, 그리고 기하 단원에서 물리적 교구와 가상 교구 활용을 비교한 Kilgo & White(2014)의 연구에서는 초등 또는 중등 수학 교수·학습 방법론 강의를 듣고 있는 예비 수학교사 70명을 대상으로 물리적 교구와 가상 교구를 개발하거나 검색하여 찾고 활동지를 구성하도록 하였다. 예비교사들은 물리적 교구와 가상 교구 모두를 활용해 본 후 어떤 방법을 선호하는지, 그리고 어떤 교구가 더 나은 수학적 개념의 이해를 제공하는지, 교구와 수학적 주제 사이를 명확히 연결해 주는지, 사용하거나 접하기 쉬운지, 더 흥미로운지 등의 질문에 응답하였다. Kilgo & White(2014)의 연구 결과에 따르면, 예비교사들은 여러 측면에서 물리적 교구를 압도적으로 선호하는 것으로 나타났으며, 접근이 용이하다는 부분에서만 가상 교구를 선호하였다. 그러나 즉각적인 피드백 제공과 흥미 유지 등의 가상 교구의 장점도 인식하고 있었다.

이처럼 교구와 공학도구의 활용을 비교한 국내·외 선행연구를 살펴보면, 수학 수업에서 공학도구의 활용을 강조하고 있음에도 불구하고 예비교사들 또는 학생들이 공학도구 보다 교구를 선호하는 경향이 있다는 것을 알 수 있었다. 특히 예비교사의 경우, 학생으로서 경험한 수학 교수·학습 방법이 수학교사가 되었을 때 어떻게 수학을 지도할 것인가에 많은 영향을 미치기 때문에, 교사가 되기 전 사범대학에서 다양한 교수·학습 방법을 경험하고 각 장단점을 인지하는 것이 중요하다. 따라서 수학수업 환경과 교구 및 공학도구를 활용하는 교수·학습 방법에 대한 시사점을 찾고자, 동일한 수학적 개념이나 주제에 대한 손으로 조작하는 활동 또는 교구 활용과 공학도구의 활용을 비교해보고 어떤 방법이 교수·학습에 더 효과적인지, 어떤 방법을 선호하는지, 그 이유가 무엇인지에 관한 예비 수학교사의 인식을 조사해 볼 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 동일한 수학적 개념을 지도하기 위한 방법으로 손으로 조작하는 구체적 활동과 공학도구를 모두 경험해 본 후, 이에 대한 예비 수학교사들의 인식을 조사하기 위해 설계되었다. 연구 대상은 수도권 소재 A대학 수학교육과의 자발적 참여자 1, 4학년 학부생 20명이다. 이 예비 수학교사들은 연구 진행 당시 융합형 수학과 교육과정 강의를 수강하고 있었으며, 5명을 제외하고는 모두 4학년이고, 교생실습을 마치고 돌아온 상태였다. 따라서 본 연구에 참여한 대부분의 예비 수학교사들은 수작업 활동과 공학도구 활동을 학생 입장과 교사 입장에서 모두 고려할 수 있는 적합한 대상이라고 할 수 있다.

2. 연구 절차 및 자료 수집

본 연구에서는 예비 수학교사들에게 2주에 걸쳐 고등학교 기하 영역의 이차곡선 단원에 대해서 Kelly(2006)의 넓은 의미의 교구로 Wax-paper를 이용한 수작업 활동(종이 접기)을 제시하고, 공학도구로는 GeoGebra를 이용한 활동을 제시했다. 그 다음 예비교사들을 대상으로 두 지도 방법에 대한

인식 설문조사를 실시한 후, 두 지도 방안에 대한 조별 토론 시간을 가졌다.

기존의 선행연구를 살펴보면, 교구 활용의 경우 초등 또는 중등 수학내용에 관한 연구들이 많았고, 공학도구의 경우는 중등 또는 고등 수학내용에 관한 연구들이 많았다. 본 연구에서는 수작업 활동 또는 교구와 공학도구의 활용이 어느 정도 보편화된 기하 영역에서 이차곡선을 선정하였는데, 이는 Wax-paper를 이용한 수작업 활동(종이 접기)과 GeoGebra 활동의 서로 다른 특성이 잘 반영될 주제라고 생각했기 때문이다. 또한 기하학 측면에 초점을 둔 이 두 지도 방법이 이차곡선의 기하학적 접근방식의 역동적이고 시각적인 표상을 인지할 수 있게 해주고 작도와 증명 활동에 도움을 주어, 대수적 측면이 강조된 현 교육과정의 이차곡선 학습활동(김근배, 최옥환, 박달원, 2018)을 보완해 줄 수 있다.

1) Wax-paper를 이용한 수작업 활동과 GeoGebra를 이용한 공학도구 활동

본 연구에서 시행한 이차곡선 지도 방안은 Jung & Kim(2004)의 연구에서 제시한 수업 활동을 수정 및 확장한 것으로 수업 계획은 다음 <표 III-1>과 같다.

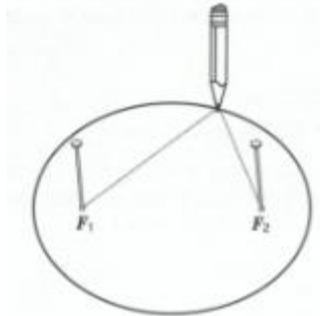
<표 III-1> 교구와 공학도구를 활용한 이차곡선 지도 방안

활동	Wax-paper 활동	GeoGebra 활동
목적	다양한 방법으로 이차곡선을 작도 또는 구성하는 방법을 학습하며, 기하적 측면과 대수적 측면을 연계하여 구성된 구조가 이차곡선으로써 작동하는 이유를 증명한다.	
준비물	끈, 핀, 자, 컴퍼스, Wax-paper	컴퓨터, GeoGebra
이차곡선	포물선	<ol style="list-style-type: none"> 1. Wax-paper 접기 활동을 GeoGebra를 이용하여 작도하기 2. envelope(포락선) 모양 관찰하기 3. 포물선의 정의 및 성질 탐구하기 4. 점의 자취를 작도하여 포물선 작도하기 5. 기하적 표상과 대수적 증명 연결하기
	타원	<ol style="list-style-type: none"> 1. 끈을 이용한 활동 <ol style="list-style-type: none"> 1) 두 초점을 핀으로 고정하고 일정한 길이의 끈과 연필을 이용해 타원 작도하기 2) 다양한 길이의 끈 또는 다양한 위치의 두 초점을 선택해 여러 가지 타원 작도하기 3) 타원의 정의 및 성질 탐구하기 2. Wax-paper를 이용한 활동 <ol style="list-style-type: none"> 1) Wax-paper 접는 방법 궁리 2) 원과 수직이등분선을 이용한 Wax-paper 접기 3) envelope(포락선) 모양 관찰하기 4) 타원의 정의 및 성질 탐구하기 5) 기하적 표상과 대수적 증명 연결하기

쌍곡선	<ol style="list-style-type: none"> 1. Wax-paper 접는 방법 궁리 2. 원과 수직이등분선을 이용한 Wax-paper 접기 3. envelope(포락선) 모양 관찰하기 4. 쌍곡선의 정의 및 성질 탐구하기 5. 기하적 표상과 대수적 증명 연결하기 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Wax-paper 접기 활동을 GeoGebra를 이용하여 작도하기 2. envelope(포락선) 모양 관찰하기 3. 쌍곡선의 정의 및 성질 탐구하기 4. 접의 자취를 작도하여 쌍곡선 작도하기 5. 기하적 표상과 대수적 증명 연결하기
-----	---	--

세 가지 이차곡선 중 타원에 대한 활동에 대한 예시를 구체적으로 제시하면 다음과 같다.

먼저 끈을 이용한 활동으로, 두 초점 F_1 , F_2 를 핀으로 고정하고 일정한 길이의 끈과 연필을 이용해 다음 [그림 III-1]과 같이 타원을 작도한다. 다양한 길이의 끈 또는 다양한 위치의 두 초점을 선택해 여러 가지 타원을 작도하고 관찰하며 타원의 정의 및 성질을 탐구한다.



[그림 III-1] 끈을 이용한 타원의 구성(Jung & Kim, 2004, p. 186)

그 다음, 앞서 수직이등분선과 한 정점을 이용하여 Wax-paper([그림 III-2])를 접어 포물선을 만든 경험과 끈을 이용한 활동을 토대로 어떻게 하면 타원을 접을 수 있을지 궁리한다.



[그림 III-2] Wax-paper

끈을 이용한 활동에서 일정한 끈의 길이가 의미하는 바가 무엇인지 생각하고 원과 수직이등분선을 이용해 Wax-paper로 타원을 접도록 한다.

Wax-paper로 타원을 접는 단계는 다음과 같다.

- ① Wax-paper 위에 컴퍼스를 이용해 점 F_1 을 중심으로 하는 원을 작도하고, 원 안에 또 다른 한 점 F_2 를 작도한다.
- ② 원 위에 일정 간격으로 점을 찍고 그 점과 F_2 를 포개어 접는다. 접힌 주름이 F_2 와 원 위의 점을 연결한 선분의 수직이등분선임을 인식한다.
- ③ 이 활동을 원 위의 모든 점에 반복한다.
- ④ 접기 결과 나타나는 envelope(포락선)을 관찰하고 F_1 와 F_2 를 초점으로 하는 타원임을 인식한다.

다른 예비교사가 접은 envelope([그림 III-3])도 살펴보며 타원의 정의와 원의 반지름과 초점 사이의 거리에 따른 타원의 성질을 탐구하고, 왜 이 envelope이 타원을 이루는지 생각해본다. 마지막으로 타원의 기하적 표상과 정의를 바탕으로 왜 타원이 되는지 증명하고 타원의 방정식을 도출한다.



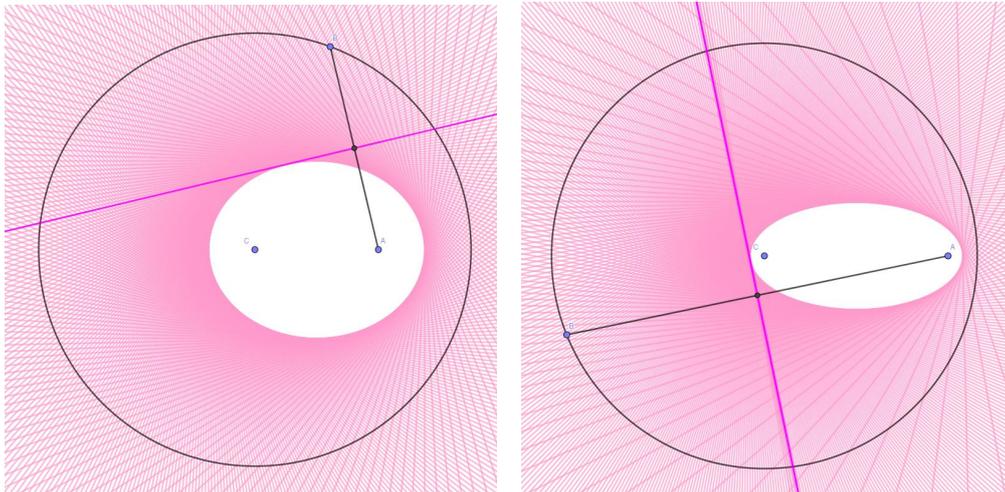
[그림 III-3] Wax-paper를 접어서 나타난 envelope 결과물

다음 GeoGebra를 이용해 타원을 작도하는 활동을 살펴보자. 대부분의 예비교사들은 학생으로서 또는 교사로서 GeoGebra를 다뤄본 경험이 있었으며 숙달된 사용자는 아니지만 간단한 작도는 가능했다. Wax-paper로 타원을 접은 후 이를 고려하여 GeoGebra로 타원을 어떻게 작도할 것인지 궁리한다.

GeoGebra로 타원의 envelope을 작도하는 단계는 다음과 같다.

- ① 점 C 를 중심으로 하는 원을 작도하고, 원 내부에 점 A 를, 그리고 원 위에 점 B 를 작도한다.
- ② 선분 \overline{AB} 를 작도하고 중점 M 을 작도하여 M 을 지나는 선분 \overline{AB} 의 수직선을 작도하거나, 수직 이등분선 기능을 이용해 두 점 A, B 를 선택하여 선분 \overline{AB} 의 수직이등분선 L 을 작도한다.
- ③ L 을 선택하고 자취보이기를 실행한 후, 원 위의 점 B 의 애니메이션을 실행한다.

작도한 타원의 envelope을 바탕으로 원의 반지름 또는 두 초점의 위치를 변경해가며([그림 III-4]) 타원의 정의와 원의 반지름과 초점 사이의 거리에 따른 타원의 성질을 탐구하고, 왜 이 envelope이 타원을 이루는지 생각해본다.



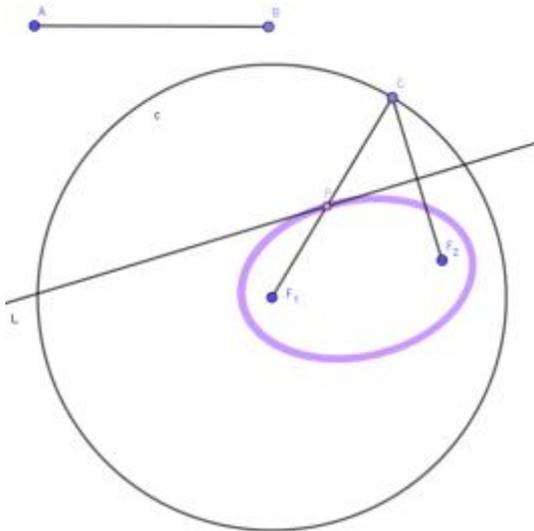
[그림 III-4] 원의 반지름 또는 두 초점의 위치 변화에 따른 다양한 타원의 envelope

마지막으로 envelope이 아닌 타원 자체를 작도하기 위해 타원 위의 점들을 어떻게 작도할 것인지 궁리한다. 타원의 정의와 수직이등분선을 이용하여 타원을 작도한다([그림 III-5]).

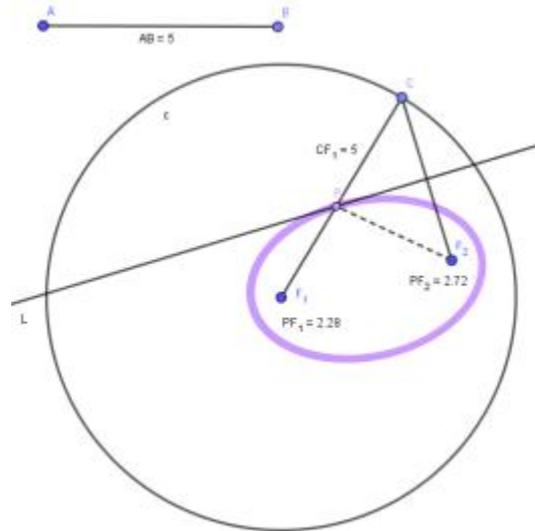
GeoGebra로 타원을 작도하는 단계는 다음과 같다.

- ① 주어진 길이의 선분 \overline{AB} 를 작도하고 중심이 점 F_1 이고 \overline{AB} 의 길이가 반지름인 원을 작도한다.
- ② 원 내부에 다른 초점 F_2 를, 그리고 원 위에 점 C 를 작도한다.
- ③ F_1 과 C 를 연결하고, F_2 와 C 를 연결하여 두 선분 $\overline{CF_1}$, $\overline{CF_2}$ 를 작도한다.
- ④ 선분 $\overline{CF_2}$ 의 중점 M 을 작도하여 M 을 지나는 $\overline{CF_2}$ 의 수직선을 작도하거나, 수직이등분선 기능을 이용해 두 점 C, F_2 를 선택하여 $\overline{CF_2}$ 의 수직이등분선 L 을 작도한다.
- ⑤ 선분 $\overline{CF_1}$ 과 수직이등분선 L 의 교점을 P 로 명명한다.
- ⑥ P 를 선택하고 자취보이기를 실행한 후, 원 위의 점 C 의 애니메이션을 실행한다.

이제 타원의 기하적 표상과 정의를 바탕으로 GeoGebra로 작도한 곡선이 어떻게 타원이 되는지 증명하고 타원의 방정식을 도출한다. 여기서 GeoGebra의 끌기 기능과 계산 기능을 사용하여 점 C 를 움직이면서, 점 P 가 어느 위치에 있던 선분 $\overline{PF_1}$ 의 길이 + $\overline{PF_2}$ 의 길이 = 선분 \overline{AB} 의 길이임을 보인다. 즉, 점 P 가 점 F_1 과 F_2 를 두 초점으로 하고 두 초점으로부터 점 P 까지의 거리의 합이 선분 \overline{AB} 의 길이로 일정한 타원 위에 있음을 보인다. 또한 [그림 III-6]에서 삼각형 $\triangle PCF_2$ 에서 직선 L 은 수직이등분선이므로 $\overline{PC} = \overline{PF_2}$ 이다. 그러므로 $\overline{AB} = \overline{CF_1} = \overline{PF_1} + \overline{PC} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ 임을 알 수 있다.



[그림 III-5] 타원의 정의와 수직이등분선을 이용해 작도한 타원



[그림 III-6] 점 P 가 타원 위에 있음을 보이는 과정

예비교사들에게 앞서 실행한 포물선과 타원에 대한 활동들을 바탕으로 다음 시간까지 Wax-paper와 GeoGebra로 쌍곡선을 구성 또는 작도해오는 과제를 제시한다. 다음 시간에는 예비교사들의 과제 결과를 발표하고 인식 설문조사를 실시하였다. 마지막으로 이차곡선 작도 방법 또는 새로운 아이디어에 대해 조별로 토론하는 시간을 가졌다.

2) 설문조사

이차곡선 지도 방안으로 수작업 활동 또는 교구를 활용한 Wax-paper 활동과 공학도구인 GeoGebra 활동을 경험한 후, 이 두 방법에 대한 예비 수학교사들의 인식을 조사하기 위해 설문조사를 실시하였다. 설문문항은 총 11개의 문항으로 구성되었고, 그 중 8개 문항은 선택형으로 ① 교구(Wax-paper), ② 공학도구(GeoGebra s/w), ③ 차이가 없다, 이 세 가지 응답 선택지가 제시되었으며, 모든 문항에는 그 응답을 선택한 이유를 적도록 하였다. 나머지 3개 문항은 서술형이다. 설문문항 중 6개 문항은 학생의 입장에서, 4개 문항은 교사의 입장에서 응답하도록 하였으며, 나머지 한 문항은 두 가지 활동을 실행하면서 느꼈던 점을 자유롭게 기록하도록 했다. 본 연구에서 사용된 설문문항은 다음 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 예비 수학교사들의 교구와 공학도구 활용에 대한 인식조사 설문문항

설문 입장	설문문항
학생	포물선의 개념을 익힐 때 선호하는 방법
	포물선에서 타원과 쌍곡선으로 개념을 확장할 때 선호하는 방법
	이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)의 개념을 익히기 전 준비 등의 노력이 더 많이 필요한 방법
	이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)의 성질을 탐구할 때 선호하는 방법
	이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)과 관련된 심화문제를 해결할 때 선호하는 방법
이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)을 배울 때 선호하는 방법	
교사	이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)을 지도할 때 선호하는 방법
	이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)에 대한 학습동기를 유발시킬 때 선호하는 방법
	수작업 교구 사용과 공학도구 사용에서 느낀 차이점
	이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선) 지도 방안에 대한 나의 아이디어
공통	두 가지 활동 수업에서 재미있었거나, 편리했었거나, 불편했던 점

3. 자료 분석

예비 수학교사의 이차곡선 지도방안으로써 교구와 공학도구 활용에 관한 설문조사 결과는 문항별 빈도분석을 시행하였으며, 선택 이유와 서술형 응답의 경우는 공통된 답변들을 분류하고 그 특징을 추출하였다.

IV. 연구 결과

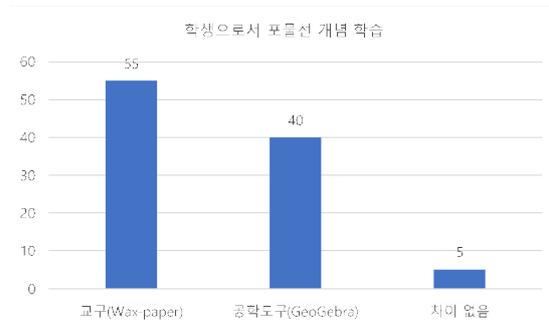
1. 예비 수학교사들의 교구와 공학도구 활용에 대한 인식

이차곡선 지도 방안으로써 교구와 공학도구 활용에 대한 예비 수학교사들의 인식 설문조사 결과는 각 문항의 빈도분석 그래프와 선택 이유를 함께 제시하고, 서술형 문항은 공통된 응답으로 분류하여 나타냈다.

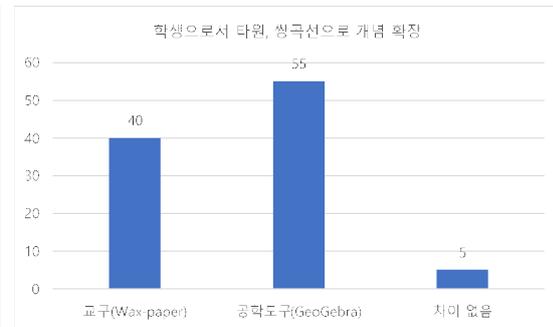
1) 학생의 입장에서 교구와 공학도구 활용에 대한 인식

먼저, 학생으로서 이차곡선 중에서 처음 포물선의 개념을 익힐 때 선호하는 방법에 대한 결과는 [그림 IV-1]에서 볼 수 있듯이 교구 55%(11명), 공학도구 40%(8명), 차이 없음 5%(1명)로 교구를 선택한 예비교사의 비율이 더 높게 나타났다. 교구를 선택한 이유로 교구의 장점 또는 공학도구의 단점에 대해 서술하였는데, 대부분 교구는 학생들이 손으로 직접 간단히 조작할 수 있고, 흥미를 유발하기 좋기 때문이라고 응답했다. 또한 공학도구는 조작 기능을 모르거나 복잡한 조작을 요구할 경우 학습에 어려움이 생기기 때문이라고 응답했다. 반면, 공학도구를 선호하는 이유로는 공학도구의 조작 기능을 사용해 변수를 다양하게 변화할 수 있어 포물선의 개념이나 도형의 형태, 현상을 파악하기에 여러 시도를 간편하게 할 수 있기 때문이라고 응답했다.

둘째, 포물선에서 타원이나 쌍곡선으로 개념을 확장할 경우 선호하는 방법에 대한 결과는 [그림 IV-2]에서 볼 수 있듯이 공학도구 55%(11명), 교구 40%(8명), 차이 없음 5%(1명)로 공학도구를 선택한 예비교사의 비율이 더 높게 나타났다. 공학도구를 선택한 이유로는 Wax-paper의 유한적 사용에 의해 개념 확장을 위한 여러 가지 시도를 하기 어렵고, 수학적으로 정확한 작도를 할 수 있다는 점과 결과물에 대한 피드백이 빠르다는 점이 개념을 확장하기에 적절하다고 응답했다. 반면, 교구를 선택한 이유는 앞서 학습한 포물선 개념을 바탕으로 직접 손으로 원을 그리고 수직이등분선을 접어보면서 단계별로 개념 확장을 시도해 보는 것이 도움이 될 것이라고 응답했다.



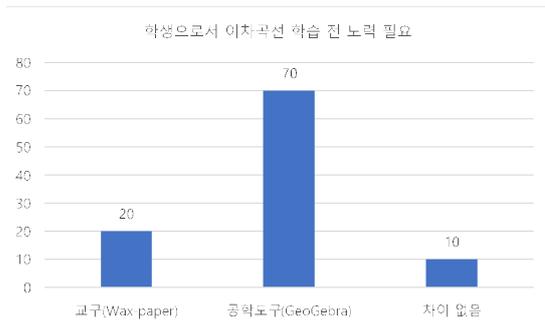
[그림 IV-1] 학생으로서 포물선 개념 학습 시 선호하는 방법



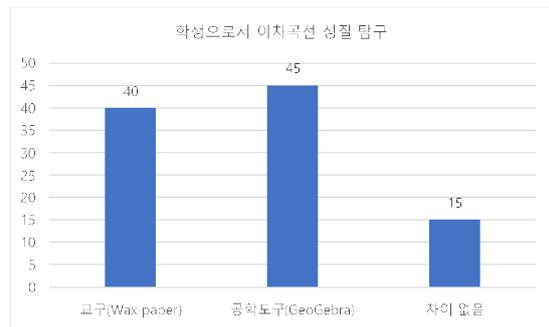
[그림 IV-2] 학생으로서 타원, 쌍곡선으로 개념 확장 시 선호하는 방법

셋째, 포물선, 타원, 쌍곡선의 개념을 익히기 전에 준비 등의 노력이 더 많이 필요한 방법에 대한 결과는 [그림 IV-3]에서 볼 수 있듯이 공학도구 70%(14명), 교구 20%(4명), 차이 없음 10%(2명)로 공학도구를 선택한 예비교사의 비율이 상당히 높게 나타났다. 공학도구를 선택한 이유로는 GeoGebra를 처음 접할 경우 사용하는 방법이 어렵게 느껴지거나, 원활한 학습을 위해서는 사용법의 숙지가 필요하기 때문이라고 응답했다. 반면, 교구를 선택한 이유는 Wax-paper를 접기 위해서 여러 개념이 혼합되어 적용되기 때문에 어렵고, 여러 준비물 등을 준비해야하기 때문이라고 응답했다. 두 방법에 차이가 없다고 응답한 예비교사들의 경우, 사전 경험이 없는 경우에 다양한 시도를 하는 것은 교구나 공학도구나 똑같이 어렵다고 응답하거나, 개념의 이해는 교구나 공학도구와 같은 도구의 사용 보다는 교과서의 원리나 정의를 숙지하는 것이 우선이라고 응답했다.

넷째, 포물선, 타원, 쌍곡선의 성질을 탐구하는 과정에서 선호하는 방법에 대한 결과는 [그림 IV-4]에서 볼 수 있듯이 공학도구 45%(9명), 교구 40%(8명), 차이 없음 15%(3명)로 공학도구를 선택한 예비교사의 비율이 미세하게 높게 나타났다. 공학도구를 선택한 이유로는 이차곡선의 성질을 탐구하는 과정에서 여러 가지 변수에 변화를 주거나 수식을 만드는 것이 편리하고, 이에 따른 여러 가지 이차곡선을 시각적이고 직관적으로 파악하는데 유용하기 때문이라고 응답했다. 교구를 선택한 이유로는 학생들의 흥미를 유발하기 좋기 때문이며, 공학도구를 이용하기 위해서는 이차곡선의 성질을 이미 알고 있어야 단계별로 진행이 가능할 것이라고 응답했다. 또한, 개념이 부족한 학생들의 경우 왜 이렇게 구현되는지 이해하지 못한 상태에서 공학도구의 기능을 사용할 것 같다고 응답했다. 두 방법에 차이가 없다고 응답한 예비교사들도 적지 않았는데, 두 방법 다 좋다는 의견과 두 방법 모두 학생들의 성질 탐구에 혼동을 줄 것 같다는 의견이 있었다.



[그림 IV-3] 학생으로서 이차곡선 학습 전 노력이 필요한 방법

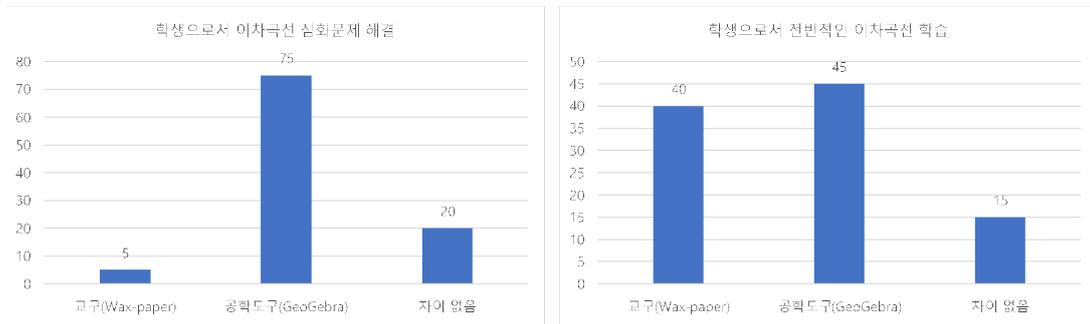


[그림 IV-4] 학생으로서 이차곡선 성질 탐구 시 선호하는 방법

다섯째, 포물선, 타원, 쌍곡선에 관련된 심화문제를 도전하거나 해결하는 경우에 선호하는 방법에 대한 결과는 [그림 IV-5]에서 볼 수 있듯이 공학도구 75%(15명), 차이 없음 20%(4명), 교구 5%(1명)로 공학도구를 선택한 예비교사의 비율이 매우 높게 나타났다. 공학도구를 선택한 이유로는 대부분의 예비교사들이 공학도구로 수식을 만들거나 정확한 그림을 그릴 수 있기 때문이라고 응답했다. 이로 인해 해결방안을 떠올리거나 시각적으로 도움이 된다고 응답했다. 또한 어려운 문제를 해결하는 데에는 교구의 한정적 사용으로 한계가 있기 때문에 여러 시도를 할 수 있는 공학도구가 적절하다고 응답했다. 이 문항에서는 두 방법에 차이가 없다고 응답한 예비교사가 두 번째로 많았는데, 어려운 문제의 경우는 도구 자체의 도움이 필요하지 않거나, 교구나 공학도구 모두 활용하기 위해 복잡한 단계를 거쳐야하므로 비효율적이라는 의견, 그리고 두 방법에 차이가 없다는 의견이 있었다. 교구를 선호하는

이유로는 기하의 경우 심화문제는 주로 도형의 성질을 이용하기 때문에 정확한 수치나 계산에 편리한 공학도구 보다 교구를 선호한다고 응답했다.

여섯째, 전반적으로 이차곡선을 배우는데 선호하는 방법에 대한 결과는 [그림 IV-6]에서 볼 수 있듯이 공학도구 45%(9명), 교구 40%(8명), 차이 없음 15%(3명)로 공학도구를 선택한 예비교사의 비율이 미세하게 높았다. 공학도구를 선택한 이유로 대부분 시각적인 효과로 인한 학생들의 흥미 유발이라고 응답했다. 또한 정확한 그림 작도, 성질 탐구, 빠른 피드백, 방정식 유도에 적절하다고 응답했다. 반면, 교구를 선택한 이유로는 교구는 손으로 직접 조작하여 의미가 있고, 개념학습과 단계별 이해에 도움이 되며, 공학도구는 심화학습에 적합하며 조작하기 어렵다는 응답이 있었다. 두 방법에 차이 없다고 응답한 예비교사도 적지 않았는데, 두 방법 다 좋다는 의견과 시각이나 촉각이나 흥미를 유발하는 측면에서는 차이가 없다고 응답했다.

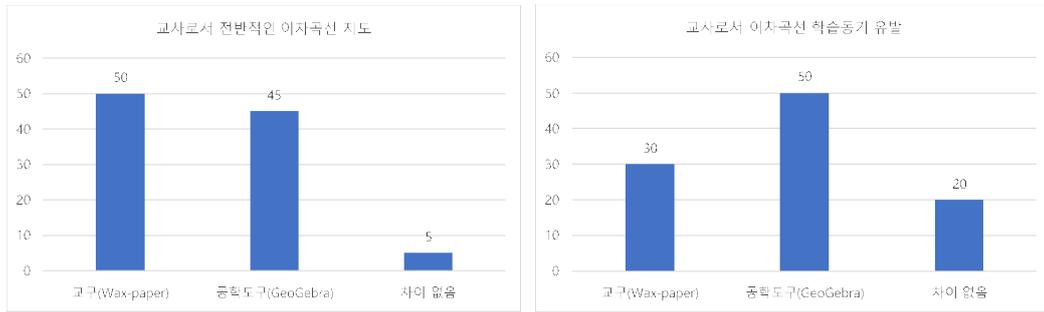


[그림 IV-5] 학생으로서 이차곡선 심화문제 해결 시 선호하는 방법 [그림 IV-6] 학생으로서 전반적인 이차곡선 학습 시 선호하는 방법

2) 교사의 입장에서 교구와 공학도구 활용에 대한 인식

첫째, 수학교사가 되어 이차곡선인 포물선, 타원, 쌍곡선을 전반적으로 지도하고자 할 때 선호하는 방법에 대한 결과는 [그림 IV-7]에서 볼 수 있듯이, 교구 50%(10명), 공학도구 45%(9명), 차이 없음 5%(1명)로 교구를 선택한 예비교사의 비율이 미세하게 높았다. 교구를 선택한 이유로는 학생들이 공학도구 사용법에 익숙하지 않을 것이기 때문이라는 응답이 많았다. 또한 손으로 조작이 가능하고 흥미롭기 때문이라고 응답했다. 반면, 공학도구를 선택한 경우는 흥미롭기 때문이라는 응답이 가장 많았으며, 공학도구가 소요 시간이 적게 걸리고, 이차곡선을 한 눈에 파악하기 쉬우며, 모순과 오차가 없기 때문이라는 응답이 있었다.

둘째, 포물선, 타원, 쌍곡선에 대한 학습동기를 유발시키기 위해 선호하는 방법에 대한 결과는 [그림 IV-8]에서 볼 수 있듯이, 공학도구 50%(10명), 교구 30%(6명), 차이 없음 20%(4명)로 공학도구를 선택한 예비교사의 비율이 더 높았다. 공학도구를 선택한 이유로는 피드백이 즉각적이고, 그래프의 변화를 시각적으로 확인할 수 있어 학생들을 집중시키고 흥미를 유발 한다고 응답했다. 교구를 선택한 이유로는 그래프의 시각적 변화보다 손으로 직접 조작하고 접어보면서 느끼는 흥미가 더 클 것이라는 의견과 공학도구는 사용법이 어렵지만 교구는 손으로 쉽게 할 수 있기 때문이라고 응답했다. 두 방법에 차이 없다고 응답한 예비교사도 많았는데 대부분 두 방법 다 좋다는 의견이었다.



[그림 IV-7] 교사로서 전반적인 이차곡선 지도 시 선호하는 방법 [그림 IV-8] 교사로서 이차곡선에 대한 학습동기 유발 시 선호하는 방법

셋째, 수작업 활동 또는 교구 활용과 공학도구 활용을 통해 느낀 두 지도방법에 대한 차이점에 대한 서술형 문항에 대한 응답을 간단히 정리하면 다음 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 교구와 공학도구 활용에서 예비 수학교사들이 느낀 차이점

이차곡선 지도 방법	Wax-paper 활동	GeoGebra 활동
장점	<ul style="list-style-type: none"> 정확한 수치 또는 계산에 치중하지 않아도 이차곡선이 구성되는 방법의 발견이 가능함 본질적인 수학적 개념에 접근 가능 직접 체험함으로써 정의, 원리, 성질의 직관적 이해 가능 직접 손으로 조작함으로써 이해한 개념이 기억에 오래 남음 손으로 만드는 간단한 작업이지만 원하는 결과를 얻고, 성취감을 느낌 	<ul style="list-style-type: none"> 이차곡선과 관련된 정확한 수치 또는 계산이 가능하고 수식을 만들거나 방정식 유도에 유용함 여러 변수를 대입해보고 시도해 봄으로써 다양한 이차곡선을 작도할 수 있음 흥미 유발에 적절함 이차곡선의 개형 등 시각적으로 더 잘 보임 정확하고 신속하며 효율적인 학습이 가능함 창의력 증진에 도움이 됨
단점	<ul style="list-style-type: none"> 한정된 수량의 Wax-paper로 수정 및 개선이 어려워 다양한 시도를 할 수 없음 개념에 대한 깊은 이해가 어려움 이차곡선의 자취를 접어서 만들 때 한계가 있음 	<ul style="list-style-type: none"> 기억에 오래 남지 않을 것 같음 수학적 생각을 공학도구로 구현하기 어려움 사용법이 간단하지 않고 미리 숙지해야 함

넷째, 미래의 수학교사로서 나라면 이차곡선 수업을 이렇게 지도하고 싶다하는 아이디어에 대한 서술형 문항에서는 응답이 많지 않았지만 제시된 내용을 살펴보면, 내용의 지도 순서에 대한 의견과 구체적인 교구나 공학도구 활용의 순서에 대한 의견, 추가 지도 내용의 제시와 3D 구체 교구 등의 추가

도구의 필요성 제시 등이 있었다. 그 중 이차곡선의 탐구 과정에서 포물선, 타원, 쌍곡선 구분하여 탐구하지 않고, 같은 초점을 주고 초점으로 부터의 길이 또는 원의 반지름을 자유롭게 하여, 같은 초점에 대한 여러 가지 이차함수 또는 타원, 쌍곡선이 나오도록 하겠다는 의견이 있었다.

마지막으로 본 연구 수업을 실행하는 동안 재미있었거나, 편리했던 점 또는 불편했던 점은 무엇인지 묻는 문항에 대해서는 대부분 수업이 흥미롭고 재미있었으나 교구의 경우 일회성이 아쉬웠고, 공학도구의 경우는 사용에 대한 어려움을 토로했다.

V. 결론

이제 수학교육에서 교구 활용 뿐만 아니라 공학도구 활용 또한 효과적인 수학학습을 위한 필수적 요소라고 할 수 있다. 그러나 최근 손글씨, 그림, 그리고 키보드 타이핑이 학습과 어떤 관련이 있는지 비교한 Ose Askvik, van der Weel, & van der Meer(2020)의 연구에서는 손으로 글을 쓰거나 그림을 그리는 경우, 기억과 새로운 정보를 코드화하는데 중요한 역할을 하는 뇌 영역에서 이벤트 관련 동기화 활동이 일어남으로써 학습을 위한 최적의 조건을 제공한다는 것을 발견했지만, 키보드 타이핑을 하는 경우는 이벤트 관련 비동기화 활동 또는 손글씨, 그림 때와는 다른 활동을 발견함으로써 학습과의 관계가 분명하지 않다고 보고했다. 그들은 이러한 연구 결과가 수업에서 디지털 기기를 금하고 전통적인 필기 활동으로 돌아가야 한다고 주장하려는 것이 아니라, 학습을 촉진하고 최적화하기 위해서는 학습 환경에서 손으로 조작하는 활동을 모두 유지하는 것이 필수적임을 제시하는 것이라 주장했다. 기본적인 손글씨 활동조차 키보드 타이핑으로 대체되듯 일상생활 자체가 디지털화 되어가는 시대에 과연 수학교육에서 손으로 조작하는 교구 활용 보다 공학도구 활용이 더 효과적일 것인가 고민해 보지 않을 수 없다. 따라서 본 연구는 이차곡선을 지도하기 위한 방안으로 손으로 만드는 교구인 Wax-paper 활동과 공학도구인 GeoGebra 활동을 모두 경험한 예비 수학교사들의 두 방법에 대한 인식을 조사하였다.

연구 결과에 따르면, 첫째, 예비 수학교사들은 이차곡선 학습 및 지도에서 전반적으로 공학도구의 활용을 선호하는 것으로 나타났다. 이차곡선 개념을 익히기 전에 준비 등의 노력이 더 많이 필요한 방법에 대해 묻는 문항을 제외한, 학습 및 지도에 관한 총 7개 문항 중 5개 문항에서 공학도구를 더 선호했다. 학생 입장에서 포물선에서 타원이나 쌍곡선으로 개념을 확장할 때, 이차곡선 성질을 탐구할 때, 심화문제를 해결할 때, 전반적인 이차곡선을 배울 때, 그리고 교사 입장에서 이차곡선에 대한 학습동기를 유발할 때 공학도구를 선호했다. 이와 같은 결과는 예비 수학교사들이 웹 기반 가상 교구보다 물리적 교구를 선호한다고 보고한 Hunt et al.(2011)과 Kilgo & White(2014)의 연구 결과와 반대로 나타났다. 이 선행연구들의 경우, 초등 또는 중학교 수준의 수학 내용을 다룬 만큼 간단한 조작을 바탕으로 한 물리적 교구와 이 기능을 반영한 가상 교구를 사용하였기 때문에, 컴퓨터 화면 상의 조작 활동이 실제 구체물을 손으로 만지고 조작하는 것보다 개념으로 연결되기 어려운 부분이 있어 보인다. 본 연구에서 진행한 Wax-paper 교구와 GeoGebra 활동은 같은 개념을 구현하지만 접기와 작도 등은 서로 다른 조작이며, 이차곡선 개념 이해와 증명을 동반하는 고차원적 사고가 필요한 내용 이었기에 공학도구를 더 선호하는 결과가 나온 것이라 생각된다. 따라서 수학 내용의 수준에 따라 교구와 공학도구의 활용 선호도에 차이가 있는지, 있다면 어떤 요인 때문인지 구체적으로 살펴볼 필요가 있음을 시사한다.

또한 본 연구에서 예비교사들이 이차곡선 학습에서 공학도구를 선호한 이유로 수학적으로 정확한 작도 및 수식을 만들 수 있고, 여러 변수에 변화를 주어 성질 탐구가 가능하며, 이로 인한 결과물 등의 피드백이 빠르다는 점, 그리고 시각적인 효과로 직관적 이해 및 심화문제 해결을 돕고 학생들의

흥미를 유발한다는 점을 들었다. 이는 김동중, 김대상, 최상호(2018)의 연구 결과에서도 비슷하게 나타났는데, 예비교사들은 공학도구의 활용이 시각화를 통해 직관적 사고를 가능하게 하고, 다양한 수학적 성질을 탐구하게 함으로써 개념 이해와 흥미 및 동기 유발에 도움을 준다고 생각하였다.

둘째, 예비 수학교사들은 이차곡선의 학습 측면에서 공학도구 활용의 유용성을 인식하고 학생 입장에서 교구 보다 공학도구를 선호하였으나, 공학도구 사용 능력에 대한 우려를 지속적으로 나타냈다. 이러한 결과는 여러 서술형 응답에서 공통적으로 나타나는데, 특히 교사 입장에서 이차곡선을 전반적으로 지도할 때 공학도구 보다 교구를 선호하는 이유를 여기서 찾아 볼 수 있다. 또한 이차곡선의 개념을 익히기 전에 학생으로서 준비 또는 노력이 더 많이 필요한 방법으로 공학도구를 선택한 예비교사의 비율이 매우 높았는데, 비록 학생 입장에서 공학도구의 사용이 이차곡선 학습에 도움이 되어 더 선호하였지만, 교사 입장에서는 학생들의 공학도구 사용의 미숙함이 이차곡선 지도에 있어서 큰 방해가 될 것이라 인식한 것이다. 학생들의 공학도구 사용에 대한 부담은 고상숙 외(2013)의 연구에서도 찾아 볼 수 있다. 공학도구를 사용할 때 수학적 개념의 효과적인 학습을 위해서는 무엇보다도 능숙한 공학도구 사용 능력이 요구되는데, 이는 학생들에게 또 다른 학습 부담으로 작용하며, 사용법을 충분히 숙지하지 않은 상태에서는 공학도구를 사용해 이루려는 목적을 달성하는데 오히려 방해 요인으로 작용할 수 있다고 하였다. 따라서 학교수업이라는 제한된 시간과 공간에서 어떻게 학생들이 공학도구를 능숙하게 사용할 수 있도록 할 것인지 고민해볼 필요가 있음을 시사하고 있다.

셋째, 예비 수학교사들이 인식한 수작업 교구와 공학도구 활용의 장단점은 상호보완적이다. 먼저 예비 수학교사들은 수작업 교구인 Wax-paper의 단점으로 한정된 재료로 여러 가지 다양한 시도를 할 수 없으며 수정 및 개선이 어려운 점을 꼽았는데, 공학도구의 장점인 여러 변수 대입을 통한 다양한 시도와 이차곡선 작도 가능성이 이를 보완해 준다. 반면, 흥미롭지만 기억에 오래 남을 것 같지 않은 공학도구 활용은, 손으로 직접 조작해 이해한 개념이 오래 기억에 남을 것 같다는 교구 활용에서 보완해 준다. 또한 공학도구의 경우 사용법이 간단하지 않고 능숙한 사용 능력이 요구되는데 반해, 교구 활용은 간단한 집기를 통해 원하는 결과와 성취감을 느낄 수 있다.

예비 수학교사들에게 수학수업에서 손으로 조작하는 교구와 공학도구 모두를 활용해보는 경험과 두 방법에 대한 자신만의 생각 및 태도 등을 인식하는 기회를 주는 것은 매우 중요하다. 특히 한 주제에 대한 다양한 교수·학습 방법을 제시하는 것은 미래에 수학교사로서 그들이 제공할 수 있는 교육환경을 구성하는데 풍부한 자원이 되며, 교사 전문성 및 역량강화에 기여하기 때문이다. 본 연구에서도 소수이지만 교구와 공학도구 활용 경험을 바탕으로 자신이 수학교사가 된다면 어떻게 이차곡선을 가르칠 것인지 지도 방안을 제시한 예비교사들이 있었다. 따라서 예비 수학교사들의 교구와 공학도구 활용에 대한 인식을 조사한 본 연구를 통해 다음과 같은 몇 가지 시사점을 얻을 수 있었다.

첫째, 수학수업에서 손으로 조작하는 교구와 공학도구를 상호보완적으로 활용해야 한다. 본 연구 결과에서는 예비 수학교사들이 전반적으로 공학도구의 활용을 좀 더 선호했지만, 응답수에서 한 명(5%) 차이인 경우도 적지 않았기 때문에 교구와 공학도구 활용의 선호도에서 극명한 차이가 난다고 볼 수는 없다. 그만큼 공학도구 활용이 강조되고 있는 상황에서도 여전히 수작업 교구 활용을 선호하는 예비교사가 많음을 알 수 있다. 따라서 수학수업에서 한 주제를 다룰 때 교구나 공학도구 어느 한 가지만을 사용해야 한다는 생각보다는 각 교구와 공학도구가 가진 특성을 이용하여 서로 상호보완적으로 활용할 것을 제안한다. Hunt et al.(2011) 또한 예비 수학교사를 지도하는 데 물리적 교구와 가상 교구 모두를 통합하고 경험하게 하는 것은 예비교사들의 개념적 이해를 구축하는 데 도움이 될 뿐만 아니라 그들의 미래의 학생들과 함께 사용할 수 있는 건전한 교육적 전략을 제공하는 것이라고 주장했다.

둘째, 학생 또는 교사의 공학도구 사용 능력에 영향을 받지 않는 수업 자료의 개발 및 보급이 필요하다. 본 연구에서 예비 수학교사들이 공학도구의 단점으로 가장 많이 언급한 사용의 어려움은 그 해결에 시간이 필요하다. 하지만 예전보다 학교에서 공학도구의 활용이 보편화되면서 학생들도 교사들

도 공학도구를 다뤄본 경험이 적지 않기 때문에 능숙한 사용 능력까지는 아니어도 간단한 사용법은 짧은 시간 내에 습득할 수 있다. 또한 교사들에게 연수 등을 통해 공학도구 사용법 교육을 한다 해도 교사 개인이 공학도구를 사용해 디지털 콘텐츠를 구성하여 활용하기에는 많은 시간과 노력이 소요된다. 따라서 교사와 학생들이 간단한 사용법을 익히는 것만으로도 바로 수학 수업에서 이용할 수 있는 GeoGebra 파일, 웹 자료, 모바일 앱 등의 다양한 디지털 콘텐츠를 개발하여 보급하는 것이 필요해 보인다.

지금까지 예비 수학교사들의 이차곡선 지도 방안으로써 교구와 공학도구 활용에 대한 인식을 살펴 보았다. 이에 더 나아가 두 지도 방법에 대한 인식뿐만 아니라 미래 수학교사로서 수업 계획 및 실행 능력을 신장시키기 위해서 수업 지도안 작성을 통해 실제 수업에 교구와 공학도구를 어떻게 활용할 것인지, 두 지도 방법에 어떠한 영향을 받아 지도안에 반영하였는지 등에 대한 후속 연구가 필요하다.

참고 문헌

- 강문봉, 강홍규, 김수미, 박교식, 박문환, 서동엽, 송상현, 유현주, 이종영, 임재훈, 정동권, 정은실, 정영욱. (2008). **초등수학교육의 이해**. 서울: 경문사.
- 고상숙, 박만구, 한혜숙. (2013). 교구 및 공학도구를 활용한 수학적 과정중심 평가에 관한 교사들의 인식. **한국학교수학회논문집**, 16(4), 675-694.
- 고상숙, 박만구, 한혜숙, 홍예윤, 유기중, 이순용, 주홍연, 이창연, 채은숙, 이강숙. (2013). **교구 및 공학도구를 활용한 평가 기반 조성**. 한국과학창의재단 2013-6.
- 교육부. (2015). **2015 개정 수학과 교육과정**. 제2015-71호 [별책8].
- 김근배, 최옥환, 박달원. (2018). 유추와 분석적 방법을 활용한 타원 초점 작도. **한국학교수학회논문집**, 21(4), 401-418.
- 김남희. (2000). 교구: 탭그림 활용을 통한 수학적 사고의 구체화. **학교수학**, 2(2), 563-587.
- 김남희. (2001). 교구: 기하판을 활용한 학교수학의 지도. **학교수학**, 3(1), 155-184.
- 김남희, 박경미. (2008). **수학교육에서의 컴퓨터 활용**. 서울: 경문사.
- 김동중, 김대상, 최상호. (2018). 공학 도구 친화적 거꾸로 수업에서 예비교사의 인식 분석. **수학교육 논문집**, 32(4), 455-475.
- 김무진, 이종학, 김원경. (2014). GeoGebra를 활용한 교수·학습이 과학고등학교 수학영재들의 인지적 측면에 미치는 영향. **한국학교수학회논문집**, 17(3), 359-384.
- 김미화, 김성준. (2009). 'Maths With Attitude' 조작교구의 활용방안 탐색. **한국학교수학회논문집**, 12(4), 523-544.
- 김수미. (2000). 수학교육에서의 조작교구에 관한 연구. **학교수학**, 2(2), 459-474.
- 공민숙, 강운수. (2014). GeoGebra를 활용한 극한 지도가 고등학생들의 수학 학습에 미치는 영향. **한국학교수학회논문집**, 17(4), 697-716.
- 박래성, 권종겸, 이동엽. (2019). 중학교 수학 기하 단원에서 공학적 도구 활용이 학생들의 수학 학업 성취도와 수학 학습 태도에 미치는 효과. **디지털융복합연구**, 17(12), 67-75.
- 변윤성, 김선희. (2020). 고등학교 수학 교사의 공학 도구 활용 자기연구를 통한 TPACK 변화 분석. **학교수학**, 22(2), 373-394.
- 신종석, 표용수. (2011). 수학교구를 활용한 수업의 흥미도 및 문제해결력 신장에 관한 연구. **East Asian Mathematical Journal**, 27(2), 117-139.

- 안병곤. (2018). 초등학교 수학과 성취기준에 따른 수업용 교구의 효과적인 활용 방안. **C-초등수학교육**, 21(1), 39-53.
- 양성현, 강욱기. (2011). GeoGebra를 활용한 역동적인 시각적 표상에 기반한 이차곡선 지도방안. **학교수학**, 13(3), 447-468.
- 이경화, 정혜윤, 강완, 안병곤, 백도현. (2017). 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리의 제안 및 적용. **수학교육 논문집**, 31(2), 203-221.
- 장훈. (2008). 체험수학-교구를 이용한 삼각형의 내심과 외심지도. **제40회 한국수학교육학회 학술논문발표집**, 2008, 37-45.
- 정동권. (2001). 수학교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석. **학교수학**, 3(2), 447-473.
- 최경식. (2012). **따라하면서 배우는 GeoGebra**, 단국대학교 수학 1정교사 연수교재. 단국대학교 교원연수원.
- 최창우, 손숙현. (2002). 수학 교구를 활용한 클럽 활동이 학생들의 수학적 성향 및 도형 학습능력에 미치는 영향. **수학교육 논문집**, 14, 163-176.
- 황우형, 김명선. (2001). 학습부진아의 수학지도시 구체적 조작물의 효율성에 관한 연구: Unit Cubes를 활용한 중학교 1학년 기수법 지도. **학교수학**, 3(2), 215-231.
- Ertmer, P. A. (2005). Teacher pedagogical beliefs: The final frontier in our quest for technology integration? *Educational technology research and development*, 53(4), 25-39. <https://doi.org/10.1007/BF02504683>
- Hunt, A. W., Nipper, K. L., & Nash, L. E. (2011). Virtual vs. concrete manipulatives in mathematics teacher education: Is one type more effective than the other?. *Current Issues in Middle Level Education*, 16(2), 1-6.
- Jung, I., & Kim, Y. (2004). Using geometry software to revisit the ellipse. *The Mathematics Teacher*, 97(3), 184-191.
- Kelly, C. A. (2006). Using manipulatives in mathematical problem solving: A performance-based analysis. *The Mathematics Enthusiast*, 3(2), 184-193.
- Kennedy, L. M. (1986). A rationale. *The Arithmetic Teacher*, 33(6), 6-32.
- Kilgo, R. W., & White, A. A. (2014). Virtual versus physical: Manipulatives in the mathematics classroom. *In 26th International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 26, 213-220.
- Kim, S. (2017). A multiple-case study of preservice secondary mathematics teachers' teaching demonstrations with Geometer's Sketchpad. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 20(3), 303-323.
- Kim, S. (2018). Technological, pedagogical, and content knowledge (TPACK) and beliefs of preservice secondary mathematics teachers: Examining the relationships. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(10), em1590.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.
- Ose Askvik, E., van der Weel, F. R., & van der Meer, A. L. H. (2020). The Importance of Cursive Handwriting Over Typewriting for Learning in the Classroom: A High-Density EEG Study of

- 12-Year-Old Children and Young Adults. *Frontiers in Psychology*, 11, 1810.
- Saidu, S., & Bunyamin, S. (2016). Effects of Geoboard and Geographical Globe on Senior Secondary School Students' Performance in Mathematics in Kaduna State. *Journal of Science, Technology & Education*, 4(1), 140-148.
- Shin, D., Smith, R. C., & Kim, S. (2018). Evaluating technology for teaching mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 24(3), 156-163.
- Stacy, E. M., & Cain, J. (2015). Note-taking and handouts in the digital age. *American Journal of Pharmaceutical Education*, 79(7), 107.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning*, 9(3), 281-307.
- Van de Walle, J. A. (1998). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Reading, MA: Addison Wesley Longman, Inc.
- Young, S. L. (1983). How teacher educators can use manipulative materials with preservice teachers. *The Arithmetic Teacher*, 31(4), 12-13.

Prospective Mathematics Teachers' Perceptions of the Use of Hands-On Manipulatives and Technological Tools in Teaching Quadratic Curves

Kim, Somin¹⁾

Abstract

In this study, I investigated prospective mathematics teachers' perceptions of activities using Wax-paper, a hands-on material (manipulatives), and GeoGebra, a technological tool, in teaching quadratic curves. Twenty prospective mathematics teachers in the Mathematics Education Department of a local university participated in a survey on their perception of the use of hands-on materials and technological tools in teaching quadratic curves. According to the results of this study, prospective mathematics teachers generally preferred the use of technological tools for learning and teaching quadratic curves. Additionally, mathematics teachers thought that the tool helped students develop intuitive thinking through visualizing quadratic curves, enabling the exploration of various mathematical properties, assisting the comprehension of various concepts, and increasing students' interest levels. However, they were concerned about the immature use of technological tools by students or teachers, and recognized that the advantages and disadvantages of using hands-on material and technological tools were complementary. Based on these findings, it is suggested that hands-on material and technological tools should be used complementally in mathematics classes, and the development and dissemination of class materials that are not affected by students' or teachers' ability to use technological tools is important.

Key Words : Quadratic curves, Technological tool, GeoGebra, Hands-on manipulatives, Prospective mathematics teachers, Teacher education

Received March 03, 2021

Revised March 21, 2021

Accepted March 22, 2021

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97D40, 97U60, 97U70

1) Inha University (thals8410@gmail.com)