

인수분해에 대한 오류 분석과 온라인 개별화 수업의 효과¹⁾²⁾

최동원³⁾ · 허혜자⁴⁾

온라인 수업에서 다양한 상호작용 도구의 적극적 활용은 비대면 수업의 한계를 극복하고 교사와 학생 간의 활발한 상호작용을 돕는다. 본 연구는 인수분해에 대한 오개념과 오류를 분석하고, 분석 결과를 이용한 적절한 피드백을 제공하는 온라인 개별화 수업이 성취도에 미치는 효과를 파악하는 데 목적이 있다. 이를 위해 사교육의 영향이 적은 경기도 농촌 지역의 중학교 3학년 학생들을 대상으로 4주 동안(총 16차시) 실험을 실시하였다. 수업은 ‘구글클래스룸’을 LMS로 활용하고, 동영상 강의는 유튜브에 업로드하였으며, 화상회의 소프트웨어인 ‘줌(Zoom)’과 ‘페이스톡’을 통해 학생들과 상호작용을 하였다. 온라인 수업상황에서 ‘구글클래스룸’을 통해 학생의 과제와 질문을 실시간으로 확인할 수 있으며, 실험군에는 학생들의 질의 여부와 상관없이 과제와 시험에 대해 즉각적인 피드백이 이루어졌고, 대조군에도 피드백이 이루어졌으나 자발적으로 피드백을 원하는 학생에게만 이루어졌다는 점에서 차이가 있다. 학생의 실력 향상과 성취도의 변화 추이를 확인을 위해 사전검사, 형성평가 5회, 사후검사의 순서로 총 7번의 성취도 평가를 실시하였다. 5회의 인수분해 형성평가 분석을 통해 인수분해를 학습하는 과정에서 발생하는 오류 및 오개념의 유형을 파악할 수 있었는데, 학생들이 ‘다항식으로 된 인수를 하나의 인수로 인식하지 못함’과 ‘숫자는 인수가 아니다.’라는 오개념을 가지고 있는 것을 확인하였다. 학생들의 오류유형을 정리 또는 정의의 왜곡 오류, 기능상의 오류, 풀이를 검증하지 않는 오류, 무응답의 4가지 유형으로 나누고, 이를 개별화 지도에 이용하였다. 공분산분석 결과 두 집단은 1회부터 4회까지의 형성평가까지는 차이를 나타내지 않았으나, 5회차 형성평가와 사후검사에서는 통계적으로 유의미한 차이를 나타내어 온라인 개별화 수업이 성취도 향상에 기여한다는 것을 확인하였다.

주요용어 : 인수분해, 오개념, 오류, 개별화 수업, 온라인 수업, 공분산분석

I. 서론

코로나19의 확산은 교육의 방법의 변혁을 요구하고 이끌고 있다. 코로나19가 확산됨에 따라 우리나라는 코로나19의 예방 및 확산 방지를 위해 3월 모든 학교의 등교 수업을 일단 중지하고 수업 결손 해결을 위한 대면 접촉이 없는 2020년 4월 9일 중·고등학교 3학년 온라인 개학으로 원격수업을 시행하였으며, 6월부터 부분적으로 등교를 재개하고 상황에 따라 온라인 수업으로 전환하기를 반복하고

* MSC2010분류 : 97C70, 97D70

- 1) 이 논문은 2020년도 가톨릭관동대학교 연구기반 조성비 지원에 의하여 연구되었음.
- 2) 이 논문은 제1저자의 2020년 석사학위 논문 일부를 재구성한 것임.
- 3) 남문중학교 교사 (wonghkh@korea.kr), 제1저자
- 4) 가톨릭관동대학교 교수 (hjheo@cku.ac.kr), 교신저자

하고 있다(남궁지영, 2020). 코로나 이전에 일선 학교 수업은 대부분 면대면으로 이루어졌고, 온라인 수업은 수업방법의 혁신을 피하고자 노력하는 교사들의 주도하에 예습 동영상을 수업 전에 미리 제공하는 거꾸로 수업(flipped learning)에서 작은 부분을 담당하는 정도였으나, 코로나19를 계기로 수업 전체를 온라인 수업으로 운영하게 되었다. 온라인 수업의 방법과 온라인 수업을 위한 도구에서도 다양화가 이루어진 듯하다. 수업 전에 10분 내외의 짧은 예습 동영상을 올리는 거꾸로 수업에서는 간단하게 동영상을 만들 수 있는 Explain everything, 반디캠, 곰캠, 파워포인트 녹화, 핸드폰, 카메라 등과 같은 도구를 이용하여 교사나 교수가 일방적으로 동영상을 올리고 학생들은 학습하는 형태의 온라인 수업이었다면, 비대면의 상황에서의 온라인 수업은 단순히 동영상을 만들어서 올리기만 하던 것을 넘어서서 소통이 가능한 도구의 필요성이 절실해졌다.

테크놀로지의 발달과 지식과 정보의 급속한 증가는 교육환경뿐만 아니라 교육과정, 교육내용, 교수 학습 방법의 변화를 가져왔다(최정임, 신남수, 2009, p. 30). 코로나 초기의 학습자에게 동영상에 의한 지식의 일방적 전달에서 교수자와 학습자 간의 쌍방향 의사소통이 가능하게 한 것도 이러한 기술의 발전 때문이다. 온라인 수업은 강의실에서 보여주기 힘든 질 높은 자료 제공이 용이하고, 자기주도적 학습자의 경우 학습속도를 조절할 수 있으며, 반복학습이 가능하다는 점 등의 장점이 있다. 그런데, 이러한 장점을 거꾸로 보면, 자기주도성이 떨어지는 학습자의 경우 기존의 대면수업보다 훨씬 학력이 떨어지는 학력격차의 문제가 제기된다. 한국교육학술정보원은 2020년 코로나19로 인한 온라인 교육에 대한 실태조사를 초·중·고 교사 51,021명을 대상으로 실시하였으며, 응답자의 80%가 ‘학생간 학습격차가 커졌다’고 답했고, 학력격차의 원인은 ‘학생의 자기주도적 학습능력 차이’가 64.9%로 가장 크게 나타났으며, ‘학부모의 학습 보조 여부’가 뒤를 이었고, ‘학생과 교사간 소통과 피드백 한계’의 순으로 집계되었다(한재갑, 2020; 이용상 신동광, 2020, p.43). 이처럼 원격수업의 갑작스런 적용과정에서 원격수업을 위한 인프라의 한계, 원격수업을 위한 제도적 기반과 학생 및 교사의 디지털 리터러시 역량문제, 교육 취약 계층 및 온라인 학습 약자에 대한 지원 미흡, 교육격차에 대한 우려 등(남궁지영, 2020, p.36) 시행착오를 겪고 풀어야 할 과제가 있기는 하지만, 코로나 사태는 미래교육 시스템의 도입을 자연스럽게 앞당겨 원격수업의 기반을 마련하는 계기가 되었다.

인수분해는 중학교 3학년과 고등학교 1학년에서 다루는데, 중학교 3학년의 인수분해는 다음 단원인 ‘이차방정식’ 풀이 방법의 기초가 되며, 고등학교 수학의 선수학습으로서도 중요한 부분을 차지한다. 인수분해와 같은 대수식 계산의 유창성과 관련해서, 학생들이 유창하게 계산하는 능력뿐만 아니라 효율적이고 정확하게 계산하는 방법도 알아야 한다면, 개념에 대한 이해와 과정적 유창성이 모두 필요하다고 Aschlock은 주장한다(Aschlock, 2013, p. 4). 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱의 꼴로 표현하는 것을 인수분해라고 정의하는데(김화경, 이미라, 권영기, 나귀수, 이애경, 2020, p. 68), 인수분해는 중학교 3학년 수학의 5가지 영역 중 ‘문자와 식’에 해당된다. 문자와 식 영역은 중단원으로 다항식의 곱셈과 다항식의 인수분해로 구성된다. 2009 교육과정에서는 다항식의 곱셈과 인수분해를 각각 중학교 2학년과 중학교 3학년에 나누어 배우던 것을 2015 개정 교육과정에서는 중학교 3학년에서 연속해서 배우도록 변경되었다. 이는 2015 개정 교육과정에서 학습량을 줄이려는 의도도 있지만, 다항식의 곱셈과 인수분해의 의미를 잘 파악하도록 하기 위함으로, 교수학습 방법 및 유의사항 ‘다항식의 곱셈과 다항식의 인수분해의 역관계를 이해하고, 이와 유사한 관계를 찾아보는 활동을 하게 할 수 있다’(교육부, 2015, p. 31)에서 엿볼 수 있다.

실제 수업에서 인수분해는 교과서에 제시된 인수분해의 기본 유형을 익히면 기계적으로 유형별로 적용하여 문제를 해결할 것으로 보이지만, 학생들이 어려움을 많이 겪는 영역이다. 인수분해에 대한 개념을 빠르게 파악하지 못하거나, 관련된 선수학습이 부족한 경우, 다양한 인수분해의 형태 및 방법 간 매칭의 어려움 등으로 인해 여러 가지 오개념과 오류를 보인다. 인수분해 단원의 오개념과 오류를

분석하여 오류유형을 분류하면, 학생 수가 많은 상황에서도 개별 학생에게 의미 있는 피드백을 제공할 수 있을 것이다.

개별화 학습은 학습자를 능동적으로 지식을 구성해가는 학습의 주체로 인정하고, 학습자 간의 개인차를 최대한 고려하여, 학습자의 다양한 요구에 부응함으로써 개별학습자의 학습효과를 극대화하는 것을 목적으로 한다(최은식, 신혜경, 정진원, 2014, p. 29). 수업에서 개별화 학습을 적용한다는 의미는 교사의 지도하에 개별 학생이 자신의 진도에 맞추어 자기주도적으로 학습능력을 최대한 개발해 나가는 것이며(박성익, 2008, p.4), 개별화 수업은 모든 학생이 학습목표에 도달하도록 돕기 위해 교사가 수업의 초점을 개별학습자에 두는 것이다. 2020년 현재 학급당 학생 수 평균은 약 25명으로 과거 10년 전 약 34명에 비해서는 많이 줄어들긴 했지만, 교사가 45분 동안 25명의 학생들에게 개별화 수업을 하기에는 시간적으로 매우 어려운 것이 현실이다. 그러나, 온라인 실시간 수업은 온라인 플랫폼(구글 클래스룸)을 활용하면 학생들이 제출한 문제풀이나 과제가 구글 드라이브에 저장되어, 한눈에 학생들의 제출 여부를 파악하고, 실시간 댓글 기능으로 학생들의 과제에 첨삭지도를 하면, 학생들은 교사의 피드백에 대해 다시 응답하는 상호작용이 가능하며, 학생들의 질문에 즉각적으로 피드백을 제공할 수 있고, 댓글 기능만으로 지도가 부족한 경우에는 줌이나 페이스북 또는 카카오톡 등을 상황에 맞는 다양한 방법으로 추가해서 학생들과 상호작용 할 수 있다. 기존의 교실수업과 비교할 때, 온라인 수업은 개별화 수업에 더 적합한 환경이 될 수 있다. 온라인 실시간 수업에서의 개별화 지도를 통해 학생들의 인수분해에 대한 오류와 오개념을 해소하고, 수학 성취도의 향상으로 학생들이 수학에 대해 긍정적 태도를 가질 수 있도록 할 수 있을 것으로 생각된다.

이에, 중학교 3학년 인수분해에 대한 학생들의 오류 유형을 분석하고, 이러한 분석에 기반한 온라인 실시간 수업에서의 개별화 지도가 성취도에 미치는 영향을 알아보고자 하며, 연구문제는 다음과 같다.

1. 인수분해의 학습과정에서 발생하는 오류의 유형은 어떤 것들이 있는가?
2. 온라인 개별화 수업이 학생의 수학적 성취도에 긍정적인 영향을 미치는가?

II. 선행 연구 고찰

수학에 대한 오개념과 오류에 대한 선행 연구의 고찰을 통해 정의를 명확히 하고, 일반적인 수학에서의 오류 분석의 틀을 수정하여, 인수분해 교수학습 과정에서 학생들이 나타내는 오류 유형 분석의 기준을 만든다. 또한, 개별화 수업에 대한 이론을 탐색하여 개별화 수업의 필요성에 대해 살펴보고, 온라인 수업 상황에서 개별화 수업이 효과적으로 기능할 수 있는 방안을 모색한다.

1. 수학에 대한 오개념과 오류

수학 개념학습에서 나타나는 오개념과 이러한 오개념으로 인해 학습과정 속에서 나타나는 오류에 대해서 다양한 용어가 사용된다. Brousseau는 특정 맥락에서 성공적이고 유용한 지식이 새로운 문제 상황이나 더 넓은 맥락에서 부적합해진 지식을 ‘인식론적 장애’로 언급했으며(우정호, 2000, pp. 460-461), 인식론적 장애를 찾아내어 분석하고 학생들이 극복하도록 도움으로써 수학 교수학습을 개선할 수 있다고 강조한다(Brousseau, 1997, pp. 78-116; 우정호, 2000, pp.460-471). 이처럼 오개념과 오류 극복은 수학학습에서의 긍정적인 효과를 가져올 수 있다. Confrey와 Lipton(1985)은 ‘수학적 오개념’을

오류의 체계적인 패턴을 생산하는 학생들의 개념이라고 하였고, ‘수학적 오류’를 학생들이 수학에서 사용하는 개념 중 그 의미를 수학적 개념과 다르게 사용할 때 나타나는 바르지 못한 논리적인 과정이라 하였다(김부미, 2005, p.30). 전통적으로 오류(error)는 산발적이며 지속적이지 않으며 체계적이지 않은 것으로 단지 오개념으로 인해 발생하는 것으로 여겨지지만, 학자들의 연구에 따르면, 일관된 패턴을 나타내는 수학적 오류가 보고된다(Ashlock, 2006).

국내 연구를 살펴보면, 최지선(2003, pp. 3-4)은 학생이 학습을 통해 구성해낸 개념과 수학 개념이 서로 차이가 있을 수 있음을 언급하였고, 학생이 구성된 개념과 수학 개념의 불일치가 생길 때 이를 ‘오개념’이라 정의하고, 수학학습과정에서 나타나는 잘못된 계산, 추론, 정의를 포함하는 것으로, 학생의 대안적 개념이나 오개념에 의해서 체계적으로 나타나는 학습결과를 나타내는 것으로 ‘오류’를 정의하였다. 김부미(2005, pp. 37-38)는 많은 학자들의 수학적 오개념과 수학적 오류에 대한 정의의 분석을 통하여 수학적 오개념은 학습 이전에 학생 스스로 형성하여 학생의 인지 구조 속에 내면화되어 있는 지식 중 수학적 개념과 일치하지 않거나 제한된 영역에서만 성립하는 선행지식으로 정의하였고, 수학 학습을 할 때 학생의 오개념으로 인하여 체계적으로 나타나는 학습 과정과 결과를 수학적 오류로 정의하였다.

본 연구에서는 오개념은 수학적 개념을 학습하는 과정에서 제시된 개념의 조건 및 정의에 대한 이해가 부족하여 본래의 의미와 다르게 개념을 이해하는 것으로, 오류는 오개념으로 인하여 문제의 의도와 다르게 문제를 해결하거나 바르지 못한 문제 해결 과정 및 결과로 정의하고(최동원, 2020), 이러한 정의를 토대로 인수분해에서 나타나는 오류를 분석하기 위한 분류의 틀을 구성한다.

2015 개정 교육과정에서 개인차를 고려하여 수준별 수업을 운영할 때에는 교실 내에서 개인차를 고려한 소집단을 구성하거나 수준별 학습을 구성하여 교수·학습을 전개하고, 수준별 수업은 내용 요소를 차별화하기보다는 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 진행할 것을 권고한다(교육부, 2015, p.40). 여기에서 접근방법의 차이에 주목하면 수학에서의 오개념과 오류의 분석으로부터 유용한 정보를 이용하면 개별화 수업의 효과를 높일 수 있을 것이다.

수학적 오류에 대한 연구는 1900년대 초부터 주로 산술 영역에 한정되어 진행되었으며(Radatz, 1979), 1980년대 이후 Vinner(1983), Resnick 등(1989), Sfard(1991), Fishbein(1997), Ashlock(2002)과 같은 여러 학자들에 의해 수학의 여러 영역에서 활발히 진행되었다(김부미, 2006, p. 4). 독일의 Radatz는 오류를 정보처리 관점에서 5가지로 분류하였고(박수란, 2017, p. 23; 김부미, 2006, p. 98), 오류를 우연이 아닌 논리적 과정으로 본 이스라엘의 Hadar와 Zaslavsky(1987)는 학생들의 졸업시험 결과를 바탕으로 대수와 기하 영역에 대한 오류 유형을 여섯 가지로 분류하였는데, 이들의 분류는 특정 수학 내용에 한정하지 않고 수학의 내용과 관계없이 공통적으로 나타나는 오류를 분류한 것으로 보인다. Hadar와 Zaslavsky는 문제에 주어진 자료를 잘못 이용할 때 나타나는 오류를 ‘자료의 잘못된 이용’, 수학적 사실에 대한 언어적인 표현을 기호로 나타내는 과정에서 생기는 오류를 ‘언어 해석 오류’, 추론 과정에서 생기는 오류를 ‘논리적으로 부적절한 추론’, 문제 해결 과정에서 특수한 원리나 법칙, 정리, 정의를 잘못 이해하여 부적절하게 사용하여 생긴 오류를 ‘정리 또는 정의의 왜곡’, 문제 해결 과정의 각 단계는 올바르지만, 최종 검토를 하지 않아서 문제에서 요구하는 답을 틀리게 하는 오류를 ‘풀이를 검증하지 않는 오류’, 계산 실수, 연산 및 대수 기호 조작에서 발생하는 오류 또는 선수 학습의 숙달 미숙에서 발생하는 오류를 ‘기능상의 오류’로 분류하였다(Hadar & Zaslavsky, 1987, pp. 8-12; 최동원, 2020, pp. 7-8).

Hadar와 Zaslavsky의 오류 분류는 일반적인 수학 개념의 오류를 밝히는데 유용할 것으로 생각된다. 중학교 3학년 인수분해 단원은 인수분해 공식과 인수분해를 포함한 응용문제로 이루어져 있는데, 본 연구는 인수분해 과정에서 나타나는 오류와 오개념만을 대상으로 하며, 인수분해와 관련된 응용문

제(문제해결)를 대상으로 하지 않기 때문에, Hadar와 Zaslavsky 오류분석 유형 중에서 자료의 잘못된 이용 오류, 언어 해석 오류, 논리적으로 부적절한 추론의 세 가지와 관련된 오류는 나타나지 않을 것으로 예상된다. 대부분의 수학 개념이나 연산 지도에서 학생들이 오류나 오개념을 겪는 가장 많은 것이 관련된 선수학습 부족이다. 인수분해의 선수학습으로는 곱셈공식, 최대공약수, 인수 등이 있으며 이러한 선수학습에 대한 학습결손이 인수분해에 대한 오류로 나타날 수 있다. 인수분해 공식을 배우고 적용하는 과정에서 한 다항식을 여러 다항식의 곱으로 나타내는 것까지는 수행했지만 곱으로 나타낸 다항식 안에 공통인수가 남지 않게 모두 묶어내는 활동을 하지 않아 해답이 완성되지 않은 중간단계까지 하는 것도 학생들이 저지르기 쉬운 오류이다. 인수분해와 같은 계산 영역에서는 단순히 계산, 연산, 조작 등에서의 기능상 오류가 흔히 발생하며, 이것은 검산하는 습관을 통해 교정할 수 있을 것이다.

인수분해는 인수분해의 유형을 외우고 주어진 문제에 적합한 유형을 선택하는 과정이 요구되기 때문에 학생들에게는 다소 복잡하게 느껴지고, 문제가 주어졌을 때 시도조차 하지 못하고 백지로 제출하는 경우를 볼 수 있다. 이에, Hadar와 Zaslavsky(1987)가 제시한 오류분석 유형에서 세 가지를 빼고, 무응답을 추가하고 수정하여, 오류 유형을 네 가지로 재구성하였다. 본 연구에서는 재구성한 오류분석 기준에 따라, 학생들이 인수분해의 계산 과정에서 나타내는 오류를 분석하고, 유형별로 분류한다.

<표 II-1> 오류분석 유형

Hadar와 Zaslavsky 오류분석 유형	재구성한 오류분석 유형
첫째, 자료의 잘못된 이용	첫째, 정리 또는 정의의 왜곡
둘째, 언어 해석 오류	둘째, 풀이를 검증하지 않는 오류
셋째, 논리적으로 부적절한 추론	셋째, 기능상의 오류
넷째, 정리 또는 정의의 왜곡	넷째, 무응답
다섯째, 풀이를 검증하지 않는 오류	
여섯째, 계산, 연산 및 조작 등 기능상의 오류	

2. 개별화 수업

사람들이 가진 학습에 관한 특성을 고찰하여, 박성익(2008, p.3)은 인간은 무한한 성장 가능성을 지니고, 학습욕구와 충동을 지니며, 자기주도적 능동적 적극적으로 학습활동을 수행하려는 학습 행동특성을 지니고, 모든 학습을 수행할 기본 능력을 가지고 있기 때문에, 학습자의 능력신장과 성장촉진을 위한 교육활동 즉, 학습효과를 증진시키려면 학생들에게 개별화 학습을 수행하도록 하여야 한다고 주장하였다. 인간의 학습특성으로 인해 개별화 학습이 필연성을 지닌다고 주장하는 것이다. 이러한 개별화 학습은 집단 중심의 학교수업에서 오는 단점을 극복하려는 활동으로, 학습자 주도하에 이루어진다. 반면, 개별화 수업은 교사가 수업의 초점을 개별학습자에 두고 모든 학생이 학습목표에 도달하도록 돕기 위해 학습능력, 적성, 동기 등 학생들의 개인차를 고려하여 지원하는 개별처방 교수방법이다.

전통적인 집단수업에 비해 개별화 수업은 개별 학습자에게 적절하고 실제적인 학습 목표가 주어지고, 주어진 목표를 성취하기 위해 여러 종류의 교수 자료와 자원을 제공하기 때문에 개별 학습자는 능력과 배경에 맞추어 학습하게 되며, 학습자가 자신의 진도에 따라 스스로 학습할 수 있게 할 수 있고, 학습자의 반응에 대해 단순하고 부적절한 피드백보다는 지속적이고 개별적인 피드백을 제공해 줄 수 있는 장점이 있다(한병선, 2007, p. 92). 개별 학습자의 특성을 고려하는 학습 지도를 하는 데 있어

서 ‘개인차’의 의미는 ‘개성으로서의 개인차’와 ‘능력으로서의 개인차’ 두 가지로 나누어 생각해 볼 수 있다. 개인차를 바라보는 두 관점 모두 중요하지만, 수학 수업을 운영해 나아갈 때 직접적으로 고려해야 할 것은 능력차로서의 개인차이다(최신애, 2017, p. 17; 박영배, 1996, pp. 73-74). 수학학습부진아의 경우 작은 성적 상승으로도 수학에 대한 거부감을 없앨 수 있는데, 학습부진을 겪는 학생들은 잘하고 싶은 의욕이 있어도 학습 방법을 잘 알지 못하고, 선수학습이 부족하거나 오개념을 가지고 있는 등의 문제를 안고 있어서, 기존의 강의식 수업으로는 학습 의욕은 있지만 수학부진을 겪는 학생이 수학에 대한 자신감과 흥미를 갖도록 도와주기 힘들다는 것에 주목하여 정현주는 방과후 개별화 수업을 실시하였다. 방과후 수업은 교육청에서 지원하는 수학인턴교사와의 협업으로 이루어졌으며, 소규모 개별화 수업은 수학적 태도와 학업성취도 면에서 긍정적인 효과가 있음을 확인할 수 있었다.(정현주, 2012) 정현주의 연구는 수학부진 학생의 개별화 수업의 효과면에서는 긍정적이지만, 정규 수업시간에 실시한 것은 아니라는 면에서 한계를 지닌다.

최근 학교현장에서는 교실수업 개선에 관심을 갖는 교사가 늘어나고 학생활동 중심수업을 하려는 노력이 많이 있기는 하지만, 조별활동이든 발표식 수업이든 학생들이 지닌 개인적 능력에 따라, 지식을 습득하는 속도도 다르고, 수업에 집중하는 정도의 차이를 나타내게 되어 결국에는 학생들간 수업에 대한 이해도에서 많은 차이를 나타내게 된다. 또한 수학이라는 학문이 지닌 특성상 학습의 결손은 누적되어 다음 학습에 방해가 되기 때문에 조기에 잘못된 부분을 교정받는 것이 중요하다. ‘거꾸로 수업’이 예습을 통해 확보된 시간만큼 학생들을 개별적으로 지도할 수 있다는 점에서 어느 정도 개별화 수업이 가능하도록 도와주었다. 이 경우도 교사가 예습 동영상 제작하는데 많은 시간을 할애해야 하는 점이 문제점으로 제시되기는 했지만, ‘수업 시간에 잠자는 학생이 없어요’라는 거꾸로 수업을 경험한 교사들의 소감은 어찌면 당연한 말인데 교사들을 ‘거꾸로 수업’을 시도하게 되는 원동력이 되기도 하였다.

다인수 학습 현실에서 학생의 개인차를 최대한 존중하는 방법으로 伊藤說朗(1990)는 학생들의 반응을 몇 가지 유형으로 분류한 뒤, 각 유형의 반응의 형태를 미리 예측하여, 각각의 유형에 적절히 대응할 수 있는 지도 조언을 미리 준비해 둘 것을 조언한다(박영배, 1996, p. 75). 일반적인 대면수업 상황에서 교사는 매 차시 분량의 학습내용을 수업하고 학생들의 활동을 순회지도하고 관찰하는데, 순회지도 시간 동안 개별화 수업을 하기에는 시간적으로 매우 부족한 것이 현실이다. 그런데, 온라인 플랫폼을 이용한 온라인 수업에서 수업동영상을 미리 제작하여 온라인에 게시하면, 강의하는데 들이는 시간을 확보하게 되어 교사는 학생들이 제출한 과제를 실시간으로 확인하고, 적절한 피드백을 제공할 수 있다. 대면수업에 비교해서 교사의 수업 준비에 훨씬 많은 노력이 필요하지만, 개별화 수업이 가능하다. 이에 대수학습에서 기초적인 기능으로 이후의 학습에서 중요하지만, 오류를 많이 나타내는 인수분해를 중심으로 온라인 개별화 수업을 진행하고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 방법 및 대상

본 연구는 경기도 A 중학교 3학년 학생들을 대상으로 실시하였다. A 중학교는 남녀공학으로 3학년은 2학년이며, 한 학급당 학생 수는 27명이다. 해당 중학교는 농촌지역에 위치하며, 학생들의 사교육 비율이 굉장히 낮은 편이다.

<표 Ⅲ-1> 연구 대상 및 방법

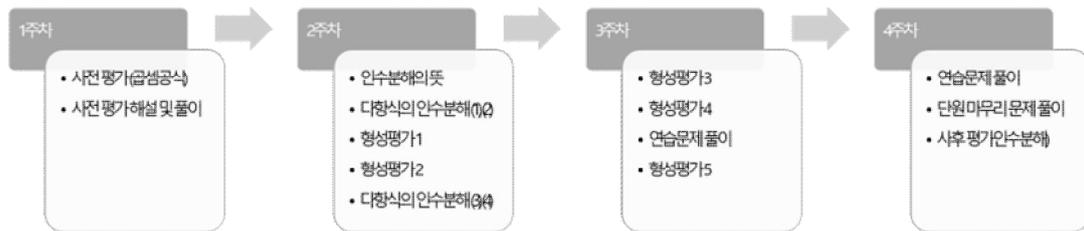
집단	사례 수			온라인 수업방식
	남	여	합계	
실험집단	16	11	27	개별화 수업
비교집단	15	12	27	강의식 수업

온라인 수업에서 동영상 강의는 두 집단에 동일하게 제공되었고, 실험집단에게는 수업시간에 제출한 과제에 오류가 발견될 때 개별 학생들의 오류 유형에 맞게 즉각적인 피드백을 주는 수업을 진행하였다. 비교집단은 동영상을 통한 강의식 수업에만 집중하며, 자발적으로 질문을 하는 학생에게만 피드백을 제공하였다. 성취도 검사는 사전평가, 형성평가(5회), 사후평가 총 7회를 실시하였다(<표 Ⅲ-2>). 형성평가는 10가지의 인수분해 유형을 두 가지씩 묶어서 5차에 걸쳐 실시하였으며, 형성평가 분석을 통해 인수분해 오류 유형을 정리하고 개별 피드백을 위한 근거를 마련하였다. 총 7회에 걸친 성취도 검사에 공분산분석(ANCOVA)으로 개별화 수업이 학생들의 성취도에 미친 영향 조사하였다.

<표 Ⅲ-2> 학업 성취도 검사 & 설문

구분	사전평가	형성평가	사후평가	설문
실시 횟수	1회	5회	1회	1회
문항 내용	다항식의 곱셈	인수분해	인수분해	수업만족도
문항 수	20문항	10문항 내외/회	20문항	10문항

실험은 4주간 시행되었으며, 연구는 다음과 같이 진행되었다(<그림 Ⅲ-1>).

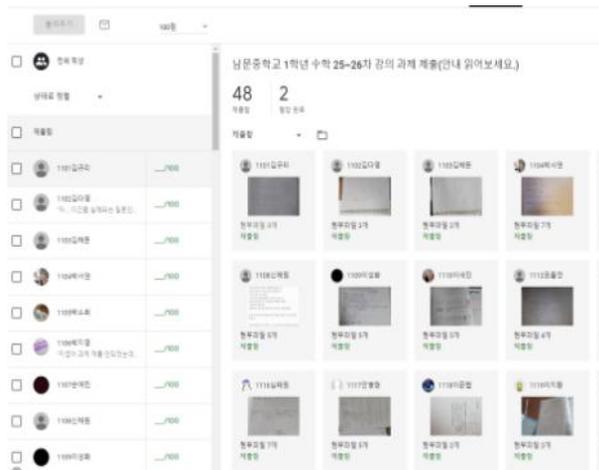


<그림 Ⅲ-1 연구 흐름도>

2. 온라인 개별화 수업 방법

온라인 수업의 효과적인 진행을 위해 다음 세 가지에 중점을 두었다. 첫 번째는 효율적인 학습을 위해 학습자료와 과제를 정리된 상태로 제공하기 위해 구글 클래스룸을 LMS로 사용했고, 두 번째로 학생들과 실시간으로 소통하고 상호작용하기 위한 수단으로, 구글 클래스룸의 댓글 달기, 줌, 카카오톡, 페이스북 등을 상황에 맞게 사용했으며, 마지막으로 세 번째는 온라인 상에서 학생들의 학습여부와 학습목표 도달 여부를 확인하기 위해 학생들이 동영상 학습하고 과제를 제출해야 출석으로 인정하여 학생들의 참여율을 높이고, 수업 동영상은 학생들의 수준에 맞춰 교사가 제작하였다.

온라인 강의는 학생들의 접근성이 용이한 유튜브에 일부공개로 업로드를 하여, 구글 클래스룸에 수업 동영상 주소 링크를 올려놓는다. 구글 클래스룸에는 동영상 주소 목록과 학생들의 과제가 일목요연하게 자동정리된다. 학생들은 수업시간에 구글 클래스룸에 접속하여 동영상 수업을 듣고 과제를 제출하고 출석을 인정받는다. 학생이 과제를 제출하면 알람이 교사에게 전달되어 교사는 실시간으로 학생의 과제 제출 상태와 과제를 확인할 수 있으며([그림 III-2]), 과제를 사진이나 설문지 형태로 볼 수 있기 때문에, 즉각적인 피드백이 용이하다. 반환기능으로 과제수정 기회를 주고, 제출한 과제에 대해 피드백(댓글 기능)을 하는 쌍방향 소통도 가능하다. 수업에서는 선호하는 수단을 자유롭게 이용하도록 하였으며, 학생들은 구글 클래스룸의 댓글 대신 대부분 카카오톡을 이용하는 경향이 있었고, 댓글을 통해 지도가 어려운 경우 줌(zoom)이나 페이스북을 지도에 이용하였다.



[그림 III-2] 구글 클래스룸에서 실시간으로 과제 제출 상태 확인



[그림 III-3] 개별화 지도: 카카오톡과 페이스북 활용 예시

3. 자료 분석

인수분해의 오류는 형성평가 5회의 결과를 분석하여, Hadar와 Zaslavsky의 오류분석 유형을 재구성한 오류분석 기준에 따라, 정리 또는 정의의 왜곡 오류, 풀이를 검증하지 않는 오류, 기능상의 오류, 무응답의 네 가지로 분류하였다. 오류 분석틀과 오류 사례 분류의 적절성을 위해 연구자 간 교차 검토를 실시하였다.

온라인 개별화 지도가 학업성취도에 영향을 미치는지를 연구하기 위한 자료는 사전평가, 형성평가

5회, 사후평가 총 7회 성취도 검사이다. 실험집단과 비교집단의 성취도 차이가 있는지 뿐 아니라 4주 간의 성취도 변화를 보기 위해 반복측정을 하였는데, 이러한 대조군의 반복측정 설계에서는 공분산분석이 타당하다(조성기, 강창완, 김규곤, 2008). 사전평가 문항이 곱셈공식으로 이루어져 있어서, 이후의 형성평가와 사후평가에 영향을 미칠 가능성이 있으므로, 사전평가 점수를 공변량으로 설정하고 공분산분석으로 두 집단 간의 성취도 차이를 분석하였다.

IV. 연구 결과

1. 인수분해에 대한 오류 및 오개념 분석

본 연구에서는 중학교 3학년에서 다루는 인수분해 유형을 10가지로 분류하고, 각 유형별로 평가문항을 개발하였다. 인수분해에 대한 지도는 4주간 이루어졌는데, 2가지 인수분해 유형에 대한 수업이 끝날 때마다 다음 표와 같이 형성평가를 실시하였다(<표 IV-1>).

<표 IV-1> 차시별 형성평가 및 내용

구분	2주차		3주차		
형성평가	형성평가 1	형성평가 2	형성평가 3	형성평가 4	형성평가 5
형성평가 내용	인수분해 유형 1, 2	인수분해 유형 3, 4	인수분해 유형 5, 6	인수분해 유형 7, 8	인수분해 유형 9, 10

또한 이와 동시에 과제를 제출하는 학생들에 대해 순차적으로 실시간 피드백이 이루어졌다. 10가지 인수분해 유형은 다음과 같다. 인수분해에 대한 5차례의 형성평가에 대한 정답률과 오류에 대한 분석 결과는 <표 IV-2>에 제시되었다.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 유형 1: 공통 인수 묶기 | 유형 6: $acx^2 + (ad + bc)x + bd$ 꼴의 인수분해 |
| 유형 2: $a^2 \pm 2ab + b^2$ 꼴의 인수분해 | 유형 7: 적당한 항끼리 묶어서 인수분해하기 |
| 유형 3: $a^2 - b^2$ 꼴의 인수분해 | 유형 8: 합, 차 공식 이용해서 인수분해하기 |
| 유형 4: $c(a^2 - b^2)$ 꼴의 인수분해 | 유형 9: 내림차순으로 정리해서 인수분해하기 |
| 유형 5: $x^2 + (a + b)x + ab$ 꼴의 인수분해 | 유형 10: 치환을 이용해서 인수분해하기 |

<표 IV-2> 인수분해 유형별 형성평가 분석

구분	정답(%)	오류(%)	무응답(%)	합계(%)	총 분석 문항수(개)
유형 1	62.2	22.9	14.8	100	270
유형 2	70.7	14.4	14.8	100	270
유형 3	69.2	15.9	14.8	100	270
유형 4	54.4	23.3	22.2	100	270
유형 5	54.8	37.7	7.4	100	270
유형 6	58.3	32.4	9.2	100	216
유형 7	56.6	28.5	14.8	100	270
유형 8	54.4	38.1	7.4	100	270
유형 9	65.6	13.5	20.8	100	96
유형 10	60.7	28.1	11.1	100	270

중학교 3학년 학생이 인수분해 단원에서 학습하는 위의 10가지 유형의 오류 또는 오개념에 대해 분석해보고자 한다.

1) 유형 1: 공통 인수 묶기

인수분해에서 가장 기본적인 것이 ‘공통 인수 묶기’를 이용한 인수분해이다. 이 유형에서는 정답률이 62.2%로 편인데, 다음과 같은 대표적 오류를 보였다.

<표 IV-3> 인수분해 유형1에 대한 학생들의 오류 예시 및 원인분석

문제	학생의 풀이 예시	오류분석
$(a+b)(x+y) - (a+b)(x-y)$	(1) $(a+b)(x+y) - (a+b)(x-y)$ $= -(a+b)(x+y)(x-y)$ (2) $(a+b)(x+y) - (a+b)(x-y)$ $= (a+b)^2 - (x-y)^2$	‘다항식으로 된 인수를 하나의 인수로 인식하지 못함’ (형성평가 1-(5)번 문제)

공통 인수를 이용한 인수분해에서 공통 인수로 단항식을 가질 때는 정답률이 90% 이상이었으나, 형성평가 1의 5번과 같이 공통 인수가 다항식인 경우에는 인수분해에 어려움을 보였다. 표 IV-5와 같이 38.8%의 높은 오류 비율을 보였다. 이는 단항식과 달리 다항식을 인수로 인식하지 못하는 오개념에 기인한 오류이다.

<표 IV-4> 형성평가 1-(5)번 문제 응답 결과

구분	정답	오류	무응답	합계
빈도수	26	21	7	54
백분율(%)	48.1	38.8	12.9	100

2) 유형 2: $a^2 \pm 2ab + b^2$ 꼴의 인수분해

$a^2 \pm 2ab + b^2$ 유형의 인수분해 형성평가는 정답률 70.7%로 가장 높은 정답률을 보였다. 이유는 완전제곱식은 인수분해 형태가 정형화되어 있어 비교적 단순하다는 점에 있다. 또한 유형 2의 대표적인 오류는 간단한 계산 실수 또는 $a^2 \pm 2ab + b^2$ 에서 간혹 $2ab$ 의 부호를 틀리는 경우이다.

3) 유형 3: $a^2 - b^2$ 꼴의 인수분해

$a^2 - b^2$ 꼴의 인수분해에서는 정답률 69.2%로 유형 2 다음으로 높은 정답률을 보였다. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 인수분해 형태가 ‘합, 차 공식’으로 학생들에게 쉽게 각인 되어 높은 정답률을 보인 것으로 판단되며, 별다른 오개념과 오류가 없다.

4) 유형 4: $c(a^2 - b^2)$ 꼴의 인수분해

$c(a^2 - b^2)$ 꼴의 인수분해 형성평가에서는 정답률 54.4%로 <유형 3>인 $a^2 - b^2$ 보다 낮은 정답률을 보였다. 이처럼, $c(a^2 - b^2)$ 정답률이 <유형 1> 공통 인수 묶기와 <유형 2> $a^2 - b^2$ 형태의 인수분해에 비해 상대적으로 낮은 것은 <유형 3>은 <유형 1>을 시행하고 나서 다시 <유형 2>를 시행해야 하는 것으로 더 복잡한 유형으로 볼 수 있기 때문이다. 학생들은 인수분해에서 두 단계 이상을 거치는 것에 어려움을 느끼는 것으로 확인된다. <유형 4>에서는 인수분해 방법을 처음 배우는 과정에서 알고리즘에 친숙하지 못해 발생하는 오류인 ‘기능상의 오류’가 나타났다.

5) 유형 5: $x^2 + (a+b)x + ab$ 꼴의 인수분해

$x^2 + (a+b)x + ab$ 꼴의 인수분해 형성평가에서는 정답률 54.8%로, <유형 4>와 유사하게 낮은 편이다. <유형 5>는 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ 의 인수분해 방법이 공식처럼 교과서에 소개되어 대부분 학생이 기계적으로 인수분해를 수행하는 모습을 보였다. <유형 5>에서는 다음 예시와 같이 숫자를 인수로 간주하지 못하는 데서 발생하는 오류를 공통적으로 나타냈다.

<표 IV-5> 인수분해 유형 5에 대한 학생들의 오류 예시 및 원인분석

문제	학생의 풀이 예시	오류분석
형성평가 5-(4) $-2x^2 - 4x + 30$	$-2x^2 - 4x + 30$ $= (-2x + 6)(x + 5)$	숫자를 인수로 인식하지 못함
형성평가 5-(5) $-3x^2 - 15xy + 18y^2$	$-3x^2 - 15xy + 18y^2$ $= (-3x + 18y)(x + y)$	

형성평가 5의 4번 5번 문제에서 숫자를 인수로 인식하지 못해서 오류를 나타내었다. 오류의 비율은 각각 40.7%, 53.7%로 매우 높은 편이다. 이는 중학교 1학년 ‘소인수분해’ 단원에서 숫자가 인수가 될

수 있다는 것을 배웠지만, 중학교 3학년 인수분해 단원에서는 문자를 포함한 단항식 위주로 인수분해를 배운 결과 인수의 정의에 대한 오개념이 발생하여 범하는 오류이다.

<표 IV-6> 형성평가 5-(4)번 문제 분석

구분	정답	오류	무응답	합계
빈도수	28	22	4	54
백분율	51.8	40.7	7.4	100

<표 IV-7> 형성평가 5-(5)번 문제 분석

구분	정답	오류	무응답	합계
빈도수	21	29	4	54
백분율	38.8	53.7	7.4	100

6) 유형: $acx^2 + (ad + bc)x + bd$ 꼴의 인수분해

<유형 6> $acx^2 + (ad + bc)x + bd$ 꼴의 인수분해는 <유형 5> $x^2 + (a + b)x + ab$ 와 매우 유사하며 약간 더 복잡한 형태로 볼 수 있다. <유형 6> 형성평가의 정답률 58.3%이지만, 오답율이 32.4%로 높은 편이다. <유형 6>과 관련해서는 인수분해 방법을 처음 배우는 데서 생기는 미숙함으로 인한 ‘기능상의 오류’만 나타났고, 주목할만한 오개념이나 오류는 나타나지 않았다.

7) 유형 7: 적당한 항끼리 묶어서 인수분해하기

<유형 7> 적당한 항끼리 묶어서 인수분해하기 형성평가에 대한 정답률은 56.6%로 나타났으며, 오류는 28.5% 무응답 14.8%로 오류와 무응답이 높았다. 인수분해 과정에서 ‘적당한 항을 찾아라’라는 개념성이 높은 말이 기계적으로 공식을 적용하는 유형에 비해 어려움을 느끼게 한 것으로 보인다. 다른 유형에 비해 인수분해 알고리즘이 한눈에 보이지 않고, 주어진 문제에 따라 적당한 인수를 찾아 공통인 일차식을 만드는 것이 학생들에게 상당한 어려움으로 작용하여 풀이를 시작조차 하지 못한 것으로 판단된다. <유형 7>에 대한 오류 유형은 새로운 인수분해 방법의 활용 미숙으로 인한 ‘기능상의 오류’만 나타났다.

8) 유형 8: 합, 차 공식 이용한 인수분해

<유형 8> 합, 차 공식을 이용한 인수분해 형성평가는 오류의 비율이 가장 높은 38.1%였다. 이 유형의 인수분해 원리는 <유형 3>의 $a^2 - b^2$ 인수분해와 같은 방법이라는 것에 착안하여 비교적 쉽게 인수분해를 하는 모습을 보였으나 다음 경우의 인수분해에서 어려움을 보였다.

<표 IV-8> 인수분해 유형 8에 대한 학생들의 오류 예시 및 원인분석

문제	오류유형	오류분석
$a^4 - b^4$	$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$	인수분해가 연쇄적으로 이루어지는 경우의 오류 (형성평가 8-(5)번 문제)

형성평가 8-(5)는 인수분해를 두 단계 거쳐야 하는데 인수분해를 중간에서 끝내는 오류를 나타냈다. 이는 <유형 4>에서도 나타난 현상으로, 대부분의 인수분해 문제보다 더 많은 단계를 거치는 경우 중간에서 중단하는 오류를 범하는 것이다. 이는 두 단계 이상의 단계를 시행해야 인수분해가 완결되는 복잡한 인수분해에 대한 경험이 부족하여 생긴 것으로, 풀이를 검증하지 않아서 생긴 오류이다. 위의 사례에 대한 또 다른 해석으로 학생이 풀이를 검증하였다더라도 인수는 인수분해가 가능한 최소한의 단위라는 사실을 알지 못했을 수 있다는 것이다.

<표 IV-9> 형성평가 8-(5)번 문제 응답 결과

구분	정답	오류	무응답	합계
빈도수	25	22	7	54
백분율	46.2	40.7	12.9	100

9) 유형 9: 내림차순으로 정리하는 인수분해

<유형 9> 내림차순으로 정리하는 인수분해에서는 정답률이 65.6%로 높지만, 무응답이 20.8%로 오류 비율 13.5%보다 더 높다. <유형 9>는 정답률과 무응답률이 모두 높게 나타난 것은 이 유형의 인수분해 방법에 대해 이해가 되면 인수분해를 쉽게 하지만 그렇지 못하면 학생들이 손도 대지 못하는 것으로 판단할 수 있다.

10) 유형 10: 치환을 이용한 인수분해하기

<유형 10> 치환을 이용한 인수분해에서는 형성평가의 정답률이 60.7%로 보통 수준이다. 오류는 28.1%로 약간 높은 편이나 처음 인수분해 방법을 배우는 데서 생기는 미숙함으로 인한 '기능상의 오류'만 나타났다.

본 연구에서는 5차례 실시한 형성평가에 대한 분석을 통해서, 인수분해 학습과정에서 학생들이 나타내는 두 가지의 오개념을 확인하였다. 첫 번째 오개념은 학생들이 다항식으로 된 인수를 인수로 인식하지 못하는 것이다. 인수분해 단원에서 처음 접하는 인수분해 유형인 '공통 인수 묶기'에서는 주로 공통인수로 단항식을 묶어내는 것을 다룬다. 반복적으로 이러한 유형을 다루게 되면서, 인수는 단항식이라는 오개념이 자연스럽게 형성된 것으로 볼 수 있다. 두 번째 오개념은 숫자를 인수로 인식하지 못하는 것이다. 중학교 1학년 소인수분해 단원에서 인수의 정의를 배우고, 이때 '수(數)'도 인수가 될

수 있음을 알게 된다. 하지만, 인수분해 과정에서는 문자에만 집중하여 숫자를 인수로 인식하지 못하는 오개념을 가지게 된다. 예를 들어, 인수분해된 다항식 중에 공통인수를 숫자로 갖는 경우가 있는데, 일부 학생들은 공통인수로 숫자를 묶어내는 과정을 생략하는 것으로 나타났다.

형성평가 문항에 대한 오류 분석을 통하여 학생들이 인수분해 학습과정에서 범하는 오류를, 정리 또는 정의의 왜곡 오류, 기능상의 오류, 풀이를 검증하지 않는 오류, 무응답의 4가지로 분류하였다. 먼저 첫째, 정리 또는 정의의 왜곡에 속하는 오류에는 인수분해 과정에서 인수에 대한 오개념에서 발생하는 오류가 나타났다. 공통된 인수를 묶는 것에만 초점을 맞춘 결과, 일부 항에 공통인 인수만 찾고 더 이상 공통 인수를 찾지 못하면 중간에 인수분해를 끝내버리는 것이다.

<표 IV-10> 정리 또는 정의의 왜곡에 속하는 오류 사례

문제	인수분해 오류 예시	오류분석
$x^2 + xy - 4x - 2y + 4$	$x^2 + xy - 4x - 2y + 4$ $= x(x + y - 4) - 2y + 4$	정리 또는 정의의 왜곡에 속하는 오류

둘째, 풀이를 검증하지 않는 오류는 <유형 8>과 같이 주어진 인수분해를 위해서 연속적으로 두 단계 이상 인수분해를 실행해야 하는 경우임에도 불구하고, 인수분해를 적게 실행하고 중간에서 끝내서 생기는 오류이다. 이러한 오류의 원인으로 인수는 인수분해가 더 이상 가능하지 않은 최소한의 단위라는 사실을 고려하지 않거나 알지 못했기 때문이라고도 볼 수 있다. 주어진 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 다항식의 인수분해라고 정의하기 때문에, 다항식이 일단 두 개 이상의 다항식의 곱으로 표현되면 인수분해가 끝났다고 생각해 버리는 것이다. 이 경우 정리 또는 정의의 왜곡으로 분류할 수도 있으나 본 연구에서는 2주차에 <유형 3>을 배우고 3주차 <유형 8>에서 발생한 오류이므로 풀이를 검증하지 않는 오류로 분류한다.

<표 IV-11> 풀이를 검증하지 않는 오류 사례

문제	인수분해 오류 예시	오류분석
$a^4 - b^4$	$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$	풀이를 검증하지 않는 오류

셋째, 기능상의 오류는 인수분해가 숙달되지 않아서 단순한 계산, 연산, 조작 등의 오류를 범하는 것으로, 학생들의 오답의 대부분이 여기에 속했다.

넷째, 무응답이다. 무응답을 오류 유형으로 넣은 것은 인수분해 단원의 특성상 학습 곤란도가 높아 오답 비율의 많은 부분을 차지하고 있기 때문이다. 무응답의 이유에는 인수분해의 정의와 성질을 이해하지 못하거나 여러 단계를 거쳐야 하는 인수분해 해결의 어려움이 있었다.

이를 종합하여 총 10가지 유형에 대해 학생들이 주로 보이는 오개념을 정리해보면 다음과 같다.

<표 IV-12> 오류 분석 모델에 따른 유형의 분류

재구성한 오류분석 모델	유형 번호(1~10)
첫째, 정리 또는 정의의 왜곡	1, 5
둘째, 풀이를 검증하지 않는 오류	8
셋째, 기능상의 오류	4, 6, 7, 10
넷째, 무응답	4, 9

2. 온라인 개별화 수업과 수학적취도

1) 온라인 개별화 수업

온라인 개별화 수업이 중학교 3학년 학생들의 수학적취도에 미치는 영향을 분석하기 위해 A 중학교 3학년을 대상으로 실험집단에는 온라인 개별화 수업을 실시하였고, 비교집단에는 동영상 강의를 자기주도적으로 학습하는 온라인 수업을 실시하였다.

온라인 수업은 매 차시 45분간 진행되었고, 20분 내외의 미리 촬영한 수업 영상으로 학생들의 개념 수업이 진행되었다. 학생들은 ‘줌’에 접속한 상태로 수업 영상을 통해 공부에 임했고, 의문점이 생기면 개별적으로 질문을 하여 피드백을 받는 형태로 온라인 개별 지도가 이루어졌다. 본 연구를 통해 학생들이 4가지 오류 패턴을 확인할 수 있었고, 각 패턴에 맞춘 개별 지도를 통해 이를 해소할 수 있었다.

첫째, 정리 또는 정의의 왜곡에 속하는 오류에는 학생들이 인수분해에서 인수의 개념을 정확하게 이해하지 못한 경우가 속한다. 예를 들어, $x^2 + xy - 4x - 2y + 4$ 를 인수분해 할 때, $x(x + y - 4) - 2y + 4$ 와 같이 답하는 것이다. 이러한 오류는 인수분해에서 공통된 인수로 묶는다에 주목하여 처음 3개 항의 공통인수 x 에만 주목하여 일부만 공통인수로 묶는 오류를 범한 것이다. 이러한 오류를 범한 학생들에게는 인수의 정의와 성질을 소인수분해를 통해 설명하고 $x(x + y - 4) - 2y + 4$ 가 왜 인수분해가 완료된 형태가 아닌지에 대해 설명함으로써 오류를 바로 잡을 수 있었다.

둘째, 풀이를 검증하지 않는 오류는 $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ 와 같이 연속해서 인수분해를 시행해야 하는 문제에 대해서, 한 번만 인수분해를 하고 끝내버리는 경우이다. 이는 해당 유형의 인수분해를 수행할 능력이 있으나 한 단계로 인수분해가 끝나는 형태에 익숙해진 탓에 인수분해가 연속적으로 이루어질 수도 있다는 사실을 인지하지 못한 결과이다. 이러한 오류를 범한 학생에게는 인수는 인수분해가 더 이상 가능하지 않은 최소한의 단위라는 사실과 인수분해가 연속적으로 이루어질 수도 있다는 사실을 설명하고, 연속적으로 인수분해가 이루어지는 형태의 인수분해를 추가로 제시하고 해결해봄으로써 오류를 해결할 수 있었다.

셋째, 기능상의 오류는 인수분해를 하는 과정에서의 단순 계산이나 조작 상의 실수에서 기인하는 오류이다. 이러한 오류는 인수분해를 수행할 능력이 있음에도 실수에 기인하여 생기는 경우가 대부분이었다. 오류를 범한 학생이 풀이 과정을 교사에게 설명하게 하는 과정에서 스스로 잘못된 부분을 고치는 방법으로 오류를 해결할 수 있었다.

마지막으로 무응답에 속하는 오류는 백지를 제출한 경우이다. 피드백을 하면서 관찰해 보면 인수분해의 정의와 성질에 대한 이해가 부족하여 인수분해를 시도조차 못하는 경우가 대부분이었다. 이 경우 인수분해에 대한 과거 수업 영상의 복습과 기초 문제의 반복 해결을 통해 인수분해의 개념을 확립한 후 과제를 다시 부여하여 어느 정도 오류를 해결할 수 있었다. 또한, 교사가 해결해야 할 인수분해 유형에 관한 약간의 도움을 제공하면 이후의 단계를 학생 스스로 연쇄적으로 알아내는 경우도 많았다.

2) 수학성취도 분석

교사의 적극적인 피드백이 주어지는 온라인 개별화 수업과 자기주도성이 강조되는 온라인 강의식 수업을 받는 학생들 간 학업성취도 비교를 위해 사전평가와 사후평가를 실시하였고, 4주간의 온라인 수업 동안 성취도 변화 분석을 위해 형성평가를 5차례 실시하였다. 사전평가는 ‘인수분해’의 앞 단원인 ‘곱셈공식’ 문제였으며, 형성평가와 사후평가는 ‘인수분해’ 문제로 구성하였다. 성취도 검사는 사전평가, 형성평가 5회, 사후평가의 순서로 총 7회 실시하였으며, 결과는 아래 표와 같다.

<표 IV-13> 실험집단과 비교집단의 성취도 검사 결과

처치	실험집단 평균	실험집단 표준편차	비교집단 평균	비교집단 표준편차	두 집단의 성취도 차이 (실험집단-비교집단)
사전평가	40.89	24.81	42.2	28.02	-1.33
형성평가 1	70.74	34.20	72.5	32.50	-1.85
형성평가 2	68.89	34.35	63.7	34.44	5.19
형성평가 3	69.55	30.78	62.5	36.05	7.00
형성평가 4	73.25	33.71	58.4	40.30	14.81
형성평가 5	77.78	33.75	44.4	41.76	33.33
사후평가	59.07	32.06	38.33	36.36	20.74

두 실험집단의 등분산성을 알아보기 위해, 사전평가에 대한 Levene의 등분산 검정 결과는 유의확률 0.24로 두 집단의 분산이 같다는 영가설을 기각하지 못하므로 실험집단과 비교집단의 등분산성 가정이 충족된다고 볼 수 있다. 등분산 가정하에 t 통계값은 유의수준 0.857로 사전검사에서 두 집단 간에 성취도 차이가 통계적으로 유의미하지 않다고 볼 수 있다.

<표 IV-14> 사전평가에 대한 실험집단과 비교집단의 Levene의 검정

		Levene의 등분산 검정		평균의 동일성에 대한 T 검정				
		F	유의 확률	t	자유도	유의확률 (양측)	차이의 95% 신뢰구간 하한 상한	
사전 평가	등분산 가정	1.411	0.240	0.182	52.000	0.857	-13.394	16.061
	등분산 가정안함			0.182	51.249	0.857	-13.399	16.066

사전평가 이후, 5번의 형성평가가 실시되었는데 아래 그림과 같이 실험집단의 성적은 지속적으로 상승하는 모습을 보였고, 이에 비해 비교집단의 성적은 점차 점수가 하락하는 것으로 나타났다.

두 집단 간에 처음에는 비교집단이 1.33점 높았으나 2차 시험 이후 비교집단의 성적이 더 높게 나타나고 점차 격차가 벌어져서, 5번째 시험에서는 실험집단이 33.33점이나 높게 나왔다. 두 집단의 형성평가 점수차이가 통계적으로 유의미한지를 알아보기 위해 공분산분석을 실시하였다.

이에, 공분산분석의 기본 가정인 정규성, 등분산성, 기울기 동일성(성태제, 2007; 유진은, 2013)을 확인하였다. 집단과 공변수(사전검사)간 상호작용은 통계적으로 유의하지 않아 회귀계수의 동일성 가정을 충족시키는 것으로 나타났다($p > 0.05$). Levene 등분산 가정 검정 결과, 5차례의 형성평가 모두 유의확률이 0.05보다 크므로 영가설을 기각하지 못하므로, 5차례의 형성평가에 대해 두 실험집단의 분산은 같다고 볼 수 있다.

인수분해에 대한 오류 분석과 온라인 개별화 수업의 효과



[그림 IV-1] 두 집단의 형성평가 점수 변화 비교

<표 IV-15> 오차 분산의 동일성에 대한 Levene의 검정

	<i>F</i>	df1	df2	유의확률
형성평가 1	0.153	1	52	0.697
형성평가 2	0.751	1	52	0.390
형성평가 3	0.705	1	52	0.405
형성평가 4	0.567	1	52	0.455
형성평가 5	2.763	1	52	0.102

5차에 걸친 형성평가에 대해 두 집단 간 차이가 있는지를 알아보기 위해 공분석분석을 실시한 결과 1차 형성평가부터 4차 형성평가는 두 집단 간에 성취도에 대해 통계적으로 유의미한 차이를 나타내지 못했지만($p > 0.05$), 유의확률이 $0.906 \rightarrow 0.455 \rightarrow 0.337 \rightarrow 0.086$ 으로 줄어드는 것을 볼 수 있다. 5차 형성평가는 유의확률이 0.01로 두 집단 간에 인수분해에 대한 성취도에서 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다(<표 IV-16>). 즉, 5차 형성평가에서는 실험집단의 성적이 비교집단에 비해 유의미하게 높다고 할 수 있다.

<표 IV-16> 형성평가에 대한 공분산분석 결과

	소스	평균제곱	자유도	F	유의확률
형성평가 1	수정된 모형	9229.639	2	11.291	0.000
	절편	28364.335	1	34.698	0.000
	반	11.455	1	0.014	0.906
	사전평가	18412.981	1	22.524	0.000
	오차	817.465	51		
형성평가 2	수정된 모형	9400.382	2	10.546	0.000
	절편	21650.964	1	24.290	0.000
	반	504.691	1	0.566	0.455
	사전평가	18437.800	1	20.685	0.000
	오차	891.343	51		
형성평가 3	수정된 모형	8116.915	2	9.178	0.000
	절편	24161.955	1	27.321	0.000
	반	831.704	1	0.940	0.337
	사전평가	15573.108	1	17.609	0.000
	오차	884.385	51		
형성평가 4	수정된 모형	10901.817	2	9.984	0.000
	절편	20768.085	1	19.019	0.000
	반	3349.260	1	3.067	0.086*
	사전평가	18840.672	1	17.254	0.000
	오차	1091.974	51		
형성평가 5	수정된 모형	16037.252	2	13.464	0.000
	절편	17158.887	1	14.405	0.000
	반	15807.171	1	13.271	0.001**
	사전평가	17074.504	1	14.334	0.000
	오차	1191.150	51		

사후평가에서 실험집단과 비교집단의 학업성취도가 통계적으로 유의미한 차이를 보이는지 확인하기 위해 공분산분석을 실시하였다. 공분산분석 가정을 확인하기 위해, 회귀계수 가정을 확인한 결과 집단과 공변수(사전검사) 간 상호작용은 통계적으로 유의하지 않아 회귀계수 가정을 충족시키는 것으로 나타났다($p > 0.05$). Levene 등분산 가정에 대한 검정 결과 유의확률이 0.153이므로($p > 0.05$) 두 집단의 분산은 같다고 볼 수 있다(<표 IV-17>).

<표 IV-17> 오차 분산의 동일성에 대한 Levene의 검정

	F	df1	df2	유의확률
사후평가	2.104	1	52	0.153

회귀계수의 동일성과 등분산 가정을 충족함을 확인하고, 공분산분석을 실시하였다. 사전평가의 영향력을 통제하기 위해 사전평가를 공변량으로 하였다. 사후평가에 대한 공분산분석 결과 유의확률 0.009이므로 유의수준 5%에서 영가설이 기각되므로, 실험집단과 비교집단의 학업성취도는 다르다. 즉, 두 집단의 학업성취도 차이는 통계적으로 유의미한 차이가 있다고 말할 수 있다.

인수분해에 대한 오류 분석과 온라인 개별화 수업의 효과

<표 IV-18> 사후평가에 대한 공분산검정 결과

	소스	평균제곱	자유도	F	유의확률
사후평가	수정된 모형	12934.213	2	15.202	0.000
	절편	5295.132	1	6.224	0.016
	반	6359.955	1	7.475	0.009**
	사전평가	20061.019	1	23.579	0.000
	오차	850.801	51		

실험집단과 비교집단의 인수분해에 대한 성취도 평가 분석 결과 온라인 수업에서의 개별화 수업이 적용되고 초기에는 성취도 차이가 조금씩 발생하였으나, 차이가 점차 커져 3주차 말에 시행된 형성평가 5와 4주차의 사후평가에서는 통계적으로 유의미한 차이를 나타냈고 말할 수 있다.

3) 설문분석

온라인 수업에 대한 학생들의 소감을 묻는 설문을 사후검사 직후 시행하였다. 실험집단에는 개별화 수업에 대해 느낀 점을 비교집단에는 온라인 수업의 단점에 대해 질문을 하였다. 실험집단 학생들의 개별화 수업에 대해 느낀 점에 대한 답변을 키워드 분석한 결과 대부분 긍정적인 답이 많았다. 긍정적인 답변은 실력상승, 피드백, 이해 등의 내용으로 89.3%, 부정적인 답변은 시간이 짧고 피드백을 받지 못했다는 내용으로 6.4%에 불과하였다. 학생들은 온라인 개별화 수업에서의 즉각적이고 개별적인 피드백으로 인수분해에 대한 오류를 교정하고 결국 실력이 상승되었다고 느끼고 있는 것을 알 수 있다.

<표 IV-19> '개별화 수업에 대해 느낀 점 설문 결과

느낀점	비율(%)
실력상승, 실력 파악 용이, 실수 줄임	26.2
즉각적인 피드백, 개별 피드백에 감사	23.4
이해 도움	12.8
좋았음, 도움이 됨, 자신감 증진	12.7
대면수업의 느낌	4.3
보통	4.3
피드백 못 받음	4.3
시간 짧음	2.1

<표 IV-20> 온라인 수업의 단점 설문 결과

느낀점	비율(%)
피드백 받기 어려움	14.9
집중력 저하	12.8
외로움	12.8
학습이 어려움	10.6
과제가 많음	8.5
생활 패턴 무너짐	8.5
수업 자료 준비 힘들	8.5
시스템 오류로 인한 불편	4.3

비교집단은 수업시간에 각자 동영상 강의를 받으며 자기주도적 학습을 하였고, 질문이 있는 학생들은 자유롭게 할 수 있는 형태의 수업을 4주간 하였다. 이들 학생들의 온라인 수업의 단점에 대한 설문을 분석한 결과 피드백 힘들, 집중력 저하, 학습 어려움이 38.3%로 온라인 수업 중에 겪는 어려움이 가장 많은 것으로 나타났다. 온라인 수업으로 과제가 늘어나서 과제와 관련된 어려움도 있었는데, 과제의 양이 많고, 수업자료 준비가 힘들다는 것을 합하여 17%였다. 심리적인 것으로 외로움을 말한 학생 비율이 12.8% 였다. 생활패턴이 무너짐을 든 학생들도 8.5%였다. 비교집단의 설문결과는 온라인 수업에서는 교사가 대면수업 상황에서도 학생들의 학습 내용적인 측면, 심리적인 측면, 학습에 대한 태도 등 더 고려할 요소가 많다는 것을 보여준다.

지금까지의 인수분해 오류분석, 성취도 분석, 설문 결과를 종합하면, 온라인 수업상황에서 교사는 수업 동영상과 과제 관리에만 집중하고 학생들이 자기주도적 학습에 의존하도록 하는 수업형태 보다는 수업동영상을 미리 게시하되 학생들의 수행에 대해 즉각적 피드백을 제공할 수 있게 하여, 오류를 수정하고 오개념을 바로 잡아 주는 것이 활동에 집중하는 수업이 효과적이라고 할 수 있다.

V. 결론 및 제언

코로나19의 확산으로 2020년 4월 모든 학교의 수업이 대면에서 비대면으로 전환되고, 온라인 개학이 시행되었다. 국내 코로나19 확진자 수에 따라 등교 수업과 원격수업의 전환이 지속되면서(남궁지영, 2020), 준비되지 않은 채 갑작스럽게 실시한 온라인 수업에 대한 불만이 제기되었다. 그 중에서 가장 큰 것은 ‘학생간 학습 격차의 증가’이다. 대학생을 대상으로 한 온라인 수업의 질 차이 발생원인 조사에서 교수자의 온라인 수업 준비 정도의 차이가 28.1%로 가장 높았고, 수업방식의 차이가 19.4%, 교수자의 정보통신기기 활용 능력의 차이가 18.9%, 수업내용과 수업방식과의 적합도 차이 18.9%로 나타났다(이용상, 신동광, 2020, p.48). 중고등학교는 EBS 동영상 자료를 온라인 수업에서 이용하도록 하였기 때문에 수업자료에서의 차이는 거의 없을 수도 있지만, 온라인 수업에서는 정보통신기기의 활용 능력의 차이에 따라 교사와 학생 간의 상호작용에 많은 차이가 발생했을 것으로 생각된다. 온라인 수업이 필연적인 상황에서, 수업의 장점을 최대한 살릴 수 있는 방안으로 온라인 개별화 수업을 실시하고 그 효과를 알아보려고 하였다. 이에, 중학교 3학년 인수분해에 대한 학생들의 오류 유형을 분석하고, 이러한 분석에 기반한 온라인 실시간 수업에서의 개별화 지도가 성취도에 미치는 영향을 알아보았다.

연구대상은 A 중학교 3학년 2개 반 54명으로 실험군 27명, 대조군 27명이다. A 중학교는 농촌지역으로 학생들이 사교육에 거의 받지 않고 학교수업에 전적으로 의존하기 때문에, 실험의 신뢰성을 높일 수 있다. 실험은 4주동안 실시되었고, 성취도 분석을 위해 사전검사, 형성평가(5회), 사후검사가 차례로 실시되었다. 성취도 검사를 통해 학생들의 성취도 변화 추이를 살펴보고, 인수분해 과정에서 생기는 오류와 오류의 원인인 오개념을 분석하였으며, 분석 결과는 다음과 같다.

첫째, 인수분해와 관련해서 오류를 나타내는 학생들이 ‘다항식으로 된 인수를 하나의 인수로 인식하지 못하는 것’과 ‘숫자는 인수가 아니다.’라는 오개념을 가지고 있는 것을 확인하였다. 인수분해에 대한 형성평가를 분석해서 학생들이 정리 또는 정의의 왜곡 오류, 기능상의 오류, 풀이를 검증하지 않는 오류, 무응답의 4가지 유형에 해당하는 오류를 범하는 것을 확인하였다. 정리 또는 정의의 왜곡 오류에는 공통인수를 묶는다는 것에만 초점을 두고 다항식의 일부 항에 공통인수를 찾은 경우에 인수분해가 끝나지 않았음에도 끝내버리는 오류로 인수의 정의가 미숙한 경우이다. 기능상의 오류는 학생들이 가장 많이 저지르지만 가장 교정이 쉬운 경우이다. 풀이를 검증하지 않는 오류는 주어진 다항식을 한번 인수분해해서 다항식의 곱의 형태가 나타나면, 인수분해를 더해야 하는 상황에서도 끝내버리는 경우이다. 무응답에 속하는 오류는 인수분해를 이해하지 못하거나, 주어진 다항식이 복잡하여 전형적인 인수분해 공식이 바로 적용되지 않거나, 적당한 항끼리 묶어서 먼저 다항식을 정리하고 이후 인수분해를 실행해야 한다거나, 인수분해 공식이 여러 개가 있어서 주어진 다항식에 어떤 공식을 적용해야 할지 어려움을 느껴서 시작조차 못 하는 학생들을 다수 확인할 수 있었다(최동원, 2020, p. 62). 실험에서 4가지 유형의 오류를 확인하였으며, 교사는 미리 사고실험에서 오류 유형별 지도 계획을 세웠으며, 계획된 방법에 따라 온라인 수업에서 오류를 나타낸 학생들에게 과제 첨착 지도, 온라인 수업에서의 간단한 채팅, 개별적인 화상회의(줌이나 카카오톡(페이스톡)) 등 상황에 맞춘 개별적 피드백을 통하여

학생들의 오류를 교정하였다.

둘째, 온라인 개별화 수업이 학업성취도에 미치는 영향을 알아보기 위해 총 7차례의 성취도 검사(사전검사 1회, 형성평가 5회, 사후검사 1회)를 실시하였으며, 사전검사의 영향력을 배제하기 위해 공분산분석을 실시한 결과 온라인 개별화 수업이 학업성취도에 긍정적 효과가 있는 것으로 나타났다. 5차례의 형성평가 동안 실험반의 성적이 점차 향상되고 두 집단 간 성적 차이도 점점 벌어졌다. 공분산분석에서는 1차부터 4차까지의 형성평가에 대해 두 집단간 차이가 나타나지 않았지만, 5차 형성평가에서는 두 집단 간 차이가 유의확률 0.001로 통계적으로 유의미한 것으로 나타났다($p < 0.05$). 사후검사에 대한 공분산 분석에서도 유의확률 0.009로 유의수준 5%에서 두 집단 간에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 즉, 5차 형성평가와 사후 평가에서 온라인 개별화 수업을 받은 학급의 학업성취도가 유의미하게 더 높았다.

실험집단과 비교집단의 수업에서의 가장 큰 차이는 실험집단에서는 학생들에게 강제적으로 과제의 오류를 분석하여 피드백을 제공하고, 비교집단에서는 자기주도적 학습을 강조하며 자발적으로 질문하는 학생들에게 피드백을 제공하였다는 점이다. 특히, 실험집단에는 교사가 오류패턴을 분석하여 강제로 피드백을 제공하였기 때문에 10가지의 인수분해 패턴을 학습하는 과정에서 오개념이 누적되지 않았지만, 비교집단은 질문을 하지 않는 학생들의 경우 오류나 오개념이 처치되지 않은 채 학습이 이루어지면서 성취도의 차이를 만든 것으로 볼 수 있다. 개별화 수업에 대한 학생들의 설문 결과 실력상승 26.2%와 피드백에 대한 감사 23.4% 라는 결과에서도 학생들이 오류에 대한 교사의 피드백이 실력상승으로 이어지고 있음을 말해 주고 있다. 수학적 개념의 누적성이 학생들의 어려움의 원인이라는 많은 연구결과를 볼 때, 본 연구결과는 인수분해 영역에만 한정되기보다는 수학의 다른 영역에도 적용될 수 있을 것으로 생각한다.

참고 문헌

- 교육부. (2015). **수학과 교육과정(제2015-74호)**. 서울:교육부.
- 교육통계 서비스. (2020). **연도별 학급당 학생수**. <https://kess.kedi.re.kr/index>
- 김부미. (2005). **수학적 오개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰**. 박사학위논문. 이화여자대학교 대학원, 서울.
- 김화경, 이미라, 권영기, 나귀수, 이해경. (2020). **중학교 수학 3**. 김포: (주)좋은책신사고.
- 남궁지영. (2020). 코로나 발생에 따른 학교의 원격교육 운영실태. **교육정책포럼** 328호 (10월호), pp.34-36. https://kess.kedi.re.kr/mobile/post/6711307?itemCode=03&menuId=m_02_03_02
- 도중훈. (2019). 제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해 및 근호를 포함한 식의 계산에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오류 분석. **한국학교수학회논문집**, 22(1), 1-21.
- 박성익. (2008). 개별화 학습의 전망과 과제. **교육방법연구**, 20(1), 1-23.
- 박수란. (2017). **중학교 3학년 학생의 소수 개념 이해**. 석사학위논문. 아주대학교 교육대학원, 수원.
- 박영배. (1996). **수학 교수·학습의 구성주의적 전개에 관한 연구**. 박사학위논문. 서울대학교 대학원, 서울.
- 성태제. (2007). **SPSS/AMOS를 이용한 알기쉬운 통계분석**. 서울: 학지사
- 조성기, 강창완, 김규근. (2008). 대조군 전-후 반복측정설계에서의 반복측정 공분산분석 고찰. **한국자료분석학회. Journal of The Korean Data Analysis Society**, 10(6), 3179-3189.

- 우정호. (2000). **수학 학습 지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.
- 유진은. (2013). 교육학 연구에서 ANCOVA에 대한 오해와 오용. **학습자중심교과교육연구**, 13(6), 27-49.
- 이용상 & 신동광. (2020). 코로나19로 인한 언택트 시대의 온라인 교육 실태 연구. **교육과정평가연구**, 23(4), 39-57.
- 이현수, 김영철, 박영웅, 김민정. (2015). 일차방정식과 일차함수에 대한 중학생들의 인식과 오류. **한국학교수학회논문집**, 18(3), 258-279.
- 정현주. (2012). **중학교 수학학습부진아의 개별화 교수**. 석사학위논문. 고려대학교 교육대학원, 서울.
- 최동원. (2020). **온라인 수업에서의 개별화 지도가 수학에 대한 성취도 및 수학 학습 태도에 미치는 영향**. 석사학위논문. 가톨릭관동대학교 교육대학원, 강릉.
- 최신애. (2017). **수열의 극한 단원에서 SOLO 분류법을 활용한 개별화 수업 사례 연구**. 석사학위논문. 이화여자대학교 교육대학원, 서울.
- 최은식, 신혜경, 정진원. (2014). 초·중등 음악교과 담당 교사의 개별화 수업에 관한 인식 및 요구. **교과교육학연구**, 18(1), 27-55.
- 최정임, 신남수. (2009). 보편적 학습설계(UDL)을 반영한 디지털 교과서 설계 원리. **한국교육공학회**, 25(1), 29-59.
- 최지선. (2003). **중등학교 수학 학습에서 나타나는 오개념에 대한 고찰**. 석사학위논문. 서울대학교 대학원, 서울.
- 한병선. (2007). 개별화를 통한 자기주도 학습의 시사점-대안학교 수업을 사례로. **한국사진지리학회지**, 17(1), 91-98.
- 한재갑. (2020). (교육있다. 2020.08.12.) **교사 80% “학생 간 학습격차 커졌다.”...2학기 전면 등교수업 시작할까?** <http://www.itdaa.kr/news/articleView.html?idxno=31355>
- Ashlock, R. B. (2006). *Error Patterns in computation: using error patterns to improve instruction*, 9th, Merrill Orentice Hall.
- Ashlock, R. B. (2013). **초등수학 교수법-수학 오개념과 오류 바로잡기** (남승인, 류성림, 권오용, 남현준, 류운재, 이목형, 이장호 역). 서울: 경문사. (원저 2009년 출판)
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics, 1970-1990*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Confrey, J. & Lipton, A. (1985). Misconceptions research and Clinical interview. *7th Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*. 38-43. ED 411127
- Hadar, N. M. & Zaslavsky, O. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(2), 3-14.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 163-172.

Error analysis on factorization and the effect of online individualization classes

Choi, Dong-won³⁾ · Heo, Haeja⁴⁾

Abstract

In this paper, we analyzed the misconceptions and errors incurred during factorization learning. We also examined whether online individualization classes had a positive effect on students' mathematical achievement. The experiment was conducted for 4 weeks (16 times in total) on middle school juniors in rural areas of Gyeonggi Province, where the influence of private extra education was small. In the class, the 'Google Classroom' was used as a LMS, the video lecture was uploaded to YouTube, and the teacher interacted with the students through "Zoom" and "Facetalk". In the online class situation, students' assignments and test answers were checked in real time through 'Google Classroom', and immediate feedback was provided to the experimental class group's students. However, for the control group students, feedback was provided only to those who desired. A total of 7 achievement evaluations were conducted in the order of pre-test, formative evaluation (5 times), and post-test to confirm the change in students' ability improvement and achievement. Through the formative evaluation analysis, it was possible to grasp the types of errors and misconceptions that occurred during the factorization process. Students' errors were divided into four types: theorem or definition distortion error, functional errors such as calculation, operation, and manipulation, errors that do not verify the solution, and no response. As a result of ANCOVA, the two groups did not show any difference from the 1st to 4th formative assessment. However, the 5th formative assessment and post-test showed statistically significant differences, confirming that online individualization classes contributed to improved achievement.

Key Words : Factorization, Misconceptions, Errors, Individualization classes, Online classes, ANCOVA(Analysis of Covariance)

Received February 18, 2021

Revised March 13, 2021

Accepted March 15, 2021

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97D70

3) Nammun Middle School (wonghhh@korea.kr)

4) Catholic Kwandong University (hjheo@cku.ac.kr), Corresponding Author