한국학교수학회논문집 제 24 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 24, Number 1, 39-57, March 2021
http://doi.org/10.30807/ksms.2021.24.1.003

‘점’과 ‘선’에 관한 수학적 분석과 교과서 분석

이규희[1)]

본 연구에서는 ‘점’과 ‘선’을 ‘크기’ 관념에 주목하여 수학적 분석을 하고, Euclid 기하의 관점에서 한국의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역과 미국 기하(Geometry)의 교과서 서술을 비교하여 분석하였다. 첫째, ‘점’과 ‘선분’을 ‘크기’ 관념에 주목하여 수학적으로 분석한 결과, 1) ‘무한소’의 인정과 배제, 2) ‘측도론’과 ‘집합론’에 따라 수학적 관점이 달라질 수 있음을 알 수 있었다. 둘째, ‘점’과 ‘선’에 관한 교과서의 서술을 Euclid 기하의 관점에서 분석한 결과, 1) 대부분의 한국의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서는 ‘크기’가 있는 점과 선을 소개 혹은 직접 그리는 학습활동을 제시한 후, 점과 선의 ‘관계’를 서술하는 방식으로 전개하고 있었으나, 2) 대부분의 미국 기하 교과서에서는 크기가 있는 점과 선을 소개한 후, ‘무정의 용어’인 점과 선에 대하여 기하에서의 ‘점은 크기가 없고’, ‘선은 두께가 없음’을 각각 명시적으로 서술하고 있음을 확인할 수 있었다. 이와 같은 고찰을 통해 본 연구에서는 한국의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서의 점과 선에 관한 서술이 잠재적으로 Euclid 기하의 관점에 해당하지 않는 수학적 직관을 생성할 가능성이 있으므로 교수학습 과정에서 이에 대한 언어적 표현의 주의가 필요함을 제안하고자 한다.

주요용어 : 점, 선, 선분, Euclid 기하, 수학적 분석, 교과서 분석

Ⅰ. 서론

여러 체계의 기하학이 있지만, 중학교 수학에서는 Euclid 기하학을 다룬다. Euclid [원론] 제 Ⅰ권의 시작이 ‘점’과 ‘선’에 관한 내용인 것처럼(David E. Joyce, 1996), 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 단원의 도입은 점과 선에 관한 소개로 되어있다(김원경 외, 2018, p. 144; 이준열 외, 2018, p. 150). 그리고 이러한 점과 선은 학생들이 다양한 상황에서 ‘직관적’으로 이해할 수 있도록 권고되고 있다(교육부, 2015, p. 34).

대부분의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1[2)]의 기본도형 내용영역 도입에서는 크기[3)]가 있는 점과 선을 소개하거나 직접 그려보는 학습활동을 제시하고, “점이 (연속하여) 움직인 자리는 선이 된다.”와 같은 점과 선의 ‘관계’에 대해 설명한 후(김원경 외, 2018, p. 144; 이준열 외, 2018, p. 150), “한 점을 지나는 직선은 무수히 많으나, 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나뿐이다.”(김원경

* MSC2010분류 : 97C70, 97D60

1) 남성중학교 교사 (narara292@snu.ac.kr)

2) 본 연구에서는 이전의 다른 교육과정에 따른 중학교 수학의 점과 선에 관한 교과서 분석은 하지 않았다.

3) 본 연구에서는 ‘크기’를 일상적 언어로서 “사물의 넓이, 부피, 양 따위의 큰 정도”(표준국어대사전)를 의미하는 용어로 사용하였다.

외, 2018, p. 145; 황선욱 외, 2018, p. 152)와 같은 Euclid의 첫 번째 공리를 기술한다. 중학교 수학의 기본도형 내용영역에서 기초가 되는 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°라는 것과, 직각 삼각형에서 피타고라스의 정리가 성립한다는 것과, 닮은 삼각형이 존재한다는 것은 본질적으로 Euclid의 평행공리와 동치인 명제로, Euclid의 평행공리는 중학교 수학의 기본도형 내용영역에서 차지하는 의미가 크다(최영기, 1999).

그러나 중학교 수학의 기본도형 내용영역이 Euclid 기하 관점에서 전개되더라도, 학생들이 경험하게 되는 기하학적 상황이 모두 Euclid 기하 체계 내에서 해석되지는 않을 수 있다[4]. 이와 관련하여 NCTM의 [학교수학을 위한 원리와 규준] 예비 보고서에서는 상급 단계에서의 기하가 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 등으로 이루어진 연역적 체계임을 인식시켜야 함을 강조하였고(NCTM, 1998, p. 211; 최영기, 1999, p. 7), NCTM의 [학교수학을 위한 원리와 규준]에서는 수학의 다른 주요 주제와 마찬가지로 기하학의 교수를 위해 "대부분 교사가 표준 예비 수학 과정(standard preservice mathematics courses)에서 경험하는 것 이상의" 지식이 필요함을 기술하였다(NCTM, 2000, p. 17).

즉, 교사의 입장에서는 공리체계를 경험한 적이 없는 학생들이 학교수학의 기하를 학습하는 과정에서 Euclid 기하 체계가 아닌 '다른' 수학적 관점의 직관을 생성할 가능성이 있음을 이해하는 것이 중요하다. 그리고 학생들이 공리체계를 경험하기 전에 생성한 비형식적인 개념 이미지는 형식적 아이디어가 소개된 이후에도 지속될 수 있으므로(Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979; Tall, 2001), 교사는 교수 학습 과정에서 학생들의 비형식적인 개념 이미지에 대하여 '지속적'으로 인지하고 있을 필요가 있다. 예를 들어, 학생들은 중학교 수학의 기본도형 내용영역에서 '크기가 있는 점' 혹은 '두께가 있는 선'의 개념을 생성하거나 '선 위의 점의 개수를 세는 활동'을 할 수도 있다. 학생들의 사고과정에서 오류와 비표준적 개념을 구분한 Ely(2007, 2010)에 의하면 이와 같은 학생들의 비형식적인 개념 이미지는 학생들의 개념적 이해 부족으로 인한 오류라기보다 다른 수학적 관점인 비표준 해석학 또는 집합론의 관점이므로 '비표준적 개념(nonstandard conception)'에 해당한다.

이에 본 연구에서는 점과 선에 관한 수학적 관점 혹은 학생들의 직관이 유일하지 않음을 논의한 여러 선행연구들(Ely, 2007, 2010, Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979; Fischbein, 2001; Tall, 1980)을 바탕으로, '크기' 관념에 초점을 맞추어 점과 선을 '수학적'으로 분석하고, Euclid 기하 관점에서 2015 개정 교육과정 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역과 미국 기하(Geometry)의 점과 선에 관한 '교과서' 서술을 비교하여 분석하고자 한다. 그리고 크기 관념에 관련된 점과 선에 관한 수학적 분석과 Euclid 기하 관점에서의 교과서 분석을 통해 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서 Euclid 기하 관점의 점과 선을 교수하기 위한 시사점을 논의하고자 한다. 본 연구의 연구문제는 다음과 같다.

1. 무한소의 인정과 배제, 측도론과 집합론의 관점에 따라 크기 관념과 관련된 점과 선분에 관한 수학적 관점은 어떻게 달라질 수 있는가?
2. 2015 개정 교육과정 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역과 미국 기하에서의 점과 선에 관한 교과서 서술은 어떤 차이가 있는가?
3. 이러한 점과 선에 관한 수학적 분석과 교과서 분석이 교수학적으로 시사하는 바는 무엇인가?

이와 같은 연구문제의 탐색은 점, 선, 면에 관한 학교수학을 무한소적 관점에서 논의한 이상은(2016)의 연구와 같은 맥락이지만, 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 교과서 서술을 분석한 점과 Cantor의 집합론의 관점을 추가하여 수학적 관점을 논의한 점에서 차별화될 수 있다. 또한 무한소적 관점에서 점과 선에 관하여 분석한 국내연구는 이상은(2016)의 연구 이외에는 찾아보기 어렵다.

4) 본 연구에서는 점과 선에 관한 수학적 관점에 따라 Euclid 기하 관점과 그 외의 수학적 관점으로 표현하였다.

따라서 본 연구는 크기 관념과 관련된 점과 선에 관한 여러 수학적 관점을 드러내고 교수학습 과정에서 점과 선에 관한 언어적 표현의 주의가 필요함을 제안하는 의미가 있을 것으로 기대한다.

Ⅱ. 크기 관념과 관련된 점과 선에 관한 수학적 분석

1. 점에 관한 수학적 분석

그리스 시대부터 이어져 온 Euclid 원론과 Pythagoras 학파는 점과 선에 대해 무한소 아이디어를 배제하였고(Błaszczyk, Katz, & Sherry, 2013; 백승주 & 최영기 2019), 19세기 초 Dedekind가 구축한 실수 체계와 19세기 말 Cantor가 발전시킨 무한 기수(infinite cardinals)를 포함한 집합론에서도 무한소를 인정하지 않았다(Tall & Tirosh, 2001). 현재의 학교수학은 무한소를 인정하지 않은 Euclid 원론, Pythagoras 학파, Dedekind, 그리고 Cantor 등과 같은 수학적 관점으로, 이러한 표준 해석학 패러다임에서 점은 크기가 없다.

그러나 표준 해석학의 관점에서 점이 크기를 갖지 않는다고 완벽하게 이해하고 있더라도, 우리는 암묵적이고 비의식적으로 점을 매우 작은 부분(small spot)과 같은 용어로 생각하기도 한다(Fischbein, 2001, p. 315). 일상적 언어로서의 점은 작지만 (둥근) 크기가 있으므로(표준국어대사전), 학생들이 형성한 수학적 점에 관한 비형식적 개념 이미지는 크기가 있을 수 있고(Tall & Vinner, 1981), 이는 중학교 수학의 기본도형 내용영역에서 계속 유지될 수 있다.

만약 ‘기하적 점’을 매우 작은 부분으로 인식하는 비표준적 직관을 ‘이론적’으로 수용한다면, 우리는 수학적으로 ‘점’을 ‘무한소 크기가 있는 분할 불가능한 대상’으로 사고할 수도 있다. 표준 해석학적 패러다임은 19세기 해석학이 산술화된 이후 정립된 하나의 수학적 이론일 뿐 유일하게 절대적으로 참인 사실은 아니기 때문이다(Błaszczyk, Katz, & Sherry, 2013; 백승주 & 최영기, 2019).

이미 알려져 있듯이 1670년대와 1680년대에 걸쳐 Leibniz는 무한소 미적분학을 발전시켰고, 18세기 Bernoulli, Euler, 그리고 Legendre와 같은 수학자들이 무한소 미적분학의 방법을 사용했으며, 1960년대 Robinson은 무한소를 수로 인정한 비표준 해석학을 정립하였다(Ely, 2007, 2010; Tall, 2001). Kleiner(2001)는 무한과 무한소가 미적분학의 발전에 중요한 역할을 했고, 미적분학의 발전은 수학적 아이디어가 발명(발견), 사용, 이해, 정당화의 과정을 거치는 것과 일치한다고 설명하였다(p. 166).

교수학습 과정에서 주의할 점은, 학교수학이 표준 해석학 패러다임 하에서 전개되더라도, 교과서에서 사용된 어떤 일상적 언어와 수학적 기호들이 자생적으로 무한소의 아이디어를 드러낼 수도 있음을 인지하는 것이다(예: Ely 2007; Ely, 2010; 최영기 & 이지현, 2015; 이상은, 2016; 백승주 & 최영기, 2019). 본 연구와 같은 관점으로 비표준 해석학의 무한소 관점에서 학교수학을 고찰한 선행연구를 참조하여 예를 들면, 1) $0.999\cdots=1$(백승주 & 최영기, 2019; 조한혁 & 최영기, 1999; Choi & Lee, 2015; Ely, 2007, 2010; Sierpinska, 1987), 2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=2$(백승주 & 최영기, 2018; Fischbein, 1978; Tall & Tirosh, 2001), 3) $f(x)=x^2$일 때 $f'(x)=2x$(장건수, 1983; Job & Schneider, 2014; Katz & Tall, 2012, Tall, 1980, 1985) 등을 학습하는 과정에서 학생들은 잠재적으로 무한소 아이디어를 생성할 가능성이 있다. 점의 크기를 무한소로 수용하는 비표준 해석학의 패러다임에서는 언급한 예들을 1) $0.999\cdots<1$, 2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots<2$, 3) $f(x)=x^2$일 때 $f'(x)=2x+\varepsilon$ (단, ε은 무한소)와 같이 수학적으로 모순 없이 사고할 수 있다.

요약하면 점의 크기는 무한소의 인정과 배제에 따라 수학적 관점이 달라질 수 있다.

2. 선분에 관한 수학적 분석

기하학적 길이는 대수적으로 수직선 위의 실수 집합에 대응되므로, 길이를 측정하는 상황에 대해 고찰하기 위해서는 실수 체계에 대해 고찰할 필요가 있다.

이와 관련하여 본 연구에서는 실수의 세기 상황을 다음과 같이 두 가지로 구분하였다(Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2012).

(1) 실수 구간의 단위 길이 세기
(2) 실수 집합에 속한 원소들의 개수 세기

기하학적 길이의 측정 활동은 실수 구간의 단위 길이를 세는 (1)과 같은 수학적 관점이지만, 형식적 수학에 입문한 적이 없는 학생들은 기하학적 길이를 측정하는 상황에서도 (2)와 같은 수학적 관점으로 사고할 수도 있다. 이에 본 연구에서는 선분에 관한 수학적 분석을 하기 위해 (1)의 상황을 측도론(measure theory)에 근거한 기하학적 길이의 '측정 활동', (2)의 상황을 집합론에 근거한 집합에 속한 원소들의 '세기 활동'이라고 표현하였다.

한편 앞장에서 분석한 것처럼 점의 크기는 무한소의 인정과 배제에 따라 다른 관점의 수학적 해석이 가능하다. 이에 이 장에서는 크기 관념에 초점을 맞추어 두 선분 AB와 CD의 길이가 $2\overline{AB}=\overline{CD}$인 상황을 무한소의 인정과 배제, 측도론과 집합론에 근거하여 해석하고자 한다.

1) 무한소를 배제한 측도론

중학교 수학 기본도형 내용영역의 기초가 되는 Euclid [원론] 제 Ⅰ권의 정의 1은 점에 관한 것이다. 다음은 Euclid [원론] 제 Ⅰ권의 정의 1부터 정의 4까지 점과 선에 관한 내용을 기술한 것이다(David E. Joyce, 1996).

Definition 1. A point is that which has no part.
(점은 쪼갤 수 없는 것이다. 점은 부분을 갖지 않는 것이다.)
Definition 2. A line is breadthless length.
(선은 폭이 없이 길이만 있는 것이다.)
Definition 3. The ends of a line are points.
(선의 끝은 점들이다.)
Definition 4. A straight line is a line which lies evenly with the points on itself.
(직선은 점들이 쭉 곧게 있는 것이다.)

이러한 Euclid [원론]의 정의들로부터 Euclid 기하 체계에서 부분이 없는 점은 측정의 대상이 될 수 없고, 선은 폭이 없이 길이를 측정할 수 있는 대상이 될 수 있음을 알 수 있다. 그리고 정의 3과 정의 4로부터 점과 선의 관계를 직관적으로 이해할 수 있다. 다시 말하면 Euclid 기하에서 점은 선 위에 있지만, 선과 달리 점은 그 길이를 측정하지 않는다.

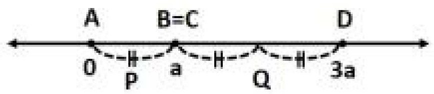
점의 길이를 0이라고 하더라도 유한 선분의 길이를 (점의 길이=0)×(점의 개수=∞)와 같이 생각하는 것도 기하 영역에서 표준적[5] 관점으로는 부적합하다. 왜냐하면, 실수 구간은 비가산(uncountable) 집

5) 서론에서 언급한 것처럼 Ely(2010)는 학생들의 비표준적 개념이 관련 지식의 이해 부족에서 기인한 오개념이

합이므로 측도론(대표적 예: Lebesgue measure)에 근거하였을 때 측정 가능한 조건의 가부번 덧셈 공리(countable additivity, 조건 (b))를 만족하지 않기 때문이다. 다음은 Lebesgue 측도 가능의 조건들(Lebesgue measurable axioms)이다(Stein & Shakarchi, 2007, pp. xviii-xix).

실수 R의 임의의 부분집합을 E라고 하자.
(a) 만약 E가 구간 $[a, b]$ $(a \le b)$이면, $m(E) = b - a$(구간 $[a, b]$의 길이)
(b) 모든 E_n들이 서로소이고, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$이면, $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$

요약하면 Euclid 기하 체계인 중학교 수학의 기본도형 내용영역에서 선은 폭이 없고 선분의 길이는 정규화한 단위 길이 1(normalize, 예: 실수 구간 $[0,1]$)을 기준으로 겹치지 않게 측정한다. 그러므로 두 선분 AB와 CD의 길이가 $2\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$인 상황은 무한소를 배제한 측도론에 근거하였을 때 $2m(P) = m(Q)$이다([그림 Ⅱ-1]).



[그림 Ⅱ-1] $2\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$

2) 무한소를 배제한 집합론

Cantor의 집합론은 집합의 크기(cardinality) 개념을 바탕으로 무한에 대한 수학적 사고 영역을 확장시킨 의미가 있다. 특히 무한 집합에 대해 서로 다른 유형이 존재함을 보여준다(Vallin, 2013, p. 22). 무한소를 배제한 집합론의 관점에서 선분을 크기 관념에 초점을 맞추어 고찰하기 위해서는 다음의 두 정의를 살펴볼 필요가 있다(Jech, 2013; Tall, 2001; Vallin, 2013).

정의. 집합의 크기(cardinality): 두 집합 A, B 사이에 $n : A \to B$인 전단사 함수 n이 존재하면, 두 집합은 같은 집합의 크기[6]

$$|A| = |B|$$

를 갖는다(Jech, 2013, p. 27; Tall, 2001, p. 213).

정의. 가산(countable): 집합 A의 크기가 유한이거나 자연수 집합 N과 대등(equipotent)이면 집합 A를 가산이라고 한다. 자연수 집합의 크기는 가산 무한(countably infinite)이라 하고, 주로 $\aleph_0$로 표기한다. 그리고 어떤 집합이 가산이 아니면 비가산(uncountable)이라고 한다(Vallin, 2013, pp. 24-25).

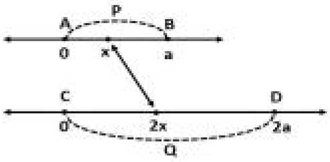
아니라 또 다른 패러다임의 수학적 이론으로 정당화할 수 있는 중요한 특징을 가진다고 하였다. 본 연구에서는 Ely(2007, 2010)의 연구에 근거하여, 표준 해석학에 일치하는 관점 혹은 직관을 표준적 관점 혹은 표준적 직관으로 표현하였고, 무한소를 인정하는 비표준 해석학에 일치하는 관점 혹은 직관을 비표준적 관점 혹은 비표준적 직관이라고 표현하였다.

6) Tall(2001)은 집합의 크기(cardinality)를 기수(cardinal number)로 표현하였으나, 본 연구에서는 Jech(2013, p. 27)를 참조하여 기수를 집합의 크기와 같은 의미로 사용하였다.

정수 집합과 자연수 집합, 유리수 집합과 자연수 집합 사이에는 각각 전단사 함수가 존재하므로, 정수 집합과 유리수 집합은 가산 무한 집합의 크기(countably infinite cardinality)를 갖는다(Vallin, 2013, pp. 24-25). 그러나 단위 실수 구간 $[0,1]$은 비가산(uncountable) 집합이다(Vallin, 2013, pp. 26-27).

한편 실수 집합의 크기는 자연수 집합의 크기 $\aleph_0$를 이용하여 $\aleph = 2^{\aleph_0}$라고 표현할 수 있고, 이는 단위 길이에 해당하는 실수 구간 $[0,1]$의 집합의 크기와 같다(Vallin, 2013, p. 27). 또한, 임의의 연속인 실수 구간과 단위 실수 구간 $[0,1]$ 사이에는 전단사 함수가 존재하므로 임의의 연속인 실수 구간 집합의 크기는 실수 구간 $[0,1]$의 집합의 크기와 같다(Tall, 1980).

요약하면 Cantor의 집합론에서 어떤 선분 위의 점의 개수는 그 선분에 대응하는 실수 구간 집합의 크기이다. 그러므로 두 선분 AB와 CD의 길이가 $2\overline{AB} = \overline{CD}$인 상황은 무한소를 배제한 집합론에 근거하였을 때 $n(P) = n(Q)$이다([그림 Ⅱ-2]).



[그림 Ⅱ-2] $\aleph = 2\aleph$

3) 무한소를 인정한 측도론

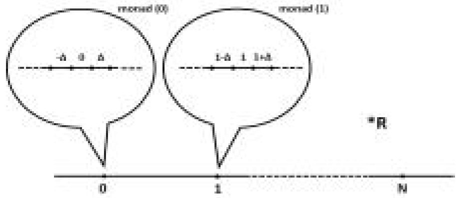
앞 장에서 언급한 것처럼 점은 수학적으로 '무한소 크기가 있는 분할 불가능한 대상'으로 사고할 수도 있다. 크기가 있는 점을 수학적 이론으로 수용하기 위해 점의 길이를 실수가 아닌 무한소 d라고 가정하자7). 그러면 $\frac{l}{d}$은 무한 측정 수(infinite measuring number)가 되고, 두 배 길이의 구간 $2l$ 위에는 두 배 많은 점들, 즉, $\frac{2l}{d}$개의 점들이 존재하게 된다(Tall, 1980).

연속체인 직선이 궁극적으로 '가장 작은 부분'인 무한소(infinitesimal atomism)로 이루어졌다는 수학적 아이디어는 앞에서 언급한 것처럼 1960년대 Robinson의 비표준 해석학(Abraham Robinson, nonstandard analysis, NSA)과 같은 수학적 관점이다. 비표준 해석학에서 무한소는 어떤 임의의 양의 실수보다도 그 절댓값이 작은 수이고, 무한대는 어떤 임의의 양의 실수보다도 그 절댓값이 큰 수이다. 실수에 무한소와 무한대를 포함하여 실수체를 확장(proper ordered extension field)하면 초실수체(hyperreal)가 된다. 초실수직선(hyperreal line) 위의 각각의 모든 실수는 자기 자신과 무한히 가까운 초실수들의 클라우드(cloud)에 둘러싸여 있는데, 이를 모나드(monad)라고 부른다. 서로 다른 실수의 모나드들은 서로 겹치지 않는다(Chen, 2019, p. 8).

1차원의 경우 무한소의 가장 기본적인 그림은 [그림 Ⅱ-3]과 같다. Δ를 무한소의 단위 길이(infinitesimal length of minim)라고 하자. 그러면 초실수직선 위의 구간들은 무한소의 단위길이를 이용하여 $\cdots, [0,\Delta), [\Delta, 2\Delta), \cdots$와 같이 표현 가능하고, 편의상 이러한 구간들의 시작점들을 $\cdots, 0, \Delta, \cdots$와 같이 나열하면 모든 무한소의 단위 길이들은 집합 $M = \{k\Delta, k \in {}^*Z\}$ (단, $^*Z$는 정수 집합 Z의 초

7) d가 아주 작은 실수라면, "1m에 몇 개의 1인치(inch)의 단위(unit)가 있는가?"에 대한 정답이 정수가 아닌 실수인 것과 유사하게, "길이 l을 길이 d로 겹치지 않게 덮기 위해 길이 d는 몇 개 필요한가?"에 대한 정답은 실수 l/d로 구할 수 있다(Tall, 1980). 그러나 점을 실수의 아주 작은 유한 구간과 동일시하는 것은 결국 표준 해석학에서의 측정 활동과 같은 맥락이므로, 본 연구에서는 논의하지 않았다.

실수로의 확장)과 같이 겹치지 않게 나열할 수 있다(Chen, 2019, pp. 8-9).



[그림 Ⅱ-3] monad (0) & monad (1) (Chen, 2019, p. 9)

표준 해석학에서 모든 유한 구간들의 측정 합(measure sum)을 구하는 것처럼, 비표준 해석학에서는 모든 초유한(hyperfinite)[8] 무한소 단위 길이들의 측정 합을 구할 수 있다. 먼저 구간 $[0,1]$의 길이를 1이라 하면(normalize), $[0,1]$ 사이의 무한소 단위 길이들은 ‘가부번’ 초유한 기수(countable hyperfinite cardinality) $\frac{1}{\Delta}$을 이용하여 $\left\{0,\ \Delta,\ \cdots,\ (\frac{1}{\Delta}-1)\times\Delta\right\}$와 같이 표현 가능하다(Goldblatt 1998, pp. 215-217; Chen, 2019, p. 11, 재인용). 그러면 같은 방법으로 $[0,2]$ 사이의 무한소 단위 길이들은 가부번 초유한 기수 $\frac{2}{\Delta}$를 이용하여, $\left\{0,\ \Delta,\ \cdots,\ (\frac{2}{\Delta}-1)\times\Delta\right\}$와 같이 표현할 수 있다. 따라서 비표준 해석학에서의 초실수 구간 $[0,2]$의 측정 길이는 $[0,1]$을 기준으로 하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[0,2]=\Delta\times\frac{2}{\Delta}=\Delta\times\frac{1}{\Delta}\times 2=[0,1]\times 2=2$$

그러므로 두 선분 AB와 CD의 길이가 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 상황은 무한소를 인정한 측도론에 근거하였을 때 무한소를 배제한 측도론의 결과와 같이 $2m(P)=m(Q)$이다.

4) 무한소를 인정한 집합론

모든 무한소의 단위 길이들이 ‘나란히 이어져 있다’고 하더라도, 실수 0과 실수 1 사이에는 ‘비가산적’으로 많은 무한소들이 있고, 모든 실수의 모나드에는 비가산적으로 많은 무한소들이 있다(Chen, 2019, p. 9). 비표준 해석학에서 초실수 구간 위의 무한소들의 개수를 세는 것은 표준 해석학에서 실수 구간의 집합의 크기를 생각하는 것과 같은 맥락이다.

또한 실수가 유리수로부터 정의되듯이 초실수는 실수로부터 정의된다. 다음과 같은 초실수의 표기(Tall, 1980, p. 275)를 통해 초실수집합의 크기를 생각할 수 있다.

$$a_{-m}\varepsilon^{-m}+\cdots+a_{-1}\varepsilon^{-1}+a_0+a_1\varepsilon+\cdots+a_n\varepsilon^n+\cdots$$

(단, ε은 무한소이고, $k>0$일 때 $\sum_{n=k}^{\infty}a_n\varepsilon^n$가 무한소이며, $k<0$일 때 무한대이다.)

8) 초유한 집합(hyperfinite set)은 유한이거나 연속체(continuum-sized)이다.

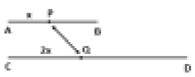
따라서 연속체인 실수 구간의 집합의 크기를 $\aleph$이라고 할 때, 연속체인 초실수 구간 집합의 크기는 다음과 같다.

$$|{}^*R| = |P(R)| = 2^{\aleph} = \aleph \text{(Tropp, 2002, p. 34)}$$

그러므로 두 선분 AB와 CD의 길이가 $2\overline{AB} = \overline{CD}$인 상황은 무한소를 인정한 집합론에 근거하였을 때 무한소를 배제한 측도론의 결과와 같이 $n(P) = n(Q)$이다.

지금까지 선분을 수학적으로 분석한 결과를 정리하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표Ⅱ-1> $\overline{AB} = [0,1]$ & $\overline{CD} = [0,2]$에 대한 수학적 관점

수학적 관점	표준 해석학 (크기가 없는 점)	비표준 해석학 (무한소 크기의 점)
측도론 	$2\overline{AB} = 2 \times 1 = 2 = \overline{CD}$	$\cdots, [0,\Delta), [\Delta, 2\Delta), \cdots$ $2\overline{AB} = 2 \times \left(\Delta \times \frac{1}{\Delta}\right) = \Delta \times \frac{2}{\Delta} = \overline{CD}$
집합론 	$\lvert\overline{AB}\rvert = \lvert[0,1]\rvert = 2^{\aleph_0} = \aleph$ $= \lvert[0,2]\rvert = \lvert\overline{CD}\rvert$	$\lvert\overline{AB}\rvert = \lvert[0,1]\rvert = 2^{\aleph} = \aleph$ $= \lvert[0,2]\rvert = \lvert\overline{CD}\rvert$

Ⅲ. Euclid 기하 관점에서의 점과 선에 관한 교과서 분석

1. 한국 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서 점과 선에 관한 서술 분석

본 연구에서는 2015 개정 교육과정에 따른 10종의 중학교 수학 1에서 '기본도형' 단원의 점과 선에 관한 교과서 서술을 분석하였다. 2015 개정 교육과정에 따른 10종의 중학교 수학 1 교과서는 출판사 이름의 가나다순으로 정렬하여 A~J로 표기하였다(<표 Ⅲ-1>). 출판년도는 모두 2018년도이다.

<표 Ⅲ-1> 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1

출판사	저자	코드
(주)교학사	고호경 외 10명	A
(주)금성출판사	주미경 외 6명	B
동아출판(주)	강옥기 외 11명	C
동아출판(주)	박교식 외 18명	D
(주)미래엔	황선욱 외 6명	E
(주)비상교육	김원경 외 8명	F
(주)좋은책신사고	김화경 외 4명	G
(주)지학사	장경윤 외 11명	H
(주)천재교육	류희찬 외 6명	I
(주)천재교육	이준열 외 8명	J

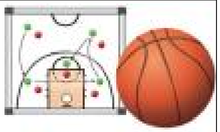
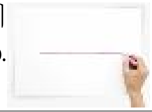
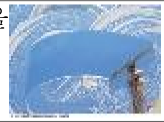
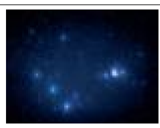
본 연구에서는 2015 개정 교육과정에 따른 10종의 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서 1) 점과 선의 도입(개념열기, 탐구하기, 탐구학습 등)과 2) 점과 선에 관한 교과서 본문의 서술을 추출하였다. 이때 점과 선의 기호 및 면에 관계된 내용은 제외하였다. 각 교과서의 구성 방식이나 단원명 및 학습 활동 명은 조금씩 상이하였지만, 모든 교과서가 실생활 맥락의 소재를 사용하여 점과 선을 도입한 후, 본문에서는 점과 선의 ‘관계’에 초점을 맞추어 서술하는 방식으로 전개되고 있음을 확인할 수 있었다.

이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

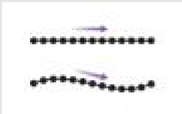
먼저, 2015 개정 교육과정에 따른 10종의 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서 점과 선의 도입을 어떤 방식으로 서술하고 있는지 살펴보면 <표 Ⅲ-2>와 같다. ‘크기가 있는 점’을 이용하여 서술한 교과서는 4종(A: 아이스하키의 퍽, B: 전광판의 전구, C: 농구 작전판의 둥근 자석, I: 밤하늘의 별)이었고, ‘직접’ 점을 찍거나 움직이는 활동을 제시하여 서술한 교과서는 4종(F: 크레파스, G: 픽셀, H: 유리 닦기, J: 샌드 애니메이션)이었으며, 컴퓨터 화면이나 도시와 비행기 항로 그림에서 나타난 점을 사용한 교과서는 2종(D: 컴퓨터 화면, E: 도시와 비행기 항로 그림)이었다. 또한 8종의 교과서(A, C, D, F, G, H, I, J)에서는 각각의 교과서에서 도입한 점을 움직여 볼 수 있도록 기술하고 있었다.

둘째, 2015 개정 교육과정에 따른 10종의 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서 점과 선에 관한 도입 이후에 전개되는 교과서 본문에서 점과 선을 어떤 방식으로 서술하고 있는지 살펴보면 <표 Ⅲ-3>과 같다. “점이 (연속적으로) 움직인 자리는 선이 된다.”와 같이 서술한 교과서는 7종(A, D, F, G, H, I, J)이었고, “선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다.” 또는 “선 위에는 무수히 많은 점이 있다.”와 같이 서술한 교과서는 7종(A, B, D, E, G, I, J)이었으며, 두 서술을 모두 제시한 교과서는 5종(A, D, G, I, J)이었다. 그리고 7종의 교과서(A, D, E, G, H, I, J)에서는 점이 움직여 선이 되는 그림(화살표 이용, <표 Ⅲ-3>의 그림 참조)을 수록하고 있었으며, 2종의 교과서(B, F)에서는 점이 모여 선이 되는 그림(<표 Ⅲ-3>의 그림에서 화살표가 없는 형태)을 수록하고 있었다. 1종의 교과서(C)에서는 이러한 서술이나 그림 없이 “한 평면 위에 있는 평면도형은 점, 선으로 이루어져 있다.”와 같이 서술하고 있었다.

<표 Ⅲ-2> 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서 점과 선의 도입

코드	중학교 수학 1 기본도형 내용영역에서 점과 선의 도입
A	아이스하키에서 사용되는 퍽이 미끄러져 지나간 자리는 어떤 모양으로 나타나는가? (고호경 외, 2018, p. 146) 
B	전광판의 각 전구를 점이라고 생각하였을 때, 전광판의 전구에 불을 켜서 그림이나 글자를 나타내는 방법에 대하여 생각해 보자. (주미경 외, 2018, p. 154) 
C	오른쪽 그림과 같은 (농구 경기) 작전 판에는 어떤 도형이 있는지 찾아보자. (강옥기 외, 2018, p. 145) 
D	컴퓨터 프로그램을 사용하여 오른쪽 그림과 같이 점과 선을 연속하여 움직여 보았다. 점을 연속하여 움직이면 어떤 모양이 만들어지는지 말해보자. (박교식 외, 2018, p. 141) 
E	오른쪽 그림에서 도시와 비행기 항로는 각각 어떻게 나타내는지 말해 보자. (황선욱 외, 2018, p. 151) 
F	종이 위에 크레파스를 이용하여 도형을 그리려고 한다. 크레파스를 세워서 움직이면 어떤 도형이 그려지는지 말하시오. (김원경 외, 2018, p. 144) 
G	디지털 이미지를 확대하면 네모 모양의 작은 점들을 볼 수 있는데, 이와 같이 이미지를 구성하는 최소 단위인 점을 픽셀(pixel)이라고 한다. 이미지를 구성하는 픽셀의 개수에 따라 이미지의 해상도가 결정된다. 다음(오른쪽 그림)과 같이 점으로 이루어진 바탕에서 점을 이어서 자신의 이름 중 한 글자를 써보자. (김화경 외, 2018, p. 141)
H	다음은 유리 닦기로 창문을 닦는 모습이다. 유리 닦기의 한쪽 끝을 점 P라 할 때, 물음에 답하여 보자. 점 P가 지나간 자리를 그려보자. (장경윤 외, 2018, p. 146) 
I	  밤하늘의 별은 하나의 □(으)로, 별이 움직인 자리는 □(으)로 볼 수 있다. (류희찬 외, 2018, p. 142)
J	샌드 애니메이션이란 모래를 유리판에 펼쳐 놓은 뒤 손으로 그림을 그리고 유리판 밑에서 빛을 투사하면서 변화하는 그림을 담아내는 영상 예술이다. 다음은 샌드 애니메이션의 두 가지 기본 기법을 나타낸 것이다. 그림과 같이 손가락을 세워서 움직이면 어떤 도형이 그려지는가? (이준열 외, 2018, p. 150) 

<표 Ⅲ-3> 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서 점과 선에 관한 서술

<table>
<tr><td>점이 (연속적으로) 움직인 자리는 선이 된다. (7종)</td><td>
(고호경 외, 2018, p. 146, 9종, 단, 화살표 없는 그림 수록: B, F)</td><td>선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다. (6종) 또는 선 위에는 무수히 많은 점이 있다. (1종, J)</td><td>한 평면 위에 있는 평면도형은 점, 선으로 이루어져 있고, (중략) 한 평면 위에 있지 않은 입체도형은 점, 선, 면으로 이루어져 있다. (1종)</td></tr>
<tr><td colspan="2">F, H (2종)</td><td></td><td rowspan="3">C (1종)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">B, E (2종)</td></tr>
<tr><td colspan="3">A, D, G, I, J (5종)</td></tr>
</table>

2. 미국 기하(Geometry) 교과서에서 점과 선에 관한 서술 분석

본 연구에서는 미국 기하 교과서에서의 점과 선에 관한 서술을 분석하기 위해 중등 단계(secondary level)의 학생들이 배우는 미국 기하 교과서 중, 1) 가장 많이 보급된 상위 10개의 미국 기하 교과서 및 교재 출판사 (https://wiki.ezvid.com/best-geometry-textbooks), 2) 출판 업계에서 보급률 및 수익률 등을 바탕으로 선정한 상위 5개 교육 출판사(https://bookscouter.com/blog/2016/06/the-biggest-textbook-publishers, https://blog.reedsy.com/largest-book-publishers), 3) Dossey, Halvorsen, & Soucy McCrone(2008)가 ICME-11에서 발표한 미국 K-12 단계의 학생들에게 보급된 교과서 출판사의 3가지 조건을 고려하여 3대 출판사의 교과서를 선정하였다. 본 연구에서 분석한 5종의 미국 기하 교과서는 출판사 이름의 알파벳순으로 정렬하여 V~Z로 표기하였고, 한국 교과서와 달리 미국 기하 교과서는 각 교과서마다 책제목과 출판년도가 달라 이를 표에 함께 제시하였다(<표 Ⅲ-4>).

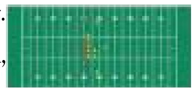
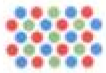
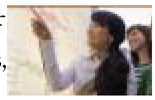
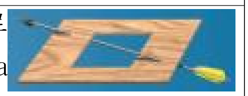
<표 Ⅲ-4> 미국 기하 교과서

책제목	출판사	저자	출판년도	코드
Geometry (Holt McDougal)	Holt McDougal : A division of Houghton Mifflin Harcourt	Edward Burger	2011	V
Geometry	McDougal Littell : A division of Houghton Mifflin	Ron Larson, Laurie Boswell, Timothy D. Kanold, Lee Stiff	2007	W
Geometry	McDougal Littell : A division of Houghton Mifflin	Ray C. Jurgensen, Richard G. Brown, & John W. Jurgensen	2000	X
Geometry (Glencoe)	McGraw-Hill Education	Carter, J. A., Cuevas, G. J. Day, R. Malloy, C. E., & Cummins, J.	2014	Y
Geometry (Common Core)	Pearson	Randall I. Charles, Basia Hall, Dan. Kennedy, Laurie E. Bass, Art Johnson, Stuart J. Murphy, Grant Wiggins	2015	Z

본 연구에서는 앞 절의 한국의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서의 점과 선에 관한 교과서 서술을 분석한 것과 같이, 미국의 5종의 각 기하 교과서에서 1) 점과 선의 도입(한국 교과서의 개념열기에 해당하는 부분)과 2) 점과 선에 관한 본문의 서술을 추출하였다. 이때 앞 절과 마찬가지로 점과 선의 기호 및 면에 관계된 내용은 제외하였다.[9]

한국 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서 점과 선을 도입하는 것처럼 미국 기하 교과서에서도 점(point/dot)[10]과 선을 도입하기 위해 실생활 맥락의 소재를 사용하고 있었다(<표 Ⅲ-5>). 그러나 본문에서는 공통으로 점과 선을 '무정의 용어'로 소개하고, 기하 영역에서의 '점은 크기가 없고(혹은 차원이 없고)' '선은 두께가 없음(혹은 1차원)'을 명시적으로 서술하는 방식으로 전개되고 있음을 확인할 수 있었다(<표 Ⅲ-6>).

<표 Ⅲ-5> 미국 기하 교과서에서 점과 선의 도입

코드	기하 교과서에서 점과 선의 도입
V	건축학자는 건물의 모델을 만들기 위해 점(point)과 선(line)의 표현들을 사용한다. 짜여진 선분들은 2008 올림픽을 위한 베이징의 국립 경기장의 빔조명을 모델링하기 위해 사용되었다. (Edward Burger, 2011, p. 6) 
W	축구 경기장의 다이어그램에서 선수들의 위치는 점(point)들로 표현된다. 축구 경기장의 야드의 선(line)들은 선(line)들을 암시한다. (Ron Larson, Laurie Boswell, Timothy D. Kanold, & Lee Stiff, 2007, p. 2) 
X	컬러 TV 그림을 볼 때, 몇 개의 다른 색깔들을 보는가? 실제로, 그림은 단 세 가지 색들(빨강, 초록, 파랑)로 만들어진다. 최고의 컬러 TV 화면은 300,000 보다 많은 아래 다이어그램과 같은 색깔 있는 점들(dots)이 모여 만들어진다. 각각의 점은 전자선이 주사될 때 빛난다. 점들(dots)은 매우 작고 매우 서로 가까이 있기 때문에 우리 눈에는 각각의 점들(dots) 보다는 전체의 이미지를 보게 된다. (Ray C. Jurgensen, Richard G. Brown, & John W. Jurgensen, 2000, p. 5)  
Y	지하철 지도에서 정류장들의 위치는 점(point)으로 나타내고 지하철의 노선은 선(line)처럼 보이는 연결된 경로로 나타낼 수 있다. (Carter, J. A., Cuevas, G. J., Day, R., Malloy, C. E., & Cummins, J., 2014, p. 5) 
Z	오른쪽 그림에서 연필과 종이로 도형을 만들어보자. 곧게 뻗은 화살로 도형을 만드는 것이 가능한가? 설명해보자. (Randall I. Charles, Basia Hall, Dan. Kennedy, Laurie E. Bass, Art Johnson, Stuart J. Murphy, Grant Wiggins, 2015, p. 11) 

9) 한국의 중학교와 같은 학교급에서 다루는 미국의 교과서 CMP에서는 기하 영역의 점과 선에 관한 서술을 찾아볼 수 없었다. 또한, 한국의 고등학교에서 다루는 교과서에서는 기하 영역의 점과 선에 관한 명시적인 서술을 찾아보기 어려웠다. 이에 본 연구에서는 기하 영역의 점과 선에 관한 교과서 서술을 비교하기 위해 한국 중학교 교과서와 미국의 중등 단계에서 배우는 미국의 기하 교과서를 선정하여 비교하였다.

10) 영어에서 point는 (공간의) 한 점을 의미하고, dot은 (특히 인쇄된 동그란) 점을 의미한다(어학사전).

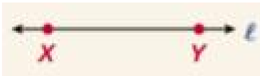
이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 미국 기하 교과서에서 점과 선을 어떻게 도입하고 있는지 정리하면 <표 Ⅲ-5>와 같다. ‘크기가 있는 점’을 이용하여 서술한 교과서는 3종(W: 축구 경기장의 다이어그램에서 선수들의 위치, X: 컬러 TV의 색깔 있는 점, Y: 지하철 지도에서 정류장들의 위치)이었고, 2종의 교과서(V, Z)에서는 건물의 모델에서 점과 선의 표현을 사용한다고 서술하거나(V), 곧게 뻗은 화살이 만들 수 있는 도형이 무엇인지 생각해 보도록 서술하고 있었다(Z). 이때 점과 선에 관한 도입에서 점을 ‘dot’으로 표현한 교과서가 있었고(X), point로 표현한 교과서가 있었다(V, W, Y).

<표 Ⅲ-6> 미국 기하 교과서에서 점과 선의 서술

코드	기하 교과서에서 점과 선에 관한 서술
V	기하에서 가장 기본적인 도형들은 다른 도형들을 사용하여 정의할 수 없는 무정의 용어들이다. 무정의 용어인 점과 선은 기하를 구성한다. <무정의 용어들> 점은 위치를 지칭하고 크기가 없다. 그것은 점(dot)으로 표현된다. 선은 두께가 없고 끝없이 확장할 수 있는 곧은 경로(path)이다.
W	기하에서 점과 선은 무정의 용어이다. 이러한 단어들은 형식적 정의가 없지만, 그것들의 의미에 대해서는 합의가 되어있다. <무정의 용어들> 점은 차원이 없다. 그것은 점(dot)으로 표현된다. 선은 1차원이다. 그것은 두 개의 화살표가 있는 선으로 표현되고, 끝없이 확장된다.
X	TV 화면 위의 각각의 점(dot)은 기하에서 가장 단순한 도형으로 배우게 될 점(point)을 암시한다. 점은 어떤 크기도 없지만, 그것은 크기가 있는 점(dot)으로 종종 표현된다. 모든 기하적 도형은 점들로 구성된다. 가장 친숙한 기하적 도형은 양쪽 방향으로 끝없이 확장하는 선(line)이다. 선의 그림은 두께가 있지만. 선 그 자체는 두께가 없다. 기하에서 점과 선은 직관적 아이디어로 수용되고 정의되지 않는다. 이러한 무정의 용어들은 다른 용어들을 정의하기 위해 사용된다.
Y	실세계 대상과 달리 점과 선은 어떤 실제의 크기가 없다. 기하에서 점과 선은 오직 예들과 묘사들로만 설명 가능한 무정의 용어들이다. 여러분은 이미 대수 영역에서 점과 선을 배웠다. 여러분은 좌표평‘면’에 그래프를 그렸고, ‘점’과 ‘선’으로 표현된 순서쌍을 찾았다. 기하에서 이러한 용어들은 비슷한 의미를 지닌다. “어떤 두 점을 지나는 직선은 정확하게 하나 존재한다.”와 같은 문장에서 ‘정확하게 하나(exactly one)’는 ‘오직 단 하나(one and only one)’를 의미한다. <무정의 용어들> 점은 위치를 나타낸다. 그것은 모양이나 크기가 없다. 선은 점들로 구성되어 있고, 두께나 폭이 없다. 어떤 두 점을 지나는 직선은 오직 하나만 존재한다.
Z	기하에서 점과 선은 무정의 용어들이다. 무정의 용어는 기하에서 다른 도형들을 정의하기 위해 사용할 수 있는 기본 아이디어들이다. 무정의 용어를 정의할 수 없음에도 불구하고, 그것들의 의미를 묘사하는 것은 중요하다. <무정의 용어들> 점은 위치를 나타내고 크기가 없다. 선은 끝없이 양쪽으로 확장되는 곧은 경로(path)로 표현되고 두께가 없다. 선은 무한히 많은 점들을 포함한다.

둘째, 점과 선에 관한 도입 이후에 전개되는 미국 기하 교과서의 본문에서 점과 선을 어떤 방식으로 서술하고 있는지 정리하면 <표 Ⅲ-6>과 같다. 5종의 교과서에서는 공통적으로 “기하에서의(In geometry) 점과 선은 ‘무정의 용어(Undefined terms)’이다.”와 같이 소개하고 있었다. 기하에서의 ‘점은 크기가 없고’ ‘선은 두께가 없음’을 명시적으로 서술한 교과서는 4종(V, X, Y, Z)이었고, ‘점은 차원이 없고’ ‘선은 1차원임’을 서술한 교과서는 1종(W)이었다. 공통으로 5종의 모든 기하 교과서에서는 선을 다이어그램으로 [그림 Ⅲ-1]과 같이 표현하고 있었다.



[그림 Ⅲ-1] 선에 관한 다이어그램 (Edward Burger, 2011, p. 6)

한편 3종의 교과서(V, W, X)에서는 기하에서의 점(point)이 ‘dot’으로 표현된다고 서술하였고, 2종의 교과서(V, Z)에서는 기하에서의 선(line)을 ‘곧은 경로(straight path)’로 서술하였다.

Ⅳ. 논의

본 연구의 Ⅱ장에서는 점과 선분을 무한소의 인정과 배제, 측도론과 집합론에 근거하여 수학적으로 분석하였고, 본 연구의 Ⅲ장에서는 한국의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역과 미국 기하 교과서의 점과 선에 관한 도입과 본문의 서술을 Euclid 기하 관점에 근거하여 비교 및 분석하였다. 본 연구에서는 이와 같은 분석 결과를 통해 다음과 같은 결론을 도출할 수 있었다.

첫째, 점의 크기에 관한 수학적 관점은 무한소의 인정과 배제에 따라 달라질 수 있고, 선분에 관한 수학적 관점은 측도론과 집합론에 따라 달라질 수 있다. 선의 두께는 무한소의 인정과 배제에 따라 달라질 수 있지만, 선분의 길이와 선분 위의 점의 개수는 무한소의 인정과 배제에 따라 다른 수학적 과정을 거치더라도 각각 측도론(가부번 덧셈 공리)과 집합론(집합의 크기 $\aleph$)에 근거하여 같은 수학적 결론에 도달한다.

둘째, 한국의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역과 미국 기하 교과서의 점과 선에 관한 도입에서는 공통으로 실생활 맥락의 소재를 사용하였음을 알 수 있었다. 그러나 한국의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역과 미국 기하 교과서의 점과 선에 관한 본문의 서술에서는 차이가 있었다. 많은 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서는 “점이 (연속적으로) 움직인 자리는 선이 된다.”는 서술과 함께 “선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있다.” 또는 “선 위에는 무수히 많은 점이 있다.”와 같이 서술하였고, 점과 선의 관계를 <표 Ⅲ-3>의 그림과 같이 표현하였다. 반면에 본 연구에서 분석한 미국 기하 교과서에서는 모두 점과 선을 무정의 용어로 소개하였고, 점은 크기가 없고 선은 두께가 없음 혹은 점은 차원이 없고 선은 1차원임을 명시적으로 서술하면서, 선을 두 점을 이용하여 [그림 Ⅲ-1]과 표현하였다.

이상으로부터 다음과 같은 점과 선에 관한 교수학적 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 점과 선에 관한 수학적 관점은 내용영역에 따라 달라질 수 있으므로 교사는 교수학적 내용지식(PCK)으로서 이를 인지하고 언어적 표현에 있어 주의할 필요가 있다. 학생들이 형성한 비형식적 개념 이미지로서 크기가 있는 점 혹은 두께가 있는 선은 무한소를 인정하는 비표준 해석학에서는 무모순이고, 선(분) 위의 점의 개수를 세는 활동은 Cantor의 집합론에서 집합의 크기에 해당한다. 따라서 교사는 크기가 있는 점, 두께가 있는 선, 선(분) 위의 점의 개수를 세는 활동과 같은 기하 영역에

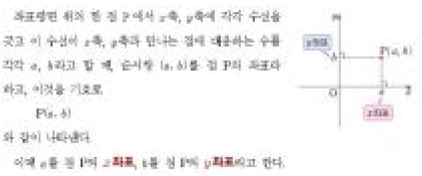
서의 학생들의 비형식적 개념 이미지를 Ely(2007, 2010)가 주장한 것처럼 단순한 오류가 아닌 비표준적 개념으로 이해할 필요가 있다.

둘째, 한국의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서의 점과 선에 관한 서술은 미국의 기하 교과서에서의 점과 선에 관한 서술에 비해 Euclid 기하 관점에 해당하는 점과 선의 개념을 생성할 가능성이 크지 않을 수 있으므로 이에 대한 주의가 필요하다.

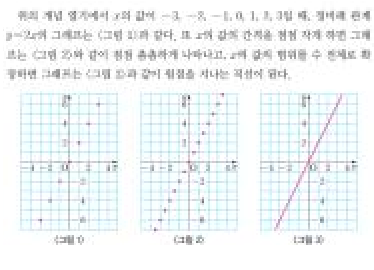
앞에서 언급한 것처럼 학생들은 형식적 수학에 입문하기 위해 비형식적 개념 이미지를 형성하는 과정을 거친다(Tall & Vinner, 1981). 학생들이 경험적으로 처음 생성한 점에 관한 비형식적 개념 이미지는 일상적 언어로서의 점일 것이다. 일상적 언어로서의 점은 작지만 (둥근) 크기를 갖는다(표준국어대사전). 그리고 크기가 있는 점의 비형식적 개념 이미지는 기하적 점의 용어(concept definition)를 학습한 이후에도 지속해서 학생들의 사고에 영향을 미치는 것으로 보고된다(Fischbein, 1979; Tall, 1980; Tall & Tirosh, 2001).

그런데 표준 해석학의 Euclid 기하 관점이 시작되는 한국의 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역에서는 미국 기하 교과서와 달리 ‘크기가 없는 점’과 ‘두께가 없는 선’을 명시적으로 서술하지 않고 있었다.[11] 따라서 학생들에게 친숙한 일상적 언어로서의 점이 수학적 점과 다를 수 있음을 설명하지 않은 채, ‘크기가 있는’ 실생활 맥락에서의 점을 사용하거나 학생들이 손가락을 세워 점을 연속적으로 움직여 선을 만드는 상황을 통해 점을 도입한다면 학생들은 중학교 수학 기본도형 내용영역에서의 점이 크기가 있다고 사고할 가능성이 있다. 중학교 수학 교과서의 기본도형 영역에서 점과 선의 관계와 더불어 ‘크기가 없는 점’과 ‘두께가 없는 선’을 명시적으로 서술하거나 이를 교사가 추가로 설명한다면, 기하 영역에서 학생들이 점과 선에 관한 Euclid 관점을 생성하는 데 도움이 될 것이다.

한편 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역 직전의 내용영역은 ‘좌표평면과 그래프’이다. 좌표평면과 그래프 내용영역에서 순서쌍의 좌표는 점으로 표현하고([그림 Ⅳ-1]) 정비례 관계의 그래프는 점점 많아지는 점들이 모여 ‘선’이 된다고 설명한다([그림 Ⅳ-2]).



[그림 Ⅳ-1] 좌표평면과 그래프에서 점에 관계된 교과서 서술(김원경 외, 2018, p. 106)



[그림 Ⅳ-2] 좌표평면과 그래프에서 점과 선에 관계된 교과서 서술(김원경 외, 2018, p. 121)

11) 미국 기하 교과서는 한국의 중학교 수학 1에 비해 상급 단계에서 다루어지므로 단순한 비교에는 한계가 있다. 따라서 논의에서는 미국 기하 교과서에서 사용한 무정의 용어에 관한 언급을 하지 않았다.

중학교 수학 기본도형 내용영역에서 집합론의 관점에 해당하는 과제가 제시되지는 않지만, 교사의 입장에서는 학생들이 '선(분) 위의 점'에 대하여 Euclid 기하 관점이 아닌 집합론의 관점을 유지할 수도 있음을 이해해야 한다. 이와 관련하여 미국 Y 기하 교과서가 기하 영역에서의 점과 선이 대수 영역에서의 용어들과 '비슷한(similar)' 의미가 있다고 서술한 부분을 주목할 필요가 있다. 대수 영역에서의 점, 선, 면이 기하 영역에서의 점, 선, 면과 같은 의미가 아니라 비슷한 의미를 갖는다면, 학생들은 두 내용영역에서의 점, 선, 면이 적어도 어떤 한 맥락에서는 차이가 있음을 인지할 수 있을 것이다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 크기 관념과 관련된 점과 선을 수학적으로 분석하기 위해 점과 선분을 무한소의 인정과 배제, 측도론과 집합론에 근거하여 고찰하고, Euclid 기하 관점에서 한국 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 1의 기본도형 내용영역과 미국 기하 교과서의 점과 선에 관한 도입 및 본문의 서술을 비교 분석하여, 이를 바탕으로 Euclid 기하 관점의 점과 선을 교수하기 위한 유의점을 논의하였다.

현재의 교과서는 그리스 시대부터 이어져 온 Euclid 기하와 Dedekind, 그리고 Cantor 등에 의해 정의된 실수 개념을 바탕으로 한 표준 해석학의 패러다임이다. 교과서의 표준적 관점에서 연속체인 기하학적 직선은 크기가 없는 점으로 이루어져 있으며 실수와 동형이다. 수직선은 연속체 크기를 다루던 기하영역과 이산량을 다루던 산술영역을 연결한 중요한 의미가 있고, 측정 관점에서의 두 선분의 길이 비교는 통약가능성과 통약불가능성의 개념으로 연결되어 대수적으로 유리수와 무리수를 구분할 수 있게 한다.

그러나 Leibniz, Bernoulli, Euler, 그리고 Legendre와 같은 수학자들이 무한소 아이디어를 사용했고, Robinson이 무한소를 인정한 비표준 해석학을 발전시켰다. 현재 교과서가 표준 해석학 패러다임이기 때문에 무한소를 소개할 공간이 없었던 것일 뿐 무한소를 인정한 비표준 해석학 패러다임이 수학적으로 완전히 배제되어야 할 아이디어는 아닐 수 있다. 또한, 무한소를 인정하더라도 선분의 길이와 선분의 크기는 각각 측도론과 집합론에 근거하여 같은 결론에 도달하므로 교사는 이러한 수학적 관점을 견지하고 학생들의 이러한 비형식적 개념 이미지를 오류가 아닌 비표준적 개념으로 이해할 필요가 있다.

유한한 인간의 경험 수준을 넘어서는 무한에 관한 비표준적 직관은 많은 수학자에게 그러했듯이 학생들에게도 자연스러운 사고의 과정일 수 있다. 그러나 점에 관한 무한소적 관점은 무한소수의 표현, 무한급수, 미분 등과 같은 내용영역에서도 드러날 수 있으며, 특히 미분에서 양의 개념에 혼란을 초래할 수 있다. 따라서 비표준적 직관을 생성할 가능성이 있는 교과서의 일상적 언어 및 수학 기호들은 명시적인 서술방식을 통해 수학적 의미를 드러낼 필요가 있으며, 교수학습 과정에서 이러한 일상적 언어 및 수학 기호들의 의미는 학생들에게 충분히 공유되어야 한다.

마지막으로 본 연구에서는 우리나라 학생들의 점과 선에 관한 인식을 경험적으로 조사하지 않은 한계가 있으므로 이와 관련된 후속 연구를 기대한다.

참고 문헌

고상숙. (2014). 그래핑 계산기를 활용한 이차곡선에서 예비교사들의 수학적, 인지적, 교수적 충실도에 관한 연구. **한국학교수학회 논문집, 14**(1), 45-71.

강옥기 외 11명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: 동아출판(주).

고호경 외 10명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: (주)교학사.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].

김원경 외 8명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: (주)비상교육.

김화경 외 4명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: (주)좋은책신사고.

류희찬 외 6명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: (주)천재교육

박교식 외 18명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: 동아출판(주).

백승주, & 최영기. (2019). 극한과 나눗셈 연산은 교환이 가능한가?. **수학교육학연구, 29**(1), 143-156.

이상은(2016). **무한소적 관점에서 점, 선, 면의 의미 고찰**. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

이준열 외 8명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: (주)천재교육.

장건수(1983). 초실수와 도함수. **연세 교육과학 제24집**, 49-57.

장경윤 외 11명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: (주)지학사.

주미경 외 6명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: (주)금성출판사.

최영기. (1999). 중학교 수학에서 평행공리의 의미. **학교수학, 1**(1), 7-17.

황선욱 외 6명(2018). **중학교 수학 1**. 서울: (주)미래엔.

Błaszczyk, P., Katz, M. G., & Sherry, D. (2013). Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking. *Foundations of Science, 18*(1), 43-74.

Carter, J. A., Cuevas, G. J., Day, R., Malloy, C. E., & Cummins, J. (2014). *Geometry(Glencoe)*. McGraw-Hill Education (UK).

Chen, L. (2019). Do simple infinitesimal parts solve Zeno's paradox of measure?. *Synthese*, 1-16.

Choi, Y. G. & Lee, J. H. (2015). The scandals of geometry and school mathematics: the parallel postulate and the equality 0.999...= 1. *For the Learning of Mathematics, 35*(1), 28-30.

Edward Burger. (2014). *Geometry(Holt McDougal)*. Holt McDougal: A division of Houghton Mifflin Harcourt

Ely, R. E. (2007). *Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus*(Doctoral dissertation). University of Wisconsin-Madison.

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 117-146.

Fischbein, E. (1979). Intuition and mathematical education. *MILABLE FROM*, 33.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 309-329.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational studies in mathematics*, 3-40.

Job, P., & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM, 46*(4), 635-646.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational*

Studies in Mathematics, 48(2-3), 137-174.

National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, Va. (1998). *Principles and standards for school mathematics: Discussion draft*. National Council of Teachers of Mathematics.

National Council for Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Randall I. Charles, Basia Hall, Dan. Kennedy, Laurie E. Bass, Art Johnson, Stuart J. Murphy, Grant Wiggins. (2015). *Geometry(Common Core)*. Boston, MA: Pearson.

Ray C. Jurgensen, Richard G. Brown, & John W. Jurgensen. (2000). *Geometry*. McDougal Littell: A division of Houghton Mifflin.

Ron Larson, Laurie Boswell, Timothy D., Kanold, Lee Stiff. (2007). *Goemetry*. McDougal Littell: A division of Houghton Mifflin.

Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2005). *Princeton Lectures in Analysis III: Real Analysis*. Princeton University Press.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 271-284.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 199-238.

Tall, D., & Tirosh, D. (2001). Infinity - the never-ending struggle. *Educational studies in Mathematics, 48*(2-3), 129-136.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 151-169.

Tropp, J. A. (2002). *Infinitesimals: History & Application*. University of Texas, Texas, Austin.

Vallin, R. W. (2013). *The elements of Cantor sets: with applications*. Hoboken, NJ: Wiley.

Van De Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2012). *Elementary and secondary school mathematics: Teaching with developmental approach*. (S. Durmuş, Trans.) Ankara: Nobel Academic Publishing.

https://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html(David E. Joyce. (1996). Elements.)

https://bookscouter.com/blog/2016/06/the-biggest-textbook-publishers

https://blog.reedsy.com/largest-book-publishers

https://connected.mcgraw-hill.com/connected/login.do

https://stdict.korean.go.kr/search/searchView.do

Mathematical analysis and textbooks analysis of 'point' and 'line'

Yi Gyuhee[1)]

Abstract

In this study, mathematical analysis is conducted by focusing to the 'size' of the 'point' and the 'line'. The textbook descriptions of the 'point' and the 'line' in the geometry content area of middle school mathematics 1 by the 2015 revised Korean mathematics curriculum and US geometry textbooks were compared and analyzed between. First, as a result of mathematical analysis of' 'the size of a point and a segment', it was found that the mathematical perspectives could be different according to 1) the size of a point is based on the recognition and exclusion of 'infinitesimal', and 2) the size of the segment is based on the 'measure theory' and 'set theory'. Second, as a result of analyzing textbook descriptions of the 'point' and the 'line', 1) in the geometry content area of middle school mathematics 1 by the 2015 revised Korean mathematics curriculum, after presenting a learning activity that draws a point with 'physical size' or line, it was developed in a way that describes the 'relationship' between points and lines, but 2) most of the US geometry textbooks introduce points and lines as 'undefined terms' and explicitly states that 'points have no size' and 'lines have no thickness'. Since the description of points and lines in the geometry content area of middle school mathematics 1 by the 2015 revised Korean mathematics curriculum may potentially generate mathematical intuitions that do not correspond to the perspective of Euclid geometry, this study suggest that attention is needed in the learning process about points and lines.

Key Words : point, line, segment, Euclid geometry, mathematical analysis, textbook analysis

Received December 09, 2020
Revised March 04, 2021
Accepted March 23, 2021

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97D60

1) Namsung Middle School (narara292@snu.ac.kr)