韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育> J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.1.77
2021. 2. 제 60권, 제 1호, 77-110. February. 2021, Vol. 60, No. 1, 77-110.

수업 설계안 구조 변화에 따른 예비교사들의 수업 설계 특징 분석

이선영(백석고등학교, 교사)・한선영(성균관대학교, 교수)†
†교신저자

The characteristics of lesson design prepared by pre-service teachers according to the structural changes of lesson design template

Lee Seon Young(Baekseok high school, math1347@naver.com)
Han Sunyoung(Sungkyunkwan University, sy.han@skku.edu)†
†Corresponding Author

초록

본 연구는 학생의 수학적 사고를 주제로 한 참여형 수업을 학생 사고기반 수학 수업이라 명하고, 이러한 수업을 지원하는 방법으로 수업 설계에 주목했다. 교사가 학생 사고기반 수학 수업을 실천하기 위해서는 학생들의 사고와 그에 대한 교육적 피드백을 여러 측면에서 예상할 뿐 아니라, 예상한 학생 답변을 의도적으로 배열하고 그것들을 목표와 연결하는 방법을 미리 계획할 필요가 있다. 학교에서 일반적으로 사용되는 3단계 수업 설계안은 교사가 수업의 도입, 전개, 그리고 정리에 따라 일련의 수업 계획을 기록해볼 수 있는 틀을 제공하지만, 외현적 수업 활동에만 초점을 두게 한다는 제한점이 있다. 이에 본 연구는 3단계 수업 설계안을 보완한 학생 사고기반 수업 설계안을 제시했다. 그리고 학생 사고기반 수학 수업을 위한 과제, 학생 참여, 그리고 교사 역할에 관련된 문헌 검토 결과를 종합한 개념적 틀을 렌즈로 하여 예비교사들이 작성한 3단계 수업 설계안과 학생 사고기반 수업 설계안의 차이를 분석했다.

Abstract

In this study, a student participation-centered class based on student mathematical thinking as a the meaningful subject was called a student thinking-based math class. And as a way to support these classes, I paid attention to lesson design. For student thinking-based mathematics classes, it is necessary not only to anticipate student thinking and teacher feedback, but also to plan in advance how to properly arrange and connect expected student responses. The student thinking-based lesson design template proposed in this study is a modified three-step(introduction, main topic, summary) lesson design template. The reason for revising the existing design template is that it has limitation that it cannot focus on mathematical thinking. Using the conceptual framework of student thinking-based mathematics lesson as a lens, the difference between the three-step lesson design prepared by pre-service teachers and the students' thinking-based lesson design prepared by the same pre-service teachers was analyzed. As a result of planning lessons using the student thinking-based lesson design, more attention was paid to the cognitive and social engagement of students. In addition, emphasis was placed in the role of teachers as formative facilitator. This study is of significant in that it recognizes the importance of classes focusing on students' mathematical thinking and provides tools to plan math classes based on students' thinking.

---

* 주요어 : 수학적 사고, 수업 설계
* **Key words** : mathematical thinking, lesson design
* 이 논문은 성균관대학교의 2020학년도 성균학술연구비에 의하여 연구되었음
* This article was researched by Sungkyunkwan University's 2020 Sungkyunkwan Academic Research Fund
* **Address**: Department of Mathematics Education, Sungkyunkwan University, Seoul, Korea
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97D40
* **Received**: January 11, 2021 **Revised**: February 2, 2021 **Accepted**: February 2, 2021

Ⅰ. 서론

학생들이 높은 수준의 수학적 사고를 함양하여 건설적인 민주시민으로 성장토록 하는 것은 수학교육의 중요한 목표이다(Han, Kim, & Kwon, 2018). 이 목표를 위해 교사는 먼저 학생의 다양한 수학적 사고에 주목해야 하며, 학생의 의미 있는 사고를 중요한 자원으로 활용하는 수학 수업을 계획 및 실천해야 한다(Choy, 2014; Jacobs & Empson, 2016; Yang & Rick, 2013). 교사가 학생의 수학적 사고를 수업 자원으로 활용하는 것이 수학에 대한 학생들의 명확한 이해를 구축하여 효과적인 학습을 돕는다는 것이 이미 여러 연구를 통해 입증되었다(Anthony, Hunter, & Hunter, 2015; Franke et al., 2009; Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Stokero, Rupnow, & Pascoe, 2017). 그러나 아직도 많은 교사가 수학 수업에서 학생들의 의미 있는 수학적 사고에 주목하는 데 실패하고 수학 사실과 절차에 관한 기계적인 학습을 반복하고 있다(Franke et al., 2009). 이것은 수학교육에서 가장 도전적이고 어려운 것이 학생의 사고에 초점을 둔 수업으로의 변화임을 보여준다.

교사들의 성공적인 수업 변화를 지원하는 하나의 방법으로 수업 설계(lesson design)에 주목할 필요가 있다. 수업 설계는 특정 주제와 관련된 학생의 현재 학습 위치에서 교사가 원하는 학습 목표 지점까지 개별적인 학생의 성장을 돕는 전반적인 과정을 구체적으로 계획하는 전문적 활동이다(Park, 2018; Choi, 2020). 즉, 수업 설계는 과제 선택과 재구성에서부터 유동적인 수업 상황과 학생에 대한 이해, 교수법, 평가의 구성 등과 같이 여러 수학교육 분야를 연결하는 일종의 비구조적인 문제해결과정이라 할 수 있다(Jonassen, 2008). 그러나 교사들은 수업 설계를 형식적인 문서 작업으로만 인식하는 경향이 있다(Park, 2007; Jeong, 2009). 대체로 교사들은 수업 설계 절차에 따라 수업을 구체화할 필요성을 느끼지 못하고(Carr-Chellman, Marr & Roberts, 2002), 본인의 교수 경험에만 의존하여 수업하는 경우가 많다(Moallem, 1993).

수학교사의 누적된 수업 경험은 수학 내용과 학생들을 이해하고, 적절한 교육적 대처를 할 수 있도록 도울 수 있다. 또한, 교사는 수업 설계안을 작성하지 않더라도 미리 본인의 수업 이미지를 그려보는 경우가 많다(Schoenfeld, 2010). 그러나 예비교사나 수업 경험이 적은 교사는 수업에서 직면하는 다양한 상황에 대한 교육적 판단과 대처를 제대로 하지 못하는 경우가 많으며(Kwon et al., 2013; Kim & Lee, 2017; Lee & Lee, 2015), 수업 경험이 많더라도 수업에서 효과적으로 학생들의 수학적 사고에 주의를 기울이고 적절한 발문을 제시하는 것에 어려움을 겪을 수 있다(Pang, 2006). 따라서 교사가 정답 외의 다양한 학생의 수학적 사고와 그에 대한 교육적 대응법을 구체적으로 예상해볼 수 있는 수업 설계를 지원하는 것은 교사가 실제 수업에서 학생의 사고에 주목하여 이를 활용하는 것이 중요하다는 인식을 확고히 하고, 학생의 사고에 초점을 둔 수업을 성공적으로 실천하도록 도울 수 있을 것이다(Smith & Stein, 2011; Taylan, 2018).

학생의 의미 있는 수학적 사고에 주목하여 수업을 효과적으로 이끌어가는 교사의 수업 전문성은 수업 경험과 경력만으로 저절로 형성되지는 않는다(Han, Kim, & Kwon, 2018). Han 외(2018)는 교사 한 명이 경험할 수 있는 수업이 한정적이며 외부적 중재 없이 개인의 노력만으로 학생의 사고에 초점을 둔 수업 전문성 향상은 어렵다고 지적했다. 학생의 사고에 초점을 둔 구체적인 수업 설계는 교사가 복합적인 정보가 가득한 수업 상황에서 학생의 수학적 사고에 효과적으로 주목하고 이를 교육적으로 이용할 수 있도록 도움으로써 교사의 수업 전문성 향상과 수업 변화를 지원할 수 있다(Choy, 2014). 그러므로 수업 설계가 형식적인 문서 작성에서 실제적인 수업 개선을 돕는 과정으로 교사 인식을 전환할 방법에 관한 연구가 필요하다.

본 연구는 수업 설계가 학생의 유의미한 수학적 사고 과정에 주목하기 위한 준비와 사전 경험을 도움으로써 교사의 수업 전문성 개발과 수학 수업의 변화를 지원할 수 있다는 Choy(2014)의 연구에 기반한다. 그러나 기존의 수업 설계안에 관한 Choi(2020), Kim, Jeon(2017) 등의 연구 결과를 보면 대체로 학교 현장에서 사용되는 수업 설계안이 도입, 전개, 정리의 단계에 따른 교사와 학생의 행동에 초점을 두어 교사가 학생의 수학적 사고를 충분히 고려하여 수업을 계획하는 데 제한적이었다. 따라서 이 연구에서는 먼저 학생의 사고를 중요한 자원으로 이용하는 수업의 중요성을 인식시키고 이러한 수업을 성공적으로 실천하도록 지원하는 도구로 학생 사고기반 수업 설

계안(lesson design template for students' mathematical thinking)을 제안한다. 학생 사고기반 수업 설계안은 이전 수업 설계 연구에서 수집 및 확인된 설계안의 공통적인 구조를 수정한 것이다.

본 연구는 학생 사고기반 수업 설계안이 교사가 수업을 준비할 때 학생의 다양한 수학적 사고와 그에 대한 교육적 대응법에 주의를 기울이게 하는 특정한 행동유발성(affordance)을 내포하는가, 즉 교사가 학생의 사고에 초점을 둔 수업을 계획하도록 도울 가능성이 있는가를 조사하는 데 목적이 있다. 이를 위한 연구 질문은 다음과 같다.

첫째, 수업 설계에서 예비교사가 선택한 수학 과제는 어떤 특징을 가지는가?'

둘째, 수업 설계안의 유형에 따라 예비교사가 계획한 학생 참여는 어떤 특징을 가지는가?

셋째, 수업 설계안의 유형에 따라 예비교사가 계획한 교사 역할은 어떤 특징을 가지는가?

Ⅱ. 수업 설계와 수업 관행

1. 수업 설계

1) 수업 설계와 수업 설계안

교육 심리학에 뿌리를 둔 수업 설계(lesson design)는 수업 개발과 실천, 평가, 그리고 개선을 연구하는 하나의 학문 분야이다(Brown & Green, 2016). 수업 설계란 무엇인가와 관련하여 Jeong(2009)은 교육과정에 대한 정확한 고찰, 학습수준과 학생 경험, 교사의 피드백, 그리고 학생의 수업 참여를 유도하는 체계적인 과정이라 정의했으며, Park(2015)은 수업이 어떤 모습이어야 하는가에 대한 절차와 단계라 정의했다. 다시 말해, 수업 설계는 수업의 질(quality)을 보장하기 위해 배움과 가르침에 대한 이론을 이용하여 일련의 수업을 체계적으로 개발하는 과정이라 할 수 있다. Kang(2018)은 수업 설계가 일정한 틀에 따라 정해진 결과를 만들어내는 단순한 활동이 아니라 여러 상황과 조건을 고려하여 새로운 결과물을 만들어내는 창의적 활동임을 강조했다. 이것은 수업 설계가 정해진 틀에 따라 어떤 결과물을 만드는 것이 아니라 유동적인 수업 상황과 조건을 고려하여 수업의 세부 과정을 조율(orchestrating)하는 것임을 의미한다. 따라서 본 연구는 수학 수업 설계란 교사가 수학에 대한 견고한 이해를 위해 주어진 수업 상황과 조건을 고려하여 과제, 학생의 참여 방법, 그리고 교사의 역할을 구체적으로 조율해가는 과정이라 정의한다.

수업 설계안(lesson design template)은 연구마다 수업지도안, 교수·학습 지도안, 교수·학습과정안 등과 같이 다양한 이름으로 불린다. 본 연구에서는 편의상 수업 설계안이라 할 것이며, 이전 문헌에서 수업지도안 등과 같은 용어로 연구된 경우에도 수업을 계획하는 하나의 틀을 지칭하는 경우는 용어에 따른 혼란을 줄이기 위해 수업 설계안이란 용어로 바꾸어 기술할 것이다. 수업 설계가 한 차시, 하나의 단원, 또는 학기 등의 폭넓은 범위에서 일련의 수업을 개발, 평가 및 개선하는 과정이라면 수업 설계안은 수업 설계를 안내하기 위해 하나의 틀(frame)을 제공하는 도구이다. Kim, Lee(2017), Jeong(2009), Choi(2020) 등의 연구자들은 수업 설계안을 교사가 수업을 설계하면서 의도한 바를 집약적으로 나타내는 지표로 보았으며, 교사의 수업 설계의 특징을 살펴보기 위해 교사들이 작성한 수업 설계안을 분석하였다.

2) 수업 설계안(lesson design template)

(1) 3단계 수업 설계안

일반적으로 학교 현장에서 사용되는 수업 설계안은 도입, 전개, 정리의 3단계로 명확히 구분된다(Kim & Jeon, 2017; Choi, 2020). 이 3단계 수업 설계안에서 단계별로 어떤 활동이 계획되어야 하는지는 [Table 1]에 정리되어 있다. 먼저 도입 단계에서는 동기유발, 학습목표제시, 전시학습 확인을 위한 방법을 계획한다. 그리고 전개 단계에서는 학습할 내용과 학생들의 수업 관련 활동, 그리고 주어진 상황을 고려한 학습자료를 계획한다. 마지막으로 정리 단계에서는 학습 내용의 정리, 평가 내용과 방법, 그리고 다음 차시와 어떻게 연결할 것인가를 계획한다.

학교 현장에서는 도입, 전개, 그리고 정리의 3단계로 구성된 수업 설계안을 도구로 사용하는 경우가 많다. 예비교사의 수업 설계를 조사한 Choi(2020)의 연구에서 예비교사 48명은 모두 3단계로 구성된 일반적인 수업 설계안을 도구로 하였다. 또한, 수학교사의 수업 설계 역량을 분석하기 위해 2010년부터 2016년 사이에 작성된 중학교 수업지도안을 수집한 Kim, Jeon(2017)의 연구를 보면 이

들이 수집한 수업 설계안도 3단계 수업 설계안의 형태로 작성되어 있음을 확인할 수 있다. 3단계 수업 설계안은 학습해야 할 단원과 주제, 학습 목표, 학습 대상을 간단히 기술한 후, 수업의 도입, 전개, 정리에 교사와 학생이 다룰 내용과 활동, 예상 소요 시간, 필요한 도구를 기술하게끔 되어있다. 이러한 형태의 수업 설계안은 수업의 체계적인 관리 측면만 강조되며, 학교 현장에서의 실제 교사의 암묵적 또는 명시적 수업 설계 활동과도 거리가 있다(Park, 2018).

[Table 1] Major activities in the lesson step(Choi, 2020, p.164)

step	main activity	details
Introduction	Motivation	Facilitate learning mood and motivation
	Presentation of learning goals	Present the learning goals to be achieved in this lesson
	Checking previous learning	To achieve lesson goals, connect what students have learned before with what they have learned in this class
Main topic	Presenting what to learn	Present concepts and examples of learning content according to the goal
	Student participation activities	Group study, individual study, etc. corresponding to the lesson content
	Presentation of learning materials	Present materials that consider learning content, student characteristics, and learning environment
Summary	Summary of learning contents	Summarize and organize learning
	formative assessment	Activities that apply the learned content in various situations
	Presentation of tasks and supplementary materials	Present tasts and supplementary materials appropriate for practice to master learning
	Announcing the next class	Announcing the next class

(2) Thinking Through a Lesson Protocol(TTLP)

Smith 외(2008)가 제안한 수업 설계 도구인 Thinking Through a Lesson Protocol(TTLP)은 높은 수준의 수학 과제에 대한 학생 반응을 예상하고, 학생의 수학적 사고를 촉진할 수 있는 질문을 준비하도록 안내한다. 교사들이 학생들의 응답에 대한 전문적 판단과 효과적인 대처에 어려움을 겪고 있다고 지적한 Stein 외(2009)는 TTLP가 수업에서 교사들이 직면하는 어려움을 예상하고 준비할 수 있도록 안내하는 유용한 도구라고 주장했다.

TTLP는 수학 과제의 선택 및 결정, 학생들의 과제 탐구 지원, 그리고 과제 공유 및 토론의 세 단계로 구성된다. 첫 번째 단계, 수학 과제의 선택 및 결정에서 교사는 수업의 목표를 구체적으로 정하고 이전의 지식과 현재 과제와의 연결성, 학습해야 할 개념과 아이디어, 교사가 해야 할 질문, 과제 해결을 위한 다양한 방법과 어려움, 그리고 과제 맥락의 이해 정도를 점검하는 방법을 계획한다. 두 번째, 학생의 과제 탐구 지원 단계에서는 학생들이 개별로 수행할 때와 모둠으로 수행할 때 어떤 질문을 할 것인지, 과제에 지속적인 참여를 지원할 때는 어떻게 할 것인지를 구체적으로 계획한다. 마지막으로 세 번째, 과제 공유 및 토론 단계에서는 수업목표 달성을 위해 토론을 어떻게 조정할지, 학생들의 수학적 사고를 어떻게 공유할지, 그리고 이 수업을 다음 수업과 어떻게 연결할 것인지를 계획한다.

TTLP는 선택된 과제의 특징, 과제에 대한 학생들의 수학적 사고와 그 대응 방법, 그리고 모든 학생의 수학적 이해를 돕기 위한 교사의 역할을 구체적으로 안내해준다. TTLP의 세부 사항을 살펴보면 수업 설계에서 다음 세 가지가 중요함을 알 수 있다. 첫째, 교사가 학생의 수학적 사고를 기반으로 수업을 설계하고자 할 때 학생의 오개념과 수학적 아이디어를 확인할 수 있는 과제를 채택 또는 재구성해야 한다. 둘째, 과제에 대한 학생들의 지속적인 인지적 참여에 대해 고려해야 한다. 셋째, 학생들이 과제를 탐구하도록 격려하고 탐구 결과를 모든 학생의 이해를 돕기 위해 전체 토론으로 연결하는 교사의 역할이 중요하다.

TTLP의 준거에 기반한 3명의 초등학교 교사들의 수업 설계안의 특징과 실제 수업과의 연관성을 연구한 Kim(2014)은 TTLP가 교사들이 과제에 대한 학생들의 접근방식과 오개념, 어려움 등을 기록하고 교육적 지원을 위한 발문을 준비하는 데 도움이 되었다고 보고했으며, 학생의 사고에 초점을 두어 수업을 구체적으로 계획하는 것이 교사의 수업 전문성 향상을 위한 방안이 될 수 있다고 주장했다. 그러나 TTLP는 준거 중심이므로 교사들의 효율적인 기록을 위해서는 TTLP의 준거가 반영된 수업 설계안이 필요하다(Kim, 2014).

(3) Lesson Plan Template(LPT)

Smith & Cartier(2009)가 TTLP를 기반으로 만든 Lesson Plan Template(LPT)은 과제, 수업 지원(instructional support), 학습 목표, 증거의 네 가지 요소에 초점을 두고 있다(as cited in Smith & Stein, 2011). 과제는 학생들이 할 주요 활동, 접근 방법과 어려움에 대한 예상을 의미한다. 교수적 지원은 어떤 도구나 자원을 활용할지, 그리고 교사의 형성적 피드백을 위한 질문을 의미한다. 학습 목표는 수업 활동을 통해 어떤 수학적 이해를 할 수 있을지를, 그리고 증거는 수업목표와 관련하여 이해의 증거로 무엇을 말하고, 행하고, 산출할 것인지를 예상하는 것이다(Smith & Stein, 2011).

LPT는 과제를 통해 달성하고자 하는 학습 목표, 과제에 대한 학생들의 다양한 사고와 그것에 따른 교사의 대응법에 주목하여 수업을 계획할 수 있도록 안내한다. 그러나 LPT는 수업의 시간적 흐름에 따라 어떻게 진행할 것인가를 전체적으로 그려보기는 어려울 수 있다.

2. 수업 관행(practice)

Smith & Stein(2011)은 그들의 저서 '5 practice for orchestrating productive mathematics discussion'에서 학생들의 수학적 사고에 기반한 수업을 지원하는 교사의 교수학적 행동(moves)을 5가지 관행(5 practice)으로 설명했다. 5가지 관행은 '교사가 학생들에게 배움에 대한 책임을 전가하는 것'이 아니라 '학생들이 수학에 대한 생산적인 논의를 할 수 있도록 수업을 체계적으로 설계하는 교사의 역할을 강조'한다.

5가지 관행은 첫째, 학생들의 현재 수준에서 도전할 만한 과제에 대하여 가능한 학생 반응을 예상하기(anticipating), 둘째, 학생들이 짝 또는 모둠으로 활동하는 동안 실제 학생의 반응을 점검하기(monitoring), 셋째, 전체 토론에서 발표할 학생들을 선정하기(selecting), 네번째, 발표할 순서를 계열짓기(sequencing), 그리고 다섯번째, 학생들의 반응을 연결하고, 그 반응을 수업목표와 연결하기(connecting)로 구성된다(Smith & Stein, 2011).

예상하기는 교사가 수업을 계획하는 단계에서 수학 과제에 대한 정답뿐 아니라 학생들이 사용할 수 있는 다양한 접근법에 대해 고려해보는 것이다. Smith & Stein(2011)은 학생의 수학적 사고를 이용하여 수업목표를 달성하기 위해서는 예상하기를 통해 수업을 구체적으로 계획해야 한다고 하였다. 그러나 Kim, Lee(2017), Pang, Kim(2013)이 '교사가 수업을 계획할 때 학생의 다양한 수학적 사고를 예상하는 데 어려움을 겪으며, 학생의 수학적 사고에 대한 교육적 대응 방안을 구체적으로 예상하지 못했다.'라고 보고한 것처럼, 학생의 사고를 예상하기는 교사들에게 쉽지 않은 일이다.

일반적으로 교사들은 학생들이 과제를 가지고 활동하는 동안 교실을 순회하거나 과제 해결에 어려움을 겪는 학생들을 관찰하고 도움을 준다. 그러나 Smith & Stein(2011)은 점검하기 단계에서 교사가 단순히 학생들의 활동을 관찰하는 것이 아니라 학생들의 사고를 명확히 하고 중요한 것에 주의를 기울일 수 있도록 돕는 발문을 준비해야 한다고 강조하였다. 점검하기는 교사의 선정하기와 연결된다. 선정하기는 교사가 수업목표에 도달하기 위해 의미 있는 학생들의 수학적 사고를 포착하여 발표할 학생을 선정해 두는 것을 말한다(Smith & Stein, 2011). 교사의 점검하기와 선정하기는 교사의 노티싱(noticing)과 밀접하게 연관되어 있다. van ES & Sherin(2002)에 의해 처음 제시된 교사의 노티싱(noticing)은 교사가 복잡한 수업 상황에서 의미 있는 학생의 수학적 사고를 포착하고 학생의 사고에 대한 이해를 기반으로 적절한 교육적 대응 방법을 결정하는 것을 말한다(Jacobs et al., 2010). 교사가 수업 중에 학생의 의미 있는 수학적 사고에 주목하여 점검하고 선정하려면 수업을 계획하는 동안 학생들의 수학적 사고를 다양하고 구체적으로 예상하는 것이 중요하다. Choy(2014)는 수업 중에 교사가 학생들의 수학적 사고를 점검하고 선정하는 것은 매우 도전적이므로 수업을 계획하는 동안 교사의 주목하기(noticing)를 지원해야 한다고 주장했다.

교사가 의도한 목표를 달성하기 위해 발표할 학생의 답안을 사고 수준이나 특징에 따라 의도적으로 배열하고(Smith & Stein, 2011), 학생들이 논의한 수학적 아이디어들과 중요한 수학 개념을 연결하도록 도와야 한다(Smith & Stein, 2011). 특히, Smith & Stein(2011)은 연결하기(connecting)가 5가지 수업 관행 중에서 교사들에게 도전적이라고 지적했다. 이것은 교사들이 수업을 실천하기 전에 과제와 관련된 다양한 학생들의 수학적 사고를 예상해야 하며, 이와 함께 예상된 학생들의 수학적 사

고 중에서 어떤 것을, 어떤 순서로 논의할지, 그리고 어떻게 연결할 것인가를 구체적으로 설계할 필요가 있음을 보여준다.

Ⅲ. 학생 사고기반 수업 설계안

학생의 수학적 사고에 기반한 수학 수업을 설계하는 과정에서 교사는 일련의 수업과 관련된 사항을 종합적으로 고려해야 한다. 수업의 내용과 목표, 수업 과제, 수업 도구(예: 미니 화이트보드, 대수타일 등), 과제에 대한 학생들의 반응과 대응법, 그리고 평가 등이 수업 설계에서 고려되어야 할 사항들이다. 그러나 도입-전개-정리에 따라 기술하도록 구성된 3단계 수업 설계안은 교사들이 학생의 사고에 초점을 둘 기회를 놓칠 수 있다는 한계점이 있다. 실제 학교 현장에서 수업 설계를 위해 흔히 사용되는 3단계 수업 설계안은 교사들에게 학생들의 사고에 초점을 두도록 하기보다는 수업의 내용과 교사의 행동만 기술하도록 유도했다(Kim & Jeon, 2017). 따라서 이를 보완하여 학생 사고를 중심으로 한 수학 수업 계획과 관련된 행동유발성(affordance)을 가진 설계안이 필요하다.

본 연구는 Smith & Stein(2011)이 제안한 5가지 관행과 TTLP와 LPT에서 학생의 수학적 사고를 위해 강조한 구성 요소를 기반으로 3단계 수업지도안을 보완하여 학생 사고기반 수업 설계안을 개발했다(Table 2). 전반적인 영역은 Smith & Stein(2011)의 5가지 수업 관행을 토대로 하며, 수업 구조화와 수업 흐름 점검하기에서 학생 예상 반응과 교사 발문은 TTLP 및 LPT를 참고하였다.

학생 사고기반 수업 설계안이 3단계 수업 설계안과 비교하여 수정 및 보완된 사항은 다음과 같다. 첫째, 교사가 교육과정의 성취기준을 먼저 확인하고 이를 토대로 구체적인 수업목표를 설정할 수 있도록 수업목표 영역을 교육과정과 수업목표로 구분했다. 이것은 교사가 먼저 성취기준을 확인하고 그것을 구체화하여 수업목표를 기술하게끔 안내한다. 3단계 수업 설계안의 학습 목표 영역에 성취기준이나 교사용지도서의 학습 목표를 적게끔 할 수 있으며, 이것은 하나의 수업의 구체적인 방향을 안내하기에는 광범위하다. 그러나 구체적인 수업목표를 세우는 것은 교사가 학생 사고에 관련된 증거를 수집하고 수업의 방향을 결정하는 중요한 지표가 된다는 점에서 중요하다(Smith & Stein, 2011). TTLP의 과제 선택 및 결정과 LPT의 학습 목표에는 수업을 통해 학생들이 어떤 이해를 얻을 수 있는지 교사가 구체적인 수업목표를 세워야 함이 강조되어 있으나 교사의 기록을 안내할 수 있는 틀이 제시하지는 않았다.

둘째, 교사들이 도입, 전개, 정리 단계에서 과제 특성을 고려하여 수업을 구조화할 수 있는 영역을 제공하였다. 수업 구조화 영역은 수업의 도입, 전개, 정리에 따라 특정 과제를 개별로 다룰지, 짝 활동으로 해결하게 할지, 학생들의 수행 결과를 화이트보드에 적게 할지, 활동지에 적게 할지 등을 세세하게 계획하여 기록할 것을 안내한다. TTLP와 LPT는 학생의 사고에 초점을 두어 수업을 설계하기 위한 목록 보여주며 교사의 교수학적 지원 계획이 필요함을 강조하고 있지만, 교사가 수업을 구조화하여 구체적으로 기록해보도록 안내하지는 않는다. 따라서 본 연구는 도입, 전개, 정리의 순서에 따라 수업을 구조화하는 동시에 학생의 사고와 교사의 교육적 대응을 예상할 수 있도록 기존의 3단계 수업 설계안을 보완하고자 하였다.

셋째, 수업 흐름 점검하기 영역에서는 수업 흐름에 따라 학생들이 해결할 각 과제에 대하여 가능한 접근법, 오개념 등을 예상하고 그에 대한 교사의 교육적 대응 방법을 발문 형식으로 기록하도록 하였다. 또한, 예상된 학생 답안을 어떤 순서로 공유할지, 이것을 어떻게 연결할 것인가를 계획 단계에서 준비할 수 있도록 3단계 수업 설계안을 수정했다. 수업 흐름 점검하기 영역은 3단계 수업 설계안이 도입, 전개, 그리고 정리 단계에서 교사와 학생이 해야 할 행동에만 초점을 두어 기록하게 유도했던 부분을 보완하여 학생의 수학적 사고와 그에 대한 교사의 교육적 피드백에 주목하도록 도울 것이다.

넷째, 수업 설계안의 각 영역에 교사의 수업 설계를 안내하기 위한 질문을 구체적으로 제공하였다. 3단계 수업 설계안은 교사가 기록할 수 있는 틀을 제공하지만, 각 영역에서 무엇에 주목해야 할지 안내받기 어렵다. TTLP와 LPT에는 교사들이 수업을 설계하면서 고려해야 할 준거가 구체적으로 제시되어 있는데 이것은 학생 사고기반 수업 설계안의 각 영역에 교사의 수업 설계를 돕는 질문을 만드는 데 중요한 참고 자료가 되었다.

[Table 2] Lesson design template for students' thinking based math classes

<table>
<tr><th colspan="5">Lesson design template for students' thinking</th><th>TTLP</th><th>LPT</th></tr>
<tr><td rowspan="2">goal</td><td colspan="2">performance goals</td><td colspan="2">Achievement standards presents in mathematics curriculum</td><td rowspan="3">Selecting and setting up mathematica l task</td><td rowspan="2">learning goals /evidence</td></tr>
<tr><td colspan="2">lesson goals</td><td colspan="2">Describe specifically what you want students to understand as a result of the lesson</td></tr>
<tr><td>task</td><td colspan="4">Tasks selected and modified by teachers(actual activities for students) : definitions, concepts, and ideas that students need to know</td><td>tasks</td></tr>
<tr><td rowspan="2">stru ctur e</td><td colspan="3">teacher(tool, resource, procedure)</td><td>students(individual/group/whole-class)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Use of tools and resources, structure of lesson
- What tools and resources will you use?
- How to deal with the problem?
- How will the activity be recorded/reported?
- How can we know that students understand the context and demands of the task?</td><td>Structure individual/group/whole-class work
- How will you get your students to explore?
- How long will you keep exploring?</td><td>Selecting and setting up mathematica l task</td><td>instructio nal support</td></tr>
<tr><td rowspan="5">mon itori ng</td><td colspan="3">anticipating students' thinking</td><td>teachers' purposeful questions</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Monitoring the possible students' different approaches to the work
- approaches
- misconceptions
- Errors</td><td>Questionnaire check to connect students' expected responds and lesson goals
- What questions to ask for prior knowledge and experience?
- What questions do you ask to focus on and understand important ideas?
- What questions would you ask to encourage students to share and evaluate their ideas?
- What questions do you ask to assess student understanding of mathematical ideas, strategies, and expressions?
- What kind of help will you provide when a student is embarrassed or asks for guidance?
- How to expand the task for additional task?
- How if the student focuses on non-mathematical aspects?
- What if a student completes an task quickly?
- What questions do you ask to expand and discuss shared solutions?
- What questions do you ask to discover and generalize the rules?</td><td>Supporting students' exploration of the task

Sharing and discussing the task</td><td rowspan="3">tasks, instructio nal support(a pproaches and difficultie s)</td></tr>
<tr><td>sequen cing</td><td colspan="3">Selecting and sequencing topics to discuss among anticipated student ideas : What solutions to share? In what sequence should we present? the reason is that?</td><td rowspan="2">Sharing and discussing the task</td></tr>
<tr><td>connec ting</td><td colspan="3">Connecting expected responses to lesson goals, and
- What questions do students ask to connect the different strategies discussed?
- how can we know that all students understand?
- Based on this lesson, what will you do in the next lesson?</td></tr>
</table>

Ⅳ. 연구방법

1. 연구대상 및 자료수집

본 연구는 서울 소재 S 대학교의 2020년 1학기, 수업 설계 강좌를 수강한 사범 대학 예비교사들, 남 14명(67%), 여 7(33%), 총 21명이 작성한 수업 설계 보고서를 수집했다. 3학년 1명(4.8%), 4학년 19명(90.4%), 석사과정 1명(4.8%)으로 구성된 예비교사들은 5월 중반에 일반적인 수업지도안을 이용한 1차 수업 설계안을 제출한 후에 학생의 사고기반 수학 수업 설계안을 설명하는 온라인 강의를 들었다. 이 온라인 강의는 첫째, 수업 설계의 필요성, 둘째, 교사의 수업 철학 세우기, 셋째, 수업 설계를 위한 교육과정 문서 이해하기, 넷째, 교과서 분석과 재구성 사례, 다섯째, 수업목표 구체화와 수업 구조화, 여섯째, 수업 설계안 작성 방법과 사례의 과정을 통해 학생의 사고에 초점을 둔 수업을 설계하는 것에 관한 이해를 도왔다. 특히, 수업 구조화에서 과제 특성과 목표에 따라 개별, 짝, 소집단, 또는 전체 논의 등 학생 활동이 어떻게 구조화해야 하는가에 초점을 두고 강의가 진행되었다. 예비교사들은 1차 수업 설계안과 같은 수학 과제로 학생 사고기반 수업 설계안을 이용한 2차 수업 설계안을 제출했다. 수집된 1차 수업 설계안과 2차 수업 설계안은 각 21개씩, 총 42개이다. 수업 설계안의 학교급 및 내용 영역별 분포는 [Table 3]과 같다.

[Table 3] Distribution by school and content area

grade	areas		no.
middle school	letters and expressions		1
	functions		3
	geometry		4
	data analysis and probability		2
high school	math	number and operation	1
		letters and expressions	2
		geometry	1
	math I		2
	calculus		1
	probability and statistics		1
	geometry		2
	others		1
total			21

2. 자료 분석

예비교사들이 작성한 1차 수업 설계안과 2차 수업 설계안이 어떻게 다른지를 비교 및 분석하기 위해 Hatch의 유형적 분석법을 사용했다(Hatch, 2002). 본 연구는 수학적 사고에 초점을 둔 수업 설계라는 특정한 목적을 위해 수집된 인공물 데이터를 분석한다는 점에서 유형적 분석법이 적합하다(Hatch, 2002). 유형적 분석은 이미 결정된 유형에 기초하여 데이터를 구분하므로 수학적 사고와 과제, 학생 참여, 그리고 교사의 관행에 관한 문헌들을 검토하여 분석에 사용될 유형, 즉 개념적 틀을 확인했다. 확인된 개념적 틀은 수학교육 전문가 2명의 검토를 받아 타당성을 확보했다.

사회적 맥락 속에서 과제, 학생, 그리고 교사의 세 가지 요소가 역동적으로 상호작용하며 수업의 방향과 결과를 만들어낸다는 Cohen 외(2003)의 연구를 기초로 학생의 수학적 사고를 위한 수학 과제, 학생의 학습 참여(학습 관행), 그리고 교사의 역할(교수 관행)에 관한 연구 문헌들을 검토했다. 세 영역에서 연구 문헌들을 검토한 결과 학생의 수학적 사고에 기반한 수학 수업의 중요한 특징은 풍부한 수학 과제, 학생의 인지적·사회적 참여, 그리고 교사의 형성적 조력자 역할이었다.

이 연구는 교사들이 학생 사고에 초점을 둔 설계안을 제안하고 실제 교사의 수업 설계에서 기존의 수업 설계안과 무엇이 다른가를 확인하기 위한 것이므로 예비교사의 수업 설계안에서 수학 과제, 학생 참여, 그리고 교사의 역할이 어떻게 드러나는지를 확인하였다. 먼저 수학 과제를 분석하기 위해 연구 문헌들(Choy & Dindyal, 2017; Stein & Smith, 1998; Sullivan et al., 2013)을 검토하였다. 그 결과, 과제에 관한 연구들은 수학적 사고 촉진을 위한 과제가 학생의 개념적 이해를 돕고, 개념과 맥락 등에서 연결성을 가져야 하며, 다양하게 추론하고 이를 표현 및 정당화할 기회를 주어야 한다고 일관된 주장을 하고 있음을 알 수 있었다([Table 4]). 이를 토대로 과제 분석을 위한 개념적 틀을 만들었다([Table 5]).

[Table 4] Key features of math tasks presented in the literature

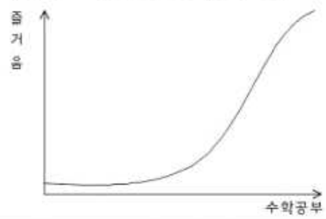
Keywords	Stein & Smith(1998)	Sullivan et al.(2013)	Choy & Dindyal(2018)
conceptual understanding	Requires conceptual understanding	Support mathematical understanding with important ideas	Support conceptual understanding
connecting	Require a process with connectivity based on conceptual understanding	Provides context and the mathematical connection inherent in context	Provides an opportunity to discover common patterns and rules
reasoning and justifying	Exploring the characteristics of concepts, procedures, and relationships, analyzing and investigating tasks	Requires to generate and justify ideas and to identify patterns inherent in tasks	
	Demanding self-monitoring and self-regulation of cognitive processes		
productive struggle and various representation	Require non-algorithm and complex thinking	Requires a variety of approaches	variation(objects, representation, etc.)
	Representation in various ways(diagram, objects, symbols, task situation)	Includes models, representations, and tools that are closely linked to concepts	
task context	-	Based on realistic context	-
		-	typical problem(for example, tasks in textbooks)

[Table 5] Conceptual framework for math tasks

content	description
rich tasks	• mathematical ideas: It includes important math concepts that students should understand closely related to the lesson goals • accessibility and challenging; The tasks is accessible to all students and offers productive struggles at the current grade levels. • justification: it provides opportunities to express and justify various mathematical ideas and reasoning • connectivity and generalization: It has connectivity with previous lesson ideas, or is likely to generalize
memorization tasks	• Are the procedures to be performed by the students clear due to the previous lesson content and the teacher's explanation(experience)? It requires memorizing or reacting facts, rules, formulas, and definitions

[Table 6]은 수학 과제에 관한 개념적 틀을 이용하여 본 연구에서 수집된 수업 설계안을 분석한 사례이다. 과제와 관련하여 학생들이 이해해야 하는 중요한 수학 개념이 무엇인지, 현재 학생들의 학습수준에서 과제의 진입점이 낮으나 충분히 도전적인 요소를 포함하는지, 스스로 표현하고 정당화할 기회가 있는지, 그리고 서로 다른 수학적 대상들(수학 개념, 표현, 아이디어 등)을 연결하거나 일반화할 가능성이 있는지를 분석했다. 또한, 풍부한 수학 과제의 특징을 만족하지 못하고 알려진 절차를 재연하거나 특정 개념이나 절차를 기억하기를 요구하는 과제인지를 확인했다.

[Table 6] Case of analyzing math tasks by conceptual framework

<table>
<tr><th>elements</th><th>description</th></tr>
<tr><td>task</td><td>
가. "나의 마음"에 영향을 주는 것(혹은 관계가 있는 것)을 한 가지 생각하자. 긍정적 혹은 부정적 영향 모두 가능하다.
나. 나의 마음과 나의 마음에 영향을 주는 것을 수량화 한다. "수량화"라는 것은 어떠한 상황을 수를 이용하여 나타내는 것을 말한다. 예를 들어 "수학공부"와 "나의 즐거움"을 수량화 할 경우, 아래의 표와 같이 수량화를 시도할 수 있다. 그 다음, 표를 잘 나타낼 수 있도록 그래프를 그린다.


<table>
<tr><td>수학공부</td><td>100</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td><td>500</td><td>600</td><td>700</td><td>800</td></tr>
<tr><td>즐거움</td><td>30</td><td>32</td><td>34</td><td>36</td><td>37</td><td>37</td><td>70</td><td>75</td></tr>
</table>
다. 내가 선정한 소재, 표와 그래프에 대한 설명, 그래프가 저렇게 나타난 이유 등에 대해 설명하는 글을 작성한다. 나의 마음과 관계있는 것을 수학적으로 표현했을 때의 장점과 한계점, 수학이 우리의 삶과 어떻게 관련이 있는지에 대한 내용을 간단히 작성하여 조원들과 의견을 나눠본다.
조원들끼리 서로 돌아가며 발표를 한다. 발표를 할 때 서로의 그래프가 수업시간에 배운 어떤 내용과 연관되어 있는지, 주제의 선택에서 어떤 점이 좋았는지, 친구의 글에서 마음에 드는 문장은 무엇이었는지 혹은 수정했으면 좋을 부분은 어디인지 의견을 나눠본다.
라. 우리 조원 중 다른 조들에게 소개하고 싶은 사람을 뽑아서 조장(혹은 본인)이 발표한다.
</td></tr>
<tr><td>learning series
·
instructional goals
·
notice</td><td>
◎ 본 단원의 학습계열
'규칙 찾기'→'규칙의 설명'→'규칙을 수로 나타내기'→'규칙을 말이나 글로 표현하기'→'두 양 사이의 대응 관계를 찾고 □와 △를 사용하여 식으로 나타내기'의 순서로 대응 관계를 나타낼 수 있다.
<table>
<tr><th>배운 내용</th><th>이 단원의 내용</th><th>배울 내용</th></tr>
<tr><td>초등학교 3~4학년
규칙 찾기

초등학교 5~6학년
규칙과 대응
비례식과 비례배분</td><td>4.1 순서쌍과 좌표
4.2 그래프의 뜻과 표현
4.3 정비례와 그 그래프
4.4 반비례와 그 그래프</td><td>중학교 2학년
일차함수와 그래프
일차함수와 일차방정식의 관계

중학교 3학년
이차함수와 그래프</td></tr>
</table>
◎ 본 단원의 지도목표
① 순서쌍과 좌표를 이해하게 한다.
② 좌표평면 위의 점의 위치를 좌표로 나타낼 수 있게 한다.
③ 그래프의 뜻을 알고 다양한 상황을 그래프로 나타낼 수 있게 한다.
④ 주어진 그래프를 해석할 수 있게 한다.
⑤ 정비례 관계를 이해하고, 그 관계를 표, 식, 그래프로 나타낼 수 있게 한다.
⑥ 반비례 관계를 이해하고, 그 관계를 표, 식, 그래프로 나타낼 수 있게 한다.
◎ 본 단원의 지도상의 유의점
① 실생활에서 좌표가 사용되는 예를 찾아보고 이를 수직선 또는 좌표평면 위에 표현해 보며, 그 유용성과 편리함을 인식하게 한다.
② 그래프는 증가와 감소, 주기적 변화 등을 쉽게 파악할 수 있게 해준다는 점을 인식하게 한다.
③ 다양한 상황을 일상 언어, 표, 그래프, 식으로 나타내고 이들 사이의 상호 변환 활동을 하게 한다.
④ 속력과 거리, 속력과 시간과 같은 실생활의 예를 통해 정비례와 반비례 관계를 직관적으로 이해하게 하고, 정비례와 반비례 관계가 성립하는 실생활의 예를 찾아 설명하게 한다.
⑤ 그래프를 그리고 여러 가지 성질을 탐구할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
</td></tr>
<tr><td>mathematical idea</td><td>그래프의 표현과 해석</td></tr>
<tr><td>accessibility and challenging</td><td>학생들은 좌표평면, 그래프의 뜻에 대해 배웠으며, 학생에게 친근한 소재(나의 마음과 나의 마음에 영향을 주는 것)를 사용하여 모든 학생에게 쉽게 접근할 수 있지만, 아직 특정 대상을 수치화하고 그 대응 관계를 그래프로 표현하는 것이 익숙하지 않으므로 도전 가능성을 가지고 있다.</td></tr>
<tr><td>justification</td><td>학생 스스로 나의 마음과 나의 마음에 영향을 주는 것을 정하고, 이를 수치화하여 그래프 표현을 요구한다. 또한, 자신의 그래프를 설명하여 정당화할 필요가 있다.</td></tr>
<tr><td>connectivity and generalization</td><td>학생들이 다양하게 표현한 그래프들 사이의 공통점과 차이점을 비교, 분석함으로써 일상 언어와 그래프의 관계를 연결하고 그래프의 증가, 감소, 주기적 변화를 일반화할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>memorization</td><td>해당 없음</td></tr>
</table>

1차와 2차 수업 설계안에서 교사들이 선택한 수학 과제는 변하지 않았으므로 1차, 2차 설계안으로 구분하여 분석하지 않았다. 그리고 1차, 2차 수업 설계안을 학생 참여와 교사 역할 측면에서 분석하여 무엇이 다른가를 확인했다. 본 연구는 학생 참여에 관한 연구 문헌들(Bahr & Bahr, 2017; Fredricks et al., 2016; Helme & Clarke, 2001; Hiebert et al., 1997)을 검토하여 유형적 분석을 위한 개념적 틀을 확인했다. 먼저 학생의 참여는 행동적 참여, 인지적·사회적 참여, 그리고 감정적 참여로 범주화된다(Fredricks et al., 2016). 학생의 수학적 사고를 위해 중요한 것은 인지적·사회적 참여이며(Bahr & Bahr, 2017; Fredricks et al., 2016; Helme & Clarke, 2001; Hiebert et al., 1997), 인지적·사회적 참여는 문제의 이해 및 분석, 표현 및 정당화, 연결성 인식 및 적용, 그리고 종합 및 평가의 네 가지 지표로 확인된다(Bahr & Bahr, 2017; Helme & Clarke, 2001; Hiebert et al., 1997). 본 연구는 [Table 7]을 개념적 틀로 하여 수업 설계안에서 학생 참여가 어떤 특징을 보이는지를 분석했다.

[Table 7] Conceptual framework for students' engagement

<table>
<tr><th>content</th><th colspan="2">description</th></tr>
<tr><td>behavioral</td><td colspan="2">participation, effort, attention, positive conduct, the absence of disruptive behavior</td></tr>
<tr><td>emotiona·affective</td><td colspan="2">the extent of positive(negative) reactions to teachers. classmates, or schools, identification with school or subject domain</td></tr>
<tr><td rowspan="4">cognitive·social</td><td>understand and analysis</td><td>paying attention to pattern or structure to understand and solve a task</td></tr>
<tr><td>representation and justification</td><td>clarify and justify student's own mathematical thinking about the problem</td></tr>
<tr><td>recognize and apply connectivity</td><td>recognizing the connections between different objects(concepts, ideas, etc.) and using them to solve problem</td></tr>
<tr><td>synthesis and evaluation</td><td>Analyze the strengths and weaknesses of different mathematical ideas and refine or generalize them by comparing them with student's own thinking</td></tr>
</table>

교사 역할에 관한 유형적 분석을 위해 학생의 수학적 사고에 초점을 둔 수업에서의 교사 역할과 관련된 연구 문헌들을 검토했다(Chapin et al. 2013; Hiebert et al., 1997; Leon et al., 2017; Smith & Stein, 2011; Stein et al., 2009). 학생의 수학적 사고를 촉진하는 교사 관행에 관한 연구 문헌들을 검토한 결과는 [Table 8]에 정리되어 있으며, 이를 토대로 [Table 9]와 같이 개념적 틀을 만들어 수업 설계에 표현된 교사 역할을 분석했다.

예비교사들의 1차 및 2차 수업 설계에서 교사와 관련되어 기술된 내용을 중심으로 형성적 조력자(formative facilitator)의 특징을 만족하는지, 또는 지식 전달자(knowledge transmitter), 평가자(evaluator), 관리자(manager)의 역할 중 어떤 것을 만족하는지 분석했다. 예비교사들의 1차 및 2차 수업 설계안을 과제, 학생 참여, 그리고 교사 역할과 관련된 내용으로 구별한 후 개념적 틀을 기준으로 분석했다. 그리고 교사의 역할과 학생 참여는 역동적으로 상호작용하므로(Cohen et al., 2003) 교사의 역할과 학생의 참여에 관한 내용은 서로의 분석 결과를 뒷받침하는지 확인하는 자료로 사용했다. 예를 들어, 피타고라스 정리를 이용해 두 점 사이의 거리 공식을 유도한다는 교사 역할은 교사가 두 점 사이의 거리 공식을 유도하는 절차를 전달하는 지식 전달자로 볼 수도 있지만, 학생과 상호소통하면서 두 점 사이의 거리 공식을 유도하는 형성적 조력자 역할로 볼 수도 있다. 이러한 경우는 학생이 스스로 피타고라스 정리를 통해 거리 공식을 추론하고 정당화하는가, 교사가 공식을 유도하는 과정을 수동적으로 받아들이는가를 확인하여 교사 역할을 판단하는 근거로 삼았다.

[Table 8] Key features of teacher's role presented in the literature

<table>
<tr><th>teacher role</th><th>Stein et al.(2009), Stein(2011)</th><th>Hiebert et al.(1997)</th><th>Chapin et al.(2013)</th><th>Leon et al.(2017)</th><th>Math NIC</th><th>Noticing1)</th></tr>
<tr><td>Guide to specific goals</td><td>Anticipating is possible only with clear, explicit goals</td><td>Select a task for lesson goals</td><td>Guide goals in the lesson plan</td><td>Clarify why lesson content and activities are important or useful</td><td>Clarify the goal of the tasks</td><td>Identifying things that are important or valuable</td></tr>
<tr><td>Creating a class culture(respect for mistake and different ideas)</td><td>Provide adequate time to explore</td><td>Promote culture that values cooperative communication and reflection</td><td>Talking with respect and setting standards for fair engagement</td><td>Recognizing the student's feelings in class and exam, Show non-directive language and behavior</td><td>Present rules that respect each other's ideas and give responsibility</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Provide opportunities to express and justify student ideas</td><td>Require student justification and explanation</td><td rowspan="2">Recognizing that there are many ways to reach the goal. Provide an opportunity to find information and other things by social agreement</td><td>Guide students to express their thinking clearly</td><td>Offer meaningful choices, Focus on the process</td><td>Ask to write down, explain and interpret student's own thinking</td><td rowspan="2">Pay attention to student strategies and interpret understanding</td></tr>
<tr><td>Inviting all students to an important mathematical thinking process</td><td>Select an work to be discussion in whole-class, Every student is the main agent of class and deals with important math</td><td>Guide all students listen and engagement in other students' reasoning</td><td>Recognizing students' mathematical ideas</td><td>Encourage them to present the flow of the whole discussion and articulate their thinking</td></tr>
<tr><td>Provides formative feedback based on evidence</td><td>Anticipate student responses and select students to present according to lesson goals</td><td>Focus on students' reflective thinking</td><td>Supports deep mathematical thinking using purposeful question</td><td>Optimal challenge, positive feedback, step-by-step instructions</td><td rowspan="2">Be a questioner, introduce new ideas, stay focused on important concepts, and ask thinking-provoking question</td><td>Pay attention to key point and difficult point and connect with the critical point</td></tr>
<tr><td>Linking different mathematical ideas and learning goals</td><td>Connect different ideas and connects mathematical ideas and core concepts</td><td>Connecting students' current thinking positions with teachers' goals</td><td>Think about how to organize the main points of the discussion.</td><td>Structure the lesson</td><td>Connecting mathematical thinking with the broad principles of teaching and learning</td></tr>
</table>

[Table 9] Conceptual framework for teacher's role

content	description
Formative facilitator	• Establish and guide class rules that respect and consider meaningful mistake, different ideas
	• Setting specific goals to enable evidence collection
	• Supporting students to express and justify their ideas clearly
	• Create opportunities for all students to participate in important mathematically thinking processes
	• Providing evidence-based formative feedback, encouraging the comparison, evaluation, supplementation of different mathematical thinking
	• Connecting different mathematical ideas, connecting mathematical ideas with the goals
deliver	• Deliver and demonstrate mathematical concepts, formulas, and procedures
evaluator	• It judges the correct or incorrect answer to the student's question or mathematical thinking, and explains specific solutions and answers.
manager	• Classroom management (other than mathematical aspects), such as controlling class disturbing behavior

V. 연구 결과 및 논의

1. 수학 과제

수업 설계에 제시된 과제 21개를 분석한 결과, 21개 중 20개는 중요한 수학적 아이디어를 포함했다. 수학적 아이디어를 포함하지 않은 것으로 판단된 과제는 교과서 목차를 보고 개념의 연결성을 설명하는 것이다. 단순히 교과서 목차만으로 학생들이 수학 개념의 연결성을 파악하기 어려우며 중요한 수학적 아이디어의 증거를 확인할 수 없었다. 21개 중 12개의 수학 과제는 접근성 및 도전성을 가진 과제로 분석되었다. 예를 들어, [Fig. 1]은 주사위를 던진 경우, 잼을 바른 식빵을 떨어진 경우와 같이 다양한 일들에 대해 일어날 가능성을 탐구하면서 '각 경우가 일어날 가능성이 같다'라는 수학적 의미를 이해하도록 구성된 과제이다. 중학교 2학년 학생들은 이전에 학습한 가능성과 상대도수 개념을 기반으로 이 과제에 접근할 수 있지만, 확률의 개념을 명확히 이해하는 데는 아직 익숙하지 않다. 따라서 이 과제는 수학적인 접근성과 도전성을 가진다고 볼 수 있다. 그러나 21개 중 9개의 과제는 정답 외의 수학적 아이디어를 표현할 기회가 없거나 지나치게 높은 진입점으로 인해 낮은 성취도를 가진 학생들이 접근하지 못할 가능성이 컸다. 예를 들어, 단리와 복리 등의 경제 용어를 포함한 은행상품 설명서를 보고 이를 분석하는 과제는 등차수열과 등비수열에 관한 정의와 성질을 처음 배운 학생들이 이해하기 어려울 수 있다. 2015 개정 수학과 교육과정의 평가 방법 및 유의 사항에도 '등비수열과 그 합을 이용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가할 때 연금의 일시 지급이나 대출금 상환 등과 같이 지나치게 복잡한 상황을 포함하는 문제는 다루지 않는다(p.66)'라고 기술되어 있다.

1. 다음의 물음에 답하시오. (Procedures with Connections)

(1) 경우의 수의 비율을 이용하여, 주사위를 굴렸을 때, 숫자 1이 나오는 사건의 확률을 구하시오. (Comprehension)

(2) 주사위를 10번씩 굴려 다음의 표를 작성하시오. (단, 횟수는 누적으로 기록한다.)

학생 이름										
주사위를 굴린 횟수(회)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1이 나온 횟수(회)										
상대도수										

(3) (2)의 상대도수의 값들과 (1)에서 구한 확률 사이에는 어떤 결과가 있는지 말해보시오. (Analysis)

2. 머피의 법칙은 원래의 의도와 달리 '일이 잘 풀리지 않고 꼬이기만 하는 것'의 의미로 사용된다. 대표적인 예로, '잼을 바른 식빵이 떨어질 때 잼을 바른 면은 대게 아래로 떨어진다.'라는 말이 있다. 다음의 물음에 답하며 이 말이 타당한지 확인해보자. (Doing Mathematics)

(1) 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률을 계산해라. (Comprehension)

(2) (1)에서 구한 확률을 위의 식빵이 떨어지는 상황에 적용할 수 있는가? 그렇지 않다면 왜인가? (Analysis)

(3) 위의 주장이 타당한지 확인하기 위해 어떤 방법을 사용해야 하는가? (Creation)

(4) 로버트 매튜의 실험에 따르면, 식탁 위의 잼을 바른 토스트를 9821번 떨어뜨렸을 때 6101번 잼을 바른 쪽이 바닥에 닿도록 떨어졌다고 한다. (1)의 결과와 비교하여 그 이유를 추측해 보아라. (Analysis)

(5) (4)의 이유를 바탕으로 위의 주장 '잼을 바른 식빵이 떨어질 때 잼을 바른 면은 대게 아래로 떨어진다.'가 타당한지 의견을 말하고 타당하다면 위와 같은 상황에 대해서 경우의 수의 비율로 구한 확률을 적용할 수 없는 이유를 설명해라. (Ev

[Fig. 1] Example of math tasks(1)

도전 가능성의 증거를 발견할 수 없었던 암기 과제의 예는 [Fig. 2]와 같다. 이것은 고등학교 일반 선택교과인 수학 I 에서 지수함수와 로그함수, 삼각함수까지 배운 학생들을 대상으로 한 수업 설계에 제시된 과제이다. 예비교사는 이 과제를 지금까지 배운 함수의 유용성과 필요성을 인식하고 표현할 수 있다는 수업목표를 위해 선택하였다.

1934년 일제강점기 당시 경주에 살던 한 일본인이 읍내의 어느 고물상에서 반쯤 깨진 기와 한 장을 발견하는데요.
도톰한 입술, 위로 들린 입꼬리, 살짝 내민 눈동자, 흔히 보던 연꽃무늬가 아닌 사람의 얼굴무늬
조선 총독부 기관지 조선 6월호에 소개되며 세상에 처음 알려진 7세기 신라시대 유물 얼굴무늬 수막새
비록 한 쪽 턱부분이 깨졌지만 아름다운 미소를 보여주는 일명 **신라 천년의 미소** 얼굴무늬 수막새
그런데 예전의 모습은 어떠했을까요?

오늘은 수막새를 복원해보는 활동을 해보고자 합니다.
여러분이 지금까지 배운 수학지식과 Geogebra를 활용해 수막새를 어떻게 복원할 수 있을지 모둠원들과 논의해보고 Geobgebra를 통해 복원해봅시다.

1. 우리 모둠의 해결과정

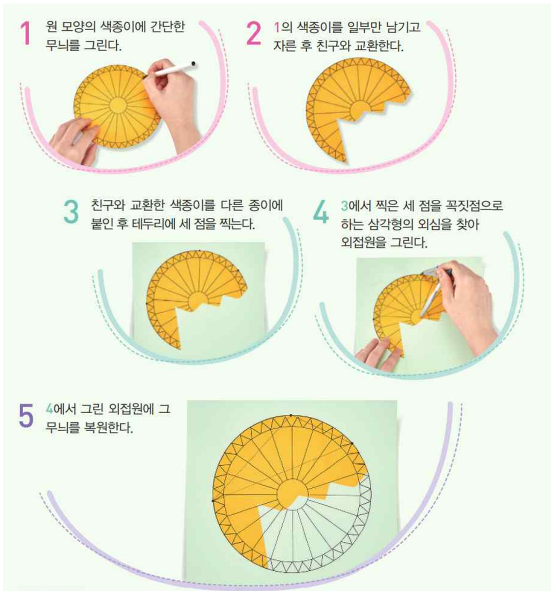
[Fig. 2] Example of math tasks(2)

그러나 [Fig. 2]의 과제에서 원 모양을 복원하는 상황은 [Fig. 3]과 같이 중학교 2학년 삼각형의 성질 단원이나

---

1) Han, Kim, & Kwon(2018), Choy(2013, 2014), Jacobs et al.(2010), van ES et al.(2017), Yang & Rick(2013)

중학교 3학년 원의 성질 단원에서 다루었으며, 고등학교 공통과목인 수학의 '원의 방정식' 단원에서 대수적으로 배웠다. 따라서 공학적 도구를 이용하여 원 모양을 복원하는 이 과제는 이미 삼각함수까지 배운 학생들의 현재 수준에서 쉽게 접근할 수는 있지만, 생산적인 어려움을 제공할 여지가 없다는 점에서 도전적이지 않다.



[Fig. 3] 8^{th} grade math textbook(Lee et al., 2018)

예비교사들이 선택한 수학 과제 중 11개는 학생들에게 본인의 수학적 아이디어에 대한 정당화를 포함했다. 그러나 또 다른 10개의 과제는 수학적 아이디어에 대한 정당화 대신 특정 지식이나 절차의 암기 및 재현에 초점을 두었다. 예를 들어, [Fig. 4], [Fig. 5]는 암기 및 재연을 강조할 가능성이 큰 수학 과제이다. [Fig. 4]의 과제는 고등학교 수학에서 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 처음 배우는 학생들을 대상으로 한다. 이 과제는 함수와 방정식의 관련성을 다루고 있지만, 학생이 주도적으로 함수와 방정식의 관계를 추측하고 이를 수학적으로 표현할 기회를 제공하지 못한다. 또한, 제시된 다양한 사례에서 규칙성을 확인하여 일반화할 기회도 확인하기 어렵다. 더욱이 이 과제는 특정 공식이나 절차를 사용해야 하는 이유를 설명할 기회를 제공할 여지가 없다. 이 과제와 관련하여 학생들이 교사가 지시하는 정형적인 절차대로 해결하는 것으로 수업이 계획되었음이 예비교사의 수업 설계안에서 확인되었는데 이것은 이 과제가 암기 및 재현에 초점을 두고 있음을 뒷받침한다. [Fig. 5]의 과제는 고등학교 일반 선택교과 '확률과 통계'를 배우는 학생들을 대상으로 하며, 모집단과 표본, 표본추출의 원리를 배운 직후에 표본평균과 모평균의 관계를 학습하기 위한 것이다. 이 과제는 학생들에게 이전 시간에 해결했던 주제의 모순점을 찾고 그 해결책을 모색하도록 요구한다. 또한, 표본평균과 모평균의 관계를 추정하고 그렇게 생각한 이유를 질문하고 있다. 그러나 구체적인 데이터를 관찰하는 것과 같이 표본평균과 모평균의 관계 추정을 지원하는 맥락이 없고 단지 추정의 정의만 제시되어 있다. 아무런 맥락 없이 현재 수준의 학생들이 표본평균과 모평균의 관계성을 파악하거나 신뢰도 개념의 의미를 스스로 생각해내기는 어렵다. 따라서 이 과제는 학생들에게 정당화 또는 연결성 및 일반화를 제공할 가능성보다는 깔때기(funneling) 패턴으로 유도된 수학적 사실과 규칙을 암기 및 재현하게 할 가능성이 더 크다(Franke et al., 2009).

1. 다음 이차함수 $y=x^2+2x-1$과 관련된 물음에 답하시오.

ㄱ. $y=x+5$
ㄴ. $y=4x-1$
ㄷ. $y=\frac{1}{2}x+3$
ㄹ. $y=-3x-2$
ㅁ. $y=-x+6$
ㅂ. $y=-2$

(1) $y=x^2+2x-1$의 그래프와 만나는 x좌표가 2개인 직선은?

(2) $y=x^2+2x-1$의 그래프와 만나는 x좌표가 1개인 직선은?

(3) $y=x^2+2x-1$의 그래프와 만나지 않는 직선은?

2. 어느 장대높이뛰기 선수가 가로대를 넘기 위해 도약한 x초 후 지면으로부터의 높이 ym는 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x+\frac{1}{2}$이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 이 선수가 도약한 지 처음으로 높이 5m가 되는 때는 몇 초 후인지 말해보자.

(2) 주어진 이차함수의 그래프와 두 직선 $y=6$과 $y=7$의 위치 관계는 어떤지 말해보자.

(3) 이 선수가 높이가 6m인 가로대와 7m인 가로대를 뛰어넘을 수 있을지 말해보자.

[Fig. 4] Example of math tasks(3)

[문제]

1. 다음은 저번 시간에 풀었던 문제 중 일부입니다.

> 어느 지역에서 1월 한 달 동안 가구당 난방비는 평균이 15만 원, 표준편차가 2만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역에서 크기가 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균의 평균과 표준편차를 구하시오.

(1) [도입]의 내용을 참고하여, 이 문제의 모순을 찾아 봅시다.

(2) 모순을 해결하기 위해서는 문제를 어떻게 바꾸면 좋을지 생각해 봅시다.

2. 다음은 추정에 대한 설명입니다.

> 표본에서 얻은 정보를 이용하여 모평균과 같은 모집단의 참값을 추측하는 것을 추정이라고 한다.

표본의 평균, 분산, 표준편차가 주어진 상태에서 모평균을 추정하는 방법을 생각해 봅시다.

(1) 표본평균과 모평균의 관계는 무엇인가요?

(2) (1)에서 답한 관계를 바탕으로 모평균을 하나의 값으로 추정할 수 있을까요? 그렇게 생각하는 이유는 무엇인가요?

(3) 모평균을 하나의 값이 아닌 구간으로 추정하고자 할 때, '신뢰도'라는 개념의 의미는 무엇일까요?

(4) '신뢰도'에 따라 모평균을 추정할 수 있는 방법을 생각해 봅시다.

3. 오른쪽의 표는 표준정규분포표의 일부입니다. 2번에서 답한 내용과 오른쪽의 표를 참고하여 모평균을 추정하는 방법을 완성해 봅시다.

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.65	0.450
1.70	0.455
1.75	0.460
1.81	0.465
1.88	0.470
1.96	0.475
2.05	0.480
2.17	0.485
2.33	0.490
2.57	0.495

[Fig. 5] Example of math tasks(4)

2. 학생 참여

1) 학생 참여의 구조화

1차와 2차 수업 계획안에서 학생 참여 구조(개별활동, 짝 활동, 소집단 활동, 그리고 전체 논의)의 차이가 발견되었다. 1차 수업 설계안은 소집단 협력 활동을 중심으로 설계되었지만, 2차 수업 설계안은 개별활동, 짝 활동, 소집단 협력 활동이 복합적으로 설계되었다. 21개의 1차 수업 설계안 중에서 19개는 모둠 활동을 중심으로 계획했으며, 1개는 개별활동을 하다가 논의가 필요한 특정 주제를 다룰 때 모둠 활동을 하도록 계획했다. 그리고 다른 1개의 수업 설계는 개별활동을 한 후에 2명씩 짝을 이루어 수학적 아이디어를 이야기하도록 계획했다. 2차 수업 설계안은 처음에 개별활동을 하다가 도전적인 과제를 해결할 때 소집단 협력 활동을 한다고 계획한 것이 11개, 소집단 협력 활동 이후 그 결과의 발표(전체 논의)가 1개, 개별활동 후 발표(전체 논의)가 1개였으며, 소집단 협력 활동만 계획한 것이 7개, 짝 활동만 계획한 것이 1개였다.

[Fig. 6]은 중학교 2학년 확률을 주제로 작성된 1차 수업 설계안과 2차 수업 설계안의 일부이다. 1차 수업 설계안에서 교사가 인사 후 '가능성'이라는 용어를 소개하여 동기를 유발하고 학습 목표를 복창시킨 후, 학생들이 자리를 이동하여 모둠을 형성할 것이라 기술했다. 그러나 2차 수업 설계안에서는 과제의 특징에 따라 개별 과제 해결, 모둠별 과제 해결, 모둠 내 의견을 나누기의 순서로 수업 과정을 기술하여 1차 수업 설계와 달리 수업을 의도적으로 구조화했음을 확인할 수 있었다.

1st

전개	모둠 구성	- 미리 정해 놓은 대로 모둠을 구성하게 한다.	- 자리를 이동하며 모둠을 구성한다.	
	확률의 두 가지 정의	- 문답법을 통해 학생들이 경우의 수의 비율로서의 확률 개념을 이끌어내도록 유도한다. I. 앞서 구한 동전의 앞면이 나올 확률을 확인할 필요성을 느끼면서 적은 수의 시행을 해보게 한다. II. 시행의 횟수를 늘릴 때, 상대도수의 변화를 살펴보게 하여 통계적 확률 개념을 개인화/배경화 할 수 있게 한다. (선행 개념이지만 익숙치 않을 수 있는 '상대도수' 개념을 인식할 수 있게 한다.) III. 통계적 확률의 정의를 알려주며 학생의 언어를 정돈하여 탈개인화/탈배경화할 수 있게 한다. IV. <탐구해봅시다>를 해결할 때의 경험을 떠올리게 하여, 수학적 확률의 정의를 습득하게 한다.	- 교사의 각 단계에 맞춰 질문하며 통계적 확률, 수학적 확률의 개념을 얻는다.	- 교과서 p.243
		- 학습지를 통한 모둠 활동을 통해 이끌어낸 두 확률 개념을 연습할 수 있게 한다. (모둠 활동 중 순회하며 학생들의 의견을 피드백해주며 적절한 발문을 통한 비계를 제공한다.)	- 순회 중인 교사에게 질문하며 적극적으로 활동에 참여하여 확률 개념을 연습한다.	- 학습지 1번 (III. 학습자료에 제시)
		- 학습지 풀이를 하면서 학생들이 큰수의 법칙을 습득할 수 있게 한다.	- 통계적 확률과 수학적 확률에 대한 이해를 바탕으로 확률의 두 가지 정의가 큰수의 법칙을 통해 연결되어 있음을 이해한다.	- 학습지 1번 (III. 학습자료에 제시)

2nd

	교사(도구 및 자원, 수업 순서)	학생(개별/모둠/공유)
	▪ ㉠ 문제 과제 제공 ▪ 개별 과제 해결 - '가능성'이라는 단어를 통해 학생들에게 수학적 용어인 '확률'을 정의할 필요성을 느끼게 한다. - 앞서 구한 동전의 앞면이 나올 가능성을 확인하는 수단으로 10번의 동전을 던져 보게 한다. - 시행 횟수를 늘릴 때, 상대도수의 변화를 살펴 보며, 통계적 확률의 정의를 이해하도록 한다. - <탐구해봅시다> 문제를 해결한 경험을 통해 수학적 확률의 정의를 이해하도록 한다.	▪ 개별 과제 해결
2 - ①	▪ ㉢ 문제 과제 제공 ▪ 모둠별 과제 해결 - 주사위를 던질 때, 1이 나올 확률을 경우의 수의 비율로서 구하게 한다. - 주사위를 10번씩 던져 1이 나오는 상대도수의 변화를 관찰한다. - 설명을 통해 큰수의 법칙을 이해하도록 한다.	▪ 모둠별 과제 해결 ▪ 모둠 내 의견 나누기
2 - ②	▪ ㉡ 문제 과제 제공 - 학생들이 선호의 의견에서 이상함을 느끼도록 한다. ▪ ㉣ 문제 과제 제공 - 동전을 던지는 상황과 잼을 바른 식빵이 떨어지는 상황의 차이점을 학생들이 인식하도록 하여 각 사건의 발생 가능성을 확인해야 함을 인지하도록 한다.	▪ 개인별 과제 해결 후, 모둠 내 의견 나누기 ▪ 모둠별 과제 해결 ▪ 모둠 내 의견 나누기
3 - ①	▪ 수업 내용 요약, 습득 확인	▪ 오늘 학습 상태 자가 진단

[Fig. 6] Example of a change in the structure of students engagement(1)

1st	PBL을 위주로 하는 수업이므로 4명의 이질적인 그룹을 형성한다. 조별로 예상 성취 정도가 차이나지 않도록 구성한다. **도입 (3분)**: • 4인 1모둠 좌석배치 • 준비물 점검 • 학습목표 제시 **학급 활동 (27분)**: • 저번시간에 배웠던 개념 상기시키기 • 강의식 수업을 통해 등비수열, 원리합계 알기 • 상품을 분석함에 있어서 고려해야 할 요소에 대한 예시 제시 **모둠 활동 (15분)**: • 각 은행 홈페이지 상품 소개 내용 등을 참고하여 자료 조사 • 예금 할 금액 설정 **마무리 (5분)**: • 모둠원간의 의사소통에 대한 동료평가 실시 • 차시 예고 : 모둠활동 이어서 진행
2nd	1번, 2번 : 알고리즘에 따라 문제를 해결하는 정형화된 문제이므로 1분 정도의 시간을 배정한다. 이후 교사가 풀이과정을 제시하고 학생들이 직접 확인하게 한다. 설명식 교수법으로 문제해결 알고리즘을 제공했으므로 어려움을 가질 학생이 적을 것이라 판단하여 전체공유는 하지 않는다. 3번 : 알고리즘은 정해져 있지만, 계산 과정이 간단하지 않으므로 2-3분의 시간을 준다. 4번 : 프로젝트의 중심이 되는 문제이다. 다양한 요소를 고려해야 하므로 4명으로 구성된 모둠활동을 진행하고 15분 정도의 시간을 부여한다. 결과보고서를 작성하게 하고 전체공유를 한다.

[Fig. 7] Example of a change in the structure of students engagement(2)

[Fig. 7]은 1차와 2차 수업 설계에서 학생 참여 구조가 달라진 또 다른 사례이다. [Fig. 7]에는 고등학교 수학에서 등비수열의 활용을 주제로 작성된 1차 수업 설계안과 2차 수업 설계안 일부가 발췌되어 있다. 먼저 1차 수업 설계안에서 교사는 4명으로 구성된 이질 집단(heterogeneous group)으로 모둠을 편성할 것이며 모둠별로 앉아서 수업을 시작하겠다고 계획했다. 그러나 교사가 선택한 과제와 관련하여 언제, 어떤 형태로 학생 참여가 진행되는지 구조화되어 있지 않았다. 반면에 2차 수업 설계안에서 교사는 세부 과제별로 학생 참여를 구체적으로 계획했다. 과제 1번과 2번은 정형화된 절차를 가지고 있으며 많은 학생이 쉽게 해결할 것이라 예상되므로 교사의 설명을 통해 각자 해결한 것을 확인하겠다고 계획했다. 또한, 과제 4번은 이 수업에서 핵심 과제이므로 가장 많은 시간을 제공할 것이며 소집단 협력 활동을 통해 다양한 의견을 공유한 후 전체 논의까지 진행할 것이라 계획했다. 즉, 1차 수업 설계에서 학생들이 모둠별로 협력학습을 계획한 의도가 명확하게 확인되지 않았지만, 2차 수업 설계에서는 수업 구조화 영역에서 교사가 과제의 특징에 따라 개별활동, 짝 활동이나 모둠 활동, 또는 전체 논의 중에서 어떤 활동으로 진행할지를 명시적으로 기술한 것이 확인되었다.

2) 행동적 참여에 관한 계획

21개의 수업 설계안 중 15개는 학생의 행동적 참여를 [Fig. 8]과 같이 묘사했다. 또 다른 5개의 수업 설계안은 교사의 역할만 기술하고 학생이 어떻게 참여할 것인가를 계획하지 않았다. 그리고 나머지 1개의 수업 설계안에는 학생의 인지적 참여에 관한 내용이 기술된 것으로 확인되었다. 학생 참여의 측면에서 1차 수업 설계안에서는 ‘인사한다, 모둠별로 앉는다, 학습 목표를 복창한다, 학습 내용을 적는다, 교사의 설명을 듣는다, 모둠 활동에 참여한

인사한다, 출석에 답한다, 자리에 앉는다
모둠별로 앉는다/모둠구성
학습목표를 읽는다(복창)
내용을 정리한다, 확인한다, 평가지를 작성한다, 조언을 듣고 기록한다
그림을 그린다, 컴퓨터프로그램으로 그래프를 그린다, 좌표를 찍는다, 결과물을 작성한다, 오렌지껍질을 갈게 찢는다, 오렌지 조각으로 원 만들기를 시도한다, 촘촘히 붙여 원 모양을 만든다
양식을 받는다, 파일을 업로드한다
수업에 적극적으로 참여하여 확률 개념을 연습한다
자료를 읽는다
교사의 질문(발문)에 답하며 개념을 받아들인다
교사의 설명을 듣는다, 집중한다, 발표 내용을 듣는다, 교사의 강조점에 따른다
교사가 하는 예 및 과정(시범)을 본다, 교사가 직접 보여주는 것을 잘 본다
교사가 한 것을 따라 하면서 익힌다, 전개도를 펼친다
힘들면 도움을 요청한다
교사가 지목한 학생/모둠이 발표한다,
모둠에서 1개의 역할을 담당한다, 모둠활동에 적극적으로 참여한다

[Fig. 8] Example written in terms of students’ behavioral engagement(1st)

다.' 등과 같이 수업 중에 교사가 학생에게 기대하는 바람직한 행동들이 주로 묘사되어 있었다. 눈에 띄는 특징은 학생 참여를 기술한 1차 수업 설계안 15개의 중에서 12개는 교사나 유능한 학생의 설명을 듣는 학생의 행동을 묘사했으며, 학생이 교사가 강조하는 바에 따라 전개도를 펼치거나 교사의 시범을 잘 보는 것처럼 학생의 수동적인 참여 행동을 묘사했다는 것이다. 1차 수업 설계안에서 발견된 또 다른 특징은 교사가 기대하는 학생의 바람직한 행동 외에 방해 행동이나 침묵 등과 같은 학생 참여는 고려하지 않았다는 것이다.

1st	2nd
대답한다 PPT를 본다 학습목표를 읽는다(복창) 발표한다 교사의 설명을 듣는다 그래프를 도화지에 그린다 발표 내용을 듣는다	그래프를 그린다 모둠별로 발표한다

[Fig. 9] Examples of lesson design that have changed in terms of students' behavioral engagement(1)

1st	2nd
모둠별로 착석 인사 학습 목표 읽기(복창) 발표 및 경청 활동지 읽기 모둠 활동의 시작(마무리) 내용 정리 활동 내용을 확인 다음 차시 내용 확인	인사 활동지 읽기 모둠 활동의 시작(마무리) 발표 및 경청 모둠의 의사소통이 활발하지 않을 수 있다

[Fig. 10] Examples of lesson design that have changed in terms of students' behavioral engagement(2)

2차 수업 설계에서는 2차 수업 설계와 다르게 학생의 행동적 참여에 관한 묘사가 줄어든 대신 학생의 인지적·사회적 참여에 대한 묘사가 많아졌다. 1차 수업 설계에서는 학생이 수업 중에 해야 할 외현적 행동을 자세히 묘사했지만, 2차 수업 설계안에서는 [Fig. 9]와 같이 학생의 행동적 참여에 대한 묘사가 확연히 줄었다. 또한, [Fig. 10]의 '모둠의 의사소통이 활발하지 않을 수 있다.'라는 것처럼 교사가 기대하지 않는 학생 행동을 예측하기도 하였다. 21명의 예비교사 중 한 명은 1차 수업 설계안과 2차 수업 설계안에서 학생의 행동적 참여에 관한 기술에 변화가 없었다. 이 경우는 2차 수업 설계안의 도구로 제시된 학생 사고기반 수업 설계안의 수업 구조화 영역에 1차 수업 설계안의 도입, 전개, 정리의 모든 내용이 그대로 기술되었음이 확인되었다.

3) 감정적·정서적 참여에 관한 계획

1차 및 2차 수업 설계안 모두 학생의 감정적·정서적인 측면과 관련된 참여를 기술한 사례는 드물었다. 학생의 감정적·정서적 참여 사례는 1차 수업 설계안에서 6개, 2차 수업 설계안에서 3개가 발견되었다. [Table 10]과 같이 일부 예비교사는 학생이 수학과 관련하여 필요성이나 유용성을 인식하고 흥미와 기대감을 가질 것이라 묘사했으며 힘들었다는 감정을 말할 것이라 예상하기도 했다. 그러나 교사가 계획한 수업에서 학생들이 유용성 등의 감정이 유발되는 이유가 무엇인지 명확히 알 수 없었다. 2차 설계안에서 예비교사의 감정적·정서적 참여 사례는 3개에 불과했지만, 1차 수업 설계안에서 발견된 사례보다 구체적으로 묘사했음을 확인할 수 있었다. 예를 들어, 1차 수업 설계안에 '지오지브라를 통해 유용성을 느낀다.'라고 작성했던 예비교사는 2차 수업 설계안에서 '이전에 배운 함수, 그래프 표현, 그래프 성질을 종합적으로 연관시킨 활동을 통해 학생들이 함수의 유용성과 필요성을 느낄 수 있으며, 수학을 배우는 데 동기유발을 할 수 있다'와 같이 학생 참여를 더 구체적으로 기술했다.

4) 인지적·사회적 참여에 관한 계획

본 연구는 학생의 인지적·사회적 참여 차원에서 예비교사들의 수업 설계안을 설명하기 위해 문제의 이해 및 분석, 표현 및 정당화, 연결성 인식 및 적용, 그리고 종합 및 평가의 네 가지 유형과 관련된 데이터를 분석 및 해석했다. 1차 수업 설계안에서 예비교사들이 학생의 인지적·사회적 참여 차원으로 기술된 내용을 분석한 결과 다음과 같은 네 가지 특징이 발견되었다. 첫째, 교사의 설명과 질문에 의해 모든 학생이 과제 상황을 명확히 이해하거나 적극적으로 질문할 것이라 예상했다. 그러나 학생이 주어진 과제 상황을 이해하고 있다는 것을 어떻게 확인할 것인지에 대한 계획은 확인할 수 없었다. 예를 들어,

[Table 10] Examples of the contents of lesson design written in terms of students' emotional and affective engagement

1st	2nd
.	They feel the need to know the point-to-dot distance with the help of the teacher
They feel the need to mathematically define the word possibility	.
They are interested in the teacher's question	.
I had a lot of homework on the weekend(share feeling that it was hard)	Recognize the necessity and usefulness of sets and propositions in connection with the various math contents
Know the usefulness of GeoGebra	Students can feel the usefulness and necessity of functions and motivate them to learn mathematics through activities that comprehensively associate previously learned functions, graph expressions, and properties of graphs. When setting $a=0$ and changing b, c, the linear function comes out and they puzzled.
Be curious about what they learn, Recognize that graphs are useful for representing various changes, Recognize that graphs are usuful tools to represent real life	.
Interested in the tasks. Looking forward to next lesson	.

[Fig. 11]과 같이 1차 수업 설계에서 예비교사들은 교사의 단계적 질문이나 설명으로 인해 수학 개념을 이해할 것이고, 문제 상황을 보면서 주어진 조건을 생각하거나 이해되지 않으면 교사에게 질문할 것이라 예상했다. 그러나 교사의 설명이나 단계적인 질문이 실제로 학생의 이해를 가져왔다는 증거를 어떻게 수집할 것인지, 주어진 과제 상황을 이해하고 분석하는 과정에서 학생이 어떤 인지적 어려움을 겪을 수 있는가는 고려되지 않았다.

No.	교수·학습활동	
	교사	학생
1	활동지의 활동 1번을 읽게 한다. 문제 상황을 설명한다.	문제 상황을 집중해서 읽고 이해가 가지 않을 시 선생님께 적극적으로 물어 본다.
2	문답법을 통해 학생들이 경우의 수의 비율로서의 확률 개념을 이끌어내도록 유도한다. 앞서 구한 동전의 앞면이 나올 확률을 확인할 필요성을 느끼면서 적은 수의 시행을 해보게 한다.	교사의 각 단계에 맞춰 질문하며 통계적 확률, 수학적 확률의 개념을 얻는다.
3	• 학습 내용 설명 – 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$일 때, 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.	앞에서 찾아낸 성질이 모든 닮은 평면도형들에서 성립함을 이해한다.
4	[문제 1]의 지문을 함께 읽으며 문제 상황을 설명한다. 학생이 학습지의 지문을 이해했는지 확인하기 위한 질문을 한다.	문제 상황을 생각해보며 밑면의 모양(넓이)과 물의 높이가 변하는 속도 사이에 어떤 관계가 있을지 생각해본다.

[Fig. 11] Examples of 1st lesson study that describes student understanding and analysis

No.	교수·학습활동	
	교사	학생
1	• 사례나 근거를 제시하며 설명하기 – 닮은 두 직사각형의 넓이를 구하고, 넓이 비를 간단한 자연수 비로 나타낸 후, 어떤 수들의 제곱의 비와 같은지 발문하여 생각해보게 한다.	주어진 두 직사각형의 넓이를 구하고, 넓이 비를 간단한 자연수 비 $4:9$로 나타낸 후, $2^2:3^2$임을 찾는다. 두 직사각형의 닮음비가 $2:3$임을 구하고, 넓이의 비가 닮음비의 각 항의 제곱의 비임을 찾아낸다.
2	미리 선정한 학생이 직접 발표하도록 한다. 모범 답안을 작성한 학생이 발표하도록 하며, 학생들과 함께 나누면 좋을 내용을 적은 학생이 이어서 발표하도록 한다. 일차함수의 기울기와 관련하여 설명한 학생이 없는 경우에는 기울기의 의미를 다시 설명하며 [문제 1]의 내용과 연계하여 설명한다. • 학습목표에 일차함수의 그래프의 성질이 있었음을 환기하며 오늘의 학습목표와 학습지의 문제가	발표하는 학생은 밑면의 넓이가 넓을수록 물의 높이의 변화 속도가 낮다는 것을 설명한다. 이는 일차함수의 그래프에서 기울기가 낮아짐을 설명한다. 또한, 단면적은 넓이가 일정한 원이므로 일차함수의 그래프가 나온다는 것을 설명한다. 발표를 안하는 학생은 다른 학생의 발표에 경청한다. 자신이 속한 모둠의 답과 다른 학생의 답을 비교하면서 다른 학생의 설명이 수
3	• 활동 1-(3)의 내용을 해결하도록 한다. • 편지의 내용에 그 이유를 명확히 설명할 수 있도록 한다.	조별 활동을 통해 원식이에게 조심해야 할 지점에 대한 편지를 작성한다.

[Fig. 12] Examples of 1st lesson study that describes students' representation and justifications

둘째, 학생들이 교사가 기대하는 단 하나의 정답을 절차를 정확히 찾아 표현할 것이라 예상했다. 그러나 해결해야 할 문제에서 발생할 수 있는 오류, 오개념을 포함한 학생들의 다양한 표현과 정당화 과정을 예상하지는 않았

다. 예를 들어, [Fig. 12]를 보면 예비교사들은 학생이 두 변화량의 관계를 정확히 표현하고 설명할 것이라 예상했다. 또한, 수업 설계에서 교사가 기대하는 구체적인 수학적 사고과정을 기술하지 않은 경우도 존재했다. [Fig. 12]에서 예비교사는 '조심해야 할 지점에 대한 편지를 작성한다.'라고 기술했지만, 학생이 수업 주제와 관련지어 편지에 어떻게 표현하고 정당화했을 것이라 예상했는지는 알 수 없었다.

No.	교수·학습활동	
	교사	학생
1	앞서 제시한 교과서 문제의 답을 물어보며 다시 한번 발생 가능성 확인의 중요성을 인식하게 한다.	교사의 물음에 답하며 수학적 확률 개념을 더 확실히 받아들인다.
2	학습지 문제를 해설하며 각 경우의 발생 가능성이 같을 경우에만 수학적 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있음을 알게 한다.	활동과 교사의 설명을 통해 인식론적 장애를 극복하여 발생 가능성을 수학적 확률 개념과 연관지어 인지구조를 재구성한다
3	6.학생들의 발표 중 잘못된 부분이 있으면 그때그때 피드백 한다. 7.원기둥과 원뿔의 옆면의 전개도에 대한 오류를 학생들이 자주 범하는 편이므로 이를 고려하여 원기둥과 원뿔모양인 고깔이나 종이컵 등을 학생들 앞에서 직접 잘라서 해보면서 보여준다.	6.교사의 피드백이 있다면 받아들인다. 7.교사가 직접 보여주는 것을 잘 보고, 원기둥과 원뿔의 옆면의 전개도를 잘 기억하여 오개념이 생기지 않도록 한다.

[Fig. 13] Examples of 1st lesson design described in terms of recognition and imitation of authoritative knowledge

1차 수업 설계안 중 일부는 수학 과제에 대한 학생의 표현 및 정당화보다는 교사가 전달하는 지식을 학생들이 의심 없이 받아들이고 모방하는 측면에서 학생의 참여를 묘사했다([Fig. 13]). 즉, 예비교사들은 학생을 수학적 사고과정의 능동적인 참여 주체로 보지 못하고 수동적 학습자(passive learner)로 보고 있음을 알 수 있다. 학습(learning)은 학생의 인지적 사고과정이 없다면 일어날 수 없다. 따라서 학생이 교사에 의해서 수동적으로 학습했다는 것은 모순적인 표현일 수 있다. 그러나 이 연구에서는 수학적 사고자가 아닌 학생을 표현하기 위해 수동적 학습자란 용어를 사용했다. 수학적 사고자(mathematical thinker)란 스스로 문제를 해결하기 위해 과제의 구조와 패턴에 주의를 기울이고, 정당화하고, 개념들 사이의 연결성을 인지하고, 서로 다른 아이디어들을 평가하는 등과 같이 인지적·사회적으로 참여하는 학생을 말한다(Owens, 2008). 그러나 수동적 학습자(passive learner)는 수학적 사고자가 아닌 학생을 표현하기 위한 것으로 교사의 설명을 듣고 지시에 따르지만, 수학적 사고과정에 관여하지 않는다.

No.	교수·학습활동	
	교사	학생
1	활동 1-(2)의 문제를 풀게 한다. 1-(2) 문제를 해결하는 도중 기존에 아는 내용으로 풀이가 안되는 지점을 언급하며 궁금증을 유발한다.	활동 1-(1)의 내용에 기반하여 풀이한다. 중학교 2학년에 배운 내용인 피타고라스 정리를 떠올리며 연결시킨다.
2	학습지 문제를 해설하며 각 경우의 발생 가능성이 같을 경우에만 수학적 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있음을 알게 한다.	활동과 교사의 설명을 통해 인식론적 장애를 극복하여 발생 가능성을 수학적 확률 개념과 연관지어 인지구조를 재구성한다
3	• 학습 내용 설명 - 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$일 때, 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.	앞에서 찾아낸 성질이 모든 닮은 평면도형들에서 성립함을 이해한다.
4	• 수학적 모델링 문제 제시 • 수학적 모델링 단계를 설명하고 단계에 따라 해결하도록 한다. - 수학적 모델링 단계 : 문제 상황 인식, 변수 인식, 수학 행하기, 결과 분석 및 평가, 모델 실행	• 수학적 모델링 단계에 따라 모둠 구성원들과 문제 해결 • 자료 수집을 위해 노트북으로 인터넷 사용 • 두 원은 항상 닮음임을 알고, 닮음비와 넓이의 비 사이의 관계를 이용
5	3-1 7분의 시간을 주며 문제 4를 풀 수 있게 한다. 이 때, 모둠별로 자유롭게 이야기할 수 있도록 한다.	3. 문제 4를 해결하며 그래프를 일상언어로서 해석하는 경험을 한다.

[Fig.14] Examples of 1st lesson design described in terms of recognition and application of the connection of knowledge

셋째, 예비교사들은 설계하는 수업의 주제와 관련하여 서로 다른 수학적 개념의 연결성을 묘사함으로써 교사로서 풍부한 수학 지식을 가지고 있음을 보여주었다. 그러나 학생들이 서로 다른 대상들 간의 연결 지어 생각했고, 그 연결성을 이해했는가를 확인할 수 있는 구체적인 계획을 확인할 수 없었다([Fig. 14]). 또한, 예비교사들은 피타고라스 정리와 두 점 사이의 거리 공식, 이차함수와 이차방정식, 평면도형들의 길이 비와 넓이 비 등과 같이 수학 개념들 사이의 연결성에 대해 묘사했지만, 수업 중에 직면하게 될 학생들의 여러 가지 수학적 사고들을 어떤

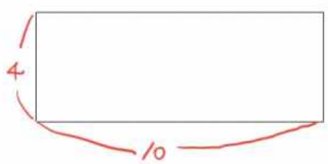
연결성을 가지고 학생들의 문제해결과정에 이용하게 할지는 계획하지 않았다.

넷째, 예비교사들은 소집단 협력 학습을 계획하여 학생들이 서로 다른 수학적 사고를 비교하고 소집단별 결과를 발표하는 과정에서 수학적 사고의 정교화 및 일반화가 일어날 것이라 예상했다. [Fig. 15]와 같이 예비교사들은 학생들이 동료와 토론하면서 여러 가지 해결책을 제시하거나 서로의 수학적 아이디어를 비판적으로 받아들이며, 소집단별로 합의된 결과를 발표하면서 견고한 이해를 구축할 것이라 학생의 참여를 기술했다. 그러나 소집단 협력 학습에서 학생들이 논의할 것이라 예상되는 해결책을 구체적으로 예상하여 수업을 설계하지는 않았다.

No.	교수·학습활동	
	교사	학생
1	• 활동 1-(1)의 문제를 풀게 한다. • 1-(1)의 문제를 풀이하며 보충 설명을 한다.	조원과 토론하여 여러 방향으로의 해결방안을 제시한다.
2	- 학생들의 인식론적 장애를 극복하기 위한 수학적 모델링 문제를 제시하여 해결하게 한다. (내용을 실제적으로 선정하되, 문제를 부분문제로 분할하여 학생들이 해결하기 쉽게 한다.) (모둠 활동 중 순회하며 학생들의 의견을 피드백해주며 적절한 발문을 통한 비계를 제공한다. 이때, Prompting 전략을 사용한다.)	서로의 의견을 비판적으로 받아들이며 수학적 확률에 대한 이해를 높인다.
3	복원 과제를 해결한 모둠 중 발표할 모둠을 선택하여 발표시키고 내용을 정리한다.	다른 모둠의 문제해결 과정을 관찰하고 자신의 모둠의 해결과정과 비교한다.

[Fig. 15] Examples of 1st lesson design described in terms of synthesis and assessment

2차 수업 설계안에서 예비교사들이 학생의 인지적·사회적 참여 차원에서 기술한 내용이 1차 수업 설계와 비교하여 달라진 점은 교사가 학생들의 다양한 사고과정을 예상했다는 것이다. [Fig. 16]의 수업 설계 사례는 직사각형의 각 변과 가장 멀리 떨어진 직사각형 내부의 점을 찾는 수학 과제에 대한 학생의 인지적·사회적 참여에 대한 것이다. 1차 수업 설계에서 예비교사는 '문제 상황을 집중해서 읽고 이해가 가지 않을 시 선생님께 적극적으로 물어본다, 조원과 토론하여 여러 방향으로 해결방안을 제시한다.'라고 기술했지만, 2차 수업 설계에서 '조별로 다양한 의견을 논의'한다는 것을 수업 구조화 영역에 기술하고 수업 흐름 점검하기의 학생 예상 반응 영역에 크기가 각각 다른 원형의 튜브를 끼고 들어가 확인하겠다고 생각하거나, 직사각형의 두 대각선의 교점이라 생각할 수 있으며, 네 꼭짓점에서 각의 이등분선의 교점이라 생각할 수도 있다고 기술하여 오류를 포함한 학생의 다양한 수학적 사고를 예상했다.

task	(1) 아래의 직사각형에서 벽면에서 거리가 가장 먼 지점을 찾아보자. 
1st	전개 단계 교사: • 활동지의 활동 1번을 읽게 한다. • 문제 상황을 설명한다. • 활동 1-(1)의 문제를 풀게 한다. • 1-(1)의 문제를 풀이하며 보충 설명을 한다. 학생: • 문제 상황을 집중해서 읽고 이해가 가지 않을 시 선생님께 적극적으로 물어 본다. • 조원과 토론하여 여러 방향으로의 해결방안을 제시한다.
2nd	수업 구조화 • 간단한 형태의 도형 (직사각형)을 이용하여 문제 상황을 이해시킨다. • 다양한 의견을 모두 수용하며 자연스럽게 각의 이등분선을 도입하도록 지도한다. (정해진 답이 있는 것이 아니므로 학문적으로 연결은 시키되 발표된 내용을 토대로 학생들을 격려한다.) / • 조별로 다양한 의견 논의 (조장이 제시된 의견 발표) 수업 흐름 점검하기(학생 예상반응) • 1. 크기가 각각 다른 원형의 튜브를 끼고 들어가서 확인한다. • 2. 직사각형의 두 대각선의 교점이 될 것이다. • 3. 네 꼭짓점에서 각의 이등분선의 교점이 될 것이다.

[Fig. 16] Comparison of the contents described in the 1st and 2nd lesson design in terms of students' cognitive and social engagement(1)

task	5. (1) (복습) $y=ax^2+bx+c$꼴의 그래프의 특징을 써보세요. (2가지) (Memorization Task) - - (2) Geogebra를 이용해 $y=ax^2+bx+c$ 을 입력해보자. <보기> ㉠그래프의 폭 ㉡대칭축 ㉢볼록성 (아래로볼록-위로볼록) ㉣꼭짓점 ㉤y절편 ① b, c를 고정하고 a를 변화시키며 그래프 모양의 변화를 관찰하고, 변하는 것과 변하지 않는 것을 <보기>에서 찾아 써보자. (Procedures with Connections Task) ● 변하는 것: ● 변하지 않는 것: ② a, c를 고정하고 b를 변화시키며 그래프 모양의 변화를 관찰하고, 변하는 것과 변하지 않는 것을 <보기>에서 찾아 써보자. ● 변하는 것: ● 변하지 않는 것: ③ a, b를 고정하고 c를 변화시키며 그래프 모양의 변화를 관찰하고, 변하는 것과 변하지 않는 것을 <보기>에서 찾아 써보자. ● 변하는 것: ● 변하지 않는 것:
1st	전개 단계 5번의 (1)을 통해 선수학습 복습을 확인해보게 2분의 시간을 준다. 2분 뒤, 한 조를 지목하여 발표시킨다. 발표한 내용과 학생들이 알아야 하는 추가 성질을 판서해준다. 5번의 (2)를 geogebra에 그리고 ①을 풀어보는 시간 3분을 주고 조별로 발표시킨다. 발표 후, 틀린 부분이 있으면 수정해주고 맞으면 보충설명을 해준다. ②,③ 도 동일한 과정으로 진행한 후, 학습지 수업을 마친다. / 선수학습을 떠올려 보면서 5번의 (1)번의 특징을 적어본다. 지목당한 조에서는 발표를 한다. 교사의 필기를 통해 다시 선수학습 내용을 인지하고 교사의 지도에 따라 (2)를 풀어본다. 풀어본 후 조별로 발표하고, 교사의 보충설명을 통해 시각적으로 변하거나 변하지 않는 특징들을 이해한다.
2nd	수업 구조화 ▷ 조별 과제 해결(조별 의견 나누기) - 전체 공유 (①은 잘 수행한 1~2조에서 발표, ②,③은 발표하지 않은 나머지 조들 발표), 교사의 피드백 및 설명 수업 흐름 점검 ▷ $b=0$이라고만 설정해 놓은 후, a을 변화시켜보아 ㉡대칭축을 변하지 않는 것이라고 답함 ▷ a을 모든 범위에서 변화시켜보지 않고, 양수에서만 변화시켜본 후, ㉢볼록성을 변하지 않는 것이라고 답함 ▷ $b=0$, $c=0$이라고만 설정해 놓은 후, a을 변화시켜보아 ㉣꼭짓점을 변하지 않는 것이라고 답함 ▷ $a=0$이라고 설정한 후, b와 c을 변화시켜 볼 때, 일차함수가 나와 당황한다.

[Fig. 17] Comparison of the contents described in the 1st and 2nd lesson design in terms of students' cognitive and social engagement(2)

[Fig. 17]의 수업 설계 사례는 공학적 도구인 GeoGebra의 슬라이더(slider)를 활용하여 매개변수 a, b, c에 의한 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 변화를 관찰하는 과제에 관한 것이다. 1차 수업 설계에서 예비교사는 학생이 선수학습을 떠올려 과제 5를 해결하고 지목된 조에서 발표한다고 기술했으며, 교사의 추가적인 설명을 통해 학생들이 과제에서 요구하는 특징을 이해한다고 했다. 그러나 2차 수업 설계에서 소집단 협력 학습은 수업 구조화 영역에 기술하고, 수업 흐름 점검하기의 학생 예상하기 영역에 과제 5번에 대한 학생들의 수학적 사고를 여러 가지 측면에서 기술했다.

3. 교사의 역할

1) 지식 전달자(knowledge deliver)

1차 수업 설계안 21개 중 9개는 주로 지식전달자로의 교사 역할을 주로 기술했다. 1차 수업 설계안에서 확인된 지식전달자로의 교사 역할 사례는 [Fig. 18]과 같다.

교사가 수학 개념, 지난 시간 학습 내용, 과제의 해결 방법 등을 설명한다고 기술한 것은 지식전달자로의 교사 역할을 보여준다. 예를 들어, '원기둥과 원뿔의 옆면에 대한 오류를 학생들이 자주 범하므로 이를 고려하여 원기둥이나 원뿔 모양인 고깔이나 종이컵 등을 학생들 앞에서 직접 잘라서 보여준다.'라는 문장은 원기둥과 원뿔의 전개도를 시범적으로 보여주고 옆면의 모양을 기억하게 하고 있으며 학생이 교사가 시범을 잘 기억하여 오개념이 생기지 않게 한다고 기술했다는 점에서 지식전달자로의 교사 역할을 보여주었다. 만약 교사가 학생에게 다양한 원기둥과 원뿔의 전개도에서 관찰해보게 하고, 옆면의 모양이 어떤 특징을 가지는지 논의했다면 형성적 조력자로의 교사 역할이라 볼 수 있었을 것이다.

teaching·learning activities(teacher)
• 변수의 정의, 그래프의 정의를 칠판에 적어 설명한다 • 복습을 통해 기억나지 않는 학생들을 위해 다시 한번 개념을 설명해준다 • 해당하는 변수들의 그래프가 왜 이런 형상으로 그려지는지 설명한다 • 3가지 질문에 대해 직접 그래프를 해석해주어 답을 찾는 과정을 보여준다 • 교사의 시범에 따라 그대로 학습지에 작성한다 • 원기둥과 원뿔의 옆면에 대한 오류를 학생들이 자주 범하므로 이를 고려하여 원기둥이나 원뿔 모양인 고깔이나 종이컵 등을 학생들 앞에서 직접 잘라서 보여준다

[Fig. 18] Examples of the role of teacher as a knowledge deliver described in the 1st lesson design

2차 수업 설계안은 21개 중 3개에서 지식전달자로의 교사 역할이 두드러지게 관찰되었다. [Fig. 19]에 제시된 내용은 예비교사 20과 예비교사 21의 2차 수업 설계안 중 일부를 발췌한 것으로 수업 구조화와 수업의 흐름(가

능한 교사 발문)의 내용 중에서 지식전달자로의 교사 역할을 기술한 사례이다.

lesson structure	lesson flow
• 학습지 1번 문항을 설명한다. 문제 1의 지문을 읽으며 교사는 문제의 상황을 풀어서 설명한다 • 학생들이 알아야 할 핵심 성질을 칠판에 정리해준다	• 자신의 기분이 어떨 때 어떤 값을 갖는지 순서쌍으로 표현하거나 표로 만들어놓으면 그래프를 그리기 편하겠죠? 선생님처럼 먼저 표를 작성하고 그래프를 그리는 것이 좋겠습니다 • 교과서에서 하루 동안 해수면 변화를 나타냈던 그래프 기억나나요? 그 그래프는 정비례도 반비례도 아니었죠? 그래프는 주제와 자기가 잡는 기준에 따라 다양한 모양으로 나올 수 있습니다

[Fig. 19] Examples of the role of teacher as a knowledge deliver described in the 2nd lesson design

수업 구조화에서 문제의 상황을 교사가 설명해주거나 학생들이 알아야 할 핵심 성질을 칠판에 정리해주는 것은 지식전달자로의 교사 역할을 보여준다. 또한, 수업의 흐름에서 교사의 가능한 발문은 질문 형태로 작성되어 있지만, 학생에게 그래프를 그리기 위해 표나 순서쌍을 만들어둘 것을 지시하고 교사가 시범을 보인 것을 모방할 것을 요구했다. 그리고 또 다른 사례는 감정에 관한 그래프가 정비례인지, 반비례인지를 묻는 학생의 질문에 이전에 관찰했던 그래프는 정비례도 반비례도 아닌 그래프라는 사실을 명확히 알려주었다. 만약 교사가 학생이 그린 그래프가 정비례인지, 반비례인지 학생 스스로 정당화해보게 했다면 지식전달자보다 형성적 조력자로의 교사 역할을 실천했을 가능성이 커질 것이다.

2) 평가자(evaluator)

평가자로의 교사 역할이 두드러지게 나타난 수업 설계안은 존재하지 않았지만, 일부 수업 설계안에서 평가자로서의 교사 역할이 확인되었다. 1차 수업 설계안에 기술된 내용 중에서 평가자로의 교사 역할 사례는 [Fig. 20]과 같다.

학생들이 문제를 해결하는 동안 교실을 순회하고 학생들의 답안을 선정한다고 기술한 사례는 형성적 조력자의 교사 역할로 볼 수 있지만, 교사가 옳은 답안을 한 학생을 선정하여 발표시키고 태도가 좋지 않은 학생에게 다른 학생이 발표한 내용을 정리하게 한다는 것은 형성적 조력자보다는 평가자로의 교사 역할을 지지했다. 또한, 발표 중 잘못된 부분이 있으면 바로 피드백한다는 교사 역할 사례는 교사가 잘못된 부분이 있으면 피드백한다는 것과 관련하여 학생이 교사의 피드백을 듣고 그것을 받아들인다고 기술했다는 점에서 학생의 수학적 사고를 촉진하기 위한 형성적 피드백(formative feedback)이 아닌 참·거짓을 판단하는 평가(evaluation)로 확인되었다.

teaching·learning activities(teacher)
• 전체 학생들과 함께 정답을 맞추어본다 • 발표 후, 틀린 부분이 있으면 수정해주고 맞으면 보충설명해준다 • 발표 중 잘못된 부분이 있으면 그때그때 피드백한다. • 미리 선정한 학생(모범 답안을 선정한 학생)이 발표하게 한다. • 연이가 발표해볼까요? (발표 후) 네, 맞아요.

[Fig. 20] Examples of the role of teacher as a evaluator described in the 1st lesson design

2차 수업 설계안에서도 평가자로의 역할이 수업 구조화에서 발견되었으며, 평가자로의 역할이 두드러지게 표현된 것은 예비교사 15와 예비교사 17이 작성한 2개의 설계안이었다. [Fig. 21]은 예비교사 15의 2차 수업 설계안 중 일부를 발췌한 것으로 가능한 교사 발문이 깔때기(funneling) 패턴을 보인다. 이처럼 깔때기 패턴으로 이루어지는 교사 발문은 학생의 수학적 사고를 촉진하기 어렵고, 교사의 지속적인 평가적 피드백으로 유도된 수학적 사실과 규칙을 학생들에게 암기 및 재현하게 할 가능성이 더 크다(Franke et al., 2009).

예비교사 15와 예비교사 17을 포함한 일부 예비교사의 2차 수업 설계안에서 확인된 평가자로서의 교사 역할은 [Fig. 22]와 같다. 생산적인 논의를 위해 의미 있는 수학적 아이디어를 점검하는 교사 역할은 형성적 조력자로 볼 수 있지만, 모범 답안을 선정하고 이를 발표하게 하는 교사의 행동은 모든 학생을 중요한 수학적 사고과정에 초대하지 못하고 단지 유능한 학생이 교사의 역할을 대신하여 지식을 전달하게 만든다. 또한, 누가 올바른 풀이

anticipating students' thinking	teachers' purposeful questions
▸ 지금까지 배운 함수들의 특징과 성질을 상기시키고 학습지에 적도록 할 때 학생들 각자마다 특징을 잘 모르는 함수가 하나쯤은 있을 것으로 예상이 되며 그 함수의 특징 칸을 비워놓거나 옆 친구의 답을 베껴 적을 수 있다. ▸ 교사의 발문에 학생들은 자신이 적지 못한 함수의 그래프의 특징을 상기한다.	▸ 로그함수의 경우 로그함수의 그래프의 개형은 어떠한가? → 로그함수의 일반적인 식 표현은 무엇인가? → $y=\log_a(x-b)+c$에서 a, b, c 각각이 의미하는 바는 무엇인가? → 로그함수에서 정의역은? → x가 점점 커질 때, 점점 작아질 때 함숫값은 어떻게 변하는가? ▸ 삼각함수의 경우 sin함수, cos함수, tan함수의 그래프의 개형은 어떠한가? → 각 함수의 치역이 어떻게 되는가? → 그래프가 일정한 모양이 주기적으로 반복되는가?
▸ 외심을 이용하여 푸는 경우 수막새 위에 세 개의 점을 찍고 각 점을 이어 삼각형을 만든 뒤 그 삼각형의 외심을 Geogebra를 이용하여 구하는 경우 ▸ 외심을 이용하여 풀지만 Geogebra프로그램을 이용하지 않고 학습지 위에 세 개의 점을 찍고 자와 각도기를 이용하여 학습지 위에 외심을 구하려고 하는 경우 ▸ Geogebra를 이용하여 풀지 않고 학습지에 외심을 이용하여 푼 경우 교사가 Geogebra라는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 풀어보라고 했을 시 이미 학습지에 과제를 해결했는데 굳이 Geogebra라는 프로그램을 이용하여 과제를 다시 해결하라고 하는 이유를 모를 수 있다. 또는 그 이유를 물을 수 있다.	▸ 원의 방정식을 이용하여 푸는 경우 세 개의 점의 좌표가 일반적으로 복잡하게 나온다. 그래서 세 개의 점의 좌표를 대입하여 방정식 세 개를 얻는다고 하여도 숫자가 복잡해서 문제를 풀기 까다로울 수 있다. 이때 컴퓨터의 계산기프로그램을 이용해서 연립방정식을 해결할 수 있도록 한다. 모둠 발표 시 연립방정식에 대한 복습 겸 피드백을 할 수 있다. 미지수의 개수가 3개이고 방정식이 3개이면 미지수를 정확히 구할 수 있다는 사실에서 값을 모르는 문자 개수만큼 방정식이 있다면 미지수를 정확히 알 수 있다는 사실을 강조한다. ▸ 외심을 이용하여 풀지만 학습지에 자와 각도기를 이용하여 푼 경우 학생이 푼 과정을 좌표평면과 Geogebra라는 프로그램을 사용하여 풀 수 있도록 지도한다.

[Fig. 21] Examples of the role of teacher as a evaluator described in the 2nd lesson design

lesson structure	lesson flow
• 미리 선정한 학생(모범 답안을 선정한 학생)이 발표하게 한다. • 과제해결 후 스크린에 답을 띄워 간단히 설명한다 • x, y축에 대한 설정이 잘못되었거나 내용상 오류가 있을 때는 즉시 코멘트해준다 • 교사의 피드백 및 정리 판서를 통해 답 확인 • 과제해결 후 모둠과제 수행할 때 순회하면서 발견했던 학생들의 오류, 오개념을 설명한다	• 넓이를 좀 더 쉽게 구하려면 도형을 다르게 펼쳐서 다른 방법으로 그리는 것이 좋지 않을까? • 이 모둠은 외심을 이용하여 학습지에 직접 그려 풀었구나! 잘했어. 그런데 방법적인 측면에서 아쉬운 점이 있는데 문제를 다시 한번 읽어볼래? → (Geogebra 프로그램을 이용하여 푸는 경우를 발견하지 못한 경우) 어떤 컴퓨터 프로그램을 이용하여 과제를 해결하라고 하였는가?

[Fig. 22] Examples of the role of teacher as an evaluator described in the 2nd lesson design

를 하는지를 평가하는 교사 역할을 했다. 또 다른 예로 수업의 흐름 중 교사 발문에 학생이 외심을 이용하여 해결한 것을 아쉬운 점이 있다고 평가하면서 활동지를 제대로 확인하지 못한 것을 지적하는 교사를 묘사한 것도 평가자로의 교사 역할로 볼 수 있었다.

3) 관리자(manager)

1차 수업 설계안 12개 중에서 11개는 주로 관리자로의 역할을 기술했다. 수업의 방해 행동을 통제하거나 수학적인 측면 외의 교실 관리를 위한 교사의 행동으로 확인된 사례는 [Fig. 23]과 같다. 학생들과 인사하면서 수업에 집중시키고, 자고 있거나 제대로 앉지 않은 학생들이 수업을 준비하도록 지도하는 것, 교과서를 펴게 하거나 태도가 바르지 않은 학생에게 발표 내용을 정리하게 하는 등의 교사 행동은 관리자로의 교사 역할을 보여주었다.

teaching·learning activities(teacher)
▪ 학생들과 인사하면서 학생이 수업에 집중하게 한다 ▪ 자고 있는 학생이 있거나 자리에 제대로 앉지 않은 학생을 확인하여 수업 준비를 할 수 있도록 지도한다 ▪ 교과서 109쪽을 펴게 한다. 학생들이 모두 109쪽을 펴고 수업을 들을 준비가 되어있는지 다시 확인한다 ▪ 잘 했어요. 다들 선생님이 앉으라는 대로 잘 앉아 있나요? ▪ 태도가 좋지 않은 학생은 발표 내용을 정리하게 한다

[Fig. 23] Examples of role of teacher as a manager described in the 1st lesson design

2차 수업 설계안 21개 중에서 관리자로의 교사 역할을 기술한 내용이 확인되었고, 대체로 수업 구조화 영역에 기술되어 있었다. 2차 수업 설계안에서 확인된 관리자로서의 교사 역할 사례는 [Fig. 24]와 같다.

Area	Description of the teacher role
lesson structure	▪ 태도가 좋지 않은 학생이나 임의로 한 학생을 선정하여 문항의 내용을 풀어서 설명하게 한다 ▪ 다른 학생의 발표에 집중하도록 돕기 위해 학생의 발표가 끝나면 태도가 좋지 않았던 학생을 선정하여 발표 내용을 정리하게 한다
lesson flow	▪ (그림을 선정하는 과정에서 모둠원끼리 의견이 좁아지지 않는 경우) 이 모둠은 하나로 의견이 좁아지지 않으니 다수결로 의견을 정하자

[Fig. 24] Examples of role of teacher as a manager described in the 2nd lesson design

예비교사 19는 태도가 좋지 않은 학생을 선정하여 문항의 내용을 설명하게 하거나, 태도가 좋지 않은 학생에게 발표하게 한다고 기술했으며, 예비교사 15는 모둠 활동에 개입하여 모둠의 의사결정 방법을 결정해준다고 기술했는데 이것은 관리자로서의 교사 역할을 보여준다(Fig. 24). 예비교사 19와 같이 1차 수업 설계안에서 도입-전개-정리로 기술했던 것을 2차 수업 설계안의 수업 구조화 영역에 그대로 기술했기 때문에 관리자로의 역할 중에서 1차와 2차에서 같은 문장이 확인되기도 했다.

4) 형성적 조력자(formative facilitator)

여기에서는 예비교사들이 작성한 1차, 2차 수업 설계안의 내용을 형성적 조력자의 교사 역할 측면에서 분석한 결과를 수업목표의 설정, 학생 본인의 수학적 사고에 대한 명확한 표현과 정당화 요구하기, 증거에 기반한 형성적 피드백 제공하고 서로 다른 수학적 사고를 비교・평가・보완하기, 그리고 서로 다른 대상들(개념, 아이디어 등)과 중요한 수업목표를 연결하기로 구분하여 기술한다. 형성적 조력자로의 교사 역할과 관련하여 2차 수업 설계안에서 발견된 사례들은 수업 구조화와 교사 예상하기 영역에서 1차 수업 설계안에서 발견된 사례보다 풍부하고 구체적으로 발견되었다. 예비교사 21명 중에서 15명은 1차 수업 설계안에서 주로 관리자, 지식전달자의 역할을 기술했지만 2차 수업 설계안에서는 형성적 조력자로의 교사 역할에 관한 내용이 증가했다. 예를 들어, 예비교사 13은 1차 수업 설계안에서 “교사가 학생들 앞에서 GeoGebra를 켜고 학생들에게 그리는 과정을 설명하고 따라 그리게 한다.”, “각 조에서 한 명씩 발표해보게 하며, 학생들이 알아야 할 특징들을 정리하여 칠판에 판서해준다.”, “발표 후, 틀린 부분이 있으면 수정해주고 맞으면 보충설명을 한다.”라고 하여 지식전달자와 평가자로의 교사 역할을 기술했다. 그러나 2차 수업 설계안에서는 “선정한 학생을 발표시킨 뒤 발표 내용을 적어 그래프 분석 및 의견을 나누어본다.”, “각 상수가 그래프에 어떤 영향을 주는지 추측하고 이를 정당화하도록 지도한다.”, “구체적인 예를 통해 일반화하여 제시한 답변이 맞는지 확인하게 한다.”라고 기술하여 형성적 조력자로의 교사 역할을 보여주었다.

(1) 수업목표의 설정

21명 중 11명의 예비교사는 1차 수업 설계안과 2차 수업 설계안의 수업목표를 다르게 기술했다. 1명의 예비교사는 1차 수업 설계안에 기술했던 수업목표에서 수업 중 학습해야 할 요소를 하나 줄였고 10명은 2차 수업 설계에서 1차보다 수업목표를 구체화했다.

[Fig. 25]는 1차보다 2차에서 수업 목표가 변화된 예비교사 18의 수업 설계안 중 일부이다. 예비교사 18의 1차 수업 설계에서는 이차방정식과 이차함수의 관계 또는 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다는 것과 같이 일련의 수업에 참여한 결과로 학생들의 성과(performance)에 초점을 두어 목표가 확인되었다. 그러나

2차 수업 설계안에서는 학생 성과뿐 아니라 학생들이 수업에 참여한 결과로 무엇을, 어떻게 이해하게 될지를 더 명료화했음을 볼 수 있다. 예비교사 18의 1차 수업 설계안에 기술된 '이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해할 수 있다'라는 수업목표는 2015 개정 수학과 교육과정 문서에 기술되어 있는 성취기준(10수학-01-09)과 일치하며, 성취기준은 일련의 수업을 통해 학생들이 달성해야 할 최종 결과이다. 그러나 2차 수업 설계안에서 확인된 '지오지브라로 하나의 고정된 포물선과 움직이는 직선을 탐구함으로써 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계와 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다.'라는 수업목표는 1차보다 수업의 방향성을 구체적으로 알려주었다.

	learning goals
1st	• 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해할 수 있다 • 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해할 수 있다 • 공학적 도구를 활용하여 수업을 진행하면서 공학적 도구의 유용성을 인식할 수 있다
2nd	• 지오지브라를 활용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 파악한다 • 하나의 이차함수에 대해 다양한 직선을 그려보면서 어떤 경우에 두 실근을 가지고, 어떤 경우에 한 실근(접하는 경우)을 가지고, 어떤 경우에 실근을 갖지 않는지(만나지 않는 경우)를 이해할 수 있다

[Fig. 25] Examples of the 1st and 2nd lesson design with different goals for learning specific mathematical contents

(2) 학생 본인의 수학적 사고에 대한 명확한 표현 및 정당화 요구

1차 수업 설계안에서 학생 스스로 수학적 아이디어를 표현하고 정당화하도록 지원하는 교사 역할을 기술한 사례는 [Fig. 26]과 같다. 예비교사 16은 대푯값과 산포도에 관한 수업 설계안에서 과제에 대한 학생 본인의 의견을 말하게 하고, 선택에 대한 근거를 생각해보게 한다고 묘사했다. 또한, 예비교사 5는 그래프로 표현해보고 분류해볼 기회를 주는 교사의 행동을 묘사했다. 이 사례들은 학생의 수학적 표현과 정당화를 요구하는 것이다.

teaching·learning activities(teacher)
• 활동지 1번 문제에 대해 생각해보고, 자신의 의견을 말하도록 한다 • 반 친구들이 고른 30개의 번호를 가지고 어떤 선택을 하면 좋을지 근거를 들어 생각해보게 한다 • 도화지에 이차함수의 그래프를 그려보고 분류하게 한다

[Fig. 26] Examples of the role of teacher as a formative facilitator(representation and justification) described in the 1st lesson design

2차 수업 설계안에서 학생의 수학적 사고에 관한 표현 및 정당화를 요구하는 교사 역할을 기술한 사례는 [Fig. 27]과 같다. 수업 구조화에 발표한 내용을 글로 적은 후 그래프를 분석하고 그 의견을 모둠원과 나누도록 하는 것, 그리고 매개변수에 따라 이차함수의 그래프가 어떤 영향을 받는지 학생이 추측하게 하고 그것을 정당화하게 한다고 기술한 예비교사 13의 사례는 교사가 학생에게 본인의 수학적 사고를 표현 및 정당화하도록 요구한 것이다. 또한, 예비교사 14는 예상 발문에서 기분을 수치화하거나 놀이기구의 움직임을 말해봄으로써 학생의 생각을 수학적으로 표현할 기회를 주었으며, 학생이 그린 그래프에서 원기둥의 높이가 일정하다는 조건이 어떻게 사용되었는지 질문하거나 대푯값을 선정한 근거를 들어 설명하게 한 것은 표현한 것에 대하여 정당화를 요구했다.

Area	Description of the teacher role
lesson structure	• 선정한 학생을 발표시킨 뒤 발표 내용을 적어 그래프 분석 및 의견을 나누어 본다 • 각 상수가 그래프에 어떤 영향을 주는지 추측하고 이를 정당화하도록 지도한다
lesson flow	• 그래프를 다 그렸는데 원기둥의 높이가 일정하다는 조건은 어떻게 사용할 수 있을까요? • 이 주제에서 ○○할 때 기분을 어떻게 숫자로 나타내는 게 좋을까? • 각자 선택한 대푯값을 어떻게 구했는지 질문하거나 선정한 근거를 잘 말할 수 있는지 물어볼 수 있다 • 네가 생각한 놀이 기구의 움직임을 말로 표현해볼까? • 왜 그렇게 생각했는지 설명해볼래?

[Fig. 27] Examples of the role of teacher as a formative facilitator(representation and justification) described in the 2nd lesson design

(3) 증거에 기반한 형성적 피드백을 제공하고, 서로 다른 수학적 사고를 비교·평가·보완하기

1차 수업 설계안에서 교사가 학생의 수학적 사고의 증거에 기반하여 형성적 피드백을 제공하고, 서로 다른 수학적 사고를 비교, 평가, 보완하도록 요구한 사례는 [Fig. 28]과 같다.

teaching·learning activities(teacher)
▪ 교사는 순회하며 어려움을 겪는 학생을 개별 지도하고, 문항에 대한 학생토론을 유도한다 ▪ 자신들의 조에서 어떤 의견이 나왔는지 생각을 공유하고 정리하게 한다 ▪ 서로 다른 방법으로 푼 학생이 있다면 발표를 통해 공유하게 한다

[Fig. 28] Examples of the role of teacher as a formative facilitator(feedback and self-monitoring) described in the 1st lesson design

Area	Description of the teacher role
lesson structure	▪ 같은 의견을 가진 학생들끼리 집단을 구성하여 근거를 제대로 생각지 못한 학생이 생각을 정리하게 하고, 이후에 의견이 다른 이질적 집단으로 재구성하여 서로 다른 의견을 듣게 한다 ▪ 교실을 순회하며 도움이 필요한 학생에게 도움을 주고 발표할 학생을 미리 선정한다 ▪ (같은 식에 존재해서 서로 영향을 준다고 답하면) 구체적인 예를 통해 일반화하여 제시한 답변이 맞는지 확인하게 한다
lesson flow	▪ 이차방정식과 직선의 위치 관계를 파악하기 위해서 가장 중요한 개념은 무엇인가요? ▪ (그래프를 보면) 형준이는 30분 동안 무엇을 했을까? ▪ 과제를 해결하는 데 어려움을 겪고 도움을 요청할 수 있다 ▪ (오류를 보인 모양을 그린 후) 이렇게 그리는 것이 맞을까요? ▪ 성립하지 않는다면, 어떻게 수정해야 할까요? ▪ p의 값을 고정하고 q의 값을 변화시킬 때, 2번에서 관찰한 q의 역할에 차이가 생기나요?

[Fig. 29] Examples of the role of teacher as a formative facilitator(feedback and self-monitoring) described in the 2nd lesson design

2차 수업 설계안에서 교사가 형성적 조력자로서 학생의 실수나 오개념에 주목하여 형성적 피드백을 제공하고 서로 다른 수학적 사고를 비교 및 평가하게 할 수 있음을 보여주는 사례는 [Fig. 29]와 같다. 2차 수업 설계안 21개 중 11개가 형성적 조력자로의 교사 역할을 중심으로 기술되었다. 수업 구조화에서 과제를 해결하면서 어려움을 겪는 학생들에게 도움을 주거나 구체적인 예를 들어 확인해보게 한다고 기술한 것은 형성적 피드백을 제공한 사례이며, 같은 의견을 가진 학생 또는 서로 다른 의견을 가진 학생들이 모여 서로의 수학적 사고를 비교 및 보완하겠다고 기술한 것은 서로 다른 수학적 사고를 비교하고 보완할 기회를 계획했다고 할 수 있다. 수업의 흐름 중 교사 예상 발문에서 과제와 관련된 과도한 정보를 제공하거나 해결법을 알려주는 대신 두 대상의 관계를 파악하기 위해 중요한 개념이 무엇인지, 그래프에서 형준이가 30분 동안 무엇을 한 것으로 보이는지 질문하거나 어떻게 수정하는 것이 좋은가에 관해 질문하는 것 등도 형성적 조력자로의 교사 역할을 기술하고 있다고 판단되었다.

(4) 서로 다른 대상들(개념, 아이디어 등)과 중요한 수업목표를 연결하기

1차 수업 설계안에서 교사가 형성적 조력자로서 서로 다른 수학적 대상들과 중요한 수업목표를 연결해주었다고 판단된 사례는 [Fig. 30]과 같으며, 다른 유형과 비교하여 그 사례가 가장 적었다. 1차 수업 설계안에서 연결 및 일반화 사례로 확인된 것은 같은 식을 가지는 이차방정식과 이차함수의 유사점과 차이점을 비교해보게 한다는 것이었다. 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해하는 것이 이 사례가 발견된 수업의 목표라는 점에서 학생들이 여러 사례를 관찰한 결과를 이차함수와 이차방정식과 관련지어 비교해보게 한다는 것은 교사가 학생들의 수학적 아이디어들을 수업목표와 연결해주는 것으로 볼 수 있다고 판단되었다.

teaching·learning activities(teacher)
▪ 같은 식을 가지고 있는 이차방정식과 이차함수가 어떤 비슷한/다른 점이 있는지 발문한다

[Fig. 30] Examples of the role of teacher as a formative facilitator(connection and generalization) described in the 1st lesson design

2차 수업 설계안에서 서로 다른 수학적 대상과 수업목표를 연결해주는 형성적 조력자로의 교사 역할로 확인된

사례는 [Fig. 31]과 같다. 다양한 상황을 일상 언어, 표, 그래프, 식으로 나타낼 수 있음을 강조하면서 수업을 마무리한다고 기술한 예비교사 20의 사례는 교사가 다양한 수학적 표현들을 명확히 연결해주는 교사의 역할을 보여준다. 또한, 앞에서 해결한 문항과 뒤에서 해결한 문항이 어떤 개념적 연결성을 가지는지, 이번 시간의 내용을 토대로 다음 시간에 무엇을 하게 될지, 이전에 배운 개념이 이번 수업 과제에 어떤 영향을 주었는지를 기술한 예비교사 14의 사례도 연결 및 일반화와 관련된 교사 역할을 묘사하고 있다.

Area	Description of the teacher role
lesson structure	▪ 다양한 상황을 일상 언어, 표, 그래프, 식으로 나타낼 수 있음을 강조하면서 수업을 마무리한다 ▪ 발표가 끝나면 일차함수의 그래프와 문항 2가 어떤 관계가 있는지 정리한다
lesson flow	▪ 2번 문항을 1번 문항과 어떻게 연결할 수 있을까요? ▪ 이번 시간 내용을 바탕으로 다음 시간에 실생활에서 발견할 수 있는 일차함수 요소를 그래프로 표현하는 활동을 한다. 특히, 이번 시간에 경험한 기울기의 의미를 이해하고 그래프를 그릴 때 기울기의 의미를 고려하여 그래프를 그리도록 한다 ▪ 명제, 명제의 역 등의 이전 수업의 개념이 귀류법에 담겨 있으며 문제해결 활동에도 영향을 미친다

[Fig. 31] Examples of the role of teacher as a formative facilitator(connection and generalization) described in the 2nd lesson design

교사의 연결 및 일반화 측면에서 1차 수업 설계안에서 확인된 예비교사 5의 사례는 주어진 이차방정식과 이차함수의 예들을 보면서 학생들이 어떤 특징을 추론할 수 있을지, 학생들의 추론에 대해 교사는 무엇을 발문할 것인지가 구체적이지 않았다. 그러나 [Fig. 32]와 같이 예비교사 5의 2차 수업 설계에서는 1차 수업 설계와 달리 학생의 수학적 사고와 그에 대한 교사의 발문이 구체적으로 기술되었다. 이러한 변화는 수업을 계획할 때 학생들의 수학적 사고에 대하여 주의 깊게 탐색하지 못하는 것은 실제 수업에서 모든 학생이 수업에 인지적·사회적으로 참여하여 견고한 개념적 이해를 촉진하는 데 실패하게 만든다(Smith & Stein, 2011; Taylan, 2018)는 점에서 의미가 있다.

[Table 11] Examples of descriptions of teacher role that are difficult to support students' mathematical thinking

anticipating students' thinking	teachers' purposeful questions
activity 1-(1). If student have trouble solving problem	What are you trying to save? What are the conditions given?
activity 1-(2). If student have trouble solving problem	Shall we read the learning goals again?
activity 2-(2). If student have trouble solving problem	Can you find the mean of the sample mean??

그러나 [Table 11]의 예비교사 2의 2차 수업 설계 사례와 같이 학생 사고기반 수업 설계안을 이용한 2차 수업 설계에서도 일부 예비교사들은 정답 이외의 학생 반응이나 어려움을 구체적으로 기술하지 못했다. 또한, 학생

1st	2nd
• 같은 식을 가지고 있는 이차방정식과 이차함수가 어떤 비슷한/다른 점이 있는지 발문한다	다양한 의견이 나오지 않을 때 : 우리가 중학교 3학년 때부터 지금까지 이차방정식과 이차함수에 대해서 배웠었는데 이차방정식과 이차함수에 대해 구체적으로 어떤 내용을 배웠었나요? 공통점의 ②에 대해 : y에 0을 대입한 상황은 이차함수를 좌표평면에 그래프로 표현했을 때 어떤 점을 의미하나요? 차이점의 ①에 대해 : 방정식과 함수의 특징은 어떤 것이 있을까요? 방정식은 언제 사용하고, 함수는 언제 사용하나요? 차이점의 ③에 대해 : 방정식의 용도는 주로 해를 구하는데 사용하는 것이 맞지만 함수는 그래프를 그리는 것 외에도 다양한 용도로 사용합니다. 함수는 어떤 용도로 사용하는지 생각해볼까요?

[Fig. 32] Comparison of teacher role as formative facilitator(connection and generalized) described in the 1st and 2nd lesson design

anticipating students' thinking	teachers' purposeful questions
1. 밑넓이가 2배이므로 기울기는 $\frac{1}{2}$배입니다. 밑넓이가 클수록 일차함수 그래프의 기울기는 작다는 것을 알 수 있습니다. 2. 밑넓이가 더 커졌으므로 일차함수의 기울기는 더 작아진 것입니다. 3. 원기둥을 옆으로 자른 단면적이 항상 크기가 똑같은 원이므로 물이 증가하는 속도가 일정하기 때문입니다. 4. 직선이 아닌 곡선인 것입니다. 5. 밑면의 넓이입니다.	[문항 1] 개별활동 중에서 1. 문제에서 밑넓이가 주어졌는데 원기둥이 모양과 기울기는 어떤 관계가 있을까요? 2. 밑넓이가 200이 아니라 300으로 바뀐다면 그래프의 모양은 어떻게 바뀔까요? 3. 왜 그래프의 모양이 곡선이 아니라 직선일까요? 4. 주어진 도형이 원기둥이 아니라 원뿔이나 구였다면 그래프는 어떻게 생겼을까요? 5. 이 활동에서 일차함수의 기울기를 결정하는 요소는 무엇일까요?

[Fig. 33] Example of 'expected student response and possible teacher questions' among the contents described in the 2nd lesson design(1)

anticipating students' thinking	teachers' purposeful questions
1. 나의 마음에 주는 좋은 영향과 나쁜 영향이 상관없나요?	자기의 마음을 기준을 정해서 그래프로 표현할 수 있는 소재면 어떤 주제든 상관이 없습니다. ○○이는 어떤 주제로 골랐니?
2. 수량화한다는 게 무슨 뜻인가요?	우리가 아까 본 인생그래프처럼 상을 받아서 기분이 좋을 때를 +10으로 표현하고, 할아버지가 병원에 입원하셔서 걱정이 돼서 기분이 -20. 이렇게 숫자로 표현하는 것을 수량화라고 해요. 그러면 자기의 마음에 대한 주제를 정해서 기준을 잡고 그 값을 표현해 보면 됩니다. ○○이는 이 주제에서 ○○할 때 기분을 어떻게 숫자로 나타내는 게 좋을 까? ○○할때도 양수(혹은 음수)의 값을 갖는구나.
5. 정비례랑 반비례 그래프 모양만 되는 건가요?	교과서에서 하루 동안 해수면의 변화를 나타냈던 그래프 기억나나요? 그 그래프는 정비례 그래프도 반비례 그래프도 아니었죠? 그래프는 주제와 자기가 잡는 기준에 따라서 다양한 모양으로 나올 수 있습니다. ○○이의 그래프는 어떤 모양을 갖게 될까? 증가하는 형태일까 감소하는 형태일까 아님 오르락 내리락하게 될까?
6. 그래프를 1사분면에만 그려야하나요?	그래프를 그리는 좌표평면은 총 몇 개의 사분면이고 각 사분면 위에 있는 순서쌍의 부호는 어떤 특징이 있었나요? 4개의 사분면과 제1사분면부터 제4사분면까지 (+,+), (−,+), (−,−), (+,−)의 부호를 가졌어요. 자신이 고른 주제를 표로 나타내고 난 뒤 x, y의 부호를 살펴보세요. 자기의 순서쌍 값이 어떤 부호로 이루어져 있을까? 그 값을 살펴보고 필요한 사분면을 가지고 그래프를 그리세요.

[Fig. 34] Example of 'expected student response and possible teacher questions' among the contents described in the 2nd lesson design(2)

의 반응에 대한 교사의 발문에서 지나치게 구체적인 정보를 제공함으로써 학생들의 깊이 있는 수학적 사고와 견고한 이해 구축을 지원할 증거를 보이지 못하거나 교사의 발문이 학생의 이해를 돕기에 불충분했다.

본 연구에서 제안한 학생 사고기반 수학 수업안을 이용한 2차 수업 설계안을 학생 참여와 교사 역할 차원에서 분석하면서 발견된 몇 가지 문제점은 다음과 같다. 첫째, 수학 과제와 관련된 질문 목록을 먼저 작성한 후, 그에 대한 학생의 응답(기대하는 정답)을 기술한 사례가 있었다(Fig. 33). 학생 사고기반 수학 설계안이 학생의 다양한 사고를 먼저 예상하고 그에 대한 교사 발문을 예상하도록 의도했지만, [Fig. 33]은 예비교사가 설계안에서 의도된 것과 전혀 다른 방향으로 수업을 설계했다. 가능한 교사 발문에 '문제에서 밑넓이가 주어졌는데 원기둥의 모양과 기울기는 어떤 관계가 있을까요?'라고 먼저 기술한 다음, 학생 예상 반응에 교사의 질문에 대한 학생의 예상 답변인 '밑넓이가 2배이므로 기울기는 1/2배입니다. 밑넓이가 클수록 일차함수 그래프의 기울기는 작다는 것을 알 수 있습니다'라고 적었다. 이것은 일반적으로 교실에서 교사가 수업에서 학생들에게 전달하고자 하는 지식과 관련된 질문을 하면(initiation), 학생이 답하고(response), 그것을 교사가 평가(evaluation)하는 연결체로 이루어진 IRE 패턴으로 이루어진다는 현상과 관련된다(Schoenfeld, 2010; Rymes, 2009).

둘째, 과제에 대한 학생의 할 수 있는 다양한 사고과정에 주목하지 못하고 주어진 과제 상황에 대한 학생들의 어려움만 기술했다. [Fig. 34]의 수업 설계 사례는 중요한 수학 주제인 그래프 표현과 해석과 관련하여 학생들이 할 수 있는 사고과정에 주의를 기울이지 못하고 주어진

과제 상황에 대한 이해와 그래프를 그리는 절차에 관한 학생들의 어려움만 기술했다. 문제 상황에 주어진 수량화를 이해하지 못하거나 교사가 시범적으로 보여 준 그래프와 같게 그려야 하는지, 나의 마음에 좋은 영향과 나쁜 영향에 상관없는가에 대한 학생의 질문을 예상한 것은 중요한 수학 주제와 관련된 질문, 그리고 정비례와 반비례 모양만 그려야 하는지, 제1사분면에만 그려야 하는가와 같은 질문도 그래프 표현과 해석에 관련된 의미 있는 학생의 수학적 사고가 아니다. 만약 교사가 학생의 수학적 사고에 초점을 두고 수업의 흐름을 계획했다면 학생들이 x축과 y축을 어떻게 설정할 수 있는지, 그것이 그래프에 어떤 영향을 줄 수 있는지, 학생이 감정 상태와 감정에 영향을 주는 요인을 어떻게 수치화할 수 있는지, 그리고 학생이 그래프의 기울기를 해석할 때 어떤 오류를 보일 수 있는지 등을 예상했을 수 있다.

Ⅵ. 결론 및 제언

수업 설계는 정해진 절차를 작성하는 행위가 아니라 수업과 관련된 여러 가지 상황을 고려한 비구조화된 문제해결의 과정이다(Jonassen, 2008). 따라서 수학교사는 실제 수업을 하기 전에 수업에서 무엇을 어떻게 다룰 것인가를 신중하게 계획함으로써 실제 수업에서 만나게 될 다양한 상황에서 순간적인 의사결정에 도움을 받을 수 있다(Kim & Lee, 2017; Smith & Stein, 2011). 학생의 수학적 사고에 초점을 두고 수업을 어떻게 구조화하고 조율해갈지를 안내하는 틀(도구)은 단순히 교사가 자신의 경험이나 직관에 의존하는 대신 수학 교실 속 복잡한 상황 속에서 주어진 정보를 분석하고, 그러한 정보에 기반한 교육적 판단을 내릴 수 있도록 도움으로써 교사의 수업 전문성 함양과 실제적인 수업 변화를 돕는다(Stein et al., 2009). 이에 본 연구는 학생들의 수학적 사고에 기반한 수업 설계를 지원하기 위해 기존에 사용되던 수업 설계안을 수정하여 학생 사고기반 수학 수업 설계안을 제안했다. 그리고 이 설계안을 적용한 사례를 기존 수업지도안을 적용한 사례와 비교하여 예비교사의 수업 설계에 미치는 영향을 수학 과제, 학생의 참여, 그리고 교사의 역할 측면에서 살펴보았다.

본 연구에서 제안한 학생 사고기반 수업 설계안의 적용에 따른 예비교사들의 수업 설계 특징을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 예비교사들이 설계한 수학 과제는 중요한 수학적 개념을 포함했지만, 접근 가능성과 도전성, 정당화, 연결성과 일반화의 기회보다는 암기 및 재연이 강조되는 경우가 많았다. 예비교사들은 실생활과 밀접한 관련성이 있는 수학 과제를 택하거나 재구성했는데, 이 과정에서 과제의 난이도를 오르거나 학생들에게 생소한 일상용어가 포함되어 접근 가능성과 도전성에 영향을 미쳤다. 또한, 실생활과 밀접한 관련성을 가진 경우에도 정답과 절차가

제한된 과제가 많아서 대체로 학생들에게 여러 가지 수학적 아이디어를 표현하고 정당화할 기회를 제공하지 못할 가능성이 컸다. 이는 예비과학교사들이 분석 틀을 이용하여 자료를 택하고 수업을 계획할 때 탐구보다는 연습을 기반으로 계획했다는 Forbes & Davis(2009)의 연구 결과, 그리고 예비교사들이 학생들의 수준을 고려하지 않았고 중등학교 교육과정에 대한 전반적인 내용 지식에 대한 전반적인 이해를 바탕으로 하지 못한 채 수업을 설계했다는 Choi(2020)의 연구 결과와 유사하다.

둘째, 학생 사고기반 수업 설계안은 예비교사들이 수업을 계획할 때 학생들의 인지적·사회적 참여에 주목할 수 있게 하였다. 일반적인 3단계 수업 설계안을 이용한 경우 예비교사들은 대부분 모둠 활동을 계획했으나 모둠 활동이 필요한 이유와 이 활동을 통해 학생들의 수학적 사고를 촉진할 구체적인 방안을 제시하지 못했다. 그러나 학생 사고기반 수업 설계안을 이용한 수업 설계에서 예비교사들은 과제의 특성에 따라 개별활동과 모둠 활동을 구조화했다. 또한, 3단계 수업 설계안 작성 사례에서 예비교사들은 주로 학생이 문제를 풀거나 이전 학습 내용을 확인하며, 교사의 설명에 집중하는 등의 행동적 참여에 주목했다. 학생의 인지적이고 사회적인 참여에 대하여 다른 예비교사들보다 상대적으로 많이 기술한 사례에서도 학생들이 수학 개념을 이해하고 있다는 것을 어떻게 판단할 수 있는지, 어떤 인식론적 장애를 겪게 될지에 대하여 구체적으로 표현하지는 못했다. 이러한 결과는 예비교사들이 과제를 해결하는 전략을 두 가지 이상 예상하는 데 어려움이 있으며, 정답을 말한 학생의 풀이를 설명하게 하는 것으로 충분한 것으로 수업을 계획했다는 Kim, Lee(2017)의 연구 결과와 유사하다. 그러나 학생 사고기반 수업 설계안을 이용한 경우에는 학생들이 자신의 생각을 정당화하고 개념들의 관계를 비교하는 것처럼 학생들의 인지적·사회적 참여에 주목한 내용의 비율이 높아졌다. 이것은 일반적인 3단계 수업 설계안에는 교수·학습 활동을 교사와 학생 측면에서 기재하도록 구성되어 있지만, 학생 사고기반 수업 설계안은 전체적으로 수업을 구조화한 다음에 학생의 반응을 예상하고 그에 대한 교사의 발문을 중심으로 수업의 흐름을 계획하도록 구성되었기 때문으로 보인다.

셋째, 학생 사고기반 수업 설계안은 예비교사들이 수업을 계획할 때 형성적 조력자(formative facilitator)로의 교사 역할에 주목할 수 있게 하였다. 일반적인 3단계 수업 설계안에 기술된 수업목표는 대부분 2015 개정 수학과 교육과정의 성취기준이나 교과서에 제시된 학습목표를 그대로 기술한 것이었다. 그러나 학생 사고기반 수업 설계안을 이용한 수업 설계 21개 중 10개에 3단계 수업 설계안보다 수업목표가 구체적으로 기술된 것이 확인되었다. 구체적이지 못한 수업목표는 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계와 같은 수학 개념을 학생들이 이해했는지 교사가 확인하고 그에 따른 교육적 결정을 하는 데 도움을 주지 못한다(Smith & Sherin, 2019). 예를 들어, [Table 12]에서 목표 1은 학생이 삼각비를 배우고 삼각비의 값을 구하게 될지를 제시하지만, 학생들의 수학적 사고를 안내하기 위한 정보를 교사에게 주지 못한다. 그러나 목표 3과 같이 목표를 명확히 하는 것은 교사가 학생들의 수학적 사고와 견고한 이해에 관한 증거를 포착하도록 도울 수 있다(Smith & Stein, 2011).

[Table 12] Examples of lesson goals described in different ways

different goals for learning mathematical ideas	
goal 1	learn trigonometric ratio
goal 2	Know the meaning of the trigonometric ratio and find the value of a simple trigonometric ratio
goal 3	Unless it is a right angle, the similarity ratio is calculated by guessing that all right-angled triangles with the same size as A and all the same right-angled triangles are similar, and a part of the similarity ratio is expressed as $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$

일반적인 수업 설계안을 이용한 경우 예비교사들은 수학 개념, 공식, 절차를 일방적으로 전달하거나 정답과 오답을 판단해주며, 수업 행동을 통제하거나 관리하는 데 초점을 두었다. 이 결과는 예비교사들이 수업대화록에서 참과 거짓을 판별해주는 대화를 작성했다는 Lee, Lee(2015)의 연구 결과, 그리고 학생의 오답에 대하여 적당한 교육적 대처를 찾지 못하거나 일방적으로 교사가 이끌어가는 경우가 많았다는 Kim, Lee(2017)의 연구 결과와 유사하다. 그러나 이와 달리 학생 사고기반 수업 설계안을 이용한 2차 수업 설계에서 예비교사들은 수학 과제를 다른 방법으로 해결할 수 없는지 여러 측면에서 찾

아보게 하고, 발표 내용을 서로 비교해보게 하는 등의 형성적 조력자로의 교사 역할을 주로 기술했다. 이는 일반적인 수업 설계안이 도입, 전개, 정리에 따른 수업의 구조가 강조되어 있지만, 학생 사고기반 수업 설계안이 수업을 전체적으로 구조화한 이후에 학생의 예상 반응과 그에 대한 교사의 발문을 중심으로 수업의 흐름을 기술하도록 구성되었기 때문으로 보인다.

본 연구에서 제안한 학생 사고기반 수업 설계안을 이용하여 수업을 설계한 경우에 발견된 제한점은 다음과 같다. 첫째, 학생 예상 반응 영역에서 일부 예비교사들은 학생의 수학적 사고를 다양하게 예상하지 못했다. 2차 수업 설계에서 일부 예비교사는 학생들이 문제를 해결하는데 어려움이 있을 것이라고 하거나, 교사의 질문에 대하여 기대되는 정답을 기술했다. 그러나 교사가 수업을 설계할 때 학생의 정답을 구하는지, 아닌지를 고려하는 것 이상으로 가능한 학생들의 수학적 사고를 다양하게 예측해보는 것은 학생의 사고에 초점을 둔 수학 수업을 실천하기 위해 중요하다(Smith & Stein, 2011), 둘째, 학생들이 보일 수 있는 수학적 어려움에 대하여 지나치게 많은 힌트를 제공했으며, 구체적인 전략을 안내하는 발문을 계획하거나 적절한 교수학적 대처를 찾지 못한 경우가 존재했다. 이것은 학생들의 사고를 고려하여 수업을 설계하는 교사의 전문적 역량은 수학에 대한 지식의 습득만으로는 향상되지 않으며(Kim, Lee, 2017), 교사가 수업에서 무엇에 주목할지는 수업 전문성과 관련된 경험과 교사가 지닌 신념에 영향을 받기 때문이다(Erickson, 2011). 교사의 발문에 너무 많은 정보가 포함되어 있거나 답을 구하는 방법을 구체적으로 제공해주는 것은 학생들이 수학적으로 사고하지 않게 만들 수 있으므로(Smith & Stein, 2011) 예비교사들이 직·간접적으로 실제 수업 상황을 관찰하고 학생들의 수학적 사고과정을 이해해보는 수업 전문성 프로그램에 참여할 기회를 제공함으로써 예비교사들의 수업 전문성 함양 및 견고한 신념 형성을 도울 필요가 있다. 셋째, 학생 사고기반 수업 설계안을 이용한 경우에도 여전히 학생의 인지적·사회적 참여와 교사의 형성적 조력자 역할 외의 다른 측면이 존재했다. 학생들이 수업에 참여하는데 방해받지 않도록 교사의 교실 관리가 요구되며, 사회적 협약에 의한 수학 지식(예: 삼각비, 무리수 등의 용어나 +, -와 같은 기호)은 교사의 직접적인 설명이 필요하다는 점에서 관리자나 지식 전달자로의 교사 역할도 수업에서 중요하다. 그러나 수업에서 학생의 수학적 사고를 촉진하고 견고한 이해를 구축하도록 지원하려면 교사의 주요 역할이 교실 관리나 지식의 전달보다는 형성적 조력자로의 역할이 강조될 필요가 있다.

교사들은 체계적으로 수업을 설계하고 이를 실행 및 반성함으로써 자신의 수업을 지속적으로 개선해 나가야 한다. 이를 위해 예비교사 단계부터 전통적인 수업 방식에서 탈피하여 학생들의 사고를 기반으로 수업을 설계해 볼 기회가 제공되어야 한다. 본 연구는 예비교사뿐 아니라 현직교사들이 학생의 수학적 사고에 주목한 수업의 필요성을 인식하고 그러한 수업을 계획할 도구를 제공했다는 점에서 의미가 있다. 그러나 본 연구는 학생 사고기반 수업 설계안을 이용한 수업 설계가 실제 수업에서 교사의 수업 실천에 어떤 영향을 주는지를 확인하지 못했다. 또한, 앞서 언급한 학생 사고기반 수업 설계안을 이용한 수업 설계의 제한점을 해결하기 위한 구체적인 연구를 진행하지는 못했다. 학생 사고기반 수업 설계안에서 요구되는 학생의 다양한 수학적 사고를 예상하고 그에 대한 교사의 발문을 계획하는 것이 예비교사들에게 매우 도전적이라는 사실을 확인했다. 따라서 앞으로 학생 사고기반 수업 설계안을 도구로 설계된 수학 수업이 실제로 어떻게 구현되는지, 실제 수업에의 영향력에 대하여 살펴볼 필요가 있다. 그리고 학생의 다양한 수학적 사고와 그에 대한 교사의 발문을 예상하기 위한 예비교사들의 전문성 향상 방안도 연구되어야 할 것이다. 마지막으로 현직교사들의 수업 설계에 미치는 영향을 조사하여 예비교사들과 어떤 차이가 있는지 분석해보는 것은 예비교사 프로그램과 현직교사의 전문성 개발 프로그램의 연계성 강화와 개선에 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

Kang, J. C. (2018). A case study on instruction design and practice using creative problem solving: for pre-teacher. *Journal of Educational Innovation Research, 28(2)*, 315-345.

Kim, G. Y. & Jeon, M. H. (2017). Exploring teachers' pedagogical design capacity: how mathematics teachers plan and design their mathematics lesson. *The Mathematical Education, 56(4)*, 365-385.

Kim, J. S. & Lee, S. J. (2017). Characteristics of pre-service secondary mathematics teachers' anticipating through the task dialogue activity. *Journal of educational research in mathematics, 28(3)*, 511-536.

Kim, J. W. (2014). *An analysis of lesson plan and implementation based on the thinking through a lesson protocol in elementary mathematics instrucion: focused on the area of plane figure at fifth grade*. Korea National University of Education, Master's thesis, Ghung-Buk, Korea.

Kwon, O. N., Pang, J. S., Park, J. H., Park, J. H., Oh, H. M., & Jo, H. M. (2013). Exploring the possibility of using lesson play in pre-service teacher education. *School Mathematics, 15(4)*, 819-832.

Pang, J. S. (2006). Successes and difficulties in transforming elementary mathematics classrooms to student-centered instruction. *The Mathematical Education, 45(4),* 459-479.

Pang, J. S., Kim, J. W. (2013). An Analysis of 5 Practices for Effective Mathematics Communication by Elementary School Teachers. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 17(1), 143-164.

Park, I. W. (2015). A conceptual analysis on teaching and instruction, instructional theory, and instructional design theory. Journal of Educational Technology, 31(3), 633-653.

Park, K. Y. (2007). Instructional design model and practice: a survey of design practice. *Journal of Educational Technology, 23(4)*, 1-30.

Park, K. Y. (2008). A case study on instructional planning process of teachers. *The Journal of Korean Teacher Education, 25(3)*, 379-405.

Park, K. Y. (2018). The effects of instructional design model based on the nature of design thinking on secondary pre-service teacher's instructional design activities. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction, 18(3)*, 191-214.

Lee, M, O. (2018). *A study on the formation of teaching expertise of elementary school teachers.* Seoul National University of Education, Doctoral dissertation. Seoul. Korea.

Lee, J. H. & Lee, G. D. (2015). Beyond the certifier of right or wrong answer: what and how could pre-service teachers learn from a lesson observation course?. *Journal of educational research in mathematics, 25(4),* 549-569.

Lim, C. I. (1994). Formative research on an instructional theroy for conceptual understanding. *Journal of Educational Technology, 10(1),* 45-63.

Jeong, H. H. (2009). A study on the insturcion design experiences of elementary school teacher. *Korean Society of Educational Technology, 25(3)*, 157-191.

Choi, H. S. (2020). Exploration of instructional design changes of pre-service mathematics teachers by restructuring the lesson plan. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 23(1)*, 159-177.

Han, C. R., Kim, H. J., Kwon, O. N. (2018). Teacher Noticing on Students′ Reasoning of Statistical Variability. *Journal of the Korean School Mathematics*, 21(2), 183-206.

Han, C. R., Kim, H. J. & Kwon, O. N. (2018). Teacher noticing on students' reasoning of statistical variability. *Journal of the Korean School Mathematics, 21(2),* 183-206.

Anthony, G., Hunter, J. & Hunter, R. (2015). Prospective teachers development of adaptive expertise. *Teaching and Teacher Education, 49*, 108-117.

Bahr, D. L. & Bahr, K. (2017). Engaging all students in mathematical discussions. *Teaching Children Mathematics, 23(6)*, 350-359.

Brown, A. H. & Green, T. D. (2016). *The Essentials of instructional design: connecting fundamental principles with process and practice*. NY: Routledge.

Carr-Chellman, A. A., & Reigeluth, R. M.(2002). Whistling in the dark? Instructional design and technology in the schools. In Reiser, R. A., & Dempsey, J. V.(Eds.). *Trend and issues in instructional design and technology*(pp. 239-255). NJ: Merrill Prentice Hall.

Chapin, S. H., O'Connor, & Anderson, N. C. (2013). *Classroom discussions in math: a teacher's guide for using talk moves to support the common core and more, grades K-6*. Kim. J. H. et al. Translator, Trans. (2016). 수학 교실 토론. Seoul: Kyungmoon.

Choy, B. H. (2013). *Productive mathematic noticing: what it is and why it matters*. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Eds.), Proceedings of 36th annual conference of Mathematics Education Research Group of Australasia. (pp. 186-193). Melbourne, Victoria: MERGA.

Choy, B. H. (2014). *Teachers' productive mathematical noticing during lesson preparation*. In Nicol, C., Liljedahl, P., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA, 36(2). pp. 297-304. Vancouver, Canada: PME.

Choy, B. H. & Dindyal, J. (2017). *Snapshots of productive* *noticing: orchestrating experiences using typical problems.* In A. Downton, S. Livy, & J. Hall (Eds.), 40 years on: We are still learning! Proceedings of the 40th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 157-164). Melbourne: MERGA.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W. & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational evaluation and policy analysis, 25(2),* 119-142.

Erickson, F. (2011). On noticing teacher noticing. In M. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: seeing through teachers' eyes* (pp. 17-34). New York, NY: Routledge.

Forbes, C. T. & Davis, E. A. (2009). Preservice elementary teachers' curriculum design and development of pedagogical design capacity for inquiry : an activity-theoretical perspective. *Paper presented at the National Association for Research in Science Teaching.* 1-72.

Franke, M. L., Webb, N. M., Chan, A. G., Ing, M., Freund, D. & Batttey, D. (2009). Teacher questioning to elicit students' mathematical thinking in elementary school classrooms. *Journal of Teacher Education, 60(4)*, 380-392.

Fredricks, J. A., Wang, M. T., Linn, J. S., Hofkens, T. L., Sugn, H., Parr, A. & Allerton, J. (2016). Using qualitative methods to develop a survey measure of math and science engagement. *Learning and Instruction, 43*, 5-15.

Hatch, J. A. (2002). *Doing qualitative research in education settings.* Jin, Y. E. Translator, Trans (2008). 교육 상황에서 질적 연구 수행하기. Seoul: Hakjisa.

Helme, S. & Clarke, D. (2001). Identifying cognitive engagement in the mathematics classrroom. Mathematics *Education Research Journal,* 13, 133-153.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., & Fuson, K. C. (1997). *Making sense teaching and learning mathematics with understanding.* Kim, S. H., Park, Y. H., Lee, K. H., & Han, D. H. Translator, Trans. (2004). 어떻게 이해하지?. Seoul: Kyungmoon

Jacobs, V. R. & Empson, S. (2016). Responding to children's mathematical thinking in the moment: an emerging framework of teaching moves. *ZDM: the international journal on mathematics education, 48(1)*, 185-197.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. a. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking, *Journal for Research in Mathematics Education, 41(2)*, 169 - 202.

Jonassen, D. H. (2008). Instructional design as design problem solving: an iterative process. *Educational Technology, 48(3)*, 21-26.

Leon, J., Medina-Garrido, E. & Múñez, J. L. (2017). *Teaching quality in math class: the development of a scale and the analysis of its relationship with engagement and achievement.* Front. Psychol. 8:895. doi: 10.3389/fpsyg.2017.00895.

Moallem, M.(1993). *An experienced teacher's model of thinking and teaching. Unpublished doctoral dissertation,* Florida State University, Tallahassee, FL.

Owens, K. (2008). Identity as a mahtematical thinker. *Mathematics Teacher Educational and Development, 9,* 36-50.

Rymes, B. (2009). *Classroom discussion analysis: a tool for critical reflection by Betsy Rymes.* Kim, J. H. Translator, Trans. (2011). 말이 열리는 교실: 교실수업 개선을 위한 담화분석. Seoul: CommunicationBooks.

Schoenfeld, A. H. (2010). How to think: a theory of goal-oriented decision making and its educational application. Lee, K. H. Translator, Trans (2013). 수학수업, 설명을 만나다. Seoul: Kyungmoon.

Smith, M. S., Bill, V., & Hughes, E. K. (2008). Thinking through a lesson: successfully implementing high-level tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14(3)*, 132-138.

Smith, M. S. & J. Cartier (2009). *"The lesson template." Created under the auspices of the collaborative, technology-enhanced lesson planning as an organizational routine for continuous*, School-Wide Instructional Projet, directed ty M. J. Stein and J. Russell at the University of Pittsburgh, 2009.

Smith, M. S. & Sherin, M. G. (2019). T*he five practices in practice: successfully orchestrating mathematics discussions in your middle school classroom.* NY : Corwin mathematics publishing.

Smith, M. S. & Stein, M. J. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussion.* Reston, VA: NCTM. Pang, J. S. Translator, Trans. (2013). 효과적인 수학적 논의를 위해 교사가 알아야 할 5가지 관행. Seoul: Kyungmoon.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, S. A. (2009). *Implementing standards-based* *mathematics instruction: a casebook for professional development (2nd ed.)* Kim, N. G., Joe, W. Y., & Kwon, S. R. Translator, Trans.(2017). 수학과제가 수학 수업을 만났을 때. Seoul: Kyungmoon.

Stockero, S. L., Rupnow, R. & Pascoe, A. E. (2017). Learning to notice important student mathematical thinking in complex classroom interactions. *Teaching and Teacher Education, 63*, 384-395.

Sullivan, P., Clarke, D. & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Lee, K. H. & Kim, D. W. Translator, Trans. (2016). 수학 수업 이야기: 수학, 과제, 학습의 삼중주. Seoul: Kyungmoon.

Taylan, R. D. (2018). The relationship between pre-service mathematics teachers' focus on student thinking in lesson analysis and lesson planning tasks. *Int J of Sci and Math Edue, 16*, 337-356.

van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10(4),* 571 - 596.

Yang, Y., & Ricks, T. E. (2013). Chinese lesson study: Developing classroom instruction through collaborations in school-based teaching research group activities. In Y. Li & R.Huang (Eds.), *How Chinese teach mathematics and improve teaching* (pp. 51-65). NY: Routledge.