韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.1.21
2021. 2. 제 60권, 제 1호, 21-39.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2021, Vol. 60, No. 1, 21-39.

유리수 지수 정의에 대한 교사 이해 분석

신보미(전남대학교, 교수)

Teachers' understanding of the definition of rational exponent

Shin, Bomi(Chonnam National University, bomi0210@jnu.ac.kr)

초록

본 연구는 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 특징을 분석하여 교사 교육에의 시사점을 구체화하고, 지수의 확장을 지도하는 수업에서 정의의 본질 및 그 이면의 사고를 다루기 위해 고려할 필요가 있는 교수학적 쟁점을 밝히는 데 목적을 두었다. 이를 위해 지필검사 도구를 개발하여 현직 고등학교 교사 50명의 답변을 분석하였으며, 이를 토대로 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 특징이 교사 교육에 주는 시사점 및 교수학적 쟁점을 기술하였다. 또한 이러한 시사점 및 교수학적 쟁점을 국내 교과서 전개 방식에 비추어 해석하여 수업을 통해 지수의 확장과 관련된 정의의 본질을 의미있게 다루기 위해 교사 및 교과서가 좀 더 주목할 필요가 있는 측면을 제언하였다.

Abstract

The aim of this study was to deduce implications of the growth of mathematics teachers' specialty for effective instruction about the formulae of exponentiation with rational exponents by analyzing teachers' understanding of the definition of rational exponent. In order to accomplish the aim, this study ascertained the nature of the definition of rational exponent through examining previous literature and established specific research questions with reference to the results of the examination. A questionnaire regarding the nature of the definition was developed in order to solve the questions and was taken to 50 in-service high school teachers.

By analysing the data from the written responses by the teachers, this study delineated four characteristics of the teachers' understanding with regard to the definition of rational exponent. Firstly, the teachers did not explicitly use the condition of the bases with rational exponents while proving $f'(x) = rx^{r-1}$. Secondly, few teachers explained the reason why the bases with rational exponents must be positive. Thirdly, there were some teachers who misunderstood the formulae of exponentiation with rational exponents. Lastly, the majority of teachers thought that $(-8)^{\frac{1}{3}}$ equals to -2. Additionally, several issues were discussed related to teacher education for enhancing teachers' knowledge about the definition, features of effective instruction on the formulae of exponentiation and improvement points to explanation methods about the definition and formulae on the current high school textbooks.

* 주요어 : 유리수 지수 정의, 지수가 유리수일 때의 지수법칙, 교사 지식
* **Key words** : Definition of rational exponent, Formulae of exponentiation with rational exponents, Teacher knowledge
* 한글 사사 : 이 논문은 전남대학교 학술연구비(과제번호: 2020-1872) 지원에 의하여 연구되었음.
* 영문 사사 : This study was financially supported by Chonnam National University(Grant number: 2020-1872).
* **Address** : Department of Mathematics Education, Chonnam National University, Gwangju, Korea
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97B50, 97D40
* **Received**: December 30, 2020 **Revised**: January 19, 2021 **Accepted**: January 19, 2021

Ⅰ. 서론

수학 학습을 통하여 학생들은 수학 문제 또는 실생활 문제를 해결하는 능력뿐 아니라 수학의 규칙성과 구조를 보는 안목을 기를 필요가 있다(Ministry of Education [MOE], 2015). Tall(2013)에 따르면 수학적 구조에 대한 교수-학습은 정의, 정리, 증명의 의미 및 이들 사이의 관계를 살피는 것과 깊은 연관이 있다. 그러나 수학을 전공한 대학생들조차도 정의와 정리를 혼동하며(Leikin & Zazkis, 2010), 어떤 개념을 특정 방식으로 정의하는 의도를 설명하는 것이 정리의 증명을 제시하는 것과 같다고 생각한다(Robin, Fuller, & Harel, 2013). Levenson(2012)은 정의의 본질을 이해하는 것이 정리 및 증명의 의미를 다루는 토대가 되며 수학적 구조가 만들어지는 과정을 경험하는데 기여한다고 하였다.

수학에서 정의는 개념 및 연산의 의미를 확장하여 구조적 성질을 생성하는 역할을 한다. 학교 수학에서 정의의 이러한 역할은 지수를 자연수에서 실수로까지 확장할 때 가장 잘 드러난다(Woo & Yim, 2008). Woo, Cho(2001)는 지수의 확장을 이해하는 것은 지수가 자연수일 때 성립하는 지수법칙이 보다 넓은 영역에서 성립하도록 대수적 구조를 확장하려는 의도에 따라 정수 지수, 유리수 지수, 실수 지수의 정의가 창안되었음을 아는 것과 같다고 강조한 바 있다. 지수의 확장은 지수 개념을 구체적 관점에서 형식적, 구조적 관점으로 전환하게 하며, 대수적 구조의 확장 원리인 형식불역의 원리를 보여준다는 점에서 수학적 구조에 대한 교수-학습에 함의하는 바가 크다.

그러나 최근 10년간 수학교육 등재(후보) 학술지에 실린 논문 중 지수의 확장을 다룬 연구가 거의 없어[1], 지수의 확장을 통해 수학적 구조에 대한 교수-학습을 실행하는 것과 관련된 교수학적 쟁점을 구체화하기 어렵다. Do, Park(2011)이 학교수학의 유리수 지수 정의 방식을 이론적으로 검토하면서 $(-8)^{\frac{2}{6}}$ 과 $((-8)^2)^{\frac{1}{6}}$ 의 동치 여부에 대한 이슈를 다루었으나, 실제 수업을 실행하는 교사가 이러한 이슈를 인지하고 있는지, 이와 관련하여 학생이 보일 오개념에 적절히 조치할 수 있는지에 대해서는 논하지 않았다.

교사 지식은 특정 개념에 대한 설명 방식에 직접적인 영향을 끼쳐 해당 개념을 다루는 수업의 양상을 결정하는 주요 변수로 작용한다(Magiera, van den Kieboom, & Moyer, 2011). 학생이 지수의 확장 이면에 존재하는 구조적 성질을 보도록 안내할 수 있으려면 교사 자신이 지수의 확장과 관련된 정의의 본질에 대해 충분히 알고 있어야 한다. 특히 지수의 확장에서 유리수 지수 정의는 실수 지수를 정의하는 기초이며 지수함수 $y=a^x$ 의 밑 a 의 조건이나 실수 r 에 대해 함수 $y=x^r$ 의 정의역을 설정하는 근거가 되므로, 교사는 유리수 지수 정의의 본질을 다각적으로 이해할 필요가 있다.

이에 본 연구는 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 특징을 분석하여, 수학적 구조를 보는 안목의 개발을 목표로 지수의 확장 및 관련 개념에 대한 수업을 실행하기 위해 교사에게 필요한 지식을 기술하고, 해당 수업을 통해 유리수 지수 정의의 본질 및 그 이면의 사고를 다룰 때 주목할 필요가 있는 교수학적 쟁점을 구체화하는 데 목적을 둔다. 이를 위해 우선 수학적 정의의 의미 및 역할을 밝힌 선행연구를 검토하여 유리수 지수 정의가 지닌 본질에 대한 분석 관점을 추출한다. 이렇게 추출한 분석 관점에 따라 유리수 지수 정의 이면에 존재하는 핵심 사고를 알아보고, 이를 토대로 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 특징을 기술할 연구 문제를 설정한다. 설정한 연구 문제 해결을 위한 지필검사 도구를 개발하여 지필검사 문항에 대한 현직 고등학교 교사의 답변을 수합한 다음, 이를 선행연구 및 2015 개정 수학 교과서에서 관련 내용을 다루는 방식에 비추어 분석한다.

여러 연구(Fan, 2013; Matić & Grancin, 2016; Remillard, Harris, & Agodini, 2014)에 따르면 수학 교과서는 교수-학습의 실제에 영향을 미치는 외적 요인 중 하나로, 수업 실행을 위한 교사의 의사결정 및 교과 내용에 대한 해석을 특징짓는 역할을 한다. 이에 본 연구는 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 특징으로부터 드러난 교수학적 쟁점을 국내 교과서 전개 방식과 관련하여 논의함으로써, 수업을 통해 지수의 확장에서 다루는 정의의 본질을 의미있게 지도하기 위한 교사 지식을 기

1) 한국교육학술정보원의 학술연구정보서비스(www.riss.kr)에서 2011년부터 2020년 사이에 수학교육 등재(후보) 학술지에 실린 논문을 주제어 ‘지수’로 검색하여 지수의 확장을 다룬 연구를 선별하면 총 3편의 결과를 얻을 수 있다.

술하는 것과 함께 교과서 전개에 있어 개선이 필요한 부분에 대해서도 제언하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 정의의 의미와 역할

수학적 정의는 일상생활에서 사용하는 용어의 정의와는 다른 특징을 갖는다. 정의에는 용어의 뜻을 풀이하기 위해 그 용어가 사용되는 방식을 설명하는 기술적(lexical) 정의와, 어떤 대상 및 용어사이의 의미론적 관계를 구성하는 규정적(stipulative) 정의가 있다(Landau, 2001). 기술적 정의는 실제 용법에 따라 대상이 지닌 공통 특징을 추출한(extracted) 정의이며, 규정적 정의는 학문적인 용어에 능통한 전문가들이 정확한 의사소통이나 구조적 탐구를 목적으로 어떤 대상에 의미를 부여한(imposed) 정의이다. Edwards, Ward(2004)는 수학적 정의 대부분이 규정적 특징을 지니며, 이전 개념을 개선하거나 새로운 개념 또는 용법을 창조함으로써 수학적 구조를 만드는 역할을 한다고 하였다.

용어와 의미사이에 새로운 관계를 설정하는 규정적 정의는 임의성(arbitrariness)을 특징으로 갖지만, 수학에서 어떤 개념이나 연산을 특정 방식으로 정의하는 데는 그만한 의도가 있다(Robin et al., 2013). Fischbein(1993)에 따르면 수학은 인간 활동이며 이러한 인간 활동에는 정의, 정리, 증명과 같은 형식적 요소를 다루는 상호작용이 포함되는 바, 정의와 정의 이면에 존재하는 사고를 아는 것은 논리적 형식 구조인 수학의 본질을 이해하는 데 핵심이 된다. 교수학적 상황에서 교사가 개념이나 연산을 특정 방식으로 정의하는 의도나 그 이면의 사고를 직·간접적으로 다루지 않는다면, 학생은 수학이 임의적인 정의와 규칙으로 이루어진 더미에 불과하다고 느낄 것이다(Even & Tirosh, 1995).

한편 수학의 구조적 측면과 관련하여 정의의 본질을 이해하는 것은 정의가 어떤 조건에서 적용 및 확장되는지 아는 것을 의미한다(Levenson, 2012). 특히 연산을 새롭게 정의하는 경우에는 새로운 연산이 기존 체계에 모순을 일으키거나 연산과 관련되는 주요 정리를 만족하지 않을 수 있으며, 이러한 문제를 해결하기 위해 수학자들은 새로운 연산이 적용되는 수의 범위를 제한하거나 특정한 수학적 표현을 정의하지 않기도 한다(Sangwin, 2019). 예를 들어 나눗셈 연산을 자연수에서 정수로 확장할 때 $4 \div 0$ 을 정의하게 되면 $4 \div 0 = a$ 을 만족하는 a 에 대하여 $a \times 0$ 은 4 가 된다. 이는 기존의 곱셈 체계에서 성립하는 성질에 반하는 결과이므로 정수끼리의 나눗셈에서 나누는 수는 0 이 아닌 정수로 제한되며 수학에서 $\frac{4}{0}$ 와 같은 표현은 정의되지 않는다. 효과적인 수학적 의사소통에 필요한 역량에는 정의의 정확한 사용 능력이 포함되며(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), 이를 위해서는 정의가 적용되는 수의 범위를 아는 것과 더불어 그러한 제한이 존재하는 이유를 이해하는 것이 중요하다(Leikin & Zazkis, 2010).

수학적 정의의 의미와 역할에 대해 이상에서 살펴본 바에 따르면, 유리수 지수 정의가 지닌 본질에 대한 분석 관점을 다음과 같이 3가지로 추출할 수 있다.

분석 관점 1. 유리수 지수 정의가 개선하거나 새롭게 창조한 개념 또는 용법은 무엇인가?
분석 관점 2. 유리수 지수 정의가 특정 방식을 따르게 된 의도는 무엇인가?
분석 관점 3. 유리수 지수 정의가 적용되는 수의 범위는 어디이며, 그렇게 제한된 이유는 무엇인가?

이하에서는 위 분석 관점에 비추어 유리수 지수 정의의 본질 및 그 이면에 존재하는 사고를 알아보고, 이를 토대로 본 연구의 연구 문제를 구체적으로 설정한다[2].

2. 유리수 지수 정의의 본질

대수에서 구조적 확장은, 인지된 연산의 성질을 대수적 표현으로 기술하고 이러한 성질이 추상적인 체계의 발판으로 기능하도록 이론적 정의를 설정함으로써 진행된다(Tall, 2013). 학교 수학에서 지수가 자연수에서 정수, 유리수로 확장되는 과정은, 실수의 거듭제곱이 곱셈, 나눗셈 등의 연산에 대해 갖는 성질을 '지수가 자연수일 때의 지수법칙'으로 나타내는 것에서 시작한다. 이러한 지수법칙

2) 연구 문제를 설정하는 이유는, 수학적 구조를 보는 안목의 개발을 목표로 지수의 확장 수업을 실행하는데 필요한 교사 지식을 'Ⅳ. 결과 분석 및 논의'에서 연구 문제에 비추어 보다 효과적으로 기술하기 위함이다.

중 $a^m a^n = a^{m+n}$ (①)이 지수가 정수일 때도 성립하도록 정수 지수를 정의하면, 지수가 정수이고 밑이 0이 아닌 실수의 곱셈과 나눗셈 연산이 지닌 성질을 '지수가 정수일 때의 지수법칙'으로 기술할 수 있다. 또한 지수가 정수일 때의 지수 법칙 중에서 $(a^m)^n = a^{mn}$ (②)이 지수가 유리수일 때도 성립하도록 유리수 지수를 ③과 같이 정의하면, '지수가 유리수일 때의 지수법칙'이라는 대수적 성질이 만들어 진다.

$$a > 0\text{이고 } m,\ n(n \geq 2)\text{이 정수일 때, } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdots ③$$

이상에 따르면 지수가 자연수일 때 성립하는 정리(theorem)인 ①은 정수 지수를 정의하는 공리(axiom) 역할을 하며(Sangwin, 2019), 이러한 공리를 기반으로 정수 지수가 정의됨으로써 '지수가 정수일 때의 지수법칙'을 기술할 수 있게 된다. 마찬가지로 지수가 정수일 때 성립하는 성질 ②는 유리수 지수를 정의하는 공리로 기능하여, 지수가 유리수이면서 밑이 양수인 수에 의미를 부여하는 유리수 지수 정의 ③을 생성한다. 이러한 유리수 지수 정의는 지수가 정수일 때 성립하는 지수법칙을 지수가 유리수일 때도 적용할 수 있도록 확장한다. 즉, 유리수 지수 정의를 통해 '지수가 유리수일 때의 지수법칙'이 만들어 진다(분석 관점 1). 또한 유리수 지수 정의는 지수가 정수일 때 성립하는 지수법칙을 지수가 유리수이고 밑이 양수인 경우에 곱셈 및 나눗셈 연산이 지닌 성질로 확장하여, 자연수 지수와 정수 지수에서 성립하는 지수법칙이 지수가 유리수일 때도 일관되게 작용하는 대수적 구조가 되도록 한다(분석 관점 1).

Rabin 외(2013)에 따르면 수학에서 정의는 임의로 설정되는 약속이 아니라, 앞으로 다루게 될 정리 및 증명에 쓰일 개념을 사전에 규정하는 일종의 약정(convention)이다. 유리수 지수 정의 ③은 지수가 유리수일 때도 지수법칙이라는 정리가 성립하도록 하고, 이를 정의 ③으로 증명하는 것이 가능하도록 창안된 것이다(Sangwin, 2019). 즉, 유리수 지수 정의가 ③과 같은 방식을 따르게 된 데는 지수가 유리수로 확장되어도 지수법칙이라는 구조적 성질을 유지하려는 의도가 담겨 있다(분석 관점 2).

이에 수학적 구조를 보는 안목의 개발을 목표로 유리수 지수 정의 이면에 존재하는 사고를 지도하고자 하는 교사는, 유리수 지수 정의를 통해 지수가 유리수일 때의 지수법칙이라는 구조적 성질이 만들어지며, 지수법칙이라는 구조적 성질을 지수가 유리수일 때도 유지하려는 의도에 따라 유리수 지수 정의가 생성되었음을 인지하여야 한다. 즉, 지수가 정수에서 유리수로 확장되는 과정에서 '유리수 지수 정의'와 '지수가 유리수일 때의 지수법칙'사이에 존재하는 이러한 순환적 관계에 대해 유리수 지수 수업을 실행할 교사는 충분히 이해할 필요가 있다. 이에 본 연구는 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 분석을 위한 첫 번째 연구 문제를 다음과 같이 설정한다.

연구 문제 1. 교사들은 '유리수 지수 정의'와 '지수가 유리수일 때의 지수법칙'사이에 존재하는 순환적 관계를 설명하는가?

한편 지수법칙이라는 대수적 구조가 일관되게 유지되도록 지수를 자연수에서 정수, 유리수로 확장할 때, 지수의 밑은 모든 실수에서 0 이 아닌 실수, 양의 실수로 축소된다. 즉, 유리수 지수 정의 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 는 $a > 0$ 인 경우에 적용되는 정의이다(분석 관점 3). 그렇다면 지수의 밑을 양의 실수인 경우로 제한하여 유리수 지수를 정의하는 이유는 무엇일까? 만약 $a < 0$ 일 때 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 $\sqrt[n]{a^m}$ 로 정의하면 어떻게 될까? 다음 절에서는 분석 관점 3과 관련하여 이 점에 대해 좀 더 상세히 살펴본다.

3. 유리수 지수 정의 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 에서 $a > 0$ 인 경우로 제한되는 이유

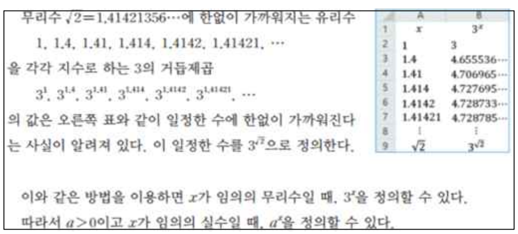
이 절에서는 유리수 지수 정의 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 가 $a > 0$ 인 경우로 제한되는 이유를 명확히 하기 위하여, $a < 0$ 에 대해 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 $\sqrt[n]{a^m}$ 로 정의하면 일어나는 문제점을 구체적으로 살펴본다.

첫째, $a < 0$ 인 경우 유리수 지수를 정의하면 기존 체계에서 다룬 주요 정리가 성립하지 않는다. 우선 유리수 $m,\ n$ 에 대하여 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$ 이 성립하지 않는다. 예를 들어 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 을 $\sqrt[3]{-8}$ 으로 정의하면 $(-8)^{\frac{2}{6}}$

$=(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-8}=-2$ 이지만 $((-8)^2)^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}=2$ 이 되어 $(-8)^{\frac{2}{6}} \neq ((-8)^2)^{\frac{1}{6}}$ 이다. 또한 $a<0$ 인 경우 유리수 m, n 에 대하여 지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$ 이 성립하지 않기 때문에 이를 통해 정당화되는 로그성질 $\log_a M^n = n\log_a M$ 도 성립하지 않는다. $\log_a M^n = n\log_a M$ 의 증명 과정은, $\log_a M = m$ 라 두고 지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$ 을 이용하여 $M^n=(a^m)^n=a^{mn}$ 이므로 $\log_a M^n = mn = n\log_a M$ 임을 보이기 때문이다.

둘째, 실수 위에서 정의되는 연산은 일종의 함수이므로 함수가 되는 조건을 만족해야 한다. 즉, 정의역의 모든 원소가 함숫값을 가져야 하며, 각 함숫값이 유일하게 하나로 결정되어야 한다. 그러나 $a<0$ 에서 유리수 지수를 정의하면 이 조건을 만족하지 않는 경우가 생긴다. 예를 들어 $f: Q \to R$ 에서 $n \geq 2$ 에 대해 $f(\frac{m}{n})=(-2)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(-2)^m}$ 라고 하면 f 는 함수가 되지 않는다. $f(\frac{1}{2})=(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2} \notin R$ 이고, $f(\frac{6}{2})=(-2)^{\frac{6}{2}}=(-2)^3=-8$ 이면서 동시에 $f(\frac{6}{2})=\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{2^6}=8$ 이기 때문이다.

셋째, 유리수 지수 정의를 이용한 실수 지수로의 확장을 진행할 수 없다. 학교수학에서 유리수 지수 정의는 [Fig. 1]과 같이 무리수 지수를 정의하는 데 활용되며 이를 통해 지수의 범위가 실수까지 확장된다.


무리수 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$에 한없이 가까워지는 유리수

1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ⋯

을 각각 지수로 하는 3의 거듭제곱

$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, \cdots$

의 값은 오른쪽 표와 같이 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있다. 이 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$으로 정의한다.

	A	B
1	x	3^x
2	1	3
3	1.4	4.655536⋯
4	1.41	4.706965⋯
5	1.414	4.727695⋯
6	1.4142	4.728733⋯
7	1.41421	4.728785⋯
8	⋮	⋮
9	$\sqrt{2}$	$3^{\sqrt{2}}$

이와 같은 방법을 이용하면 x가 임의의 무리수일 때, 3^x을 정의할 수 있다.
따라서 $a>0$이고 x가 임의의 실수일 때, a^x을 정의할 수 있다.

[Fig. 1] The definition of irrational exponent (Ryu et al., 2017, p. 26)

[Fig. 1]의 정의는 $a>0$ 에 대하여 유리수 수열 r_i 가 α 에 수렴하면 수열 a^{r_i} 는 a^{α}에 수렴한다는 정리(Kim, Byun, & Ahn, 2012)를 토대로 하는 바, $a<0$ 인 경우 유리수 지수를 정의하면 이 정리를 만족하지 않는 사례가 생긴다. 실제로 Tirosh, Even(1997)에 따르면 “$r=\frac{3333333048}{9999999175}$ $s=\frac{6666666115}{19999998347}$ 인 경우에 $|r-s|<10^{-20}$ 이지만 $(-8)^r$ 의 값은 2 에 가깝고 $(-8)^s$ 의 값은 -2 에 가깝게 된다.”(p. 328)[3] 즉, $a<0$ 인 경우 유리수 지수를 정의하면 [Fig. 1]과 같은 방식으로 무리수 지수를 정의할 수 없게 된다.

이상의 내용은 $a<0$ 인 경우 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 $\sqrt[n]{a^m}$ 으로 정의하면, 지수법칙과 로그성질이 성립하지 않으며 연산 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 이 함수로서 만족해야 하는 조건도 충족하지 않음을 보여준다. 또한 $a<0$ 일 때의 유리수 지수 정의는 이를 이용한 실수 지수로의 확장을 어렵게 한다. 개념을 확장하기 위한 정의는 확장의 유용성은 극대화하면서 발생 가능한 잠재적 문제점은 최소화하는 방식으로 진행되며, 이를 위해 수학자들은 특정한 수학적 표현을 정의하지 않는 전략을 사용한다(Sangwin, 2019). 유리수 지수 정의 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 을 $a>0$ 인 경우로 제한한 이유에는 $a<0$ 에서 생기는 위와 같은 문제점에 대처하려는 목적이 포함된다고 볼 수 있다(분석 관점 3).

수업에서 수학적 구조와 관련하여 정의의 본질을 지도하기 위해 교사는 정의가 적용되는 조건을 알아야 할 뿐만 아니라 그러한 조건이 존재하는 이유도 설명할 수 있어야 한다(Levenson, 2012). 이에 유리수 지수 정의의 본질을 다루려는 교사는, 유리수 지수 정의에서 밑의 범위는 양수임을 알고 이처럼 밑의 범위가 제한되는 이유를 이해할 필요가 있다. 이에 본 연구는 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 분석을 위한 두 번째, 세 번째 연구 문제를 다음과 같이 설정한다.

3) Tirosh, Even(1997)은 $(-8)^r$ 과 $(-8)^s$ 의 값이 각각 2 와 -2 에 가까운 이유를 구체적으로 설명하지 않았다. 본 연구는 이를 해석학 전공 교수 3인에게 문의한 결과 주어진 r, s에 대하여 $r=\frac{(\text{짝수})}{(\text{홀수})}$ 이고 $s=\frac{(\text{홀수})}{(\text{홀수})}$ 인 바, “$(-8)^r$ 의 값은 2 에 가깝고 $(-8)^s$ 의 값은 -2 에 가깝다”는 설명은 $\sqrt[(\text{홀수})]{(-8)^{(\text{짝수})}}=\sqrt[(\text{홀수})]{8^{(\text{짝수})}}$ 이며 $\sqrt[(\text{홀수})]{(-8)^{(\text{홀수})}}=-\sqrt[(\text{홀수})]{8^{(\text{홀수})}}$ 라는 사실에서 추론한 결과일 가능성이 높다는 의견을 받았다.

연구 문제 2. 교사들은 유리수 지수 정의에서 밑의 범위가 양수임을 아는가?
연구 문제 3. 교사들은 유리수 지수 정의에서 밑의 범위가 양수로 제한되는 이유를 설명하는가?

Ⅲ. 연구방법

1. 지필검사 도구

정의의 본질 및 의미에 대한 교사의 인식을 분석한 Lavy, Shriki(2010)와 Seaman, Szydlik(2007)는, 정의를 알고 그 내용을 기술할 수 있는 교사라 할지라도 해당 정의의 수학적 본질을 이해하지 못하는 경우가 상당히 많다고 하였다. Edwards, Ward(2004)에 따르면 정의는 증명을 구성하는 필수 요소이며, 증명을 기술하는 능력은 관련 정의에 대한 이해 정도를 보여준다. 즉, 유리수 지수 정의에 대한 교사 이해를 분석하기 위한 지필검사 도구로는 정의 내용을 그대로 기술할 것을 요구하는 문항보다 증명 과정에서 유리수 지수 정의를 활용해야 하는 문항이 좀 더 적절하다고 볼 수 있다.

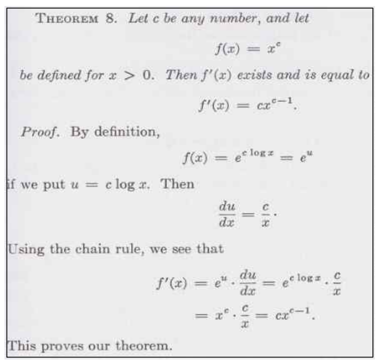
Do, Park(2011)와 Woo, Yim(2008)은 수학적 정의의 의미 및 유리수 지수 정의와 관련되는 쟁점을 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 과 같은 표현에 대한 해석 관점에 비추어 논하였다. 또한 Bernardo, Carmen(2010)은 $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[2\cdot 3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{-8} = -2$ 라고 여기는 교사들에게 인지적 갈등을 유발하기 위하여 다음 면담 문항을 사용한 바 있다. 위 연구들은 유리수 지수 정의에 대한 교사 이해의 특징을 분석하기 위한 지필검사 도구로 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 의 의미 및 $(-8)^{\frac{2}{6}}$ 과의 관계를 다루는 문항이 활용될 수 있음을 보여준다.

> $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[2\cdot 3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{-8} = -2$ 이 옳다면 다음 괄호에 들어갈 값은 무엇인가?
> $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = (\quad)$ (Bernardo & Carmen, 2010, p. 514)

한편 교사 지식은 수학을 가르치는 상황 속에서 의미를 갖는 실행 지식이므로, 구체적인 수업 맥락을 배경으로 할 때 그 특징이 효과적으로 드러난다(Turner & Rowland, 2011). 여러 연구(Adler & Davis, 2006; Watson, Beswick, & Brown, 2006; Yang & Lee, 2019)는 가상의 수업 상황에서 학생이 제기한 의견에 답변을 작성하는 지필검사 문항을 사용하여 교사 지식의 특징을 분석하였다.

이에 본 연구는 유리수 지수 정의에 대한 교사 이해를 분석하기 위한 지필검사 도구를, 증명 과정에서 유리수 지수 정의와 관련된 이해가 드러나는 문항으로, 함수 $f(x) = x^r$ (단, r 은 실수)의 도함수가 $f'(x) = rx^{r-1}$ 임을 보이는 문항 1과, 가상의 수업에서 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 의 의미 및 $(-8)^{\frac{2}{6}}$ 과의 관계에 대해 학생들이 제기한 주장에 답변을 기술하는 문항 2로 개발하였다[4].

문항 1에서 함수 $f(x) = x^r$ (단, r 은 실수)은 지수 r 이 실수이므로 밑인 x 가 양수이어야 하며 그 정의역은 $\{x | x > 0\}$ 이 된다. 해석학 전공 교재 대부분은 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x) = rx^{r-1}$ 임을 [Fig. 2]와 같이 $x^r = e^{r\ln x}$ 으로 두어 $e^{r\ln x}$ 을 미분하는 방식으로 증명한다[5].


THEOREM 8. *Let c be any number, and let*

$$f(x) = x^c$$

be defined for $x > 0$. *Then* $f'(x)$ *exists and is equal to*

$$f'(x) = cx^{c-1}.$$

Proof. By definition,

$$f(x) = e^{c\log x} = e^u$$

if we put $u = c\log x$. Then

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{x}.$$

Using the chain rule, we see that

$$f'(x) = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^{c\log x}\cdot\frac{c}{x} = x^c\cdot\frac{c}{x} = cx^{c-1}.$$

This proves our theorem.

[Fig. 2] The proof of $f'(x) = rx^{r-1}$
(Lang, 2001, p. 127)

[Fig. 2]의 증명 방법은 함수 $f(x) = x^r$ (단, r 은 실수)의 정의역이 $\{x | x > 0\}$ 라는 점을 토대로 한다. 이에

4) 지필검사 도구의 세부 내용은 <부록>을 참조하기 바란다.
5) 본 연구에서 살펴본 교재 6종 모두(Lang, 2001; Lewin, 2003; Kim et al., 2012; Kwak, Kim, Seo, Lee, & Jin, 2001; Thomas, Finney, & Weir, 2003; Varberg, Purcell, & Rigdon, 2000)가 이 방식으로 증명을 기술하였다.

문항 1에서는 교사들이 작성한 증명 방법을 통해 함수 $f(x)$ 의 정의역이 어떻게 설정되는지 확인함으로써 지수가 실수인 경우 지수의 밑은 양수로 제한되는지를 분석하여 유리수 지수 정의에서 밑의 범위가 양수라는 사실을 교사들이 인지하는지 알아볼 수 있다(연구 문제 2).

문항 2는 '$(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-8}$ 이므로 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 라는 학생 A의 주장'과 '$(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}=2$ 이므로 $(-8)^{\frac{1}{3}}=2$ 라는 학생 B의 주장'을 해석할 때 교사들이 유리수 지수 정의와 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 어떻게 활용하는지 살펴보기 위해 개발하였다(연구 문제 1). 특히 학생들에게 제시할 설명으로 교사들이 작성한 내용을 통해서는 유리수 지수에서 밑의 범위가 양수로 제한되는 이유에 대한 교사들의 이해를 분석할 수 있다(연구 문제 3). Shulman(1986, p. 9)은 교사에게 필요한 교과 내용 지식을, "어떤 것 자체를 아는 것(knowing that)"과 "그 이유를 아는 것(knowing why)"로 구분하고 수업 실행과 관련하여 후자의 중요성을 강조한 바 있다. 문항 2에서는 지수가 유리수인 경우 밑 조건이 존재하는 이유를 교사들이 적절하게 설명하는지 살펴봄으로써(연구 문제 3), 유리수 지수 정의에 대한 교사 이해 특징이 실제 수업 상황에서 드러나는 양상을 간접적으로 예측해 보고자 한다.

2. 분석방법

개발한 지필검사 도구를 2020년 10월 중순에 광역시 소재 고등학교에 재직 중인 수학 교사 50명[6)]에게 온라인으로 발송하였으며, 일주일에 걸쳐 검사 결과를 온 · 오프라인으로 수합하였다. 수합한 결과는 교사들이 작성한 답변 내용을 유형별로 분류하고 각 유형에 해당하는 인원수를 파악하는 방식으로 다음과 같이 정리하였다.

문항 1에 대한 교사들의 답변은 $x^r=e^{r\ln x}$ 을 이용한 경우(범주 1), $f(x)=x^r$ 의 양변에 자연로그를 씌워 로그 미분법을 사용한 경우(범주 2-1), $f(x)=x^r$ 의 양변에 절댓값을 취한 다음 자연로그를 씌워 로그 미분법을 사용한 경우(범주 2-2), 그 외의 경우(기타)로 분류하여 각 범주에 속하는 교사들의 인원수를 파악하였다.

문항 2에 대한 교사들의 답변은, 틀린 주장을 한 학생으로 'A, B 모두를 고른 경우', 'A를 고른 경우', 'B를 고른 경우'로 우선 구분 다음 틀린 주장을 한 학생에게 제시할 설명의 유형별로 하위 범주를 나누었다. 교사들이 작성한 답변은 '해당 학생의 틀린 점을 직접적으로 다루는 설명'과 '다른 학생의 주장이 옳은 이유를 밝혀 해당 학생의 틀린 점을 간접적으로 다루는 설명'으로 구분된 바, 이를 하위 범주로 설정하여 세부 설명 내용의 유형을 나누고 각 유형에 속하는 교사들의 인원수를 파악하였다. 예를 들어 틀린 주장을 한 학생으로 B를 고른 교사가, B의 틀린 생각을 고쳐주기 위해 제시할 설명으로 A가 옳은 이유를 작성하였다면 그 내용에 따라 교사의 답변은 범주 B-A1 또는 범주 B-A2 등으로 분류하였다.

위와 같이 정리한 교사들의 답변은 관련 선행연구 및 2015 개정 교육과정의 수학 교과서 내용 등에 비추어 분석하였다. 답변을 정리하고 분석하는 이상의 전반적인 과정에는 연구자뿐 아니라 수학교육 전공 교육학 박사 2명도 참여하였다. 이들은 각자 개별적으로 교사들의 답변을 정리 및 분석하였으며, 수행한 작업 결과에서 차이가 나는 부분은 공동 논의를 통해 수정 · 보완하여 최종 결과를 도출하였다[7)].

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

앞서 제시한 분석방법에 따라 문항 1, 2에 대한 교사들의 답변을 범주화하여 정리한 결과는 각각 [Table 1], [Table 2]와 같다.

---

6) 지필검사 도구에 답변한 교사 50명 중에서 수학 Ⅰ의 지수법칙을 지도한 경험이 있는 교사는 46명, 지도한 경험이 없는 교사는 4명이었다.

7) 이하에서는 지면상의 제약을 감안하여 교사 답변을 정리하고 분석한 세 명의 작업 결과 낱낱을 기술하는 대신 그 최종 결과를 정리하여 제시함으로써 유리수 지수 정의에 대한 교사 이해 특징을 설명하는데 좀 더 주목하고자 한다.

[Table 1] Summary of the teachers' responses to Q1

	Category	Summary of the proof methods	number
Responses to Q1	1	Using $x^r = e^{r \ln x}$ without explaining $x > 0$.	4
	2-1	Using the natural log with explaining $x > 0$.	3
		Using the natural log without explaining $x > 0$.	6
	2-2	Using the natural log after applying the sign of absolute value.	19
	others (incorrect proof)	Using definition of the derivative by considering r as natural numbers.	11
		Trying to prove it by dividing cases of r in which are natural numbers, negative integers, rational numbers or irrational numbers.	7

[Table 1]과 [Table 2]를 통해 드러난 유리수 지수 정의에 대한 교사들의 이해 특징은 다음과 같이 4가지로 요약할 수 있다.

* 교사들은 지수가 유리수, 실수로 확장될 때 지수의 밑은 양수로 제한된다는 사실을 증명에 직접적으로 사용하지 않는다.
* 지수가 유리수일 때 밑이 양수이어야 하는 이유를 의미있게 설명하는 교사가 거의 없다.
* 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 잘못 이해한 교사가 있다.
* 대다수 교사들이 $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ 라고 생각한다.

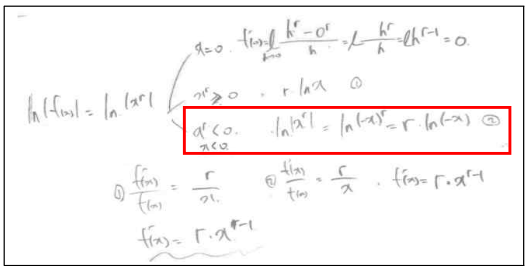
이하에서는 위와 같은 특징을 문항 1, 2의 구체적인 답변에 비추어 상술함으로써 수학적 구조에 대한 교수-학습을 목표로 지수의 확장 및 관련 개념에 대한 수업을 실행하기 위한 교사 지식 개발에의 시사점을 기술하고 해당 수업을 통해 유리수 지수 정의의 본질 및 그 이면의 사고를 다룰 때 주목할 필요가 있는 교수학적 쟁점을 살펴본다.

[Table 2] Summary of the teachers' responses to Q2

	Who is incorrect (number)	How to/Why	Category	Summary of detailed contents	number
Responses to Q2	A & B incorrect (3)	How explaining to A & B	AB-AB1	You must express the real root of $x^3 = -8$ as $\sqrt[3]{-8}$. $(-8)^{\frac{1}{3}}$ is an incorrect expression. The bases must be positive real numbers in the formulae of exponentiation with rational exponents. This question situation shows why a in a^n must be a positive real number when n is a rational number.	2
			AB-AB2	You must express the real root of $x^3 = -8$ as $\sqrt[3]{-8}$. The bases must be positive real numbers in the formulae of exponentiation with rational exponents.	1
	A incorrect (4)	How explaining to A	A-A1	a in a^n must be positive a real number when n is a rational number.	3
		Why B is correct	A-B1	Applying the exponent of $\frac{1}{6}$ after calculating $(-8)^2$ is correct because the bases must be positive real numbers in the formulae of exponentiation with rational exponents.	1
	B incorrect (41)	Why A is correct	B-A1	$(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ is correct because the real root of $x^3 = -8$ is unique and it is $x = -2$.	9
			B-A2	$(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ is correct because the inverse function of $y = x^3$ is $y = x^{\frac{1}{3}}$ and the value of $(-8)^{\frac{1}{3}}$ is negative from the graph of $y = x^{\frac{1}{3}}$.	5
		How explaining to B	B-B1	The bases must be positive real numbers in the formulae of exponentiation with rational exponents.	16
			B-B2	The real root of $x^3 = -8$ is $x = -2$ and the real roots of $x^6 = 64$ are $x = \pm 2$. Therefore $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} \neq [(-8)^2]^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = \pm 2$.	6
			B-B3	$(-8)^{\frac{1}{3}} = [(-2)^3]^{\frac{1}{3}} = -2$. Therefore $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} \neq (-8)^{\frac{2}{6}} = [(-8)^2]^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$.	4
			B-B4	If $(-8)^{\frac{1}{3}} = 2$ then $[(-8)^{\frac{1}{3}}]^3 = 2^3$ and $-8 = 8$. That is a contradiction. Therefore $(-8)^{\frac{1}{3}} \neq 2$.	1
	non-response (2)				

1. 교사들은 지수가 유리수, 실수로 확장될 때 지수의 밑은 양수로 제한된다는 사실을 증명에 직접적으로 사용하지 않는다.

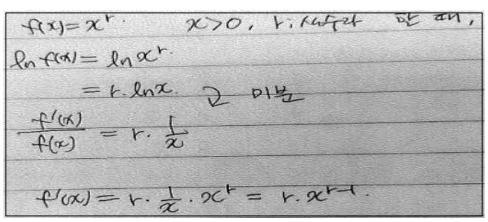
문항 1의 증명에서 교사 4명은 $x^r = e^{r\ln x}$ 을 이용하였으며(범주 1), 교사 28명은 $f(x)=x^r$ 의 양변에 자연로그를 씌워 로그 미분법을 사용하였다(범주 2-1, 2-2). 그러나 범주 2-2에 속한 교사 19명은 $f(x)=x^r$ 의 양변에 먼저 절댓값을 취한 다음 자연로그를 씌우는 방법으로 증명을 기술하였다. 특히 이들 중 5명은 [Fig. 3]과 같이 $x<0$ 인 경우 $x^r<0$ 이므로 $f(x)=x^r$ 의 양변에 절댓값을 씌울 필요가 있음을 명시적으로 보이기도 하였다.


[8]

[Fig. 3] A case of teachers' responses in Category 2-2

범주 2-2의 교사들은 함수 $f(x)=x^r$ (단, r 은 실수)에 대해 지수 r 이 실수이므로 정의역은 $\{x|x>0\}$ 이며, 이는 지수가 유리수, 실수로 확장될 때 지수의 밑은 양수로 제한되기 때문임을 인지하지 못한 것으로 보인다.

한편 범주 1과 범주 2-1에 속한 교사 13명 중 [Fig. 4]처럼 함수 $f(x)=x^r$ 의 정의역이 $\{x|x>0\}$ 임을 명기하여 $f(x)=x^r$ 의 양변에 자연로그를 취할 수 있음을 직접적으로 기술한 교사는 3명뿐이었다.



[Fig. 4] A case of teachers' responses with explaining $x>0$ in Category 2-1

함수 $f(x)=x^r$ 의 정의역이 양수임을 분명히 기술한 다음 이를 증명에 활용한 교사가 거의 없으며, 특히 $x<0$ 인 경우를 전제로 양변에 절댓값을 씌운 후에 증명을 작성한 교사가 적지 않음을 볼 때, 지수가 유리수, 실수로 확장되면 지수의 밑은 양수로 제한된다는 사실이 문항 1의 증명에 충분히 사용되었다고 볼 수 없다. 이는 유리수 지수 정의에서 밑의 범위가 양수라는 사실을 교사들이 알지 못하거나, 알고 있더라도 실행 지식으로 기능할 만큼 적절히 이해하고 있지는 못함을 의미한다(연구 문제 2).

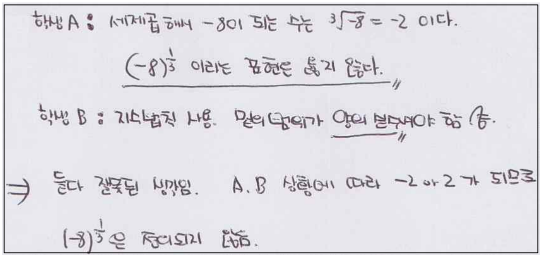
한편 2015 개정 교육과정의 미적분 교과서 총 8종이 해당 내용을 다룬 방식을 살펴보면, 증명에 $x^r = e^{r\ln x}$ 을 이용한 교과서가 3종, $f(x)=x^r$ 의 양변에 바로 자연로그를 씌워 증명을 기술한 교과서가 1종인 반면, 교과서 4종은 $f(x)=x^r$ 의 양변에 절댓값을 취한 후에 자연로그를 씌우는 방식을 택하였다. 이는 문항 1의 증명 방식과 관련하여 교사들이 보인 특징과 거의 일치하는 바, 구체적인 내용 요소에 대한 교사 지식의 양상에 교과서가 미치는 영향이 적지 않음을 알 수 있다.

Sangwin(2019)은 지수가 유리수일 때의 지수법칙에 대해 설명하는 교과서 진술 방식을 분석하여 교사가 수학적인 결정을 내리거나 이해를 증진하는 데 교과서가 유일한 토대로 작용하였을 때의 한계를 지적하고, 교사가 수업을 설계하고 실행할 때 교과서 내용을 비판적으로 다루도록 강력히 권고한 바 있다. 문항 1에서 교사들이 보인 답변의 위와 같은 특징은 교사 교육 프로그램을 통해 교과서 내용을 반성적으로 검토하는 구체적이고 전략적인 활동이 필요함을 보여준다.

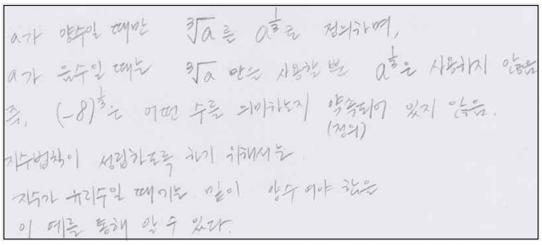
2. 지수가 유리수일 때 밑이 양수이어야 하는 이유를 의미있게 설명하는 교사가 거의 없다.

문항 2에서 학생 A, B가 모두 틀린 주장을 하였다고 답한 교사 중 범주 AB-AB1의 교사 2명만이 지수가 유리수일 때 밑이 양수이어야 하는 이유를 [Fig. 5], [Fig. 6]과 같이 적절하게 설명하였다(연구 문제 3).

8) 은 본 연구에서 설명을 위해 추가한 것이다.


학생 A : 세제곱해서 -8이 되는 수는 $\sqrt[3]{-8}=-2$ 이다.
$(-8)^{\frac{1}{3}}$ 이라는 표현은 옳지 않다.
학생 B : 지수법칙 사용. 밑의 [illegible]가 양의 분수여야 함 [illegible].
⇒ 둘다 잘못된 생각임. A, B 상황에 따라 -2 or 2 가 되므로
$(-8)^{\frac{1}{3}}$은 정의되지 않음.

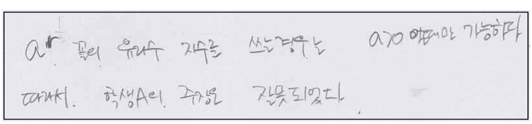
[Fig. 5] A case of teachers' responses in Category AB-AB1


a가 양수일 때만 $\sqrt[3]{a}$를 $a^{\frac{1}{3}}$로 정의하며,
a가 음수일 때는 $\sqrt[3]{a}$ 만을 사용할 뿐 $a^{\frac{1}{3}}$은 사용하지 않음.
즉, $(-8)^{\frac{1}{3}}$은 어떤 수를 의미하는지 약속되어 있지 않음.
(정의)
지수법칙이 성립하도록 하기 위해서는
지수가 유리수일 때에는 밑이 양수여야 함을
이 예를 통해 알 수 있다.

[Fig. 6] The other case of teachers' responses in Category AB-AB1

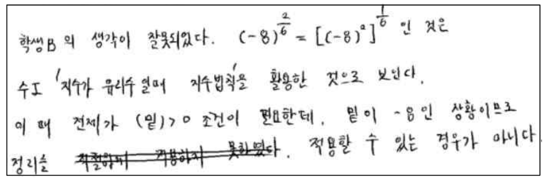
[Fig. 5], [Fig. 6]의 교사는 각각 문항 2의 상황에 비추어 '$(-8)^{\frac{1}{3}}$의 값이 -2 이면서 2 로 모순이 되기 때문에', '지수가 유리수일 때의 지수법칙이 성립하도록 하기 위해'와 같은 설명을 제시하였다. 이들은 지수가 유리수인 경우 밑이 음수이면 생기는 문제점을 지적하거나 유리수 지수 정의와 지수법칙의 관계를 언급함으로써 지수가 유리수일 때 밑이 양수이어야 하는 이유를 설명하였다.

한편 범주 AB-AB2, A-A1에 속한 교사 4명은 틀린 주장을 한 학생 A의 생각을 고쳐주기 위한 설명으로 [Fig. 7]과 같이 '유리수 지수가 정의되는 조건'을 그대로 제시하였다.


$a^{\frac{1}{n}}$ 꼴의 유리수 지수를 쓰는 경우는 $a>0$ 일때만 가능하다
따라서. 학생A의 주장은 잘못되었다.

[Fig. 7] A case of teachers' responses in Category A-A1

특히 범주 AB-AB2의 교사는 틀린 주장을 한 학생 B에게 제시할 설명 역시 '지수가 유리수일 때 지수법칙이 성립하는 조건' 자체를 그대로 진술하는 것으로 대신하였다. 이러한 현상은 학생 B가 틀린 주장을 하였다고 답한 교사들 중 범주 B-B1에 속하는 교사 16명이 학생 B의 생각을 고쳐주기 위해 [Fig. 8]과 같이 제시한 설명에서도 드러났다.


학생B의 생각이 잘못되었다. $(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 인 것은
수 I '지수가 유리수 일때 지수법칙'을 활용한 것으로 보인다.
이 때 전제가 (밑)>0 조건이 필요한데, 밑이 -8인 상황이므로
정리를 ~~적절하지 적용하지 못하였다~~. 적용할 수 있는 경우가 아니다.

[Fig. 8] A case of teachers' responses in Category B-B1

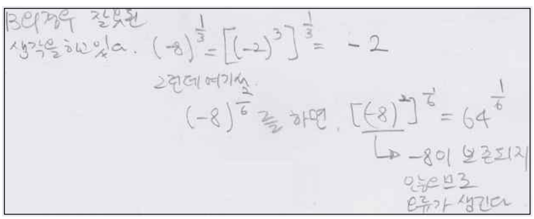
범주 AB-AB2, A-A1, B-B1의 교사 20명은 학생의 틀린 생각을 고쳐주기 위해 지수가 유리수일 때 밑이 양수이어야 하는 '이유'나 지수가 유리수일 때의 지수법칙은 밑이 양수일 때만 성립하는 '근거'를 의미있게 설명하는 대신에, '유리수 지수 정의'나 '지수가 유리수일 때의 지수법칙' 자체를 그대로 기술하여 학생의 주장이 틀렸음을 알려주는 것에 보다 주목하였다(연구 문제 3). Even, Tirosh(1995)에 따르면 수학을 임의적으로 설정한 공리 및 정의와 그에 의해 생겨나는 규칙의 체계로 보고 수학 학습의 목표는 이를 숙지하고 암기하여 사용하는 것에 있다고 생각하는 교사일수록 수학 내용이 성립하는 이유를 설명할 때 정의나 규칙에 기대어 이를 그대로 진술하는 경향(rule-based approach)이 있다. 이는 범주 AB-AB2, A-A1, B-B1에 속한 교사들이 유리수 지수의 정의 및 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 수학적 구조 생성을 위해 조직된 창안물로 보는 것이 아니라 임의적 규약과 따라야 할 계산 규칙 정도로 이해하고 있을 가능성을 시사한다.

2015 개정 교육과정(MOE, 2015)은 수학 Ⅰ의 성격에 수학의 규칙성과 구조를 보는 안목 및 수학 문제 해결 능력의 개발을 학습 결과로 제시하고 있으며, 지수와 로그 단원에는 "지수가 유리수 및 실수인 경우는 밑이 양수인 조건이 필요함을 이해하게 한다"(p. 64)와 같은 교수·학습 방법 및 유의 사항을 명시하고 있다. 이 때 '이해하게 한다'는 지수가 유리수일 때 밑은 양수이어야 함을 단순히 '알게(knowing that)' 하는 것이 아니라 그러한 조건

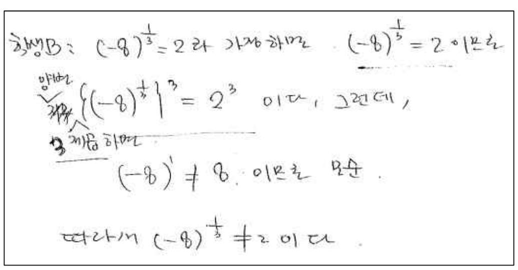
이 존재하는 '이유를 알게(knowing why)' 하는 의미라는 점에는 재론의 여지가 없다. 이에 학생이 지수의 확장을 통해 지수가 유리수, 실수일 때는 밑이 양수가 되는 이유를 이해하여 수학적 구조가 만들어지는 과정을 경험하게 하려는 교육과정의 의도가 수업에서 구현되려면, 교사 교육 강좌에서 이러한 교육과정의 의도를 보다 직접적으로 다루어 유리수 지수 정의 및 지수법칙 이면의 사고에 대한 교사 지식을 적극적으로 개선할 필요가 있다. 구체적인 학습 요소에 대해 교사가 지닌 내용 지식 및 그에 대한 인식은 교사가 수업을 실행하는데 직접적인 영향을 미쳐 학생의 수학 학습을 결정짓는 중요한 요소 중 하나로 작용하기 때문이다(Guberman & Gorev, 2015).

3. 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 잘못 이해한 교사가 있다.

일부 교사들은 지수가 유리수일 때의 지수법칙은 밑이 양수인 경우에 성립한다는 사실을 간과하거나 오해하였다. 문항 2에서 틀린 주장을 한 학생은 B라고 답한 다음 이 학생에게 제시할 설명을 기술한 교사 중 범주 B-B3, B-B4에 속한 5명은 [Fig. 9], [Fig. 10]과 같이 학생 B가 틀린 곳을 지적하였다.



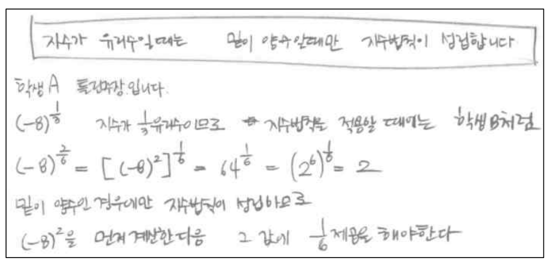
[Fig. 9] A case of teachers' responses in Category B-B3



[Fig. 10] The case of teacher's response in Category B-B4

[Fig. 9], [Fig. 10]에서 교사들은 $[(-2)^{\frac{1}{3}}]^3=-2$, $(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 및 $\left\{(-8)^{\frac{1}{3}}\right\}^3=(-8)^1$와 같이 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 밑이 음수인 경우에 적용하는 설명을 제시함으로써 학생 B의 틀린 부분을 고쳐주고자 하였다. 문항 2에서 학생 B는 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 밑이 음수인 경우에 사용하여 틀린 추론을 한 것이므로 범주 B-B3, B-B4에 속한 교사들이 제시한 위와 같은 설명은 지수가 유리수일 때의 지수법칙에 대한 학생의 이해를 개선하는데 기여하지 못한다. 밑이 음수인 경우 지수가 유리수인 지수법칙이 성립하지 않음을 적절히 지도하는 것은 지수가 유리수일 때 밑은 양수여야 하는 이유를 다루는 핵심 활동으로, 이를 통해 '유리수 지수 정의'와 '지수가 유리수일 때의 지수법칙'사이의 순환적 관계를 의미있게 설명할 수 있다. 범주 B-B3, B-B4의 교사 5명은 지수가 유리수일 때 지수법칙이 성립하는 조건을 충분히 숙지하지 못한 바, 수업 상황에서 유리수 지수 정의와 지수가 유리수일 때의 지수법칙사이에 존재하는 관계를 설명하는 데 한계가 있을 것으로 예상된다(연구 문제 1).

한편 문항 2에서 틀린 주장을 한 학생은 A라고 답한 다음 이 학생에게 제시할 설명을 학생 B의 주장이 옳은 이유를 밝히는 것으로 대신한, 범주 A-B1에 속한 교사는 밑이 양수인 경우에 지수가 유리수인 지수법칙이 성립한다는 사실을 [Fig. 11]과 같이 해석하여 기술하였다.



[Fig. 11] The case of teacher's response in Category A-B1

[Fig. 11]에서 교사는 "지수가 유리수일 때는 밑이 양수인 경우에만 지수법칙이 성립한다"는 의미를 $(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}\overset{㉠}{=}[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}$에서 $(-8)^{\frac{2}{6}}$을 $[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$

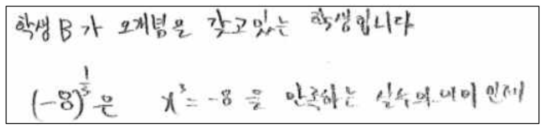
과 같이 밑 $(-8)^2$ 을 먼저 계산하여 양수 64 로 만든 다음 여기에 $\frac{1}{6}$ 제곱을 할 수 있다는 말로 해석하여, 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 적용하면 등호 ㉠이 성립하게 된다고 설명하였다. 범주 A-B1의 사례는 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 성립 조건과 관련하여 정확하게 말할 수 있는 교사라도 해당 내용의 진정한 의미나 역할에 대한 이해가 결여될 수 있음을 보여준다.

수학 내용에 대한 충분한 이해 없이 들은 바를 그대로 재생하는 일은 학생뿐 아니라 교사에게도 발생할 수 있으며, 교사의 부적절한 내용 지식은 교사가 학생에게 수학적으로 타당하지 않은 설명을 제공하게 하여 수업 효과를 떨어뜨리는 요인이 될 수 있다. 이에 수학 교사 교육과정은 교과 내용 지식을 습득할 기회와 함께 자기 비판적 태도 및 지적 경각심의 개발이 가능한 의미있는 상황도 제공할 필요가 있다. Movshovitz-Hadar(2011)은 교사 교육과정에서 수학 전공 강좌의 내용 대부분이 '정리 제시-증명하기' 형태로 구성됨에 따라 예비교사들의 지적 요구를 해결하지 못하는 한계가 있다고 하면서 그 극복 방안으로 인지적 갈등을 유발하는 문제 해결 중심 활동을 권고하였다. 문항 2는 $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}=2$ 라는 역설 상황을 다루고 있는 바, 문항 2와 같은 과제의 개발 및 적용을 통해 교사 교육 프로그램의 개선 방안을 구체적으로 모색해 볼 수 있다.

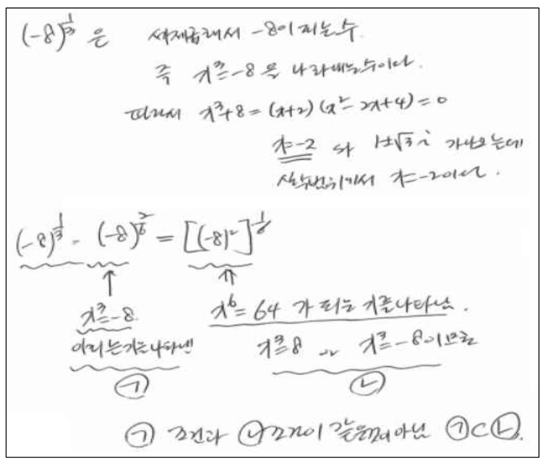
4. 대다수 교사들이 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 라고 생각한다.

문항 2에서 학생 B가 틀린 주장을 하였다고 답한 교사들 대부분은 $(-8)^{\frac{1}{3}}$의 값이 -2 와 같다는 추론을 토대로 학생 B에게 제시할 설명을 기술하였다. 앞 절에서 살펴본 범주 B-B3에 속한 교사 4명은 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 을 설명하기 위하여 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 밑이 음수인 경우에 적용하였다. 이들은 [Fig. 9]에서처럼 $(-8)^{\frac{1}{3}}=[(-2)^{\frac{1}{3}}]^3 \overset{㉠}{=} -2$ 임을 통해 등호 ㉠이 성립하기 때문에 $(-8)^{\frac{1}{3}}$의 값은 -2 라고 설명하였다. 지수의 확장 과정에서 $(-8)^{\frac{1}{3}}$와 같이 지수가 유리수이면서 밑이 음수인 수를 정의하지 않는 이유는, 지수가 정수일 때 성립하는 지수법칙이 지수가 유리수일 때도 성립하도록 하여 정수 체계와 유리수 체계를 관통하는 일관된 수학적 구조를 만들려는 의도가 있다. 그러나 범주 B-B3의 교사들은 '유리수 지수의 정의'와 '지수가 유리수일 때의 지수법칙'사이에 존재하는 이러한 순환적 관계를 알지 못하는 것으로 보인다(연구 문제 1). 유리수 지수 정의에 대해 교사들이 보인 이러한 한계는 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 통해 수학적 구조를 보는 안목의 개발을 추구하는 수업을 실행하는 데 제한점으로 작용할 수 있다.

범주 B-A1, B-B2에 속한 교사 15명은 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 을 설명하는 데 [Fig. 12], [Fig. 13]과 같이 방정식 $x^3=-8$ 의 실근이 -2 라는 점을 이용하였다.



[Fig. 12] A case of teachers' responses in Category B-A1

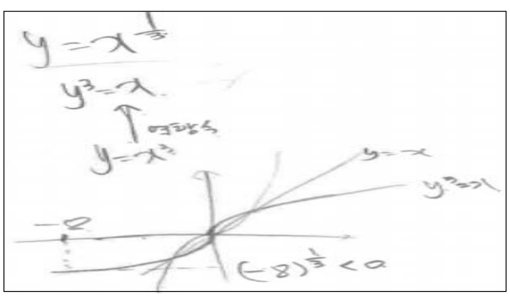


[Fig. 13] A case of teachers' responses in Category B-B2

특히 [Fig. 13]에서 보듯이 범주 B-B2의 교사 6명은 $[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}$ 이기 때문에 이 수는 $x^6=64$ 가 되는 x 을 나타내며 따라서 $[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 는 ± 2 라고 설명함으로

써 학생 B의 추론 중 틀린 부분을 구체적으로 보여주려고 시도하였다. 이는 $(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}} \overset{㉠}{=} [(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}$ 에서 등호 ㉠이 틀렸음을 명확히 하여 지수가 유리수일 때의 지수법칙은 밑이 음수인 경우 성립하지 않음을 설명하는 것처럼 보인다. 그러나 이러한 일련의 과정은 실제로 $64^{\frac{1}{6}}=\pm 2$ 라는 잘못된 수학적 추론에 기반하고 있으므로 지수가 유리수일 때의 지수법칙이 지닌 의미를 다루는 교수 전략으로 바람직하지 않다. Bernardo, Carmen(2010)에 따르면 $\sqrt[6]{64}=64^{\frac{1}{6}}=\pm 2$과 같은 이해는 거듭제곱근 기호와 관련하여 학생들이 보이는 대표적인 오개념으로 교사는 거듭제곱근 개념 및 기호를 다룰 때 이러한 오개념에 대해 교수학적 경각심을 가져야 한다. 범주 B-B2의 사례는 거듭제곱근 기호에 대해 학생과 동일한 오개념을 지닌 교사가 적지 않음을 보여주는 바, 이들은 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 적절히 해석하지 못하기 때문에 '유리수 지수 정의'와 '지수가 유리수일 때의 지수법칙'사이의 관계를 설명하는 교수-학습 상황을 설계하고 실행하는 데 어려움이 있을 것으로 예상된다(연구 문제 1).

범주 B-A2의 교사 5명은 함수 $y=x^3$ 의 역함수를 이용하여 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 인 이유를 설명하였다. 교사들은 [Fig. 14]와 같이 $y=x^3$ 의 역함수를 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 로 보고 $y=x^3$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭 이동하여 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 의 그래프를 그린 다음 $(-8)^{\frac{1}{3}}$의 값이 음수임을 보였다.



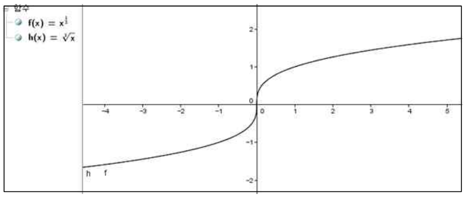
[Fig. 14] A case of teachers' responses in Category B-A2

그러나 $x^{\frac{1}{3}}$ 의 값은 지수가 유리수이기 때문에 밑 x가 양수일 때만 정의할 수 있다. 즉, 함수 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 는 정의역이 $\{x \mid x>0\}$이므로 $y=x^3$ 의 역함수가 될 수 없다. 실제로 $y=x^3$ 의 역함수는 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 이 아니라 $y=\sqrt[3]{x}$ 인 바, 범주 B-A2에 속한 교사들은 $y=\sqrt[3]{x}$ 의 그래프를 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 의 그래프와 혼동하였다고 볼 수 있다..

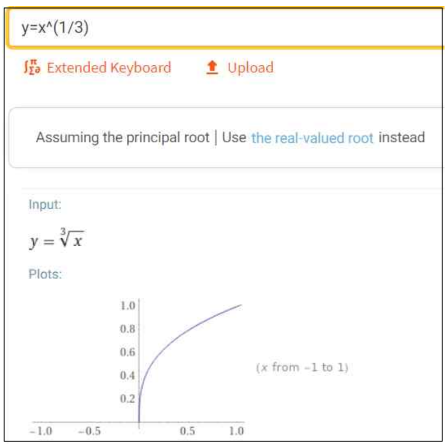
이상에 따르면 범주 B-A1, B-A2, B-B2, B-B3의 교사 24명은 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 임을 설명하기 위해 $(-8)^{\frac{1}{3}}$을 $x^3=-8$의 실근으로 보거나(범주 B-A1, B-B2), $[(-2)^3]^{\frac{1}{3}}=-2$ 과 같이 지수가 유리수인 지수법칙을 밑이 음수인 경우에 적용하였다(범주 B-B3). 또한 $y=x^3$ 의 역함수를 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 이라고 보고 그래프를 그려 $x=-8$ 에서의 함숫값을 구하기도 하였다(범주 B-A2). 이 교사들은 유리수 지수를 정의할 때 밑은 양수여야 한다는 조건을 간과하고 있을 뿐만 아니라(연구 문제 2), 지수가 유리수일 때의 지수법칙은 밑이 양수일 때만 성립한다는 사실을 모르는 학생 B의 오류를 유리수 지수 정의와 지수법칙 사이의 관계에 비추어 적절하게 설명하는 것에도 실패하였다(연구 문제 1). 24명이라는 적지 않은 교사가 2015 개정 교육과정의 수학 Ⅰ에서 교수·학습 방법 및 유의사항으로 강조한, "지수가 유리수인 경우 밑이 양수이어야 하는 조건"(MOE, 2015, p. 64)을 알지 못할 뿐 아니라, 수학적 구조를 보는 안목의 개발에 적합한 교수-학습 주제로 간주되는 지수법칙(Woo & Yim, 2008)을 충분히 이해하지 못한 결과는 해당 내용 요소와 관련된 교수학적 이슈를 교사 교육 프로그램을 통해 적극적으로 다룰 필요가 있음을 시사한다. 특히 $(-8)^{\frac{1}{3}}$의 값을 -2 로 보는 것과 같이 $a<0$ 에 대해 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 $\sqrt[n]{a^m}$ 로 정의하였을 때 생기는 문제점에 대해 구체적으로 논의할 기회를 교사 교육 강좌에서 적극적으로 제공할 필요가 있다.

한편 범주 B-A2에 속한 교사들은 함수 $y=\sqrt[3]{x}$ 의 그래프를 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 의 그래프와 혼동한 바, 이러한 혼동은 비단 해당 범주에 속하는 교사들에게서만 발생하는 문제

는 아니다. 함수 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 의 그래프에 대해, 수학 교육용 프로그램 지오지브라(Geogebra)[9]는 [Fig. 15]와 같이 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 와 $y=\sqrt[3]{x}$ 을 동일한 그래프로 표현하며, 검색 엔진 울프람 알파(Wolfram Alpha)[10]는 [Fig. 16]과 같이 입력한 수식 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 을 $y=\sqrt[3]{x}$ 으로 해석한 다음 그래프를 그린다.



[Fig. 15] The graph of $y=x^{\frac{1}{3}}$ from Geogebra



[Fig. 16] The graph of $y=x^{\frac{1}{3}}$ from Wolfram Alpha

2015 개정 교육과정 수학Ⅰ의 교수 · 학습 방법 및 유의 사항은 “지수와 로그 및 지수함수와 로그함수를 다룰 때 공학적 도구를 이용”(MOE, 2015, p. 64)하도록 명시하고 있으나, 수학 교수-학습 상황에서 폭넓게 사용되는 위 2가지 소프트웨어가 서로 다른 두 함수 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 와 $y=\sqrt[3]{x}$ 의 그래프를 [Fig. 15], [Fig. 16]처럼 혼용하여 구현한 결과는 공학적 도구가 수학 내용 요소 지도의 쟁점을 해결하는 만능열쇠는 아니라는 점을 보여준다. 수학 교육에 사용되는 소프트웨어 역시 교과서와 마찬가지로 개발자들의 수학적 견해를 반영하는 바, 교사는 수학 수업에서 활용하는 공학적 도구에 대해 비판적 입장을 견지할 필요가 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

수학 및 수학 교육에서 정의의 중요성은 재론의 여지가 없다. 그러나 학교 현장에서 정의는 그 이면에 존재하는 사고의 본질이 다루어지지 못하고 완성된 최종 산물로서만 제시되어 단순히 암기의 대상 정도로 여겨지고 있는 실정이다(Chung & Lee, 2018). 교사 지식은 수업의 양상을 결정하는 가장 주요한 변수중 하나인 바(Magiera et al., 2011), 정의가 만들어진 의도 및 이면에 존재하는 사고를 학생이 경험하도록 하기 위해서는 정의의 본질 및 역할에 대한 교사들의 이해가 선행되어야 한다.

이에 본 연구는 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 특징을 분석하여 교사 교육에의 시사점을 구체화하고, 지수의 확장을 지도하는 수업에서 정의의 본질 및 그 이면의 사고를 다루기 위해 고려할 필요가 있는 교수학적 쟁점을 밝히는 데 목적을 두었다. 이를 위해 본 연구는 지필검사 도구를 개발하였으며 이에 대한 현직 고등학교 교사 50명의 답변을 분석하여 유리수 지수 정의에 대한 교사 이해 특징이 교사 교육에 주는 시사점 및 교수학적 쟁점을 기술하였다. 이하에서는 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 특징으로부터 드러난 교수학적 쟁점을 국내 교과서 전개 방식에 비추어 해석해 봄으로써, 수업을 통해 지수의 확장과 관련된 정의의 본질을 의미있게 다루기 위해 교사 및 교과서가 좀 더 주목할 필요가 있는 측면에 대하여 제언하고자 한다.

첫째, 본 연구에서 분석한 문항 2에 대한 교사들의 답변에는 ‘지수가 유리수일 때 밑은 양수이어야 한다’는 기

9) 지오지브라는 교육 목적에 대하여 무료로 제공되는 수학-과학 소프트웨어로 지오지브라 공식 홈페이지(https://www.geogebra.org)에서 내려 받을 수 있다(Choi, 2014).

10) 울프람 알파(https://www.wolframalpha.com/)는 영국의 물리학자 스티븐 울프람(Stephen Wolfram) 박사가 개발한 검색 엔진이다(Telecommunication Technology Association, 2021).

술이 적지 않게 등장하지만, 문항 1에서는 상당히 많은 교사가 $f(x)=x^r$ (단, r 은 실수)의 도함수가 $f'(x)=rx^{r-1}$ 임을 증명하는 데 $x>0$ 이므로 $f(x)>0$ 라는 사실을 간과하고 양변에 절댓값을 취한 다음 자연로그를 씌우는 방법을 사용하였다. 이는 교사들이 유리수 지수 정의를 알고 있고 이를 글로 옮길 수 있지만, 그 의미를 충분히 이해하여 증명에 사용할 정도의 실행 지식으로 내면화하지는 못하였음을 보여준다. 이러한 현상은 해당 내용을 학습하는 학생들에게도 발생할 가능성이 있는 바, 수업을 진행하는 교사는 지수가 정수에서 유리수로 확장될 때 지수의 밑은 0이 아닌 실수에서 양의 실수로 축소된다는 점을 보다 명시적으로 설명하고 그러한 제한이 있는 이유를 구체적으로 음미하는 기회를 제공할 필요가 있다. 그러나 많은 경우에 관련 수업 상황은 유리수 지수라는 새로운 개념을 정의 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 로부터 도입하느라 정의가 기능하기 위해 필요한 밑 a 의 조건인 $a>0$ 을 충분히 강조하지 않는 듯하다. 실제로 2015 개정 교육과정의 수학 Ⅰ교과서 대부분은 유리수 지수를 정의한 다음 [Fig. 17]과 같은 문제를 제시하여 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 자체를 적용해보는 활동에 중점을 두고 있다.

다음에서 지수를 사용한 것은 근호를 사용하여 나타내고, 근호를 사용한 것은 지수를 사용하여 나타내시오. (단, $a>0$)

(1) $a^{\frac{3}{2}}$ (2) $a^{-0.3}$

(3) $\sqrt[4]{a^5}$ (4) $\sqrt[3]{a^{-4}}$

[Fig. 17] A problem related to the definition of rational exponent on Mathematics I (Ko et al., 2017, p. 18)

그러나 [Fig. 17]과 같은 문제를 통해 유리수 지수 정의가 지닌 의미, 즉 지수의 개념이 정수에서 유리수로 확장되면서 밑의 범위는 양수로 축소된 사실을 음미하거나, 이러한 제한 조건이 있는 이유를 탐색해 보도록 수업을 진행하는 데는 한계가 있다. 이스라엘 고등학교 교과서는 유리수 지수를 정의한 후 다음과 같은 설명을 기술하여 수업 상황에서 교사가 유리수 지수 정의의 본질 및 밑의 범위가 제한되는 이유, 공학적 도구가 제공하는 정보 등과 관련하여 학생들과 함께 반성해 볼 기회를 의도적으로 제공한다.

> $x^{\frac{1}{n}}$ 이 유일한 값을 갖도록 밑 x 을 음이 아닌 실수로 제한한다. … 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 적용할 수 없기 때문에 유리수 지수에서 밑이 음수인 경우는 생각하지 않는다. $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 알려주는 공학적 도구가 있을 수 있지만, 이 교과서에서는 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 과 같은 표현을 정의하지 않는다(as cited in Tirosh & Even, 1997, p. 322).

둘째, 본 연구에서 상당수의 교사들이 문항 2에 대한 답변을 통해 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 라고 주장하였으며 그 이유를 설명하는 데 $x^3=-8$ 의 실근, 지수가 유리수인 지수법칙, $y=x^3$ 의 역함수와 같은 개념을 부적절하게 사용하였다. 이는 $a<0$ 에 대해 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 $\sqrt[n]{a^m}$ 로 정의하면 발생하는 문제점을 교사들이 인지하고 있지 못함을 보여준다. 지수의 확장과 관련된 정의의 본질을 다루는 수업이 의미있게 실행되기 위해서는 유리수 지수 정의에 밑이 양수라는 제한이 있는 이유를 밑이 음수일 때 생기는 문제점에 비추어 교사가 구체적으로 파악하고 있어야 하며, 교과서 역시 교사가 이 점을 명시적으로 다룰 수 있도록 관련 설명이나 탐구 활동 등을 제공할 필요가 있다.

더불어 본 연구에서 교사들이 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 을 보이기 위해 거듭제곱근이나 지수법칙, 다항함수의 역함수와 같은 관련 개념을 부적절하게 사용한 것은 유리수 지수 정의의 본질을 제대로 이해하는 것이 비단 정의 자체와 이유를 아는 것만으로 충분하지 않음을 보여준다. 수학은 구조의 학문이며 이러한 구조는 개념과 원리, 핵심 아이디어 사이의 관계망을 통해 형성된다(NCTM, 2015). 2015 개정 교육과정의 수학 Ⅰ에서 지수를 자연수에서 정수, 유리수, 실수로 확장하는 것은 해당 내용이 속한 단원명이 보여주듯이 '지수함수'를 지도하기 위한 초기 작업에 해당한다. 지수함수 $y=a^x$ 을 모든 실수위에서 정의하기 위해서는 a^{-2}, $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\sqrt{2}}$ … 등이 어떤 값인지 의미를 주어야 하고 이러한 이유로 앞 단원에서 지수의 확장을 지도하게 된다. 즉, 지수의 확장 단원과 지수함수 단원에서 다루는 개념은 본질적으로 깊은 관련이 있는 바, 수학적 구조를 보는 안목의 개발이라는 관점에서 볼 때 두 단원 간의 이러한 연결성이 드러나도록 수업을 실행하기 위해

서는 교과서 전개에 이 점이 구체적으로 반영될 필요가 있다.

그러나 2015 개정 교육과정의 수학 Ⅰ교과서 전체 9종 가운데 4종만이 지수함수 $y=a^x$ 의 밑 a 가 $a>0$ 인 이유를 교과서 보조단에 간략하게 기술하였을 뿐 Key Curriculum Press 교과서의 [Fig. 18]과 같이 구체적인 탐구 문제를 통해 음미할 기회를 제공하지는 않는다.

7. The definition of exponential function, $y = ab^x$, includes the restriction $b > 0$. Suppose that $y = (-64)^x$. What would y equal if $x = \frac{1}{2}$? If $x = \frac{1}{3}$? Why do you think there is the restriction $b > 0$ for exponential functions?

[Fig. 18] A problem related to the restriction of bases in exponential function on an American textbook (Foerster, 2003, p. 277)

또한 수학 Ⅰ교과서 총 9종 가운데 8종은 지수함수의 그래프를 도입하는 데, [Fig. 19]와 같이 x 값에 정수만을 기입한 대응표를 사용한다.

지수함수 $y=2^x$에서 실수 x의 값에 대응하는 y의 값을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	⋯
y	⋯	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	⋯

[Fig. 19] A table to draw the graph of $y=2^x$ on Mathematics Ⅰ (Kim et al., 2017, p. 39)

[Fig. 19]의 대응표는 지수함수 $y=a^x$ 에서 x 는 기껏해야 정수라는 이미지를 주기 때문에 밑 a 의 조건에 $a>0$ 이 존재하는 이유가 직접적으로 드러나지 않으며 지수함수의 밑 조건을 지수의 확장 단원과 관련하여 음미할 기회를 주지 못한다. 그러나 일본 교과서는 지수함수의 그래프를 도입하기 위해 [Fig. 20]과 같이 정수가 아닌 유리수가 있는 대응표를 사용한다.

指数関数 $y=2^x$ において，いろいろな x の値に対応する 2^x の値は，次の表のようになる。

x	⋯	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	⋯
$y=2^x$	⋯	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4	⋯

[Fig. 20] A table to draw the graph of $y=2^x$ on a Japanese textbook (Ohkamoto, 2017, p. 149)

본 연구는 앞서 문항 1에 대한 교사들의 증명 방법에서 드러난 특징이 2015 개정 교육과정의 미적분 교과서에서 $f(x)=x^r$ (단, r 은 실수)의 도함수가 $f'(x)=rx^{r-1}$ 임을 보이는 방식을 반영하였을 가능성에 대해 상술한 바 있다. Sangwin(2019)은 교사가 수학적인 결정을 내리거나 이해를 증진하기 위해 교과서만을 유일한 참고자료로 활용하는 것의 한계를 지적하면서 교사가 수업을 설계하고 실행할 때 교과서 내용을 비판적으로 다루도록 권고하였다. 그러나 한편으로 교과서는 교사가 수업을 설계하거나 실행하는데 영향을 미치는 주요한 외적 요인으로, 특정 내용을 다루는 교과서의 전개 방식은 관련 내용에 대한 교사의 이해 또는 의사결정에 적지 않을 영향을 미친다(Fan, 2013; Matić & Grancin, 2016; Remillard et al., 2014). 이처럼 교과 내용에 대한 교사의 이해 및 수업 실행에 교과서가 직접적인 영향력을 갖는 현상은 국가수준 교육과정에 기초한 검·인정 교과서를 모든 학교에서 공통으로 사용하는 우리나라 현실에서는 더욱 자주 발생할 가능성이 있다. 교사들은 선행 연구의 권고에 따라 교과용 도서를 다룰 때 비판적 안목을 견지할 필요가 있으며, 교육과정 및 교과용 도서 개발자는 유리수 지수 정의에 대한 교사의 이해 특징과 관련하여 이상에서 기술한 교수학적 쟁점을 고려하여 교과서의 서술 방식을 개선하고 단원 간의 연결성을 증진하는 방안을 적극적으로 모색할 필요가 있다.

참 고 문 헌

Adler, J. & Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education, *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 270-296. DOI: 10.2307/30034851

Bernardo, G. & Carmen, B. (2010). The ambiguity of the sign $\sqrt{\ }$. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 509-518). France: CERME.

Chung, Y. J. & Lee, K. H. (2018). Using what-if-not strategy for teaching definitions: Focusing on the exterior angle of polygon. *School Mathematics, 20*(3), 379-394. DOI : 10.29275/sm.2018.09.20.3.379

Choi, G. S. (2014). Teaching geometry through Geogerba 5. *Proceedings of the KSME 2014 Spring Conference on Mathematics Education* (pp. 433-437). Seoul: KSME.

Do, J. H. & Park, Y. B. (2011). Comments on the definition of the rational exponent $a^{\frac{m}{n}}$ in contemporary Korean highschool mathematics textbooks. *The Mathematical Education, 50*(1), 61-67. DOI: 10.7468/mathedu.2011.50.1.061

Edwards, B. & Ward, M. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *American Mathematical Monthly, 111*(5), 411–424. DOI: 10.1080/00029890.2004.11920092

Even, R. & Tirosh, D. (1995). Subject matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject matter. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 1–20. DOI:10.1007/BF01273897

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM: the international journal on mathematics education, 45,* 765–777. DOI: 10.1007/s11858-013-0530-6

Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. Scholz, R. Straber, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.231–245). Dordrecht: Kluwer.

Foerster, A. P. (2003). *Precalculus with Trigonometry.* CA: Key Curriculum Press.

Guberman, R. & Gorev, D. (2015). Knowledge concerning the mathematical horizon: A close view. *Mathematics Education Research Journal, 27,* 165-182. DOI: 10.1007/s13394-014-0136-5

Kim, I. S., Byun, C. H., & Ahn, S. H. (2012). *Calculus.* Seoul: Kyungmoonsa.

Kim, W. K., Jo. M. S., Bang, G. S., Yoon, J. G., Shin, J. H., Yim, S. H. …, Jeong, J. H. (2017). *Mathematics Ⅰ.* Seoul: Visang.

Ko, S. E., Lee, J. H., Lee, S. W., Choi, S. G., Kim, Y. H., Oh, T. G., & Jo, S. C. (2017). *Mathematics Ⅰ.* Seoul: Sinsago.

Kwak, D. Y., Kim, D. S., Seo, D. Y., Lee, S. Y., & Jin, G. T. (2001). *Calculus.* Seoul: Kyungmoonsa.

Landau, S. I. (2001). *Dictionaries: The Art and Craft of Lexicography.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lang, S. (2001). *Short Calculus.* New York: Springer.

Lavy, I. & Shriki, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 29,* 11–24. DOI: 10.1016/j.jmathb.2009.12.002

Leikin, R. & Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: A case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 451–466. DOI: 10.1080/00207391003605189

Levenson, E. (2012). Teachers' knowledge of the nature of definitions: The case of the zero exponent. *Journal of Mathematical Behavior, 31,* 209-219. DOI: 10.1016/j.jmathb.2011.12.006

Lewin, J. (2003). *An Interactive Introduction to Mathematical Analysis.* New York: Cambridge University Press.

Magiera, T. M., van den Kieboom, A. L., & Moyer, C. J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers′ algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 169-176). Turkey: PME.

Matić, L. J. & Grancin, D. G. (2016). The use of the textbook as an artefact in the classroom: A case study in the light of a socio-didactical Tetrahedron. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(2), 349-374. DOI: 10.1007/s13138-016-0091-7

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum.* Seoul: Ministry of Education.

Movshovitz-Hadar, N. (2011). Bridging between mathematics and education courses: Strategy games as generators of problem solving and proving tasks. In O.

Zaslavsky & P. Sullivan (Eds.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics* (pp. 117-140). New York: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics(2015). *Principles to Actions: Ensuring Mathematics Success for All*. Reston: NCTM.

Ohkamoto, K. (2017). *Mathematics II*. Tokyo: Gikkosubang.

Remillard, J. T., Harris, B., & Agodini, R. (2014). The influence of curriculum material design on opportunities for student learning. *ZDM: the international journal on mathematics education, 46*(5), 735-749. DOI: 10.1007/s11858-014-0585-z

Robin, M. J., Fuller, E., & Harel, G. (2013). Double negative: The necessity principle, commognitive conflict, and negative number operations. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 649-659. DOI: 10.1016/j.jmathb.2013.08.001

Ryu, H. C., Sunwoo, H. S., Shin, B. M., Jo, J. M., Lee, B. M., Kim, Y. S., ⋯, Jeong. S. Y. (2017). *Mathematics I*. Seoul: Chunjae.

Sangwin, J. C. (2019). Textbook accounts of the rules of indices with rational exponents. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(8). 1191-1209. DOI: 10.1080/0020739X.2019.1597935

Seaman, C. & Szydlik, J. (2007). Mathematical sophistication among preservice elementary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(3), 167-182. DOI: 10.1007/s10857-007-9033-0

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. DOI: 10.3102/0013189X015002004

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Telecommunication Technology Association (2021). Wolfram Alpha. Retrieved Jan. 21, 2021, from http://terms.tta.or.kr/dictionary/searchList.do

Thomas, B. G., Finney, L. R., & Weir, D. M. (2003). *Calculus*. New York: Addison Wesley.

Tirosh, D. & Even, R. (1997). To define or not to define: The case of $(-8)^{\frac{1}{3}}$. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 321-330. DOI: 10.1023/A:1002916606955

Turner, F. & Rowland, T. (2011). The knowledge Quartet as an organizing framework for developing and deepening teachers′ mathematics knowledge. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 195-212). London: Springer.

Verberg, D., Purcell, J. E., & Ridgon. E. S. (2000). *Calculus*. New York: Prentice Hall.

Watson, J., Beswick, K., & Brown, N. (2006). Teachers' knowledge of their students as learners and how to intervene. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, Cultures and Learning Spaces: Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 551-558). Adelaide: MERGA.

Woo, J. H. & Cho, Y. M. (2001). A study on the definitions presented in school mathematics. *The Journal of Education Research in Mathematics, 11*(2), 363-384.

Woo, J. H. & Yim, J. H. (2008). Revisiting 0.999⋯ and $(-8)^{\frac{1}{3}}$ in school mathematics from the perspective of the algebraic permanence principle. *For the Learning of Mathematics, 28*(2), 11 - 16.

Yang, S. A. & Lee, S. J. (2019). Secondary teachers' advanced knowledge for teaching algebra. *School Mathematics, 21*(2), 419-439. DOI: 10.29275/sm.2019.06.21.2.419

<부록> 지필검사 도구(작성 영역 생략)

1. 실수 r 에 대하여 함수 $f(x)=x^r$ 의 도함수가 $f'(x)=rx^{r-1}$ 임을 증명해 주십시오.

2. 다음은 지수의 확장을 다루는 수업에서 학생들이 제기한 의견입니다. 두 학생 중 틀린 주장을 한 학생을 고르고, 이 학생의 틀린 생각을 고쳐주기 위해 제시할 설명을 구체적으로 작성해 주십시오.

학생 A : $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 은 세제곱해서 -8이 되는 수를 나타내므로 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 이다. 학생 B : 아니다. $(-8)^{\frac{1}{3}}=2$ 이다. 왜냐하면 $(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}=2$ 이기 때문이다.