Journal for History of Mathematics
Vol. 34 No. 6 (Dec. 2021), 195–204
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2021.34.6.195

On Mathematical Induction

수학적 귀납법에 관한 소고

Koh Youngmee 고영미 Ree Sangwook* 이상욱

Mathematical induction is one of the deductive methods used for proving mathematical theorems, and also used as an inductive method for investigating and discovering patterns and mathematical formula. Proper understanding of the mathematical induction provides an understanding of deductive logic and inductive logic and helps the developments of algorithm and data science including artificial intelligence. We look at the origin of mathematical induction and its usage and educational aspects.

Keywords: Mathematical induction, 수학적 귀납법.

MSC: 03B20, 03B42 ZDM: E50

1 서론

수학에서 많이 사용되는 증명법 중에 「수학적 귀납법」이 있다. 수학적 귀납법은 학교 수학에서도 소개되는 증명 방법 중 하나로, 조합수학을 위시하여 그래프이론, 정수론, 선형대수학, 해석학, 기하학, 확률론 등 수학의 거의 모든 분야에서 사용되는 논리이다. 더 나아가 컴퓨터과학과 알고리즘의 발달에 기인한 21세기 인공지능의 시대에 더욱 필요한 논리로 여겨진다. 하지만 학교수학에서의 수학적 귀납법의 교육은 피상적 수준에 머무른 듯하다. 그러나 앞으로는 수학적 귀납법을 포함한 논리에 관한 이해가 더욱 많이 요구될 것이다. 그러한 관점에서 수학적 귀납법은 조금 더 체계화된 구체적 내용으로 교육되어야 할 대상으로 여겨진다.

실제로, 캐나다 매니토바 대학의 David S. Gunderson[1)]은 수학적 귀납법의 중요성을

*Corresponding Author.
Koh Youngmee: Dept. of Data Sci., Univ. of Suwon E-mail: ymkoh@suwon.ac.kr
Ree Sangwook: Dept. of Data Sci., Univ. of Suwon E-mail: swree@suwon.ac.kr
Received on Dec. 1, 2021, revised on Dec. 21, 2021, accepted on Dec. 28, 2021.

1) David S. Gunderson은 1995년 Emory 대학에서 Vojtech Rödl의 지도 하에 박사학위(수학)를 취득한 수학자이다. 주 관심사는 조합수학이며 현재 매니토바 대학 교수로 재직하고 있다. 젊었을 때 노동을 했고, 트럭 운전을 10년이나 했던 흥미로운 경력의 소유자이다. [4] http://home.cc.umanitoba.ca/~gunderso/

간파하고《Handbook of Mathematical Induction》[4]을 저술하였다. 그의 원래 의도는 수학적 귀납법의 유용성을 다양한 사례를 통하여 교육시키기 위해 학생들에게 나누어줄 작은 책자를 만드는 것이었다. 그렇게 소책자를 만들고 또 관련 문제(사례)들을 추가해나가면서 책자가 성장해나가자, 거대 출판사 Chapman & Hall/CRC가 백과사전 형태의 저술을 제안하였고, 그 제안을 받아들여 거의 900쪽에 달하는《Handbook of Mathematical Induction》을 저술하여 2010년에 출판하게 된 것이다 [4, p. xx].

수학적 귀납법도 다른 수학 문제들처럼 나름의 역사를 가지고 있고, 그와 관련된 논의가 있었다. 본 글은 수학적 귀납법의 유래와 의미, 그리고 교육적 가치와 효용성 및 그의 올바른 사용 방법 등을 살펴보고자 한다. 그리고 조심스레 수학적 귀납법에 대한 체계적이고 구체적 내용을 담은 학교교육의 조성을 제안해본다.

2 수학적 귀납법

「수학적 귀납법」은 16세기 이후로 사용되기 시작하였고, 19세기에 Augustus de Morgan (1806–1871)에 의하여 수학적 귀납법이라 명명되며 엄격한 논리로 정착되었다 [4, p. xvii]. 수학적 귀납법은 조합수학을 위시하여 그래프이론, 정수론, 선형대수학, 해석학, 기하학, 확률론 등 수학의 거의 모든 분야에 걸쳐 사용되는 일종의 증명 방법이자 논리이다.

2.1 논리와 증명법

논리는 크게 연역법과 귀납법으로 나뉜다 [8]. 인류의 역사는「지식의 축적」의 역사로 볼 수도 있다.[2)] 지식의 축적 중에는 지식의 형성을 위한 합리적 사고 방법에 해당하는 논리가 포함되며, 논리가 적용된 분야로 단연 수학과 과학이 꼽힌다. 잘 알고 있듯이, 과학은 이론의 개발뿐만 아니라 실험에 의한 결과를 일반화함으로써 지식을 축적한다. 이러한 지식의 축적 과정에 사용되는 논리가 귀납법이다.

반면, 수학에서는 연역법만을 인정한다고 알려져 있다. 다시 말해, 수학에서의 지식의 축적은 이론의 논리적 확장과 개발에 의해 이루어지며, 그리하여 수학은 증명된 정리들이 쌓여 형성된 지식으로 설명된다. 이때 정리의 증명에 사용하는 논리가 바로 연역법이다.

그러면 수학에서는 정말 귀납법을 사용하지 않을까? 실제로 오래 전(1917년)부터「수학, 특히 수학교육에는 왜 실험이 없을까?」라는 질문이 제기되기도 하고 [1], 심지어는 수학에서 실험에 의한 연구를 받아들여야 한다는 주장도 있다 [5]. 수학이 증명된 정리들로 쌓아 올려진 지식이긴 하지만, 정리의 개발 단계에서는 경험과 직관에 많이 의존한다. Michael F. Atiyah (1929–2019)나 Paul Halmos (1916–2006), Timothy Gowers (1963년생, 1998년 필즈상

2) Charles Van Doren (1926–2019)의《지식의 역사》[15]와 Peter Watson (1943년생)의 방대한 분량의 저서《생각의 역사》[16]를 참조하면 인류의 역사가 지식 축적의 역사임을 느낄 수 있다.

수상) 등은 수학 연구에 경험과 직관을 강조한다 [11, p. 221]. 정리의 발견을 경험이나 직관에 의존한다는 말은 결국 귀납논리에 의존함이 아닐까. 그렇다면 귀납논리 역시 수학에 내재되어 있는 것이 아닐까. George Pólya (1887–1985)는 문제해결(problem solving)을 위한 추청이나 방법을 위해서는 귀납적 방법이 도움이 된다고 주장하였다 [7].3) 실제로 학생들의 수학 내용의 수용은 그 내용에 합당한 간단한 예제에 의한 경험과 그의 일반화에 의존한다.

뿐만 아니라, 연역논리와 귀납논리의 구분에 대한 논의도 있다 [12].4) 이들 두 개의 논리가 극명하게 차이가 날 때를 예로 들어 그 차이를 설명하지만, 그러한 논리의 차이가 불분명할 때도 있다. 또한 이들 두 가지 논리를 모두 적용해야 할 경우도 있다. 사실, 확률과 통계학이 그러한 경계에 자리한다. 또한 신생학문 분야로 여겨지는 데이터과학(data science)5)이 그러하다. 하지만 연역논리와 귀납논리의 경계에 속한 것으로 학생들이나 일반인에게 설명 가능한 사례들도 있는데, 하나의 예가 「수학적 귀납법」이다.

예를 들어, 많은 학생들은, 1부터 연속된 n개의 홀수의 합의 공식 $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$이 옳음을, 증명보다는 오히려 많은 경우에 성립함을 확인함으로써 확신하고 이해한다. 실제로 학생들은 (어린 학생일수록 그러하지만, 심지어 대학생들까지도) 몇 가지 사례가 성립함을 확인함으로써 공식이나 정리를 이해한다.6) 그래서 증명을 하지는 못해도 공식으로 기억한다. 다시 말하자면, 때로 어떤 수학 지식의 옳음을 인식함에는 연역적인 증명보다는 귀납적 방법이 사용될 수 있다는 것이다. 그런데 이러한 인식과 증명의 상황에서 귀납논리와 연역논리의 융합을 보여줄 수 있는 사례가 수학적 귀납법일 수 있는 것이다.

2.2 수학적 귀납법의 유래

수학적 귀납법은 수학 전반에 걸쳐 자주 사용되는 논리이다 [4].7) 수학적 귀납법은 하나의 연역논리로서 매우 유용하게 사용되는 증명법이지만, 패턴의 발견을 위한 탐구 수단이기도 하다. 특히 이산수학의 경우, 수학적 귀납법이 가히 근간을 이룬다 [3].8) 이러한 수학적 귀납법의 발생 [1, 14]과 그 이름의 명명 [2]은 나름의 역사를 가지고 있다 [4, p. 11–18].

---

3) Mathematics is regarded as a demonstrative science. . . . The result of the mathematician's creative work is demonstrative reasoning, a proof; but proof is discovered by plausible reasoning, by guessing. . . . Yet for real success he must also learn plausible reasoning; this is the kind of reasoning on which his creative work will depend. [7, p. vi]

4) L. J. Rips와 J. Asmuth는 [12]에서 연역법과 귀납법의 구분에 대한 논의를 다루었다. 그 논의의 핵심은 결국 연역논리의 기저인 공리의 귀납적 인식에 관한 문제이다.

5) 데이터과학은 신생의 융합형 학문 분야로서 1998년 튜링상을 수상한 Jim Gray (1944–2012)는 데이터과학을 과학에서의 제4의 패러다임이라고 주장하였다 [17].

6) 학생들에게 증명을 요구하는 문제를 제시하면 몇 가지 (대개 한 가지) 예를 들어 성립함을 보임으로써 증명을 대신하는 답을 하는 경우가 많다.

7) Induction is ubiquitous. In fact, in any volume of a mathematical journal (popular or specialized) it seems rare *not* to find at least one proof by induction! [4, p. 18] We've argued . . . that math induction is central to knowledge of mathematics . . . [12, p. 266]

8) Hence nearly all of discrete mathematics is based on induction, in a sense. [4, p. 11]

스위스 출생의 미국 역사학자 Florian Cajori (1859–1930)는 하이델베르그 대학의 역사학자 Moritz Cantor (1829–1920)로부터 수학적 귀납법의 유래를 설명한 Giovanni Vacca (1872–1953)의 논문 [14]을 소개 받아 1909년 미국수학회 회보[9)]에 발표한다.

이탈리아 수학자인 Vacca는 그 논문 [14]에서 이탈리아 수학자 Franciscus Maurolycus[10)] (1494–1575)가 처음으로 수학적 귀납법의 원리를 창안하였음을 설명하였다. Maurolycus가 홀수들의 합 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2a + 1) = (a + 1)^2$ 임을 설명하기 위해 사용했던 논리가 바로 수학적 귀납법의 원리였다는 것이다. 하지만 그의 설명은 처음의 몇 개의 수에 대한 예시를 통해 일반화된 공식의 옳음을 설득하는 방식이었다.

수학적 귀납법은 또 Blaise Pascal (1623–1662)이 처음으로 사용했다고 알려져 있기도 한데, Vacca는 수학적 귀납법이 처음 사용되었다는 Pascal의 1657년 저서《Traité du triangle arithmétique》를 Maurolycus의 수학적 귀납법 원리를 응용한 결과라고 평가하고, 오히려 Pascal이 그를 언급하지 않았음을 지적하였다. 그러면서 나중에 Pascal이 그의 편지[11)]에서 Maurolycus를 언급하였음을 지적하며, 수학적 귀납법의 기원을 Maurolycus로 주장하였다.

W. H. Bussey도 수학적 귀납법의 기원에 관한 논문을 발표하였는데 [1], 그에 따르면 Cantor가 처음에는 수학적 귀납법의 기원을 Pascal로 알았다가 Vacca의 논문을 접하고는 Maurolycus로부터 기원함을 인정하였음을 설명하였다. Bussey는 또한 당시의 수학적 귀납법을 일컫는 용어로「완벽한 귀납법(complete induction)」이라는 말을 사용했는데, 이는 불확실성을 내포하는 결과를 추정하는 일반적인 귀납법과 구별하기 위해서였다.

수학적 귀납법을 이르는 이름의 유래에 대해서는 Cajori의 논의를 들 수 있다 [2]. 그는 Maurolycus나 Pascal, 심지어는 Pierre de Fermat (1607–1665)까지도 수학적 귀납법을 사용했지만 그들이 사용한 방법론에 대한 이름을 거명하지는 않았다고 하였다. Cajori는 그러한 이름의 최초 사용자로서 John Wallis (1616–1703)를 들었다. Wallis가 1656년《Arithmetica Infinitorum》에서「귀납적 방법을 사용하여(per modem inductionis)」처음 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$의 여섯 개의 경우로부터 어떤 수학 공식을 추정하였다는 것이었다. 그러나 Jakob Bernoulli (1655–1705)는 이러한 Wallis의 불완전한 귀납법의 사용을 비판하였는데, 그는 그의 사후에 출판된 저명한 저술《Ars Conjectandi》(1917)에서「이항정리」를 증명하면서 n의 상태에서 $n + 1$의 상태로 전이되는「귀납 과정(inductive step)」을 보여주었다. 그래서 Cajori는 Bernoulli가 수학적 귀납법의 이름을 사용하지는 않았어도 그 의미를 염두에 두었을 것으로 추측하였다.

9) Bulletin of American Mathematical Society https://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/bull

10) 이 이름은 라틴어 표기를 따른 이름이고, 그의 이탈리아 이름은 Francesco Maurolico이다. https://en.wikipedia.org/wiki/Francesco_Maurolico

11) Vacca는 Pascal의 잘 알려진 편지「Lettre de Dettonville à Carcavi」에 'Cela est aisé par Mauroric.' 라고 썼음을 인용하였다 [14].

이후 수학적 귀납법은 수학자들에 의하여 '귀납법', '예증적 귀납법(demonstrative induction)' 등의 용어로 불리었다. 그러다가 1838년 Augustus De Morgan (1806–1871)이 논문 《Induction(Mathematics)》에서 「연속적 귀납법(successive induction)」으로 명명하였는데, 논문의 말미에 의도치 않게 「수학적 귀납법(mathematical induction)」이라는 이름을 사용하였다. 이후 유럽과 미국에서 「수학적 귀납법」이란 이름을 사용하게 되면서 정식 명칭으로 자리잡게 되었다. 결국 수학적 귀납법이라는 이름은 De Morgan에 기인한다고 볼 수 있다.

Richard Dedekind (1831–1916)는 1888년 새로운 시대를 여는 중요한 논문[12)]을 발표하였다. 그는 그 논문에서 수학적 귀납법이라는 용어를 사용하였고 [4, p. 13], 또한 Charles Sanders Peirce (1839–1914), Guiseppe Peano (1858–1932)의 연구에 이은 정수에 대한 이해로부터 수학적 귀납법을 연역적으로 증명할 수 있었다 [18, 13, p. 622–625]. 그리하여 수학적 귀납법은 하나의 연역논리로 자리를 잡게 된다.

2.3 수학적 귀납법 정리

수학적 귀납법은 학교수학의 교육 내용에도 포함되어 있는 증명법이며, 재귀 또는 점화관계에 의한 알고리즘의 정립에도 사용되는 기본 연역논리이다. 수학적 귀납법에 관한 정확한 설명과 이해는 교육적 관점에서도 중요하며, 인공지능을 포함한 알고리즘과 컴퓨터 프로그래밍의 구조를 이해하는 수단이기도 하다. 반면, 귀납법은 과학의 발전을 이끌어내는 기본 논리이며, 그의 정립이 확률과 통계학, 더 나아가 데이터과학의 이해에 중요하게 사용되는 논리이다. 그러므로 연역논리와 귀납논리의 요소를 함께 담고 있는 수학적 귀납법의 기원과 의미에 대한 이해는 교육학적 측면에서도 중요하고, 데이터과학과 인공지능이 부각되는 21세기가 요구하는 인재의 역량을 배양하기 위한 기본 소양이기도 하다.

수학적 귀납법 정리는 직관적으로 받아들일 수 있는 내용의

> 「순서원리(well-ordering principle)」 [19].[13)] 자연수 집합 $\mathbb{N}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합은 항상 최소 원소를 가진다.

를 기반으로 한다. 순서원리에 따르면 공집합이 아닌 자연수 집합의 부분집합은 순차적으로 최소원소를 뽑아내어 정렬함으로써 모든 원소들을 크기 순으로 정렬할 수 있다. 그러한 정렬이 집합 내 원소들의 순서를 결정해주기 때문에 「정렬원리」라고 부르기도 한다.

12) 집합과 함수를 이용한 자연수의 공리적인 정의를 제안한 논문, 「Was sind und was sollen die Zahlen (What are and what should numbers be)」 https://core.ac.uk/download/pdf/196669191.pdf

13) 「순서원리」는 직관적으로 받아들이기 쉬운 내용의 원리이다. 그러나 직관적인 이해가 어려운 형태의 이와 동치인 명제로 「선택 공리(axiom of choice)」와 Zorn's lemma를 들기도 한다 (https://en.wikipedia.org/wiki/Zorn's_lemma). 자연수의 정의의 관점으로 수학적 귀납법의 귀납적 성격에 대한 논의를 [12]에서 읽을 수 있다.

- 정리: 수학적 귀납법 [9, p. 76–78]. 명제 $p(n)$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)에 대하여
  (1) 명제 $p(1)$이 참이고,
  (2) 양의 정수 $k \geq 1$에 대하여 명제 $p(k)$가 참일 때 $p(k+1)$도 참이면,
  모든 명제 $p(n)$이 참이다.

증명. 양의 정수의 집합 $\mathbb{N}$의 부분집합 $F = \{\, i \mid p(i)$ 가 거짓 $\}$을 생각하자. 집합 F가 공집합이면 모든 명제 $p(n)$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)이 참이다. 그러므로 $F \neq \emptyset$이라고 가정해보자. 그러면 F는 공집합이 아닌 자연수 집합의 부분집합이 되어, 순서원리에 의해 최소원소 $k \in F$를 가진다. 이때 $p(1)$이 참이므로[조건 (1)], $1 \notin F$이어서 $k \geq 2$임을 알 수 있다. 그러면 명제 $p(k-1)$을 생각할 수 있는데, k가 F의 최소원소이므로 $k - 1 \notin F$, 즉, $p(k-1)$은 참이다. 그러면 $p(k)$는 참이 되는데 [조건 (2)], 이는 $k \in F$에 모순이 된다. 그러므로 결론은 $F = \emptyset$이어야 하고, 그래서 모든 명제 $p(n)$이 참이다. •

수학적 귀납법을 증명 논리로 사용할 때는 위의 정리를 전제로 하는 것인데, 학교수학에서는 정리를 언급하지 않고, 피상적인 사용방법만을 가르친다. 그래서인지, 학생들이 수학적 귀납법을 연역논리인 증명법으로 사용하지만, 그 핵심 개념을 제대로 이해하고 있지 않아 올바르게 사용하지 못하는 경우가 많다.

3 수학적 귀납법의 특성과 효용성

수학적 귀납법은 패턴의 탐구 수단이기도 하고 어떤 주장이 담긴 명제의 증명 수단이기도 하다 [4]. 학교수학에서는 수학적 귀납법의 두 가지 용도 중에 증명 수단으로서의 수학적 귀납법만을 강조하여 교육한다. 그러나 「문제해결」의 교육방법론을 주창하였던 Pólya는 오히려 패턴의 탐구 수단으로서의 역할을 강조한다 [7].[14)]

3.1 증명법으로서의 수학적 귀납법

수학적 귀납법은 그 이름에 「귀납법」이 들어있음에도 불구하고, 어떤 주장의 증명수단으로 사용될 경우, 「연역법」에 속한다. 수학적 귀납법 정리에서 보았듯이, 연역 논리에 의한 증명이 되었기 때문이다.

수학적 귀납법을 증명수단으로 사용할 경우, 우리는 두 개의 조건 (1)과 (2)를 명시적으로 확인해야만 한다. 두 조건 중 하나라도 확인되지 않으면 명제가 '참임' 을 보장할 수 없기 때문이다. 예를 들어, "모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$: $2n + 1$은 짝수다." 라는 명제를 생각해보자. 이 명제는 조건 (2)를 만족시킨다. 이를 알아보기 위해, 어떤 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이라고

14) ... observe that inductive reasoning is a particular case of plausible reasoning. . . . The efficient use of plausible reasoning plays an essential role in problem-solving. [7, p. vii–viii, x]

가정해보자. 즉, $2k+1$을 '짝수' 라고 가정한다. 그러면 $2(k+1)+1=(2k+1)+2$가 되어 '짝수+2' 즉 '짝수' 가 된다. 그러므로 $p(k+1)$이 참이다. 즉, 조건 (2)가 성립한다. 그럼에도 불구하고 우리는 이 명제가 거짓임을 안다. 왜 수학적 귀납법이 적용되지 않는 것일까? 조건 (1)이 만족되지 않았기 때문이다.

다른 예를 살펴보자. 장마철 어느 날 비가 오기 시작하더니 여러 날 동안 비가 매일 내렸다고 하자. 이때「매일 비가 온다.」라는 명제를 생각해볼 수 있다. 여기서 '매일' 을 $n=1,2,\ldots$로 생각하고, '비가 온다.' 를 명제 $p(n)$으로 생각하자. 그러면 과연 이 명제가 참일까? 누구나 참이 아님을 안다. 하지만 이 예에 수학적 귀납법을 적용하여도 이 명제를 참이라고 말하지 못하는데, 그 이유는 수학적 귀납법의 조건 (2)가 적용되지 않기 때문이다. 왜냐 하면 계속 내리던 비가 그치는 날이 있기 때문이다. 즉, 장마비가 k일 동안 계속 내리다가 다음 날 비가 그쳤다면, '비가 온다' 라는 명제가 $n=1,2,\ldots,k$에 대해서는 참이다가, 즉, k째 날까지 '비가 오다' 가 그 다음 날, 즉, $k+1$째 날 비가 오지 않아 조건 (2)가 만족되지 않는다는 것이다. 그래서 "매일 비가 온다." 는 참인 명제가 못 되는 것이다.

그러나 수학적 귀납법의 정리에서 보듯이, 조건 (1)과 (2)가 만족되는 명제 집합 $\{\, p(n)\,\}_{n=1}^{\infty}$에 대하여「수학적 귀납법 정리」를 적용하면「"모든" 명제 $p(n)$이 참임」이 증명된다. 예를 들어, 학교수학에 나오는 공식 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ($n=1,2,3,\ldots$)을 증명해보자. 하지만 여기서 우리는 수학적 귀납법 정리를 적용하는 대신 그 증명 과정을 따라 증명해보기로 한다.

- 공식. $n=1,2,3,\ldots$ 에 대하여, $p(n):\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이 참이다.

증명. 집합 $F=\{\, j \mid p(j)$ 가 거짓, 즉, $\sum_{i=1}^{j} i^2 \neq \frac{1}{6}j(j+1)(2j+1)\,\}$을 정의하고, $F\neq\emptyset$이라고 가정해보자. 그러면 순서원리에 의하여 최소원소 $k\in F$가 존재한다.

(1) $n=1$일 때는 $1^2=1=\frac{1}{6}\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+1)$이어서 공식 $p(1)$이 참이다.

그래서 $1\notin F$, 즉, $k\neq 1$이므로 $k\geq 2$이고 $n=k-1$일 때의 공식 $p(k-1)$이 참이다. 그러면

(2) $\sum_{i=1}^{k-1} i^2=\frac{1}{6}(k-1)((k-1)+1)(2(k-1)+1)$이 성립하는데, 양변에 k^2을 더하면

$$\sum_{i=1}^{k} i^2=\sum_{i=1}^{k-1} i^2\ +k^2=\frac{1}{6}\,(k-1)\,k\,(2(k-1)+1)\ +k^2=\frac{1}{6}\,k\,(k+1)(2k+1)$$

이 되어 $n=k$일 때도 공식 $p(k)$가 성립한다.

즉, $k\notin F$가 되어 모순이 발생하고, 결국 F가 공집합이어야 한다는 결론에 이른다. 그러므로 모든 n에 대하여 공식 $p(n)$이 참임을 알 수 있다. •

위의 공식의 증명에서 볼 수 있듯이, 어떤 문제를 수학적 귀납법을 사용하여 증명하려 할 때에 (1)과 (2)의 계산을 제외한 다른 문장들은 "수학적 귀납법 정리의 증명" 에서 사용했던 문장과 같게 서술하게 됨을 알 수 있다. 그래서 주어진 문제에 따라 계산이 달라지는 (1)과 (2)

의 계산만을 확인하고, 수학적 귀납법 정리의 증명에서와 같게 서술할 모든 문장은「수학적 귀납법에 의하여」라는 말로 대치하여 증명을 완결할 수 있다. 다시 말해, 학교수학에서 행해지는 수학적 귀납법을 사용한 증명은「수학적 귀납법의 정리」를 전제한 증명법인 것이다.

그런데 학교수학의 교육에서는 수학적 귀납법 정리의 사전 언급 없이 수학적 귀납법에 의한 증명법을 사용하게 하여 오히려 학생들이 내용을 확실하게 이해하는 데 어려움을 갖게 하고 있다. 학생들이 증명을 제대로 이해할 수 없다고 하더라도 학생들에게 수학적 귀납법 정리를 소개하고 그의 바른 사용법의 이해를 도모하는 것이 바른 교육 방법이라 생각하며, 학생들도 수학적 귀납법을 조금 더 쉽게 이해할 수 있을 것이라 생각된다.

3.2 탐구 수단으로서의 수학적 귀납법

수학적 귀납법은 증명법으로서도 매우 중요하지만, 어떤 패턴 (또는 주장)을 발견해내는 수단으로서도 매우 효율적으로 작용한다 [4]. 실제로「문제해결」의 교육론을 제창하였던 Pólya도 탐구수단 내지는 발견수단으로서의 수학적 귀납법의 중요성을 강조하였다 [7]. 그에 대한 예로, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 을 알고 있는 상태에서 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 의 공식을 발견하는 귀납적 사례를 살펴보자 [7, p. 108–109].

우선, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 의 값을 구해보면 $1, 5, 14, 30, 55, 91$ 로 주어지는데 이들로부터 어떤 패턴을 찾기는 힘들어 보인다. 하지만 n 의 값에 따른 $\sum_{k=1}^{n} k$ 와 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 의 값들을 나란히 배열하면 어떤 패턴이 보일 수도 있다.

n	1	2	3	4	5	6
$\sum_{k=1}^{n} k$	1	3	6	10	15	21
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	1	5	14	30	55	91

여기서도 어떤 패턴을 찾기가 어렵다면, 이 수들의 비 (ratio) $\frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{\sum_{k=1}^{n} k}$ 를 구해보면 어떨까?

$$\frac{1}{1} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{14}{6} \quad \frac{30}{10} \quad \frac{55}{15} \quad \frac{91}{21}$$

이제 이 수들을 각각 분모를 3 으로 만들어 써보면

$$\frac{3}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{9}{3} \quad \frac{11}{3} \quad \frac{13}{3}$$

과 같이 되는데, 이들이 $\frac{2n+1}{3}$ 의 패턴을 갖는다는 것은 쉽게 인지할 수 있다. 그래서

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{2n+1}{3}, \text{ 즉, } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n+1}{3}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

이 됨을 추측할 수 있게 된다.

이와 같이 기억에 의존하여 알고 있던 공식을 일종의 탐구과정을 통하여 교육시키면 학생들에게도 흥미를 유발할 수 있을 뿐만 아니라 교육 효과도 제고될 수 있을 것으로 판단된다.

위 사례는 패턴을 발견해내는 귀납적 사고방법의 일례를 보여주지만, 매우 흥미롭고 참신한 교육 내용을 제공할 뿐만 아니라, 학생들에게 수학적 귀납법의 효용성을 알게 하기에 좋은

사례라고 생각된다. 이제 이렇게 발견된 공식을 수학적 귀납법을 적용하여 증명을 해봄으로써 학생들은 어떤 공식을 발견하거나 결과를 유추하는 귀납적 사고방법과 그에 대한 연역적 증명법과 같은 귀납논리와 연역논리에 대한 인식의 기회를 제공할 수 있을 것이다.

증명수단이기도 하고 탐구 수단이기도 한 수학적 귀납법에 대한 이해는 특히 알고리즘과 컴퓨터 프로그래밍, 즉, 코딩 능력이 중요한 역량[15)]으로 평가받고 있는 21세기 인공지능의 시대를 살아갈 학생들의 기본 역량을 키워주기에 좋은 교육소재가 될 듯하다.

4 결론

현대 수학은 1980년대 이후 패턴의 과학이라는 평가를 받고 있다 [6, 11]. 수학적 귀납법은 누구나 쉽게 사용할 수 있는 증명 방법이기도 하지만 더욱 중요하게는 패턴의 탐구 수단이기도 하다 [4]. 이러한 수학적 귀납법은 패턴을 유도할 수 있는 귀납논리인 한편, 패턴이 나타내는 순차적 결과에 대한 증명법으로 사용되는 연역논리이기도 하다.

수학적 귀납법은 16세기부터 사용되기 시작하면서 19세기에 이르러 명확한 연역논리로 정착되었다. 이산수학을 포함하여 수학의 거의 전 분야에서 사용되는 중요한 수단이기도 하지만, 인공지능의 시대로 일컬어지는 21세기가 요구하는 알고리즘이나 컴퓨터 프로그래밍 (코딩) 및 데이터 분석 등에 사용되는 논리의 구조적 뼈대에 포함된다. 인공지능과 데이터과학을 이해하고 습득하기 위해 반드시 알아야할 기본 논리이다.

수학적 귀납법을 이용한 수학 교육이 이루어질 경우, 학생들은 연역법과 귀납법으로 구분되는 논리의 개념을 경험할 수 있고 학습 내용에 대한 흥미와 이해의 제고로 학습 효과를 높일 수 있을 것이다. 수학적 귀납법에 의한 올바른 증명법과 수학 식이나 데이터로부터의 추정을 가능케 하는 탐구 수단으로서의 수학적 귀납법에 대한 경험은 학생들이 21세기 인공지능의 시대가 요구하는 인재로 성장하는 데 밑거름이 될 것이다.

References

1. W. H. Bussey, The Origin of Mathematical Induction, *The American Mathematical Monthly* 24(5) (1917), 199–207.
2. Florian Cajori, Origin of the Name “Mathematical Induction”, *The American Mathematical Monthly* 25(5) (1918), 197–201.
3. Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, *Concerete Mathematics*, 2nd edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994.
4. David S. Gunderson, *Handbook of Mathematical Induction*, CRC Press, 2010.

15) 교육의 목적은 결국 학생들이 속한 시대를 살아갈 수 있도록 해주는 능력의 배양에 있다 [10]. 21세기 인공지능 시대에 필요한 역량으로 논리에 대한 이해와 그에 대한 교육 요소로서 기본적인 조합수학에 대한 이해가 필요하다 [6, 11].

5. Arthur Jaffe, Frank Quinn, Theoretical Mathematics: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics, *Bulletin of the American Mathematical Society* 29(1) (1993), 1–13. https://www.ams.org/journals/bull/1993-29-01/S0273-0979-1993-00413-0/S0273-0979-1993-00413-0.pdf
6. Koh Youngmee, Ree Sangwook, Counting is an Important Ingredient of Mathematics Education, *Journal for History of Mathematics* 29(5) (2016), 267–278. 고영미, 이상욱, 조합수학의 수학교육 내용요소로서의 적합성과 필요성, *Journal for History of Mathematics* 29(5) (2016), 267–278.
7. George Pólya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Vol. I. Induction and Analogy in Mathematics, Princeton University Press, 1954.
8. Carveth Read, *Logic: Deductive and Inductive*, Fourth edition, Dodo Press (A. Morning Ltd.), 1914. https://www.gutenberg.org/ebooks/18440
9. Ree Sangwook, Koh Youngmee, *Understanding Mathematics* (in Korean), Kyowoosa, 1999. 이상욱, 고영미, 수학의 이해 (현대인을 위한), 교우사, 1999.
10. Ree Sangwook, Koh Youngmee, The Aims of Education in the Era of AI, *Journal for History of Mathematics* 30(6)(2017), 341–351. 이상욱, 고영미, 21세기 인공지능시대에서의 교육의 목적, *Journal for History of Mathematics* 30(6)(2017), 341–351.
11. Ree Sangwook, Koh Youngmee, MaPhiA: Mathematics, Philosophy, and Artificial Intelligence, *Journal for History of Mathematics* 32(5)(2019), 217–231. 이상욱, 고영미, 수학, 철학, 그리고 인공지능, *Journal for History of Mathematics* 32(5)(2019), 217–231.
12. Lance J. Rips, Jennifer Asmuth, Mathematical Induction and Induction in Mathematics, *Inductive Reasoning: Experimental, Developmental, and Computational Approaches*, Aidan Feeney, Evan Heit eds., Cambridge University Press, 2007, 248–268.
13. Jacqueline Stedall, *Mathematics Emerging: A Sourcebook 1540–1900*, Oxford University Press, 2008.
14. G. Vacca, Maurolycus, the First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction, *Bulletin of the American Mathematical Society* 16(2)(1909), 70–73.
15. Charles Van Doren, *A History of Knowledge: Past, Present, and Future*, Ballantine Books, 1992. 박중서 역, 지식의 역사; 과거, 현재, 그리고 미래의 모든 지식을 찾아, 갈라파고스, 2010.
16. Peter Watson, *Ideas: A History of Thought and Invention, from Fire to Freud*, HarperCollins, 2009. 남경태 역, 생각의 역사 1, 2 : 불에서 프로이트까지, 들녘, 2009.
17. Wikipedia, Data science.
https://en.wikipedia.org/wiki/Data_science (7 December 2021).
18. Wikipedia, Mathematical induction.
https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction (3 November 2021).
19. Wikipedia, Well-ordering principle.
https://en.wikipedia.org/wiki/Well-ordering_principle (23 June 2021).