

Cole-Cole 모델에 대한 시간영역 유도분극 반응의 계산

김연정¹ · 조인기^{2*}

¹강원대학교 지구물리학과

²강원대학교 지질, 지구물리학과

Computation of the Time-domain Induced Polarization Response Based on Cole-Cole Model

Yeon-Jung Kim¹ and In-Ky Cho^{2*}

¹Department of Geophysics, Kangwon National University

²Division of Geology and Geophysics, Kangwon National University

요약

Cole-Cole 모델에 대한 주파수영역 유도분극 반응은 닫힌 형태의 간단한 수식으로 정의된다. 그러나 시간영역 유도분극 반응은 닫힌 형태로 표현되지 않아 Cole-Cole 모델이나 다른 완화모델에 대한 반응을 계산하는 것은 쉽지 않다. 이 논문에서는 Cole-Cole 모델에 대한 시간영역 유도분극 반응을 계산하는 세 가지 방법, 즉 급수 전개법, 선형 필터링법 및 푸리에 변환법을 비교 분석하였다. 수치 실험 결과 급수 전개법은 안정적인 결과를 제시하지 못할 뿐 아니라 수렴 속도가 느리다는 문제점이 있다. 선형 필터링법은 후기 시간에서 만족할 만한 정밀도를 보이지 못 하였다. 푸리에 변환법은 계산시간이 더 많이 걸린다는 단점이 있으나 다른 방법에 비하여 보다 안정적인 것으로 확인되었다.

주요어

시간영역 유도분극, Cole-Cole 모델, 급수 전개법, 필터링법, 푸리에 변환법

ABSTRACT

The frequency-domain induced polarization (IP) response based on Cole-Cole model is expressed as a simple equation in close form. However, it is difficult to compute the time-domain IP response based on Cole-Cole model or any other relaxation model because it cannot be written in closed form. In this study, using numerical experiments, we compared three numerical methods for calculating the time-domain IP response of the Cole-Cole model asymptotically: series expansion, digital linear filtering and Fourier transform. The series expansion method is inadequately accurate for certain time values and converges very slowly. A digital linear filter specially designed to calculate the time-domain IP response does not present the desired accuracy, especially at later times. The Fourier transform method can overcome the abovementioned problems and present the time-domain IP response with adequate accuracy for all time values, even though more computing time is required.

KEYWORDS

time-domain induced polarization, Cole-Cole model, series expansion, filtering, Fourier transform

서론

유도분극 탐사는 충전성 지하 매질에 전류를 주입할 때 나타나는 분극 현상에 의한 전위의 변화를 측정하는 탐사법이다

(Seigel, 1959). 유도분극 탐사는 크게 주파수영역과 시간영역으로 나누어진다. 시간영역 유도분극 탐사에서는 일정 시간 전류를 주입하다가, 전류 주입을 차단한 다음, 지연 시간에 따른 과도 전압의 감쇠 양상을 측정한다. 이러한 과도 전압의 감쇠

Received: 29 September 2021; Revised: 8 November 2021; Accepted: 17 November 2021

*Corresponding author

E-mail: choik@kangwon.ac.kr

Address: 1 Gangwondaehak-gil, Chuncheon, Gangwon-do, 200-701, Korea

©2021, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

양상을 규명하기 위하여 다양한 완화모델(relaxation model)이 제시되었으며, 이들 완화모델은 대개 주파수영역에서의 유도분극 반응을 현상학적으로 설명한다. 그러나 이들 완화모델에 대한 시간영역 유도분극 반응의 계산은 쉽지 않다. 이는 시간영역 유도분극 반응이 주파수영역 반응과는 달리 닫힌 형태(closed form)의 간단한 수식으로 표현되지 않기 때문인 것으로 판단된다. 대개 시간영역 유도분극 반응은 급수 전개와 같은 근사해로 주어지기 때문에, 이들은 필연적으로 오차를 수반할 뿐만 아니라, 경우에 따라서는 전위의 극성이 바뀌거나 후기 시간대에서 부분적으로 해석적 해와 오차가 크게 나타나는 등 안정적이지 못하다는 문제점이 있다.

Madden and Cantwell (1967)은 Cole-Cole 완화모델에 대한 시간영역 반응을, Van Voorhis *et al.* (1973)은 Drake 완화모델에 대한 초기 시간대 시간영역 반응의 근사적 계산 방법을 제시하였다. Pelton *et al.* (1978)은 급수 전개법(series expansion)을 적용하여 다양한 완화모델에 대한 시간영역 반응을 계산하였다. 그러나 급수 전개법은 수렴 속도가 느리고, 특정 시간대에서의 계산 값이 참값과 차이를 보이는 문제점이 있다. Guptasarma (1982)는 급수 전개법의 이러한 문제점을 주목하고, Cole-Cole 완화모델에 대한 시간영역 유도분극 반응 계산을 위한 선형 필터(digital linear filter)를 고안하였다. 필터링법은 시간영역 유도분극 반응을 간단하고 신속하게 계산할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 이 방법도 후기 시간대에는 정확한 값을 제시하지 못 한다는 문제점이 있다. 이상의 문제점을 극복할 수 있는 가장 효과적인 방법은 주어진 완화모델에 대한 광대역 주파수영역 유도분극 반응을 계산하여 푸리에 변환하는 방법이다. 그러나 푸리에 변환법도 근본적으로 수치 근사해에 해당하며, 계산 시간이 다른 방법에 비하여 더 많이 소요된다는 문제점이 있다.

이 연구에서는 급수 전개법, 필터링법 및 푸리에 변환법을 사용하여 Cole-Cole 완화모델에 대한 시간영역 유도분극 반응을 계산하고, 그 장, 단점을 비교, 분석하였다.

Cole-Cole 완화모델

유도분극은 주파수에 따른 전기비저항의 분산(frequency dispersion) 특성에 기인한다(Tasarov and Titov, 2013). 지하 매질의 주파수 분산 특성은 아직까지 물리화학적으로 명확하게 설명하지 못하고 있지만, 많은 실험을 통하여 유도분극 현상에 부합하는 다양한 완화모델이 제시되었다(Dias, 2000). 이 중 Cole-Cole 모델(Cole and Cole, 1941)은 가장 고전적인 모델로 유전율(dielectric constant)의 주파수 분산 특성을 기술하고 있다. 이후 Cole-Cole 모델은 전기비저항에 대한 주파수 분산 특성을 나타내는 복소 전기비저항 모델(complex resistivity model)로 확장되었으며, Cole-Cole 완화모델에 대한 주파수영역 복소 임피던스 $Z(i\omega)$ 는 다음과 같이 주어진다(Pelton *et al.*,

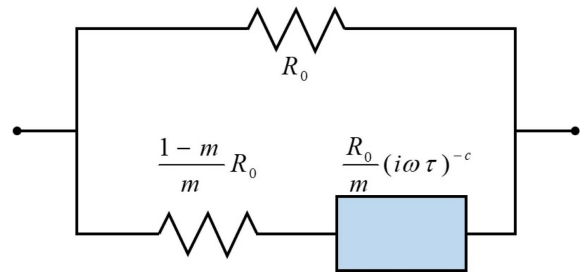


Fig. 1. Equivalent electrical circuit for Pelton's Cole-Cole model in terms of resistance and Cole-Cole parameters.

1978).

$$Z(i\omega) = R_0 \left[1 - m \left(1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^c} \right) \right]. \tag{1}$$

식 (1)에서 ω 는 각 주파수(angular frequency), R_0 는 직류 저항(dc resistance), m 은 충전성(chargeability), τ 는 완화 시간(relaxation time), c 는 주파수 승수(frequency exponent), i 는 단위 순허수이다. 한편 식 (1)을 복소 전기비저항으로 표현하면

$$\rho(i\omega) = \rho_0 \left[1 - m \left(1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^c} \right) \right] \tag{2}$$

이 되며, 여기서 ρ_0 는 직류 전기비저항(DC resistivity)이다.

Fig. 1은 식 (1)에 대한 등가 회로(equivalent circuit)로 저항 R_0 와 직렬로 연결된 저항 $R_0(1-m)/m$ 과 축전 용량(capacitance) $R_0(i\omega\tau)^{-c}/m$ 이 병렬로 연결되어 있다.

Fig. 1의 등가 회로에서 신호원이 직류일 경우에는 전류는 상부 통로만을 통하여 흐르며, 주파수가 높아지게 되면 상, 하부 통로로 전류가 흐르게 된다. 따라서 식 (1)에 주어진 것처럼 직류인 경우($\omega \rightarrow 0$), 임피던스는 상부 통로의 저항 R_0 에 수렴하며, 주파수가 무한히 커지게 되면($\omega \rightarrow \infty$) 임피던스는 $R_0(1-m)$ 에 수렴한다.

한편 시간영역에서는 직류 전류 주입이 시작되면, 축전 용량(capacitor)에 전하의 이중층(electrical double layer)이 점진적으로 형성되며, 주입 시간이 길어져 전하가 축전 용량의 한계에 도달하면 이중층에 축적된 전하가 포화되어 더 이상의 전하 축적은 이루어지지 않는다. 즉 전류 주입 초기에는 상부와 하부 통로를 통하여 전류가 흐르며, 이 경우에 전위는 병렬 회로의 특성상 작은 값을 보이게 된다. 반면 축전 용량에 전하가 포화된 경우에는 하부 통로로는 더 이상 전류가 흐르지 못하고 상부 통로만으로 전류가 흐르며, 이때 일차 전위(primary potential) V_p 는 직류 저항 R_0 에 수렴하게 된다. 따라서 높은 주파수에서의 주파수영역 임피던스는 초기 시간대의 시간영역 전위 $V_p - V_s$ 에 수렴하며, 반대로 낮은 주파수에서의 주파수영역 임피던스는 후기 시간대의 시간영역 전위 V_p 에 수렴한다. 이후 전류를 차단하게 되면 축전 용량에 이중층 형태로 축적

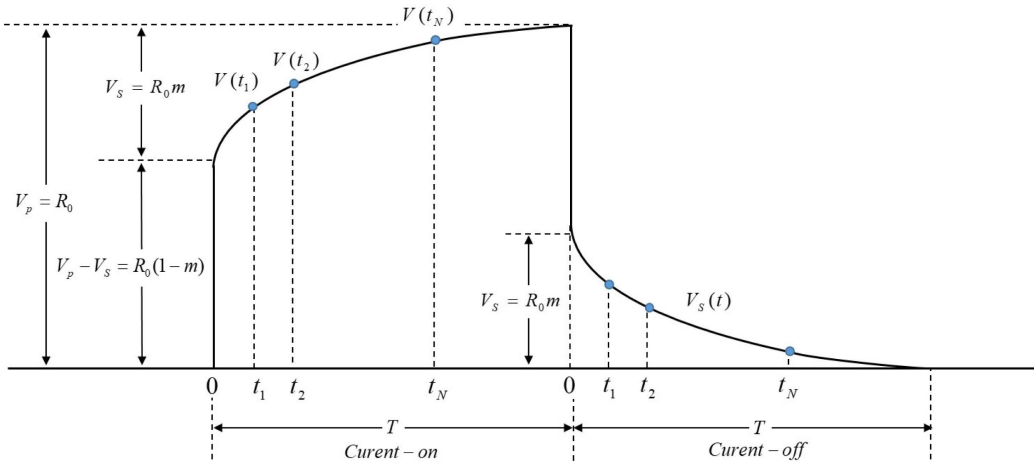


Fig. 2. Overvoltage curve at current-on and current-off time for the Cole-Cole model shown in Fig. 1, where R_0 , m , τ and c are the DC resistance, chargeability, relaxation time and frequency exponent, respectively.

된 전하가 방전되면서 과도 전위가 감소하게 된다. 전류 차단 직후의 과도 혹은 이차 전위(secondary potential) V_s 는 축전 용량에 축적된 전하의 양에 의해 결정되며, 그 크기는 $R_0 m$ 이 된다. 이후 시간이 경과함에 따라 축적된 전하가 점진적으로 방전하며, 이에 의한 과도 전위 $V_s(t)$ 도 차차 감소하여 0에 수렴한다. Fig. 2는 이러한 시간영역 유도분극 반응의 감소 양상을 도시한 것이다.

시간영역 유도분극 탐사에서는 전류 차단 후의 과도 전위의 시간적 감소를 측정한다. 과도 전위의 크기는 $R_0 m$ (복소 전기 비저항일 경우 $\rho_0 m$)으로 주어지며, 그 감소 양상은 완화 시간 τ 와 주파수 승수 c 에 의해 달라진다. 따라서 시간영역 유도분극 반응인 과도 전위는 주파수영역에서와 마찬가지로 Cole-Cole 변수인 ρ_0 , m , τ 및 c 의 함수로 주어지며, 이는 시간영역 유도분극 반응으로부터 Cole-Cole 변수를 추정할 수 있음을 의미한다. 물론 이를 위해서는 Cole-Cole 변수가 주어졌을 경우 시간영역 유도분극 반응을 계산할 수 있어야 한다. 이 논문에서는 주어진 Cole-Cole 모델에 대하여 시간영역 유도분극 반응을 계산하는 방법을 정리하고, 그 장, 단점을 비교, 분석하였다.

시간영역 유도분극 반응의 계산

식 (1)에 주어진 주파수영역 유도분극 반응으로부터 시간영역 반응을 계산하는 방법은 크게 급수 전개법, 선형 필터링법 및 푸리에 변환법으로 나누어진다. 이들 방법은 모두 수치적인 방법에 해당하며, 아직까지 유도분극 반응의 해석적 해는 특정한 경우를 제외하고는 발표된 바 없다.

급수 전개법에서 과도 전위는 다음과 같이 주어진다(Pelton *et al.*, 1978).

$$V_s(t) = \begin{cases} R_0 m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau)^{nc}}{\Gamma(1+nc)} & (0 < \frac{t}{\tau} \leq 2\pi) \\ R_0 m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (t/\tau)^{-nc}}{\Gamma(1-nc)} & (\frac{t}{\tau} > 2\pi) \end{cases} \quad (3)$$

식 (3)에서 Γ 는 Gamma function이다. 식 (3)에 주어진 바와 같이 급수 전개법에서는 $t/\tau = 2\pi$ 를 경계로 서로 다른 형태의 급수로 표현된다. 따라서 급수 전개법은 이 경계점에서 연속성이 보장되지 않는다는 문제점이 있다. 또한 식 (3)의 급수는 수렴 속도가 느려, 적어도 $n \geq 20$ 을 만족해야 원하는 정밀도의 값을 얻을 수 있다.

Guptasarma (1982)는 급수 전개법의 이러한 문제점을 해결하기 위하여 Cole-Cole 모델에 대한 시간영역 유도분극 반응을 계산하기 위한 다음의 선형 필터를 고안하였다.

$$V_s(t) = \sum_{r=1}^{21} f_r \operatorname{Re}[Z(\omega_r)], \text{ where } \omega_r = 10^{(a_r - \log_{10} t)}. \quad (4)$$

식 (4)에서 a_r 과 f_r 은 고안된 필터 계수(filter coefficient)를 나타낸다. 이 방법은 신속하게 주파수영역 임피던스로부터 시간영역 유도분극 반응을 계산할 수 있으며, 급수 전개법의 문제점을 효과적으로 극복할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 수치 실험 결과 매우 큰 지연 시간에서 발산 위험성이 있는 것으로 나타났다.

마지막 방법은 푸리에 변환법이다. 시간영역 유도분극 반응은 음의 단위 계단 반응(negative unit step response)이므로 다음과 같은 푸리에 코사인 변환을 통하여 계산된다.

$$V_s(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} Z(i\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega. \quad (5)$$

이 연구에서는 RLAGF0 프로그램(Anderson, 1975)을 사용하여 식 (5)에 주어진 푸리에 역변환을 수행하였다.

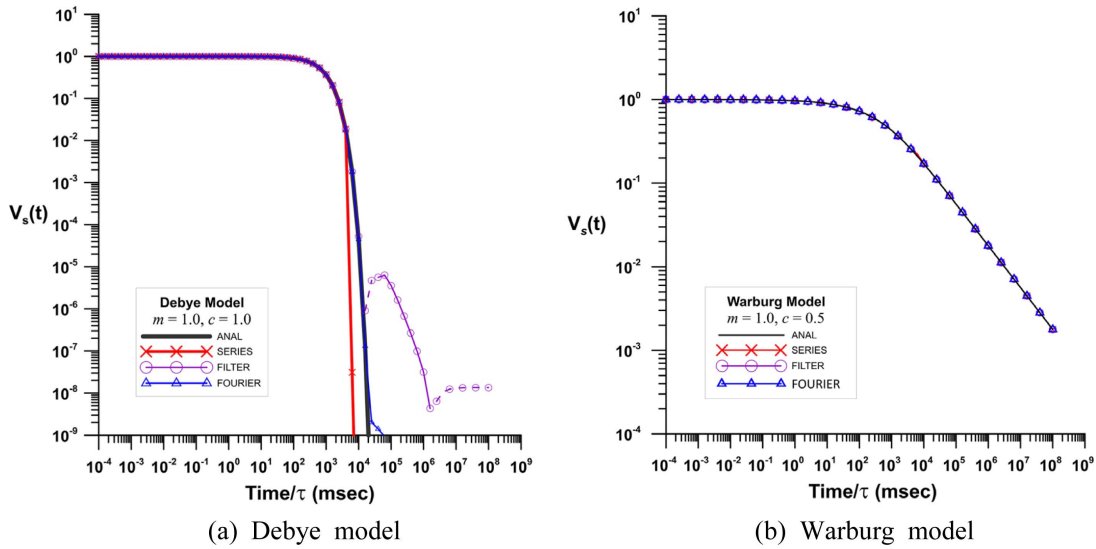


Fig. 3. Time-domain response for the Debye and Warburg relaxation models. Dashed lines in the Debye model indicate the negative values.

한편 Cole-Cole 모델에 대한 시간영역 유도분극 반응은 주파수 승수 $c = 1$ 인 Debye 모델과, $c = 0.5$ 인 Warburg 모델에 대한 해석해가 존재한다(Wait, 1984). Debye 모델의 경우

$$V_s(t) = R_0 m e^{-t/\tau} \quad (6)$$

로 간단하게 표현된다. Warburg 모델의 경우에는

$$V_s(t) = R_0 m e^{t/\tau} \operatorname{erfc}[(t/\tau)^{1/2}] \quad (7)$$

로 주어지며, 여기서 erfc 는 complementary error function이다. 이 논문에서는 해석해가 존재하는 Debye 및 Warburg 모델에 대한 시간영역 유도분극 반응과, 앞서 설명한 수치적 방법에 의한 시간영역 유도분극 반응을 비교하여 수치해의 정확성을 분석하였다.

비교 및 분석

시간영역 유도분극 반응 계산에 사용 가능한 급수 전개법, 필터링법 및 푸리에 변환법의 정확성 및 안정성을 분석하기 위하여 각 방법에 대한 비교 분석을 수행하였다. 식 (6)과 (7)에 나타난 바와 같이 과도 전위 $V_s(t)$ 는 t/τ 의 함수로 주어지며, c 가 임의의 값을 가질 때도 식 (3)으로부터 $V_s(t)$ 는 t/τ 의 함수로 주어짐을 알 수 있다. 또한 m 과 R_0 는 $V_s(0)$ 의 크기만 결정할 뿐, 그 변화 양상은 τ 와 c 에 의해 결정된다. 일반적으로 지하 구성 물질의 τ 는 $10^{-3} \sim 10^3$ 범위내의 값을 가지며 (Kemna, 2000), 시간영역 유도분극 탐사에서 측정 시간 t 는 $10^{-4} \sim 10^2$ s를 벗어나지 않는다. 한편 수치실험 결과 $t/\tau < 10^{-4}$ 일 경우에는 반응값이 일정한 값에 수렴하는 양상을 보여, 이 연구에서는 t/τ 가 $10^{-4} \sim 10^5$ 의 범위내의 값에 대한 시간영역 유도분극 반응만을 분석하였다.

Fig. 3은 $R_0 = 1$, $m = 1$ 로 설정된 Debye 및 Warburg 모델

에 대한 해석해와 수치해를 나타낸 것이다. Fig. 3a에 나타난 Debye 모델에서 $t/\tau < 10^4$ 일 경우에는 세 방법 모두 해석해에 근접한 결과를 보이는 반면, t/τ 가 더 증가하게 되면 급수 전개법은 해석해에 비하여 급격하게 감소하는 양상을 보이며, 필터링법은 오히려 너무 천천히 감소하거나 음의 값으로 발산하는 문제를 보이고 있다. 푸리에 변환법은 앞의 두 방법에 비하여 해석해에 근접하지만 이 또한 참값보다 약간 큰 값을 보인다. 물론 $t/\tau > 10^4$ 일 경우에는 반응값이 매우 작아 근사해인 수치적 결과는 참값과는 차이를 보일 수밖에 없다. 그럼에도 불구하고 굳이 이들 방법의 정확도를 따지면 푸리에 변환법이 가장 안정적이고 해석해에 근접한 값을 보임을 확인할 수 있다. Fig. 3b는 Warburg 모델에 대한 해석해와 근사해를 나타낸 것이다. 이 경우는 감쇠 속도가 Debye 모델에 비하여 현저하게 느리지는 특성을 보이며, 전 구간에서 수치해와 해석해가 잘 일치하고 있다.

Fig. 4는 $R_0 = 1$, $m = 0.2$ 로 고정하고 c 가 0.125, 0.25, 0.5 및 0.75로 증가할 경우에 $V_s(t/\tau)$ 의 변화 양상을 나타낸 것이다. 가장 주목할 점은 급수 전개법의 경우 $t/\tau = 2\pi$ 근처에서 불안정한 값을 보인다는 점이다. 이러한 현상은 c 가 작은 경우에 두드러지며, $c > 0.5$ 일 경우에는 나타나지 않는다. 반면 필터링법과 푸리에 변환법은 모두 부드럽게 변화하는 안정적인 감쇠 양상을 보인다. 그러나 $c = 0.125$ 일 경우, 작은 t/τ 값에서 급수 전개법과 필터링법 결과에 비하여 푸리에 변환법의 결과가 다소 작게 나타난다. 이 경우에는 해석해가 없기 때문에 어떤 값이 정확한지 평가할 수 없지만, 두 개의 근사법이 거의 일치하는 점을 고려하면 푸리에 변환법 결과의 정확도가 떨어지는 것으로 해석된다.

이상의 결과를 종합하면 급수 전개법은 $t/\tau = 2\pi$ 근처에서 불안정하다는 문제가 있으며, t/τ 가 매우 클 경우에도 오차가 큰 것으로 판단된다. 필터링법도 급수 전개법과 마찬가지로 $t/$

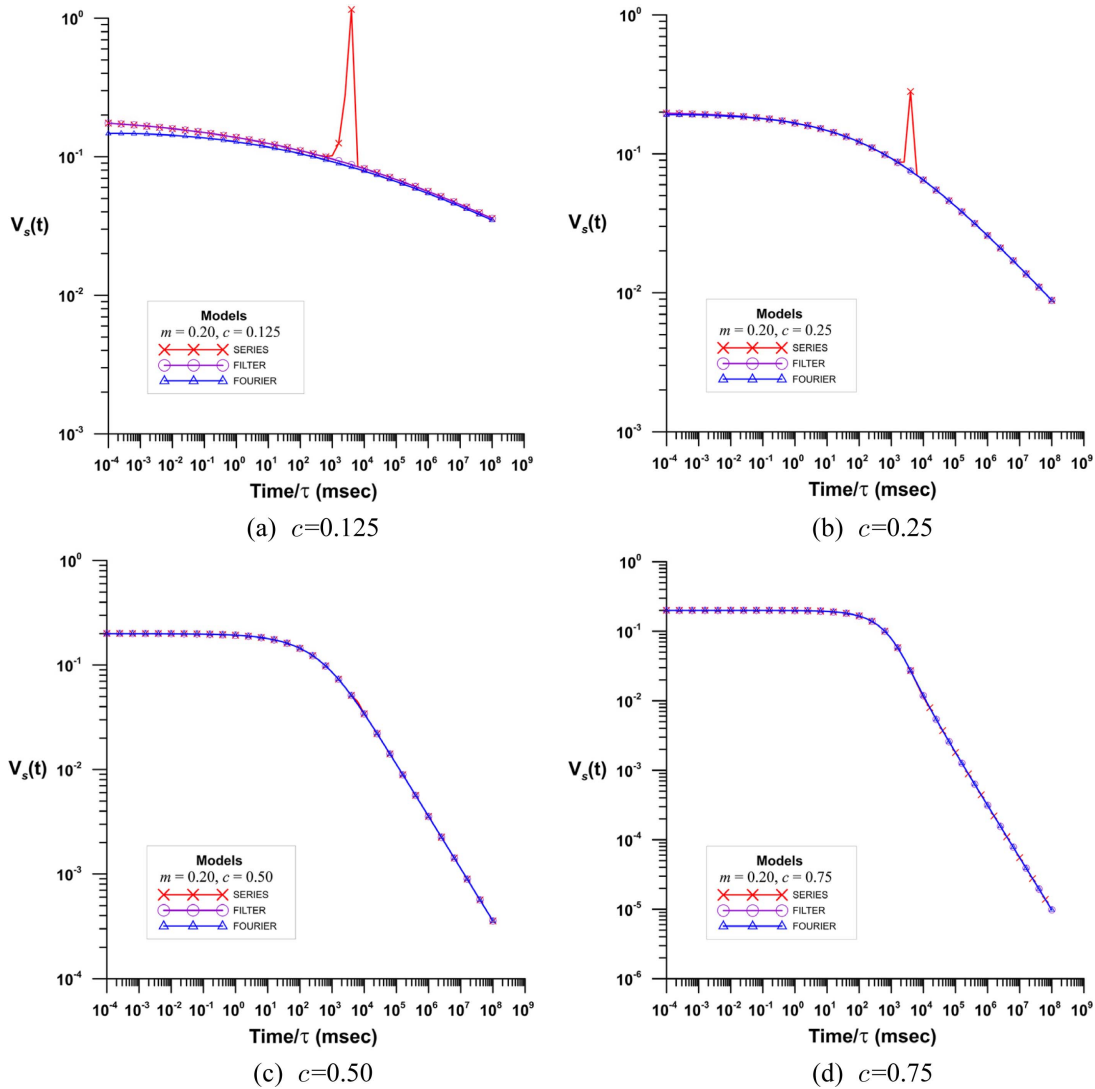


Fig. 4. Time-domain response for the Cole-Cole model when the frequency exponent values are (a) 0.125, (b) 0.25, (c) 0.50 and (d) 0.75.

τ 가 매우 클 경우 오차가 크며, 음의 값으로 발산하는 문제점을 가지고 있다. 마지막으로 푸리에 변환법은 c 가 작은 값을 가질 때 정확도가 다른 근사법에 비해 낮은 것으로 해석된다. 계산시간 측면에서 선형 필터링법이 가장 빠르며, 급수 전개법과 푸리에 변환법은 선형 필터링법의 대략 2배 및 3배의 계산 시간이 걸리는 것으로 확인되었다. 한편 급수 전개법이나 필터링법은 Cole-Cole 완화모델에 대해서만 적용이 가능한데 비하여, 푸리에 변환법은 다양한 완화모델에 대해 모두 적용할 수 있어 확장성이 뛰어나다고 볼 수 있다.

결론 및 토의

시간영역 유도분극 반응 계산에 사용 가능한 급수 전개법, 필터링법 및 푸리에 변환법의 정확성 및 안정성을 분석하기 위하여 각 방법에 대한 비교 분석을 수행하였다. 우선 해석해

가 존재하는 Debye와 Warburg 모델에 대한 반응에 대해서는 해석해와 수치 근사해를 비교하였다. 대부분의 경우 해석해와 근사해가 잘 일치하였으나, t/τ 가 매우 큰 경우 급수 전개법과 필터링법은 불안정한 결과를 나타내었다. 반면 푸리에 변환법은 이들에 비하여 보다 안정적임을 확인하였다. 또한 다양한 c 값을 갖는 Cole-Cole 모델에 대한 근사해를 비교한 결과, 급수 전개법은 항상 $t/\tau = 2\pi$ 근처에서 불안정한 특성을 보이며, $c > 0.25$ 인 경우 모든 방법이 거의 같은 반응값을 나타내었다. 반면 푸리에 변환법은 모든 경우에 안정적인 특성을 보이지만, $c = 0.125$ 로 작아지면 다른 방법에 비하여 정확도가 떨어지는 것으로 해석된다.

이상의 결과를 종합하면 모든 수치 근사법은 장, 단점을 가지며, t/τ 가 매우 크거나 작을 경우 방법에 따라 오차가 커지는 문제점이 있는 것으로 확인되었다. 특히 급수 전개법의 경우에는 $t/\tau = 2\pi$ 근처에서 불안정하므로 실제 반응의 계산에

는 주의가 필요한 것으로 확인되었다. 필터링법도 t/τ 가 매우 커지면 정확도가 떨어지고, 불안정한 결과를 보인다. 한편 푸리에 변환법은 c 가 작은 경우에 반응의 크기가 다소 작게 나타나므로, 이 또한 주의가 필요하다. 결과적으로 모든 근사해는 장, 단점이 있으나, 이 연구에서 제시한 세 가지 방법 중에서는 푸리에 변환법이 상대적으로 가장 안정적이며, 대부분의 t/τ 에서 정확한 시간영역 유도분극 반응을 제시하는 것으로 판단된다. 특히 푸리에 변환법은 다양한 완화모델에 대한 시간영역 유도분극 반응을 계산할 수 있어 그 확장성이 뛰어나다는 장점도 무시할 수 없다.

본 연구에서 제시한 Cole-Cole 완화모델에 대한 시간영역 유도분극 반응의 계산과 비교 분석 결과는 향후 시간영역 유도분극 모델링 및 역산 해석에 유용하게 사용될 것으로 기대된다.

References

- Anderson, W. L., 1975, *Improved digital filters for evaluating Fourier and Hankel transform integrals*, USGS-GD-75-012, <https://doi.org/10.3133/70045426>
- Cole, K. S., and Cole, R. H., 1941, Dispersion and absorption in dielectrics: 1. Alternating current fields, *J. Chem. Phys.*, **9**, 341-351, <https://doi.org/10.1063/1.1750906>
- Dias, C., 2000, Developments in a model to describe low-frequency electrical polarization of rocks, *Geophysics*, **65**(2), 437-451, [doi:10.1190/1.1444738](https://doi.org/10.1190/1.1444738)
- Guptasarma, G., 1982, Computation of the time-domain response of a polarizable ground, *Geophysics*, **47**(11), 1574-1576, [doi:10.1190/1.1441307](https://doi.org/10.1190/1.1441307)
- Kemna, A., 2000, *Tomographic Inversion of Complex Resistivity – Theory and Application*, Der Andere Verlag, Osnabruck, Germany, <https://www.geo.uni-bonn.de/mitarbeiter/Andreas-Kemna/dissertation>
- Madden, T. R., and Cantwell, T., 1967, *Induced polarization, a review*, in *Mining geophysics*, v. 2. Theory, Tulsa, SEG. p. 347-400, <https://doi.org/10.1190/1.9781560802716.ch2d>
- Pelton, W. H., Ward, S. H., Hallof, P. G., Sill, W. R., and Nelson, P. H., 1978, Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency IP, *Geophysics*, **43**, 588-609, <https://doi.org/10.1190/1.1440839>
- Seigel, H. O., 1959, Mathematical formulation and type curves for induced polarization, *Geophysics*, **24**, 547-565, <https://doi.org/10.1190/1.1438625>
- Tarasov, A., and Titov, K., 2013, On the use of the Cole-Cole equations in spectral induced polarization, *Geophys. J. Int.*, **195**, 352-356, <https://doi.org/10.1093/gji/ggt251>
- Van Voorhis, G. D., Nelson, P. H., and Drake, T. L., 1973, Complex resistivity spectra of porphyry copper mineralization, *Geophysics*, **38**, 49-60, <https://doi.org/10.1190/1.1440333>
- Wait, J. R., 1984, Relaxation phenomena and induced polarization, *Geoexplor.*, **22**, 107-127, [https://doi.org/10.1016/0016-7142\(84\)90032-2](https://doi.org/10.1016/0016-7142(84)90032-2)