韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.4.543
2021. 11. 제 60권, 제 4호, 543-554.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2021, Vol. 60, No. 4, 543-554.

동적 기하 환경의 문제 해결 과정에서 연속 스펙트럼 활용에 대한 소고

허남구(순천대학교, 조교수)

A study on the use of continuous spectrum in problem solving in a dynamic geometry environment

Heo, Nam Gu(Sunchon National University, ngheo@scnu.ac.kr)

초록

동적 기하 환경은 학생들의 기하 문제 해결에 긍정적인 역할을 한다. 학생들은 드래깅을 통해 변화 속에서 불변성을 추측할 수 있으며, 분석법은 기하 문제를 해결하는 데 도움을 준다. 하지만 드래깅 활동과 분석법을 활용한 문제 해결은 제한점이 있으며, 연속 스펙트럼은 대안이 될 수 있다. 학생들은 코딩이 결합된 동적 기하 환경에서 프로그래밍을 통해 연속 스펙트럼을 구현할 수 있다. 이에 본 연구에서는 동적 기하 환경의 문제 해결에서 연속 스펙트럼을 활용하는 방안을 제시하였다. 학생들은 문제 해결의 이해 단계에서 시각적으로 표현된 문제 상황을 통해 즉각적으로 이해하고, 계획 단계에서 해결 전략을 수립하고, 반성 단계에서 결과의 점검 및 일반화하는 데 도움을 줄 수 있다.

Abstract

The dynamic geometric environment plays a positive role in solving students′ geometric problems. Students can infer invariance in change through dragging, and help solve geometric problems through the analysis method.

In this study, the continuous spectrum of the dynamic geometric environment can be used to solve problems of students. The continuous spectrum can be used in the 'Understand the problem' of Polya(1957)'s problem solving stage. Visually representation using continuous spectrum allows students to immediately understand the problem.

The continuous spectrum can be used in the 'Devise a plan' stage. Students can define a function and explore changes visually in function values in a continuous range through continuous spectrum. Students can guess the solution of the optimization problem based on the results of their visual exploration, guess common properties through exploration activities on solutions optimized in dynamic geometries, and establish problem solving strategies based on this hypothesis.

The continuous spectrum can be used in the 'Review/Extend' stage. Students can check whether their solution is equal to the solution in question through a continuous spectrum. Through this, students can look back on their thinking process. In addition, the continuous spectrum can help students guess and justify the generalized nature of a given problem.

Continuous spectrum are likely to help students problem solving, so it is necessary to apply and analysis of educational effects using continuous spectrum in students' geometric learning.

* 주요어 : 동적 기하 환경, 연속 스펙트럼, 문제해결, 탐구활동
* **Key words** : dynamic geometry environment, continuous spectrum, problem solving, exploration activities
* 본 논문은 순천대학교 교연비 사업에 의하여 연구되었음.
* This work was supported by a Research promotion program of SCNU.
* **Address**: Department of Mathematics Education, Sunchon National University, Suncheon City, Korea
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97U70
* **Received**: October 28, 2021 **Revised**: November 7, 2021 **Accepted**: November 15, 2021

Ⅰ. 서론

체험과 탐구활동은 학생들의 수학 학습에서 중요한 역할을 한다. 이러한 관점에서 전통적인 강의식 수업보다는 놀이, 경험, 구체물 또는 반구체물을 활용한 조작 활동, 상호작용 등을 통한 활동 중심 수학 교육이 강조되고 있다(Suh, 2020). 특히 공학적 도구를 활용한 수학 수업은 학생들이 공학 도구를 직접 조작하는 활동을 통해 수학적 개념에 대한 이해를 신장시킬 수 있으며, 학생들의 흥미를 유발하여 수학 학습에 긍정적인 태도를 지닐 수 있도록 도와준다(Heo & Lew, 2015; Woo, 2009).

동적 기하 소프트웨어는 2015개정 수학과 교육과정에서 강조하는 6가지 교과 역량인 문제 해결, 추론, 창의・융합, 의사소통, 정보처리, 태도 및 실천을 신장시키는 데 도움을 준다. 동적 기하 소프트웨어를 활용한 수학 교육은 학생들의 문제 해결력 신장에 도움을 주며(Hong & Park, 2007; Kim, Jeon, Chung, Kim, & Lee, 2014; Lew & Je, 2009), 귀납 추론 및 가추 등을 통해 수학적 지식을 탐구하고 정당화하는 데 도움을 준다(Baccaglini-Frank & Mariotti, 2011; Leung, 2008; Leung, Baccaglini-Frank & Mariotti, 2013; Lew & Je, 2009). 또한 학생들이 창의・융합 역량을 신장시키는 데 도움을 줄 수 있다. 학생들은 동적 기하 소프트웨어를 활용하여 사회 현상과 자연 현상을 기하학적으로 모델링하여 탐구할 수 있도록 도와주며(Choi & Paik, 2020; Heo, 2018; Jo & Kim, 2018, 2020), 동적 기하 소프트웨어를 활용하여 다양한 문제 해결 방법을 찾는 등 창의력 신장에 도움이 될 수 있다(Boo, 2021; Park & Lee, 2012). 또한 학생들이 동적 기하 소프트웨어를 활용한 수업 수업을 통해 의사소통 역량이 신장될 수 있으며(Heo, 2018; Lim, 2010), 수학 과제를 동적 기하 환경에서 탐구할 수 있다는 점에서 정보처리 역량의 신장에 도움이 될 수 있다(Choi, 2018). 더 나아가 동적 기하 소프트웨어를 활용한 수학 교육을 통해 수학에 대한 흥미, 자신감 등 정의적 영역이 신장될 수 있다(Kong & Kang, 2014; Ryu, 2003).

국내외의 수학과 교육과정에서는 공학적 도구의 긍정적인 측면을 강조하며 수학 교육에서 공학적 도구의 활용을 강조하고 있다. 2015개정 수학과 교육과정에 따르면, 단순한 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 교수·학습 상황에서의 공학적 도구 활용을 권장하고 있으며 (Ministry of Education [MOE], 2015a), 제2차 수학교육 종합계획은 수학 교육에서의 공학적 도구 활용 지원을 강조하고 있으며(MOE, 2015c), 제3차 수학교육종합계획에서도 알지오매스 및 통그라미를 활용한 수학 탐구활동을 강조하고 있다(MOE, 2020). 국외에서도 수학 교육에서의 공학적 도구의 활용이 필요함을 강조하고 있으며 (Ministry of Internal Affairs and Communications, 2016; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000), 이스라엘, 일본, 폴란드 등은 공학적 도구가 포함된 디지털교과서를 통한 수학 교육을 연구하고 있다 (Heo & Lew, 2015). 이처럼 수학 교육에서 공학적 도구의 활용에 대한 필요성이 증가하고 있으며, 공학 도구를 활용한 수학 교육 방법에 관한 연구도 지속적으로 수행되고 있다.

동적 기하 소프트웨어는 우리나라 학교 수학의 교수 학습에서 많이 사용되고 있는 공학적 도구이다(Son, 2011). 학생들의 동적 기하 환경에서 문제 해결에 관한 연구들은 드래깅(dragging) 활동과 분석법을 활용한 작도 문제의 해결이 주를 이루고 있다. 동적 기하 환경에서의 드래깅 활동과 분석법은 학생들의 문제 해결에 도움을 줄 수 있으나 한계가 있으며, 연속 스펙트럼은 그 대안으로 활용될 수 있다.

스펙트럼은 어떤 복합적인 신호를 가진 것을 특정한 신호에 따라 분해하여 표시하는 기술을 의미한다. 이러한 스펙트럼에는 실수의 구간에서 연속적인 양의 표현 방법인 연속 스펙트럼과 이산적인 양의 표현 방법인 불연속 스펙트럼으로 분류할 수 있다.

이에 본 연구에서는 동적 기하 환경의 문제 해결 과정에서 연속 스펙트럼의 활용 가능성에 대해 논하고자 한다. 이를 위해 2장에서는 동적 기하 환경에서의 문제 해결에 관해 서술하였다. 동적 기하 환경의 문제 해결에 관한 연구에서 대표적으로 볼 수 있는 드래깅 활동 및 분석법을 활용한 문제 해결에 관해 서술하였다. 3장에서는 실생활, 타 교과 및 수학에서 스펙트럼의 활용 사례를 살펴보았으며, 4장에서는 동적 기하 환경의 문제 해결 과정에서 스펙트럼의 활용 방법을 제시하였다. 특히 Polya의 문제 해결 4단계 중 ‘이해 단계’, ‘계획 단계’와 ‘반성 단

계'에서 스펙트럼의 활용 방법을 살펴보았다.

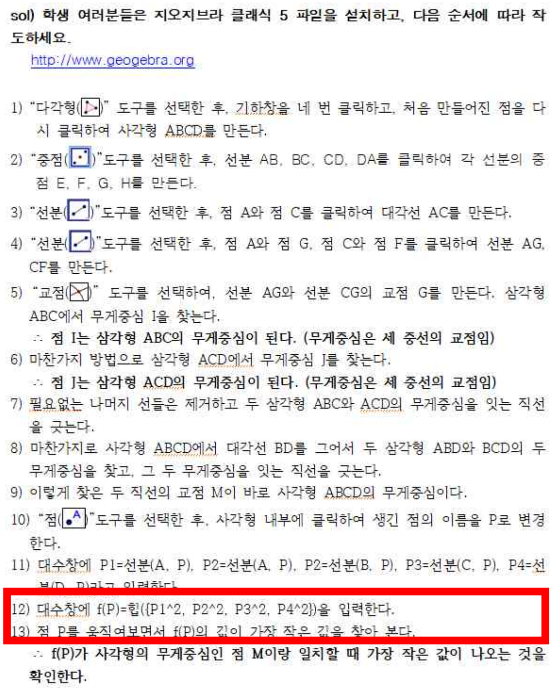
Ⅱ. 동적 기하 환경과 문제 해결

1. 드래깅을 활용한 문제 해결

동적 기하 환경에서 기하학적 문제를 탐구하는 과정에서 드래깅은 중요한 역할을 한다. 학생들은 드래깅을 통해 특정한 기하학적 요소(점, 선 등)의 위치가 변화하는 상황 속에서 변하지 않는 불변성을 시각적으로 탐구할 수 있으며(Leung, 2008), 종속성을 지닌 다른 기하학적 요소나 측정한 값, 또는 측정한 값의 연산 결과 등의 변화 양상을 시각적으로 살펴볼 수 있다(Kim et al., 2014).

특정한 기하학적 요소의 변화에서 불변성을 탐구할 수 있는 드래깅은 학생들이 불변의 성질을 만족시키는 도형을 찾는 데 도움을 줄 수 있다. 예를 들어 한 직선 l과 직선 위에 있지 않은 한 점 P가 주어졌을 때 $d(l,X)=d(P,X)$를 만족시키는 점 X의 자취를 구하는 문제에서, 학생들은 동적 기하 환경에서 점 X를 드래깅하는 과정에서 $d(l,X)=d(P,X)$를 만족시키는 점 X의 자취를 추측할 수 있다. 학생들은 이러한 문제를 해결하는 과정에서 다양한 드래깅의 양상을 보인다. Arzarello, Olivero, Paola & Robutti(2002)는 학생들이 Cabri 환경에서 개방형 문제를 해결하는 과정을 바탕으로 드래깅을 임의적 드래깅(Wandering dragging), 결합한 드래깅(Bound dragging), 안내된 드래깅(Guided dragging), 숨겨진 자취 드래깅(Dummy locus dragging), 선 드래깅(Line dragging), 연결된 드래깅(Linked dragging), 드래깅 검증(Dragging test)으로 분류하였다. Yang, Shin(2014)은 Arzarello et al.(2002)의 드래깅 양상 중 학생들의 문제 해결에서 뚜렷하게 나타나며 다른 연구에서 중요성이 강조된 임의적 드래깅, 안내된 드래깅, 숨겨진 자취 드래깅, 드래깅 검증의 4가지 양상으로 정리하였다. Yang, Shin(2014)의 연구에 따르면, 학생들은 가추를 사용하여 수학적 가설을 생성하고, 다양한 사례를 관찰하고 이를 통해 가설을 일반화하는 과정에서 귀납 추론을 사용한다고 하였다. 이 과정에서 임의의 드래깅과 안내된 드래깅은 가추를 통해 가설을 생성하는 데 도움을 주었으며, 드래깅 검증은 귀납 추론을 통해 가설을 확신하고 일반화하는 데 사용되었다. 이처럼 학생들은 임의의 드래깅과 안내된 드래깅, 숨겨진 자취 드래깅을 통해 탐구하고 그 과정에서 가추와 귀납 추론을 통해 수학적 가설을 발견할 수 있도록 도와준다(Arzarello et al., 2002; Hollebrands, Laborde, & Straesser, 2005; Hölzl, 1996; Leung, Chan, & Lopez-Real, 2006). 이처럼 드래깅은 학생들이 기하 문제를 해결하는 데 도움을 줄 수 있다.

특정한 기하학적 요소의 변화에서 종속성을 지닌 다른 기하학적 요소나 측정한 값, 또는 측정한 값의 연산 결과 등의 변화 양상을 탐구할 수 있는 드래깅은 학생들이 최적화와 관련된 문제의 해를 구하는 데 도움을 줄 수 있다. 예를 들어 Heo(2021)의 연구에서 한 명의 교사는 볼록사각형 $ABCD$에 대하여 $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$이 최소가 되는 점 P를 구하는 문제를 제시하였으며, 학생들에게 제공되는 활동지에는 $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$의 값을 구한 후 점 P를 움직여보면서 $f(P)$의 값이 최소가 되는 위치를 찾아보도록 하였다([Fig. 1] 참조).


sol) 학생 여러분들은 지오지브라 클래식 5 파일을 설치하고, 다음 순서에 따라 작도하세요.
http://www.geogebra.org

1) "다각형( )" 도구를 선택한 후, 기하창을 네 번 클릭하고, 처음 만들어진 점을 다시 클릭하여 사각형 ABCD를 만든다.
2) "중점( )"도구를 선택한 후, 선분 AB, BC, CD, DA를 클릭하여 각 선분의 중점 E, F, G, H를 만든다.
3) "선분( )"도구를 선택한 후, 점 A와 점 C를 클릭하여 대각선 AC를 만든다.
4) "선분( )"도구를 선택한 후, 점 A와 점 G, 점 C와 점 F를 클릭하여 선분 AG, CF를 만든다.
5) "교점( )" 도구를 선택하여, 선분 AG와 선분 CG의 교점 G를 만든다. 삼각형 ABC에서 무게중심 I을 찾는다.
∴ **점 I는 삼각형 ABC의 무게중심이 된다. (무게중심은 세 중선의 교점임)**
6) 마찬가지 방법으로 삼각형 ACD에서 무게중심 J를 찾는다.
∴ **점 J는 삼각형 ACD의 무게중심이 된다. (무게중심은 세 중선의 교점임)**
7) 필요없는 나머지 선들은 제거하고 두 삼각형 ABC와 ACD의 무게중심을 잇는 직선을 긋는다.
8) 마찬가지로 사각형 ABCD에서 대각선 BD를 그어서 두 삼각형 ABD와 BCD의 두 무게중심을 찾고, 그 두 무게중심을 잇는 직선을 긋는다.
9) 이렇게 찾은 두 직선의 교점 M이 바로 사각형 ABCD의 무게중심이다.
10) "점( )"도구를 선택한 후, 사각형 내부에 클릭하여 생긴 점의 이름을 P로 변경한다.
11) 대수창에 P1=선분(A, P), P2=선분(A, P), P2=선분(B, P), P3=선분(C, P), P4=선분(D, P)라고 입력한다.
12) 대수창에 f(P)=합({P1^2, P2^2, P3^2, P4^2})을 입력한다.
13) 점 P를 움직여보면서 f(P)의 값이 가장 작은 값을 찾아 본다.
∴ **f(P)가 사각형의 무게중심인 점 M이랑 일치할 때 가장 작은 값이 나오는 것을 확인한다.**

[Fig. 1] Activity sheet (Heo, 2021, p. 363)

학생들은 드래깅을 통하여 최적화 문제의 해를 추측할 수 있어, 드래깅은 학생들의 기하 문제 해결에 도움을 줄

수 있다. 하지만 학생들은 드래깅을 통해 변화하는 점의 위치에서의 함숫값을 관찰함으로써 최적의 위치를 추측할 수 있을 뿐, 최적의 해의 개수가 몇 개인지(더 나아가 유한개인지 무수히 많은지)를 알기 힘들며, 최적의 값을 갖는 위치가 갖는 고유한 수학적 성질 등을 탐구하는 과정으로 나아가기 어려울 수 있다는 한계가 있다.

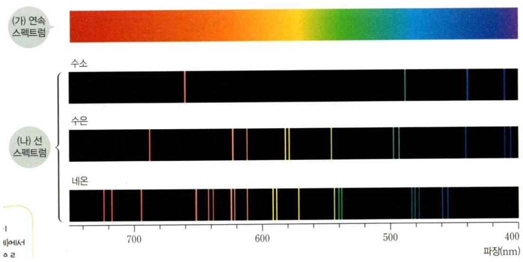
2. 분석법을 활용한 문제 해결

수학사에서 작도 문제는 중요한 기하 문제이다. 유클리드의 원론(The elements)과 분할론(On divisions)에서 눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용하여 다양한 기하학적 성질을 제시하였다. 하지만 작도 문제는 많은 수학자가 해결하는 데 어려움을 느꼈으며, 특히 3대 작도 난제 문제라고 불리는 배적, 원적, 각의 삼등분 문제는 많은 수학자가 해결하고자 노력하였으나 해결하지 못한 채 대수학을 통해 작도 불가능한 문제였음이 증명되었다. 1796년 가우스는 정17각형이 작도 가능함을 증명하였지만, 정17각형의 작도 방법은 약 30년이 지나서 제시되었다(DeTemple, 1991). 이처럼 역사적으로 수학자들에게도 주어진 작도 문제에 대해 작도 가능성을 알고, 작도 가능한 경우에 그 작도 과정을 스스로 발견하기가 쉽지 않았다. 따라서 학생들이 주어진 작도 문제의 해결 과정을 스스로 발견하기는 쉽지 않다.

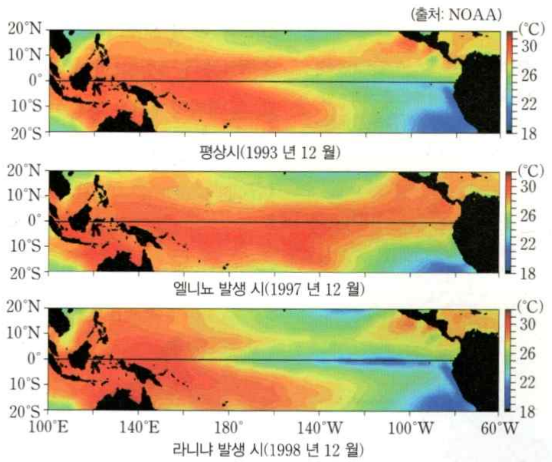
수학자들은 기존의 지식으로부터 새로운 지식을 발견하는 과정에서 특정한 방법이나 규칙, 전략 또는 전술을 사용한다. 이를 수학적 발견술이라 하며, Pappus가 제시한 분석법은 대표적인 발견술이다. 분석법은 이미 찾고자 하는 것을 찾은 것처럼, 또는 증명해야 할 것을 증명한 것이라 가정한 후, 이와 같은 결과가 도출되기 위해 어떤 조건이 충족되어야 하는지를 지속적으로 찾아가면서 이미 알고 있는 지식이나 가정에 도달하는 방법을 의미한다(Lew & Je, 2009). 이러한 분석법은 학생들의 역행적 추론 과정을 통해 작도 문제를 해결하는 방법을 찾을 수 있도록 도와준다(Heo & Lew, 2015; Lew & Je, 2009). 하지만 학생들이 분석법을 활용하여 결과가 도출되기 위해 충족되어야 하는 조건을 찾아가는 데 있어, 충분조건을 찾을 수 없거나 다양한 충분조건 중 일부가 선택될 여지가 있다. 이러한 상황에서는 분석법이 문제 해결에 도움을 주지 못할 수 있으며, 분석법을 이용하여 해결한 결과가 실제 결과의 일부분일 수 있다는 한계가 있다.

Ⅲ. 수학에서의 스펙트럼의 활용

스펙트럼은 실생활과 타 교과에서 쉽게 찾아볼 수 있는 예이다. 물리학에서 모든 원소는 각각 고유의 스펙트럼을 지니고 있다는 성질을 이용하여 미지의 물질에 포함된 구성 원소를 분석하는 데 활용하고 있으며([Fig. 2] 참조), 지구과학에서 해당 지역의 기온 또는 해수면의 온도를 지도에 선 스펙트럼 또는 연속 스펙트럼을 활용하여 나타낸다([Fig. 3] 참조). 더 나아가 지리학에서는 지도에 해당 지역의 고도를 등고선으로 나타낸다.



[Fig. 2] Spectrum in Physics Ⅰ (Kim et al., 2018, p. 104)

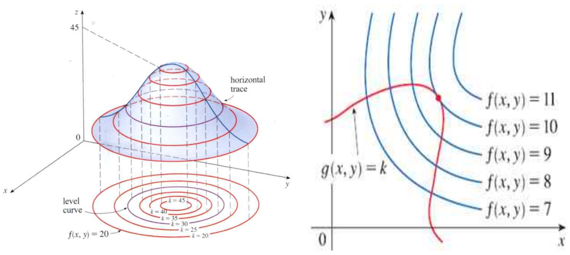


[Fig. 3] Spectrum in Earth Science Ⅰ (Lee et al., 2018, p. 125)

학생들은 스펙트럼의 사용에 익숙한 편이다. 뉴스의 기

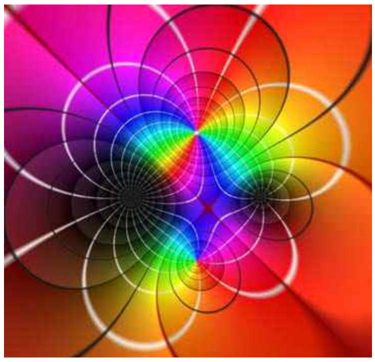
상예보와 지도에서는 등고선의 형태로 선 스펙트럼을 볼 수 있으며, 물리, 지구과학, 한국지리 등 타 교과에서 선 스펙트럼과 연속 스펙트럼의 예를 살펴보고 이를 통해 현상을 해석하는 것을 학습한다. 하지만 현재 수학 교육에서는 스펙트럼의 활용을 찾아보기 힘들다. 2009개정 교육과정까지는 고등학교 1학년의 '부등식의 영역'에서 최적의 해를 갖는 지점을 구하는 방법으로 선 스펙트럼을 안내하였으나, 2015개정 교육과정에서는 '경제수학'에서 '부등식의 영역'을 다루고 있어 모든 학생이 수학에서 스펙트럼의 활용을 경험하기 힘들다.

수학에서 스펙트럼의 활용은 다양하게 사용된다. [Fig. 4]와 같이 다변수함수의 등위곡선을 선 스펙트럼으로 표현한 후, 등위곡선과 제약조건의 그래프를 이용하여 라그랑주 승수의 원리를 설명한다.



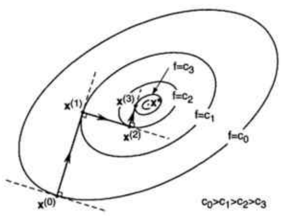
[Fig. 4] Line Spectrum in Calculus (Stewart, Clegg, & Watson, 2021, p. 940[Left], p. 1020[Right])

복소함수의 그래프를 시각적으로 표현하는 과정에서도 연속 스펙트럼이 사용된다(Connell, 2015). 복소함수의 그래프를 표현하는 방법에는 여러 가지가 있지만, 대표적인 방법으로 연속 스펙트럼을 사용하여 2차원에 표현하는 것과 3차원에 표현하는 것이 있다. 복소함수를 2차원에 시각적으로 표현하는 방법은 복소함수의 정의역을 $\mathbb{R}^2$에 표현한 후, $|f(z)|$와 $\arg f(z)$의 값을 이용하여 HSL(색상, 채도, 흑백 명도)를 사용하여 표현하는 것이다. 복소함수를 3차원에 시각적으로 표현하는 방법은 복소함수의 정의역을 xy-평면에 나타내고 $f(z)$의 실수부분를 z의 값으로 나타낸 후, $f(z)$의 허수부분은 HSV(색상, 채도, 명도)를 이용하여 나타낸다. [Fig. 5]는 복소함수를 2차원에 표현한 것 중 하나를 나타낸 것이다.



[Fig. 5] Plot of $f(z)=\dfrac{(z-1)(z+1)^2}{(z+i)(z-i)^2}$ (Poelke & Polthier, 2009, p. 737)

2015개정 교육과정의 '인공지능 수학' 과목에서는 최적화와 관련하여 손실함수와 경사하강법을 학습 요소로 제시하고 있다. 교육과정에서는 학생들이 손실함수를 최소화하는 것이 인공지능의 학습 목표임을 이해하게 하고, 이차함수의 형태의 손실함수에서 경사하강법을 간단히 다루도록 하고 있다. 하지만 변수가 많은 경우의 경사하강법을 학생들에게 지도하기 위해서는 다변수 미적분학과 마찬가지로 선 스펙트럼 또는 연속 스펙트럼이 시각적으로 제공될 필요가 있으며, 실제 인공지능에 관한 서적이나 논문에서 경사하강법을 소개하기 위해 [Fig. 6]과 같이 선 스펙트럼이나 연속 스펙트럼을 활용하기도 한다.



[Fig. 6] Steepest Descent Method (Jeong et al., 2018, p. 71)

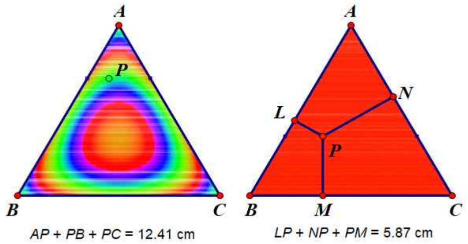
Ⅳ. 동적 기하 환경의 문제 해결 과정에서 연속 스펙트럼 활용 방안

동적 기하 환경은 문제 해결 과정에 도움을 줄 수 있다. Kim(2002, 2015)은 동적 기하 소프트웨어가 Polya(1957)의 문제 해결 단계 중 문제 이해, 계획, 반성

단계에 활용될 수 있다고 하였다. Kim(2002, 2015)의 연구에서는 동적 기하 환경에서의 드래깅 기능, 측정과 계산 기능을 활용하여 문제 해결에 활용할 수 있는 방안을 제시하고 있다. 하지만 Leung(2008)의 변이(variation) 렌즈를 통한 동적 기하 환경에서의 드래깅 연구에서 Leung은 드래깅의 한계를 지적하면서 스펙트럼이 대안이 될 수 있어 동적 기하 환경에서 스펙트럼을 활용하는 연구가 이루어질 필요가 있음을 후속 연구로 제언하였다. 하지만 동적 기하 소프트웨어에서 연속 스펙트럼의 기능을 제공하지 않고, 여러 가지 기능을 복합적으로 사용하거나 코딩을 통해 연속 스펙트럼을 구현해야 하는 등의 이유로 동적 기하 환경에서의 연속 스펙트럼의 활용에 관한 연구가 발전되지 못하였다. 최근 학교 수학에서 코딩이 강조되는바, 학생들에게 Algeomath 등 코딩이 접목된 동적 기하 환경에서 연속 스펙트럼을 통해 수학 문제 해결의 기회를 제공해 줄 필요가 있다. 이에 본 장에서는 연속 스펙트럼이 문제의 이해, 계획 및 반성 단계에서 활용될 수 있는 방안을 제시하고자 한다.

1. 이해 단계에서의 연속 스펙트럼의 활용

학생들은 기하학을 학습하는 과정에서 불변성과 관련된 항등 문제나 최적의 해를 구하는 문제를 접한다. 하지만 학생들은 항등 문제나 최적화 문제 상황을 이해하는데 어려움을 느낄 수 있다. 연속 스펙트럼은 학생들이 항등 문제나 최적화 문제 상황을 이해할 수 있도록 도와줄 수 있다. 학생들이 '정삼각형 ABC 내부의 임의의 한 점 P에서 세 변에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라 하면, $PL+PM+PN$은 일정하다.'는 Viviani 정리를 증명하기에 앞서, 정삼각형 ABC과 L, M, N을 작도하고 점 P의 위치에 따라 함수 $PA+PB+PC$의 값과 함수 $PL+PM+PN$의 값을 기준으로 연속 스펙트럼으로 표현하면 [Fig. 7]과 같다. 학생들은 [Fig. 7]을 통해 $PA+PB+PC$의 값은 일정하지 않지만 최적의 해가 있음을 이해할 수 있으며, $PL+PM+PN$의 값은 일정하게 나타남을 이해할 수 있다.



[Fig. 7] Continuous Spectrum of Viviani's Theorem

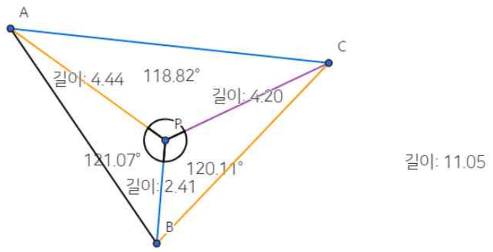
[Fig. 7]과 같이 연속 스펙트럼은 학생들에게 기하 문제를 시각적으로 표현해주어 학생들이 기하 문제를 이해하는 데 도움을 줄 수 있다.

2. 계획 단계에서의 연속 스펙트럼의 활용

2장에서 서술한 바와 같이, 최적의 해를 구하는 문제는 드래깅을 통해 구하고자 하는 함수의 값이 최적이 되는 위치를 추측할 수 있다. 하지만 드래깅을 통해 최적의 위치를 찾는 방법은 최적의 위치가 몇 개인지, 최적의 위치가 지니는 기하학적 성질이 무엇인지를 알아내는 것이 쉽지 않다.

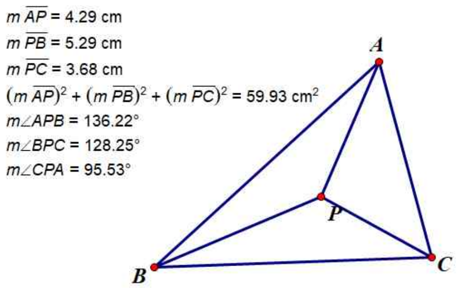
[Fig. 1]은 Heo(2021)의 연구에서 한 교사가 학생들에게 제시한 활동지를 나타낸 것이다. 교사는 학생들에게 점 P를 움직이면서 $f(P)$의 값이 최소가 되는 곳을 찾아보도록 하였으며, 그 결과 점 P가 사각형 $ABCD$의 무게중심일 때 $f(P)$의 값이 최소가 됨을 확인할 수 있다고 설명하고 있다. 하지만 실제 점 P가 $\dfrac{A+B+C+D}{4}$일 때 $f(P)$의 값이 최소가 된다. 이처럼 드래깅을 통해 최적의 위치를 추측하는 과정에서는 개연적 추론으로 인한 문제가 나타날 수 있다.

또한 Heo(2021)의 연구에서 다른 한 명의 교사는 삼각형 ABC와 내부의 한 점 P에 대하여 $AP+BP+CP$의 값이 최소가 되는 점 P를 작도하는 문제를 제기하였으며, 동적 기하 환경에서의 탐구 과정을 [Fig. 8]과 같이 제시하였다. 이때, 교사는 점 P를 드래그하면서 $AP+BP+CP$의 값을 관찰하였으며, $AP+BP+CP$의 값이 최소가 될 때 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^{\circ}$가 됨을 추측할 수 있었다.



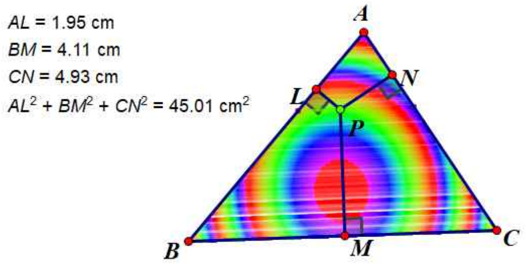
[Fig. 8] Exploration Activity (Heo, 2021, p. 360)

일반적으로 최적화 문제에서 드래깅을 통해 함숫값이 최적인 위치를 추측할 수 있지만, 위의 문제에서 추측한 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$와 같은 기하학적 성질을 추측하기는 쉽지 않다. 예를 들어 삼각형 ABC에 대하여 $AP^2 + BP^2 + CP^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 위치를 찾는 문제의 경우, 최적의 위치는 $\triangle ABC$의 무게중심으로 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$가 성립하지 않는다([Fig. 9] 참조).



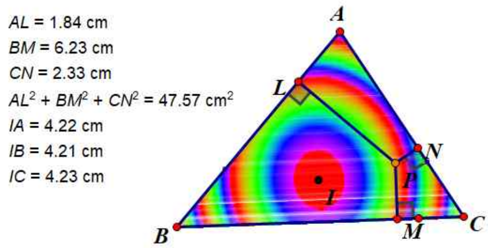
[Fig. 9] Exploration Activity using GSP

연속 스펙트럼은 기하에서의 최적화 문제에 대한 답을 추측할 수 있도록 도와주며, 최적의 위치가 몇 개인지, 최적의 위치에서 다양한 기하학적 성질을 탐구함으로써 최적의 위치가 갖는 공통의 성질이 무엇인지를 탐구할 기회를 제공해줄 수 있다. 예를 들어 삼각형 ABC와 내부의 한 점 P에 대하여 점 P에서 세 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라고 할 때 $AL^2 + BM^2 + CN^2$이 최소가 되는 점 P의 위치를 작도하는 문제를 생각해보자. 이 경우 주어진 삼각형 ABC에 대하여 점 P의 위치에 따라 $AL^2 + BM^2 + CN^2$의 값을 기준으로 연속 스펙트럼으로 나타내면 [Fig. 10]과 같다.



[Fig. 10] Continuous Spectrum using GSP

[Fig. 10]의 연속 스펙트럼으로부터 최적의 위치는 삼각형 내부의 빨간색으로 색칠된 영역의 중심으로 유일할 것으로 추측할 수 있다. 따라서 빨간색으로 색칠된 영역의 중심의 점에서 선분의 길이, 각의 크기 등 다양한 기하학적 요소를 측정하고 이들 사이의 관계를 탐구함으로써 점 P의 위치에서의 기하학적 성질을 추측하여 가설을 세울 수 있다. 예를 들어 [Fig. 11]은 빨간색 동심원의 중심에서 여러 가지 기하학적 요소를 찾아보고, 기하학적 요소 및 측정값 사이의 관계를 탐구함으로써 점 P가 삼각형의 외심일 것이라는 가설을 생성할 수 있다.



[Fig. 11] Hypothesis : P is a circumcenter of ABC

학생들은 연속 스펙트럼을 활용하여 최적의 위치 및 최적의 위치에서의 기하학적 가설을 생성한 후, 분석법을 활용하여 추측한 가설을 만족시키는 점을 찾음으로써 문제 해결에 한 발짝 나아갈 수 있다. 이처럼 연속 스펙트럼은 최적화 문제 해결을 위한 계획 단계에서 활용될 수 있다.

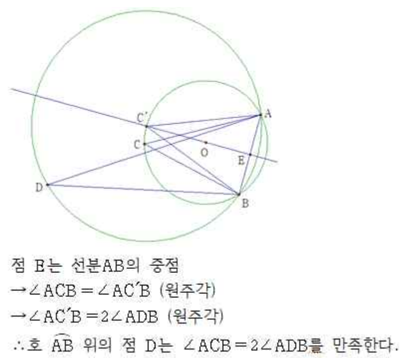
3. 반성 단계에서의 연속 스펙트럼의 활용

Kim(2002, 2015)은 동적 기하 환경이 문제 해결의 반

성 단계에서 새로운 관점에서 결과를 점검, 결과와 방법을 다른 문제에 활용, 일반화하여 이해, 다른 방법으로의 문제 해결에 도움을 줄 수 있다고 하였다. 본 절에서는 동적 기하 환경의 연속 스펙트럼이 결과를 점검하고, 문제를 일반화하여 이해하는 데 도움을 줄 수 있는 방향을 제시하고자 한다.

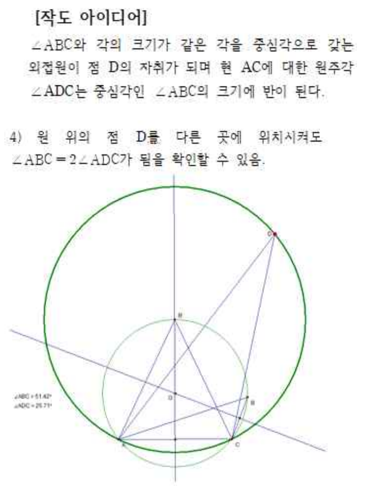
1) 결과의 점검

본 절에서는 Leung(2008)이 제시한 과제에 대한 현직 교사들의 풀이 과정을 살펴보고, 연속 스펙트럼이 결과의 점검에 활용될 수 있는 좋은 방법임을 제시하고자 한다. 현직 교사들은 동적 기하 환경이나 지필 환경에서 Leung(2008)이 제시한 과제인 '같은 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C에 대하여 $\angle ABC = 2\angle ADC$를 만족하는 점 D의 자취를 구하시오.'의 문제를 해결하도록 하였다. 그 결과, 많은 수학 교사들은 [Fig. 12]와 같은 해답과 풀이 과정을 보여주었다.



[Fig. 12] Solution of the task

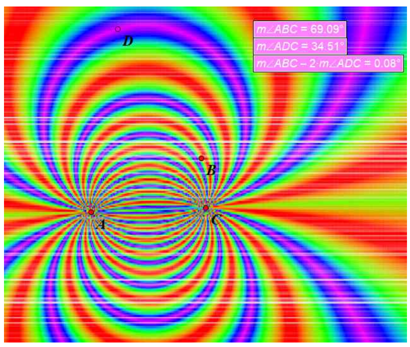
[Fig. 12]의 풀이 과정을 제시한 수학 교사는 주어진 원에 대하여 호에 대한 원주각의 크기가 같다는 성질과 원주각의 크기와 중심각의 크기 사이의 관계를 이용하여 $\angle ACB = 2\angle ADB$를 만족한다고 설명하고 있다. [Fig. 12]에서 문제 해결의 아이디어는 제시되지 않았으나, 호 $\overset{\frown}{AB}$ 위의 점 D는 $\angle ACB = 2\angle ADB$를 만족한다고 설명하고 있다. 또 다른 교사도 유사한 풀이 과정을 제시하고 있으며, 작도에 대한 아이디어와 해답을 [Fig. 13]과 같이 제시하였다.



[Fig. 13] Idea and solution

[Fig. 13]에서 살펴볼 수 있듯이, 원주각의 크기와 중심각의 크기 사이의 관계를 고려하여 $\angle ABC = \angle AOC$가 되도록 하는 점 O를 작도하고, $\angle AOB$가 중심각의 크기가 되도록 하는 원주각을 작도하는 것을 문제 해결의 아이디어로 생각하였다. [Fig. 13]의 4)에서는 점 D를 드래깅 하더라도 $\angle ABC = 2\angle ADC$가 됨을 확인하였다.

Leung(2008)에서 제시한 과제에서 $\angle ABC - 2\angle ADC$의 값을 기준으로 연속 스펙트럼을 나타내면 [Fig. 14]와 같다.



[Fig. 14] Continuous Spectrum of the task

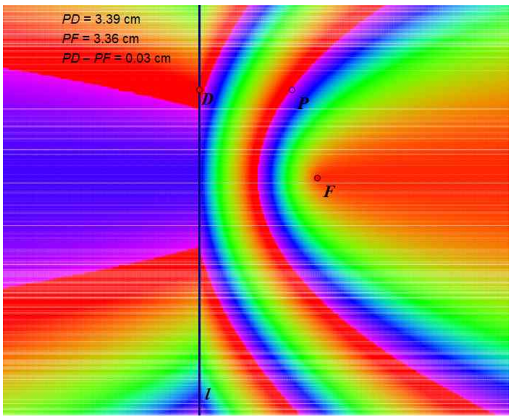
[Fig. 14]은 [Fig. 12]과 [Fig. 13]의 해답과 차이가 있음을 알 수 있다. 두 수학 교사들은 논리적인 증명 또는 드래깅을 통해 제시한 답을 확인하였다. 하지만 두 명의

교사는 정답 일부만을 구하였다. 이는 중심각의 크기로 고려할 수 있는 점이 두 점이 있으며, 이 두 점은 선분 AB를 기준으로 대칭 관계에 있음을 인식하지 못하여 나타난 것이다. 이처럼 연속 스펙트럼은 기하학적 문제 해결의 결과를 시각적으로 제공해줌으로써, 문제 해결 결과에 대한 점검을 할 수 있도록 도와준다.

2) 일반화

이차곡선의 지도에 있어서 작도 활동은 중요하게 다루어지고 있다(Heo, 2014). 분석법은 이차곡선의 작도 과정에서 중요한 발견술로 사용될 수 있으며, 이는 포물선의 작도 문제에서도 활용될 수 있다(Lew & Je, 2009). 이러한 분석법을 통해 문제 해결의 계획을 설정하고 실행한 후, 드래깅 활동을 통해 결과를 점검해볼 수 있다. 여기에서는 포물선의 작도 문제의 반성 단계에서 연속 스펙트럼을 사용하여 포물선과 타원, 쌍곡선의 관계를 살펴보는 방법을 제시하고자 한다.

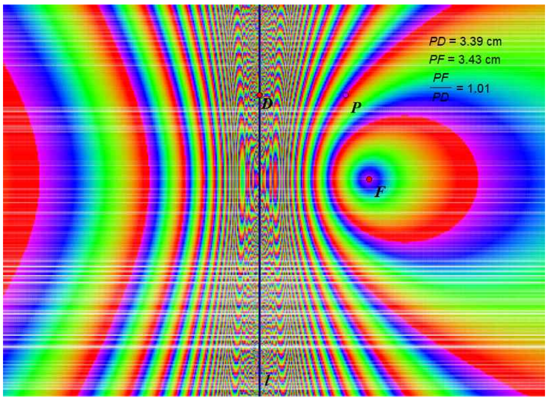
포물선의 작도 문제는 '직선 l과 직선 위에 있지 않은 한 점 F에 대하여 $d(P,l)=d(P,F)$를 만족시키는 점 P의 자취를 구하시오.'의 문제로 제시될 수 있다. 이때, $d(P,l)-d(P,F)$의 값을 기준으로 연속 스펙트럼을 나타내면 [Fig. 15]와 같다.



[Fig. 15] Continuous Spectrum $f(P)=d(P,l)-d(P,F)$

[Fig. 15]를 통해 점 P에서 $d(P,l)-d(P,F)$의 값이 0.03이므로 점 P의 근방에 있는 보라색 포물선이 주어진 작도 문제의 결과임을 확인할 수 있으나 [Fig. 15]로부터 그 이상의 정보를 찾기는 쉽지 않다.

포물선의 작도 문제에 대해 $\dfrac{d(P,F)}{d(P,l)}$의 값을 기준으로 연속 스펙트럼을 나타내면 [Fig. 16]과 같다.



[Fig. 16] Continuous Spectrum $f(P)=\dfrac{d(P,F)}{d(P,l)}$

[Fig. 16]를 통해 점 P에서 $\dfrac{d(P,F)}{d(P,l)}$의 값이 1.01이므로 점 P의 근방에 있는 보라색 포물선이 주어진 작도 문제의 결과임을 확인할 수 있다. 더 나아가 [Fig. 16]의 그림으로부터 타원과 쌍곡선을 시각적으로 확인할 수 있어 포물선, 타원, 쌍곡선이 $f(P)=\dfrac{d(P,F)}{d(P,l)}$의 값과 관계가 있음을 추측할 수 있다. 이를 통해 포물선의 작도와 관련하여 다음과 같은 일반화된 가설을 설정할 수 있다.

> 직선 l과 직선 위에 있지 않은 한 점 F에 대하여 $f(P)=\dfrac{d(P,F)}{d(P,l)}$이라 하자. 그러면
>
> 1) $0<f(P)<1$이면 점 P의 자취는 타원이다.
> 2) $f(P)=1$이면 점 P의 자취는 포물선이다.
> 3) $f(P)>1$이면 점 P의 자취는 쌍곡선이다.

[Fig. 16]의 연속 스펙트럼을 만들기 위한 함수 $f(P)$는 이차곡선의 이심률이다. 이심률은 산불 확산 모형이나 행성의 공전 궤도에서 사용되는 개념으로, 2015개정 교육과정의 지구과학Ⅱ는 이심률이 주어진 타원을 작도하는

활동이 포함되어 있다(MOE, 2015b). 따라서 학생들은 연속 스펙트럼을 통해 일반화된 가설을 설정하고, 이를 정당화하는 과정을 경험할 수 있다. 더 나아가 학생들에게 대수기하적 정의로서의 이차곡선과 이심률의 정의로서의 이차곡선을 연결하는 기회를 제공해 줄 수도 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

동적 기하 환경은 학생들의 수학 학습에 많은 도움을 준다. 학생들은 동적 기하 환경에서의 조작 활동을 통해 수학적 개념에 대한 이해는 물론이고 수학적 태도 등 정의적 영역도 신장될 수 있다(Heo & Lew, 2015; Woo, 2009). 더 나아가 2015개정 교육과정에서 강조하는 6가지 수학 교과 역량의 신장에도 도움을 줄 수 있다.

동적 기하 환경은 학생들의 문제 해결에 많은 도움을 준다(Kim, 2002, 2015). 동적 기하 환경에서의 드래깅 활동은 가추와 귀납 추론을 통해 수학적 가설을 생성하고 이를 정당화하는 과정에 도움을 주고 있으며 (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2011; Leung, 2008; Yang & Shin, 2014), 분석법은 학생들이 작도 문제를 해결하기 위한 전략을 수립하는 데 도움을 준다(Heo & Lew, 2015; Lew & Je, 2009). 또한 학생들은 문제 해결의 반성 단계에서 동적 기하 환경에서의 드래깅과 측정 등의 기능을 통해 결과를 확인하고 새로운 문제 방법을 찾아보는 등에 도움을 준다(Kim, 2002, 2015). 하지만 동적 기하 환경에서 드래깅을 이용한 문제 해결과 분석법을 활용한 작도 문제의 해결은 제한점이 있으며, 연속 스펙트럼은 이러한 문제를 해결하기 위한 대안으로 활용될 수 있다.

동적 기하 소프트웨어의 기능적인 한계나 복잡성 등으로 동적 기하 환경에서 연속 스펙트럼의 활용에 관한 연구가 이루어지지 못하였다. 하지만 최근 Algeomath 등의 코딩을 결합한 동적 기하 소프트웨어가 등장함에 따라 학생들이 동적 기하 환경에서 프로그래밍을 통해 연속 스펙트럼을 구현할 수 있다. 이에 본 연구에서는 동적 기하 환경의 문제 해결에서 연속 스펙트럼을 활용하는 방안을 제시하였다.

연속 스펙트럼은 문제 해결의 이해 단계에서 활용될 수 있다. 학생들은 기하학을 학습하는 과정에서 항등 문제나 최적화 문제를 접할 수 있다. 동적 기하 환경에서의 연속 스펙트럼은 기하 문제를 시각적으로 표현해주어 학생들이 문제 상황을 즉각적으로 이해하는 데 도움을 줄 수 있다.

연속 스펙트럼은 문제 해결의 계획 단계에서 활용될 수 있다. 함숫값은 연속적인 영역에서 주어진 함숫값의 변화를 연속 스펙트럼을 통해 시각적으로 확인할 수 있어 최적화 문제의 해답을 추측할 수 있다. 이후 최적화되는 위치에 대한 탐구활동을 진행함으로써 최적화된 위치의 공통된 성질을 추측하고, 이를 기반으로 문제 해결 전략을 수립할 수 있다.

연속 스펙트럼은 문제 해결의 반성 단계에서 활용될 수 있다. 학생들은 함수를 설정하고 연속 스펙트럼을 통해 연속적인 범위에서 함숫값의 변화를 시각적으로 확인할 수 있다. 학생들은 시각적으로 탐구한 결과를 바탕으로 최적화 문제의 해답을 추측할 수 있으며, 동적 기하 환경에서 최적화된 위치들에 대한 탐구활동을 통해 공통된 성질을 추측하고 이를 기반으로 문제 해결 전략을 수립할 수 있다.

본 연구는 동적 기하 환경의 문제 해결 과정에서 연속 스펙트럼이 활용될 수 있는 방법을 살펴보았다. 연속 스펙트럼은 학생들의 문제 해결 과정에 도움을 줄 가능성이 있는바, 학생들의 기하 학습에서 연속 스펙트럼을 적용하고 교육적 효과 분석에 관한 후속 연구가 이루어질 필요가 있다. 또한 학생들이 연속 스펙트럼을 활용하여 문제를 해결하는 과정과 드래깅을 활용하여 문제를 해결하는 과정을 비교하고 분석하는 연구가 이루어질 필요가 있다.

참 고 문 헌

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2011). Conjecture-generation through dragging and abduction in dynamic geometry. In A. Méndez-Vilas (Ed.), *Education in a Technological World: Communicating Current and Emerging Research and Technological Efforts* (pp. 100 - 107). Spain: Formatex.

Boo, D. H. (2021). Improvement of the Mathematical Creativity Using Engineering Tools in Mathematics Mentorship Program. *Communications of Mathematical Education, 35*(1), 119-136.

Choi, N. K. (2018). Mathematical Information Processing Competencies. In Suh, M., Han, H., Joo, H. Y., & Choi, N. K. (Eds.), *Mathematical Competences and Capabilities In Korea Math Education*. (pp. 233-263) Seoul: Kyungmoon.

Choi, K., & Paik, S. (2020). Development of Educational Materials Related to Phase Change of Moon Using GeoGebra Program. *School Science Journal, 14*(1), 7-20.

Connell, J. (2015). *Visualising Complex Functions*. Australian Mathematical Sciences Institute.

DeTemple, D. W. (1991). Carlyle Circles and the Lemoine Simplicity of Polygon Constructions. *The American Mathematical Monthly, 98*(2), 97-108.

Heo, N. G. (2014). A Study on Construction of Tangent Line of Quadratic Curves Through Geometric Method. *Journal of Science Education for the Gifted, 6*(3), 125-133.

Heo, N. G. (2018). Mathematical exploration of astronomical phenomena using dynamic geometry software. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction, 18*(21), 949-968.

Heo, N. G. (2021). Using 'What-If-Not Strategy' for Mathematical Exploration in a Dynamic Geometry Environment. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction, 21*(14), 353-367.

Heo, N. G., & Lew, H. C. (2015). Development and Application of Action Based Mathematics Digital Textbook. *Journal of Educational Research in Mathematics, 25*(2), 241-261.

Hollebrands, K., Laborde C., & Straesser, R. (2005). Technology and the learning of geometry at the secondary level. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Syntheses, cases, and perspectives*. (Vol 1, pp. 155-205). Greenwich, CT: Information Age Publishing, In

Hong, S., & Park, C. (2007). The Impact of Dynamic Geometry Software on High School Students' Problem Solving of the Conic Sections. *The Mathematical Education, 46*(3), 331-349.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(2), 169-187.

Jeong, N., Lee, S., Kang, M., Gu, C., Kim, C., & Kim, K. (2018). Target Prioritization for Multi-Function Radar Using Artificial Neural Network Based on Steepest Descent Method. *The Journal of Korean Institute of Electromagnetic Engineering and Science, 29*(1), 68-76.

Jo, M., & Kim, J. B. (2018). Development of eclipse phenomena education materials using Desmos program. *School Science Journal, 12*(1), 49-58.

Jo, M., & Kim, J. B. (2020). Minimum deviation angle measurement in ice crystal model using Desmos program for the exploration of halo phenomenon. *School Science Journal, 14*(1), 33-42.

Kim, N. (2002). A Study on the GSP in the Viewpoint of Problem Solving. *School Mathematics, 4*(1), 111-125.

Kim, N. (2015). Use of Dynamic Geometry Program in the Viewpoint of Problem Solving. In Ko, S. S., Ko, H. K., Goo, N. Y., Kim, N., Kim. R. N., Kim, H. S., Kim H. K., Lew, H. C., Park, M. G., Son, H. C., Song, M. H., Yoon, I. J., Lee, K. H., Lee, S. G., Lee, J. H., Lee, J. G., Yim, H. M., Chang, K. Y., Jeon, Y. G., Cho, J. S., Chae, J. L., Choi, K. S., & Han, S. Ho. (Eds.), *Technologies in Mathematics Education*. Seoul: Kyungmoon.

Kim, J. S., Jeon, B. H., Chung, Y. W., Kim, B. Y., & Lee, Y. (2014). A Study on the Optimization Problem Solving utilizing the Quadratic Curve using the Dynamic Geometry Software. *East Asian mathematical journal, 30*(2), 149-172.

Kim, S. J., Kim, D. G., Moon, Y. H., Ahn, H. S., Kwon, G. P., Min, B. K., & Park, G. Y. (2018). *Physics Ⅰ*. Seoul: MiraeN.

Kong, M. S., & Kang, Y. S. (2014). Effects of Teaching of Limit Using GeoGebra to High School Students' Mathematics Learning. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 17*(4), 697-716.

Lee, J. W., Lew, H. G., Choo, B. S., Moon, M. H., Lee, I. S., Seo, G. W., & Jo, M. A. (2018). *Earth Science Ⅰ*. Seoul: MiraeN.

Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*, 135-157.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 439-460.

Leung, A., Chan, Y.C., & Lopez-Real, F. (2006). Instrumental genesis in dynamic geometry environments. *Proceedings of the ICMI 17 Study Conference: Technology Revisited*, Part 2, 346-353, Hanoi, Vietnam.

Lew, H. C., & Je, S. Y. (2009). Construction of Quadratic Curves Using the Analysis Method on the Dynamic Geometry Environment. *Korean Journal of Teacher Education, 25*(4), 168-189.

Lim, G. (2010). Effect of Inquiring Activities through Manipulative Materials-Experiment on Geometrical Properties Understanding and Communicative Competence. *Journal of elementary mathematics education in Korea, 14*(3), 701-722.

Ministry of Education (2015a). *2015 Revised Curriculum. Ministry of Education [Mathematics].*

Ministry of Education (2015b). *2015 Revised Curriculum. Ministry of Education [Science].*

Ministry of Education (2015c). *The 2nd Comprehensive Mathematics Education Plan.(2015-2019).*

Ministry of Education (2020). *A comprehensive math education plan that grows together with the power of thinking and leads the future(2020-2024).*

Ministry of Internal Affairs and Communications (2016). *New Style Cloud Introduction Guidebook for Education ICT 2016.*

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Park, J. Y., & Lee, H. S. (2012). A study on the Circular art using a numeral operation for the mathematical gifted -Focused on the design of a circle using GSP-. *Education of primary school mathematics, 15*(1), 31-47.

Poelke, K., & Polthier, K. (2009). Lifted Domain Coloring. *Computer Graphics Forum, 28*(3), 735-742.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. NY: Doubleday.

Ryu, H. A. (2003). A Case Study in Learning Geometry with an Exploratory Software GSP. *The Journal of Education, 21*, 299-323.

Son, H. C. (2011). Trend and Prospect on Using Technology in Mathematics Education in Korea. *School Mathematics, 13*(3), 525-542.

Stewart, J., Clegg, D., & Watson, S. (2021). *Calculus : Early Transcendentals (9th Edition).* Singapore: Cengage Learning Asia.

Suh, B. (2020). A Study on the Model for the Development of Tools for Math Activities & it's Application. *Communications of mathematical education, 34*(3), 587-603.

Woo, J. H. (2009). *Mathematics instructional principles and methods*. Seoul: Seoul National University Publishing

Yang, E. K., & Shin, J. (2014). Students' Mathematical Reasoning Emerging through Dragging Activities in Open-Ended Geometry Problems. *Journal of Educational Research in Mathematics, 24*(1), 1-27.