韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.4.409
2021. 11. 제 60권, 제 4호, 409-429.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2021, Vol. 60, No. 4, 409-429.

대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업의 분석

조선미(서울영신초등학교, 교사)† · 방정숙(한국교원대학교, 교수)
†교신저자

An analysis of fractional division instruction emphasizing algebraic thinking

Cho, SeonMi(Seoul Youngsin Elemetary School, halifax01@naver.com)†
Pang, JeongSuk(Korea National University of Education, jeongsuk@knue.ac.kr)
†Corresponding Author

초록

본 연구는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하는 방안을 분석한 것이다. 문헌 연구에서 도출한 교수·학습 요소를 중심으로 분수 나눗셈 수업을 재구성하고, 실제 수업에서 주요 교수·학습 요소가 어떻게 구현되는지 그 양상을 분석하였다. 특히 본 논문에서는 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 문제 맥락을 중심으로 분석하였다. 이를 토대로 초등학교 분수 나눗셈 수업에서 대수적 사고를 강조하여 지도하는 방안에 관한 구체적인 시사점을 도출하였다.

Abstract

This study investigated instructional methods for fractional division emphasizing algebraic thinking with sixth graders. Specifically, instructional elements for fractional division emphasizing algebraic thinking were derived from literature reviews, and the fractional division instruction was reorganized on the basis of key elements. The instructional elements were as follows: (a) exploring the relationship between a dividend and a divisor; (b) generalizing and representing solution methods; and (c) justifying solution methods. The instruction was analyzed in terms of how the key elements were implemented in the classroom. This paper focused on the fractional division instruction with problem contexts to calculate the quantity of a dividend corresponding to the divisor 1. The students in the study could explore the relationship between the two quantities that make the divisor 1 with different problem contexts: partitive division, determination of a unit rate, and inverse of multiplication. They also could generalize, represent, and justify the solution methods of dividing the dividend by the numerator of the divisor and multiplying it by the denominator. However, some students who did not explore the relationship between the two quantities and used only the algorithm of fraction division had difficulties in generalizing, representing, and justifying the solution methods. This study would provide detailed and substantive understandings in implementing the fractional division instruction emphasizing algebraic thinking and help promote the follow-up studies related to the instruction of fractional operations emphasizing algebraic thinking.

---

* 주요어 : 대수적 사고, 분수 나눗셈, 나누어지는 수와 나누는 수의 관계 탐색하기, 일반화하기, 표현하기, 정당화하기
* **Key words** : algebraic thinking, fraction division, exploring the relationship between a dividend and a divisor, generalizing, representing, justifying
* 본 논문은 제1저자의 박사학위논문 중 일부를 요약, 재구성한 것임.
* **Address**: Seoul Youngsin Elemetary School, Seoul-City, Korea
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97D40
* **Received**: August 5, 2021 **Revised**: August 12, 2021 **Accepted**: August 23, 2021

Ⅰ. 서론

초등학교 수학에서 매우 중요한 학습 주제인 분수 지식은 중등학교 수학에서 배우는 대수 학습과 밀접하게 연결된다. 이와 관련하여 초등학교에서 분수 연산을 학습할 때 대수적 사고(algebraic thinking)를 충분히 경험하고, 알고리즘을 개념적으로 이해할 수 있도록 지도해야 한다는 연구(Wu, 2001; The National Mathematics Advisory Panel, 2008), 초등학교에서 학습하는 분수 지식이 중등학교에서 배우는 대수 학습에 중요한 영향을 끼친다는 연구(Siegler et al., 2012)들이 이루어졌다. 이 연구들은 초등학교에서 분수를 의미 있게 학습한 학생들이 중등학교에서 대수를 학습할 때도 높은 성취를 나타낸다는 결과를 보여준다.

이처럼 학생들의 분수 이해 능력을 대수적 사고와 관련하여 살펴보는 것은 초등학교 수학과 중등학교 수학을 연계하여 지도하는 측면에서 매우 중요하다. 이에 먼저 중등학교 학생들을 대상으로 한 연구(Lee, 2019; Hackenberg & Lee, 2015; Lee & Hackenberg, 2014)를 살펴보면, 연구자들은 7~10학년 학생들의 분수 지식을 조작(operations)과 스킴(schemes)의 관점에서 분석하고 학생들이 가진 분수 스킴의 수준이 두 양 사이의 관계를 곱셈적으로 표현하는 방정식을 쓰는 데 영향을 준다고 주장하였다. 이와 관련하여 국내에서는 Kim, Shin, Lee(2019)가 중학교 학생들이 가진 분수 스킴의 수준에 따라 방정식을 표현하는 과정이 어떻게 달라지는지 자세히 분석하였다.

한편 초기 대수(early algebra)적 관점, 즉 초등학교 학생들에게 수학적 구조 및 관계의 일반화를 지도한다면 산술적 맥락에서도 충분히 대수적 사고를 경험할 수 있다는 입장에서(Kieran, Pang, Schifter, & Ng, 2016) 학생들의 분수 지식을 분석한 연구들도 살펴볼 수 있다(Empson, Levi, & Carpenter, 2011; Pearn & Stephens, 2018). 특히 이 연구들은 초등학교 학생들이 분수 문제를 해결할 때 사용하는 관계적 사고(relational thinking)에 주목하였는데, 학생들이 분수 연산을 관계적으로 이해하게 되면 식을 의미 있게 추론할 수 있고 대수적으로 사고하는 데 도움이 된다는 사실을 발견하였다. Pearn, Stephens(2018)는 초등학교 학생들에게 두 양 사이의 동치 관계를 파악하여 해결할 수 있는 과제를 제시하고, 학생들이 이를 어떻게 해결하는지, 문제 해결 방법을 일반화하여 표현할 수 있는지에 초점을 두고 분석하였다. 이를 바탕으로 초등학교 학생들의 분수 지식과 대수적 사고의 밀접한 관계를 강조하였다.

국내에서는 Pang, Cho(2019a, 2019b)가 Pearn, Stephens(2018)의 연구에서 제시한 문제를 수정・보완하여 분수의 나눗셈을 학습하지 않은 5학년 학생들과 분수의 나눗셈을 학습한 6학년 학생들을 대상으로 지필 평가를 시행하고, 학생들이 분수 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 드러나는 대수적 사고의 특징을 조사하였다. Pang, Cho, Kwon(2020)은 Pang, Cho(2019a, 2019b)의 연구에서 살펴보기 어려웠던 학생들의 대수적 사고 과정(Kaput, 2008)을 좀 더 면밀하게 분석하기 위해 면담 평가를 시행하였고, 초등학교에서 분수 연산을 학습할 때 대수적 사고를 신장시키기 위해서는, 두 양의 관계를 탐색한 것을 바탕으로 문제를 해결하고, 문제 해결 방법의 공통점을 찾아 일반화하고 표현하며, 이를 정당화하는 과정이 중요하다는 사실을 시사점으로 제안하였다.

이상에서 살펴본 연구들은 비록 연구 대상이나 분수 지식, 또는 대수적 사고를 바라보는 관점에 조금씩 차이가 있지만, 학생들의 분수 지식과 대수적 사고 간의 관계를 탐색하고 시사점을 제공한다는 점에서 의미가 있다. 하지만 대부분의 연구들이 소수 학생의 사고 과정에 초점을 두고 있으며, 실제 수업 사례에서 학생들이 분수 지식과 대수적 사고를 어떻게 이해하고 있는지 분석한 연구는 별반 찾아보기 어렵다. 대수적 사고는 자연스럽게 습득되는 것이 아니라 체계적이고 의도적으로 지도해야 한다는 점에서(Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011), 학생들이 실제 수업에서 분수 연산을 어떻게 학습하는지 그리고 그와 같은 학습이 대수적 사고와 어떻게 연관되는지 탐색해 볼 필요가 있다. 나아가 학생들이 현행 초등학교 교육과정에서 다루는 수학 내용을 학습하는 과정에서도 충분히 대수적 사고를 경험할 수 있기 때문에(Pang & Kim, 2018), 대수적 사고를 강조한 분수 연산 수업에서 학생들이 분수 연산과 대수적 사고를 어떻게 학습하는지 심도 있게 살펴보는 것은 의미가 있을 것이다.

이와 같은 연구의 필요성을 바탕으로 본 연구에서는

대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업을 초등학교 6학년 학생들에게 지도하는 방안을 마련하고 실제 수업 사례를 분석하였다. 분수 연산과 관련된 단원 가운데 분수 나눗셈 단원을 선택한 이유는 선행연구(Pang & Cho, 2019a, 2019b; Pang et al., 2020)에서 얻은 시사점을 바탕으로 실제 수업을 구현해 보기 위해서이다. 나아가 분수 나눗셈은 초등학교 수와 연산 영역에서 가장 높은 수준의 학습 주제이며, 대수적 사고와 곱셈적 사고를 개발할 수 있는 핵심 부분(Pang & Lee, 2009)이기 때문에 다른 분수 연산에 비해 학생들의 대수적 사고 과정을 좀 더 면밀하게 살펴볼 수 있을 것으로 기대되었다. 이에 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈 수업을 지도하기 위한 교수·학습 요소를 도출하고, 그 요소를 반영하여 재구성한 수학 수업이 어떻게 구현되는지 그 양상을 면밀하게 분석하였다. 본 연구의 결과를 토대로 초등학교 분수 나눗셈 수업에서 대수적 사고를 강조하여 지도하는 방안에 대한 구체적인 시사점을 논의하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 본 연구에서의 분수 지식과 대수적 사고의 관계

본 연구는 Pang, Cho(2019a, 2019b), Pang 외(2020)의 후속 연구의 성격을 지닌다. Pang, Cho(2019a, 2019b)는 Pearn, Stephens(2018)의 '역 분수 문제'(reverse fraction problem)를 바탕으로 분수 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 드러나는 학생들의 대수적 사고를 탐색하였다. '역 분수 문제'란 예를 들어 "10개의 동그라미가 있는데, 이것은 처음에 가지고 있던 동그라미 수의 $\frac{2}{3}$이다. 처음에 가지고 있던 동그라미의 수는 몇 개인가?"(Pearn & Stephens, 2018, p. 241)와 같이 부분에 해당하는 양(partial quantity) 10과 이 양과 동치인 분수(equivalent fraction of partial quantity) $\frac{2}{3}$가 주어졌을 때 전체에 해당하는 양(the quantity of an unknown whole), 즉 분수 $\frac{3}{3}$에 해당하는 양을 구하는 문제이다. 이는 분수 나눗셈의 문제 맥락 중 '곱셈의 역'과 관련되며(Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002), 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 학습한 이후에는 쉽게 해결할 수 있는 문제이다. 이에 Pang, Cho(2019a, 2019b)는 분수 나눗셈을 학습하지 않은 5학년 학생들과 분수 나눗셈을 학습한 6학년 학생들에게 '역 분수 문제'에 관한 지필 평가를 수행하고 학생들이 주어진 문제에 접근하는 방법에 어떤 차이가 있는지 알아보고자 하였다.

분석 결과, 분수의 나눗셈을 학습하지 않은 5학년 학생들은 두 양의 관계를 탐색하여 문제를 해결하였다. 앞서 제시한 문제를 예로 해결 과정을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 문제에 제시된 두 양인 10과 $\frac{2}{3}$사이의 동치 관계를 이해하고, 10을 분자 2로 나누어 단위분수 $\frac{1}{3}$에 해당하는 양 5를 찾은 다음, 분모 3을 곱하여 문제에서 구하고자 하는 양(즉 $\frac{3}{3}$에 해당하는 양)을 구하는 곱셈 방법(multiplicative method, Pearn & Stephens, 2018)으로 문제를 해결한 학생들이 가장 많았다. 이는 Pearn, Stephens(2018)에서 대수적 사고의 특징으로 제시한 두 양 사이의 동치 관계의 이해(understanding of equivalence), 두 양 사이의 동치 관계를 이용한 식의 변형(transformation using equivalence)과 일맥상통하는 것이다. 반면 분수의 나눗셈을 학습한 6학년 학생들은 85% 정도가 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 이용한 형식화 방법(advanced multiplicative method, Pearn & Stephens, 2018)을 사용하여 문제를 해결하였으며, 정답률도 80% 이상으로 매우 높았다. 하지만 지필 평가의 결과만으로는 6학년 학생들이 문제에 제시된 두 양의 관계를 탐색한 것인지 판단하기는 어려웠다.

이에 Pang 외(2020)는 지필 평가의 결과에서는 살펴보기 어려웠던 학생들의 대수적 사고를 좀 더 면밀하게 탐색하기 위한 후속 연구로 면담 평가를 진행하고 그 결과를 분석하였다. 특히 대수적 사고 과정에(Kaput, 2008) 초점을 두고 학생들이 두 양의 관계를 탐색하여 '역 분수 문제'를 해결한 것인지, 해결 방법을 일반화하고 언어와 변수를 사용하여 표현할 수 있는지, 자신의 해결 방법과 일반화 과정을 정당화할 수 있는지 심도 있게 살펴보았다.

그 결과, 분수의 나눗셈을 학습하지 않은 5학년 학생들은 관련 분수 지식은 부족했지만, 두 양의 관계를 탐색하여 자신의 해결 방법을 일반화하고 언어로 표현하며

정당화하는 데 큰 어려움이 없었다. 반면 두 양의 관계를 탐색하지 않고 단순히 표준 알고리즘을 암기하여 문제를 해결한 6학년 학생들은 분수의 나눗셈을 학습하지 않은 5학년 학생들보다 대수적으로 사고하는 데 부족함을 보였다. 이 학생들의 일부는 자신의 해결 방법을 일반화하고 변수를 사용한 식으로 표현할 수는 있었지만, 두 양의 관계에 주목하지 못했기 때문에 정당화에 어려움을 겪었다. 하지만 두 양의 관계를 탐색하여 문제를 해결한 6학년 학생들은 해결 방법을 일반화하고 표현하며 정당화하면서 대수적으로 매우 뛰어난 모습을 보여주었다. 이러한 연구 결과는 만약 학생들이 단순히 표준 알고리즘을 암기하여 문제를 해결한다면, 대수적으로 사고하는 데 어려움을 겪을 수 있다는 사실을 보여준다. 이에 Pang 외(2020)는 초등학교에서 대수적 사고와 관련하여 분수 연산을 지도할 때는 두 양의 관계를 탐색한 것을 바탕으로 해결 방법을 일반화하고, 이를 언어와 변수를 사용한 식으로 표현하게 하며, 그 과정을 논리적으로 설명해 보도록 하는 것이 매우 중요하다는 사실을 시사점으로 제시하였다.

이를 기반으로 본 연구에서는 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업의 지도 방안을 마련하고 실제로 수업이 어떻게 구현되는지 살펴보았다. 실제 수업에서 학생들에게 분수 나눗셈에 제시된 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하게 하고, 이를 바탕으로 분수 나눗셈의 해결 방법을 일반화하고 정당화하도록 지도하는 과정을 면밀하게 분석함으로써 분수 지식과 대수적 사고 사이의 관계에 관한 시사점을 제공하고자 하였다.

2. 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소

1) 분수 나눗셈의 지도 방안과 관련된 선행연구 고찰

대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소를 도출하기 위해, 먼저 분수 나눗셈의 지도 방안을 다룬 연구들을 살펴보고 분수 나눗셈의 지도와 관련하여 필수적으로 고려해야 하는 사항을 분석하였다. 국내 연구를 살펴보면, Kim(2020)은 교과서에서 분수 나눗셈의 알고리즘을 어떻게 지도하고 있는지 살펴보기 위해 제1차 교육과정부터 2015 개정 교육과정까지의 교과서를 분수 나눗셈의 문제 상황과 분수 나눗셈 알고리즘의 개발 방법에 초점을 두고 분석하였다. 분석 결과, 나누는 수가 자연수인 경우에는 등분제로, 나누는 수가 분수인 경우에는 포함제로 지도하는 경향을 문제점으로 지적하면서, 교과서에서 분수 나눗셈을 수식 유형별로 세분화하여 지도하기보다는 분수 나눗셈의 문제 맥락을 좀 더 다양하게 제시할 것을 제안하였다. 나아가 2015 개정 교육과정에 따른 교과서에서 단위비율의 결정 맥락이 제시된 것은 바람직하지만, 포함제 맥락에서 도출되는 알고리즘과는 차이가 있으므로 이를 비교하고 연결하여 지도할 필요가 있음을 제안하였다.

단위 추론(quantitative reasoning with unit)을 기반으로 분수 나눗셈의 학습 경로를 개발한 Lee(2015)의 연구에서는, 검사지와 교실 교수 실험을 통해 학생들의 단위 추론에 대한 이해 정도를 분석하고 그 결과를 토대로 초등학교에서 분수 나눗셈을 지도하는 방안에 대한 시사점을 논의하였다. 우선 분수 나눗셈을 학습하기 전에 분수의 다양한 의미를 이해하고 분수를 하나의 양으로 파악할 수 있어야 한다고 강조하였다. 이와 더불어 분수 나눗셈의 다양한 문제 맥락을 이해하고, 맥락에 따라 도출된 비표준 알고리즘을 나누는 수의 역수를 곱하는 분수 나눗셈의 표준 알고리즘과 연결하여 지도하는 방안을 제안하였는데, 이 과정이 자연스럽게 이루어지는 것이 아니므로 학생들에게 의도적으로 지도할 필요성을 역설하면서 분수 나눗셈의 표준 알고리즘의 핵심인 역수의 개념을 시각적 모델 등을 활용하여 지도하는 방안을 제시하였다.

분수 나눗셈 알고리즘을 어떻게 도입하고 지도할 것인지를 연구한 Yim, Kim, Park(2005)은 중국, 일본, 남북한 초등학교 교과서를 살펴봄으로써 분수 나눗셈 알고리즘의 지도 방안과 관련하여 몇 가지 시사점을 논의하였다. 연구자들은 먼저 분수 나눗셈 맥락의 다양한 의미를 분석한 것을 토대로, 분수 나눗셈의 표준 알고리즘에서 나누는 수의 역수의 의미, 그리고 나누는 수의 역수를 곱하는 이유를 명확하게 지도해야 한다고 주장하였다. 나아가 분수 나눗셈을 다양한 맥락에서 지도할 것을 강조하면서, 특히 단위비율의 결정 맥락의 사용하여 분수 나눗셈의 알고리즘을 도입할 것을 제안하였는데 그 이유는 단위비율의 결정 맥락에서 앞서 언급한 나누는 수의 역수의 의미와 나누는 수의 역수를 곱하는 이유가

잘 드러나기 때문이다.

국외 연구에서는 Lamon(2012)과 Siebert(2002)가 학생들에게 분수 나눗셈을 지도할 때, 다양한 문제 맥락을 이해하는 것과 시각적 모델을 활용할 것을 공통적으로 제안하였다. 구체적으로 Siebert(2002)는 분수 나눗셈을 크게 측정 나눗셈 맥락과 분할 나눗셈 맥락으로 구분하였는데 각 맥락의 의미는 다음과 같다. 15÷3=5를 예를 들어 설명하면, 측정 나눗셈은 15안에 3이 5번 들어있음을 의미하고, 분할 나눗셈은 15를 3으로 똑같이 나누었을 때 1에 해당하는 양이 5라는 뜻이다. 측정 나눗셈 맥락에서는 나누어지는 수 안에 나누는 수가 몇 번 들어있는지를 알아보는 것을 토대로 분수 나눗셈의 알고리즘을 설명하고, 분할 나눗셈 맥락에서는 나누는 수를 늘리고 줄이는 과정을 이용하여 분수 나눗셈의 알고리즘을 도출한다. 이처럼 문제 맥락별로 도출한 분수 나눗셈의 알고리즘은 그 의미가 조금씩 다르므로 이를 표준 알고리즘과 연결하여 지도할 필요가 있음을 강조하였다.

이상의 결과를 종합하여 살펴보면 연구자들은 분수 나눗셈의 표준 알고리즘, 즉 '나누어지는 수에 나누는 수의 역수를 곱하는 알고리즘'을 학생들이 개념적으로 이해할 수 있도록 지도하는 방안에 관해 중점적으로 논의하였다. 이와 관련하여 특히 강조한 사항은 학생들에게 분수 나눗셈의 의미와 관련하여 다양한 문제 맥락을 제시하는 것이다. 분수 나눗셈과 같이 이해하기 어려운 계산 원리를 설명할 때는 다양한 문제 맥락을 제시하는 것이 학생들의 이해에 도움을 주기 때문이다(Pang & Lee, 2009). 또한 연구자들은 문제 맥락에 따라 도출되는 분수 나눗셈의 비표준 알고리즘을 이해하고 이를 표준 알고리즘과 연결하여 지도할 것을 제안하였다. 나아가 분수 나눗셈의 알고리즘을 개념적으로 이해하기 위해 역수의 개념을 지도하고 나누는 수의 역수를 곱하는 이유를 제시할 필요성에 관해 역설하였으며, 문제 상황을 그림으로 구체화할 수 있는 시각적 모델의 활용을 제안하기도 하였다.

2) 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하는 방안과 관련된 선행연구 고찰

사실 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하는 방안에 관한 연구는 별반 이루어지지 않았다. 이에 중등학교 학생을 대상으로 한 연구이지만 초등학교에서 분수 지식(분수 나눗셈 문제 포함)과 대수적 사고를 함께 지도하는 방안을 논의한 Lee(2019)의 연구도 포함하여 시사점을 분석하였다. 이 연구들은 공통적으로 분수 나눗셈 문제에 제시된 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하는 것이 중요함을 강조하였는데, 이를 위해 문제를 시각화하여 보여줄 수 있는 시각적 모델의 중요성도 함께 역설하였다.

Empson 외(2011)는 분수 연산에서 관계적 사고(relational thinking)를 강조하였다. 이는 학생들이 분수를 관계적인 양으로 이해하고, 분수의 연산 과정에서 연산의 성질과 동치 관계를 이용하는 것을 말한다. 다시 말해 학생들이 분수 연산에 관해 관계적으로 사고하는 능력을 기른다면, 식을 변형하고 일반화하는 과정에서 대수적 추론을 의미 있게 학습할 수 있다는 것이다. Pang 외(2020)에서는 분수 나눗셈을 해결하는 과정에서 드러나는 학생들의 대수적 사고를 분석하면서 해결 방법을 일반화하고 표현하는 것(Pearn & Stephens, 2018)의 중요성을 주장하였다. 이는 분수 나눗셈의 지도 방안에서 논의했던 표준 알고리즘의 개념적 이해와 연결하여 생각해 볼 수 있다. 즉, 분수 나눗셈 문제의 해결 방법에서 공통점을 찾아 일반화하는 과정을 좀 더 의미 있게 지도한다면, 학생들이 나누어지는 수에 나누는 수의 역수를 곱하는 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 개념적으로 이해하는 데 도움을 줄 수 있을 것이다. 한편 Pang 외(2020)는 해결 방법을 일반화하고 표현하는 것과 함께 해결 방법을 정당화하는 과정도 강조하여 지도할 것을 제안하였는데, Lee(2019)의 연구에서도 학생들에게 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하여 식으로 표현하도록 한 것에서 더 나아가 식의 의미를 설명하게 하는 과정을 제시하고 있다. 이처럼 대수적 사고와 관련하여 학생들이 자신의 해결 방법을 정당화할 수 있는지 살펴보는 매우 중요한 과정이라고 할 수 있다.

3) 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소의 도출

본 절에서는 앞서 선행연구에서 논의한 시사점을 바탕으로 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 기본적인 방향성을 도출하였다. 본 연구의 목적은

기본적인 방향성을 기반으로 수업을 설계한 후, 수업의 구현 양상을 분석하는 것이기 때문이다. 이에 앞서 검토한 지도 방안의 시사점을 유사한 항목끼리 요목화하여 '대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소'를 도출하였다.

'대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소'를 도출한 구체적인 과정은 다음과 같다. 첫째, '다양한 분수 나눗셈 맥락에서 나누어지는 수와 나누는 수의 관계 탐색하기'를 교수·학습 요소로 도출하였다. 이는 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업을 구현하기 위한 기본적인 토대가 되는 요소이다. 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업에서는 학생들에게 분수 나눗셈의 다양한 문제 맥락([Table 1] 참조)을 제시하고, 그 의미를 바탕으로 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하여 문제를 해결할 수 있도록 지도해야 한다 (Empson et al., 2011; Lee, 2019; Pang et al., 2020; Pearn & Stephens, 2018; Sinicrope et al., 2002). 나아가 학생들이 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색할 수 있도록 돕는 적절한 시각적 모델을 제시할 필요가 있다.

둘째, '분수 나눗셈의 해결 방법을 일반화하고 표현하기'를 도출하였다. 대수적 사고를 강조한 수업에서는 수학적 구조와 관계를 일반화하는 것이 중요하다(Kieran et al., 2016). 이에 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업에서 학생들은 두 양의 관계를 탐색한 것을 바탕으로 분수 나눗셈의 해결 방법을 일반화할 수 있어야 한다(Lee, 2015; Pang et al., 2020; Pearn & Stephens, 2018; Siebert, 2002). 나아가 일반화한 해결 방법을 언어와 변수를 사용한 식으로 표현할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

셋째, '분수 나눗셈의 해결 방법을 정당화하기'를 도출하였다. 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업에서 학생들은 문제 해결 과정을 논리적으로 설명하고 다른 해결 방법과 비교하고 논의할 수 있어야 한다. 나아가 문제 맥락별 해결 방법을 비교하고 설명하면서 정당화하는 과정을 지도할 필요가 있다(Lee, 2015; Yim 외, 2005; Lee, 2019; Pang et al., 2020; Siebert, 2002).

3. 분수 나눗셈의 문제 맥락

1) 선행연구에서 제시한 분수 나눗셈의 문제 맥락

선행연구에서 제시한 분수 나눗셈의 문제 맥락을 비교하여 정리하면 다음과 같다. 먼저 Lee(2015)는 Carpenter, Fennema, Franke, Levi와 Empson(1999), Sinicrope 외(2002), Schwartz(1988)의 연구를 바탕으로 분수 나눗셈의 맥락을 측정 나눗셈과 분할 나눗셈으로 분류하고, 측정 나눗셈은 포함제와 곱셈적 비교로, 분할 나눗셈은 등분제, 단위비율의 결정, 곱셈의 역 맥락으로 세분화하였다. 중국 교사들의 분수 나눗셈에 관한 이해를 조사한 Ma(1999)는 분수 나눗셈의 맥락을 측정 모델, 분할 모델, 곱과 인수 모델로 분류하였는데, 곱과 인수 모델은 곱과 하나의 인수를 알고 있을 때 다른 인수를 나타내는 수를 알아내는 것으로 카테시안 곱의 역 맥락 및 곱셈의 역 맥락과 관련이 있다. Sinicrope 외(2002)는 자연수의 나눗셈 맥락을 등분제, 포함제, 카테시안 곱의 역으로 분류한 것에서 더 나아가 분수 나눗셈 맥락으로 단위비율의 결정 맥락과 곱셈의 역 맥락을 추가하여 다섯 가지 분수 나눗셈 맥락을 제시하였다.

한편 Lee(2015)의 연구에서는 측정 나눗셈을 포함제와 곱셈적 비교로 구분하였는데 구체적으로 포함제는 나누어지는 수에 나누는 수가 몇 번 들어가는지를 측정하는 문제 맥락이며, 곱셈적 비교는 나누어지는 수가 나누는 수의 몇 배인지를 구하는 문제 맥락을 말한다. 반면 Sinicrope 외(2002)가 분류한 포함제는 이 둘의 의미를 모두 포함하고 있다.

2) 본 연구에서 사용한 분수 나눗셈의 문제 맥락

본 연구에서는 분수 나눗셈의 문제 맥락을 다음과 같이 구체화하였다([Table 1] 참조). 분수 나눗셈의 문제 맥락을 Sinicrope 외(2002)의 기준을 바탕으로 분류하되, 나누어지는 수와 나누는 수의 관계가 유사한 맥락끼리 요목화하여 크게 세 가지로 구분한 것이 앞서 제시한 선행 연구들과의 차이점이다.

먼저 나누어지는 수가 나누는 수의 몇 배인지를 구하는 분수 나눗셈에서는 나누어지는 수에 나누는 수가 몇 번 들어가는지를 구하는 포함제 맥락과 나누어지는 수가 나누는 수의 몇 배인지를 구하는 곱셈적 비교 맥락을 함께 다루었다. 곱셈적 비교 맥락에서 학습할 수 있는 배 개념은 곱셈적 사고의 본질이며(Kang, 2009), 포함제 맥락에서 측정한 횟수만 강조하면 다양한 문제 상황을 이끄는 데 한계가 있으므로 횟수를 구하는 상황뿐 아니라

배를 구하는 상황도 함께 제시하여 학생들이 곱셈적 관계에 주목할 수 있도록 하였다(Shin, 2013). 한편 이러한 문제 맥락에서는 같은 종류의 양을 비교하므로 나누어지는 수와 나누는 수의 양의 단위가 같은 특징이 있다. 이에 문제에 제시된 두 양 중에서 1에 해당하는 양이 나누는 수가 되는 두 양의 관계를 탐색하고, 분모를 통분하여 분자끼리 나누는 해결 방법과 연결하여 지도하였다.

[Table 1] Problem contexts of fractional division used in this study

Problem contexts of fractional division	Examples	Commonality of the relationship between a dividend and a divisor	Commonality of solutions
quotative (measure-ment) division	How many cups can I put in if I divide $\frac{2}{5}$L of water into $\frac{1}{10}$L each?	fractional division that calculates how many times the divisor is included in the dividend	solution methods for dividing numerators by changing the fractions (or numbers) with the same denominator
Multiplicative comparison	My sister walks 2km of the playground a day. I walk $\frac{3}{4}$km a day. How many times the distance she walked is the distance I walked?		
Partitive division	I'm going to share $\frac{3}{4}$ L of milk equally to 3 people. How many liters can one person have?	fractional division that calculates the quantity of the dividend corresponding to the divisor 1	solution methods of dividing the dividend by the numerator of the divisor and multiplying it by the denominator
Determination of a unit rate	A steel rod that is $\frac{3}{4}$ m long weighs $\frac{3}{5}$ kg. How many kilograms does the rod with 1m long weigh?		
Inverse of multiplication	My pencil is 20cm long. This is $\frac{4}{7}$ times the length of Yerim's pencil. How long is Yerim's pencil?		
Inverse of cartesian product	The area of the rectangle is $\frac{3}{7}$m^2. If the length is $\frac{4}{5}$m, how long is the width?	fractional division that calculates the length of one side of a rectangle when its area is known	solution methods of dividing the dividend by the numerator of the divisor and multiplying it by the denominator

다음으로 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈에서는 등분제 맥락, 단위비율의 결정 맥락, 곱셈의 역 맥락을 다루었다. 등분제 맥락과 단위비율의 결정 맥락은 1에 해당하는 양을 구해야 하는 공통점을 지니지만 '등분'이라는 용어가 지닌 통상적인 의미로 인해 나누는 수가 자연수인 경우는 등분제 맥락, 나누는 수가 분수인 경우는 단위비율의 결정 맥락으로 구분한다(Sinicrope et al., 2002). 곱셈의 역 맥락은 나눗셈을 곱셈의 역조작으로 보는 것으로 분수의 곱셈 맥락 중 배의 상황을 나타내는 비율과 관련되며, 분수의 곱셈 및 비와 비율 단원과 연결하여 학생들에게 그 의미에 관해 주의 깊게 지도할 때 필수적이다(Park, Song, & Yim, 2004). 이에 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 비와 비율 단원에서 곱셈의 역 맥락을 제시하여 학생들에게 기준량과 비교하는 양의 관계를 탐색할 수 있도록 하였지만, 현행 교과서의 비와 비율 단원에서는 관련 내용이 삭제되었으므로(Chang et al., 2017), 본 연구에서는 학생들에게 1배에 해당하는 양을 구하는 곱셈의 역 맥락을 등분제 맥락, 단위비율의 결정 맥락과 함께 지도할 필요가 있다고 판단하였다. 한편 이러한 문제 맥락들은 서로 다른 종류의 두 양을 비교하며 나누어지는 수와 몫의 양의 단위가 같은 특징을 가진다. 이에 문제에 제시된 두 양의 관계를 파악하여 1에 해당하는 양을 구해야 하므로 나누는 수를 1로 만드는 두 양의 관계를 탐색하고, 나누는 수의 분자로 나누고 분모를 곱하는 해결 방법과 연결할 수 있다.

마지막으로 직사각형의 넓이를 알 때 직사각형의 한 변의 길이를 구하는 카테시안 곱의 역 맥락을 제시하였다. 이 문제는 양과 양의 곱의 역 상황으로 나누는 수와 몫의 양의 단위가 같다. 사실 그동안 교과서에서 분수 나눗셈의 해결 방법을 탐색하는 과정은 나누어지는 수가 나누는 수의 몇 배인지를 구하는 문제나 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 문제를 중심으로 다루어졌으며, 직사각형의 넓이를 알 때 직사각형의 한 변의 길이를 구하는 문제는 표준 알고리즘을 적용하거나 응용하는 경우로 간단히 취급되었다(Yim, 2007). 이에 본 연구에서는 카테시안 곱의 역 맥락에서도 초등학교 학생들이 해결 방법을 탐색하는 경험을 가질 수 있도록 별도의 차시를 마련하여 수업을 구성하고자 하였다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구절차

본 연구의 목적은 6학년 학생들을 대상으로 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업을 구현하여 분수 나눗셈 수업의 지도 방안에 구체적인 시사점을 제공하는 것이다. 이에 대략적인 연구 절차는 다음과 같다. 첫째, 문헌 연구를 바탕으로 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소를 도출하였다. 둘째, 수업을 구현하기에 적합한 학년과 단원을 선정하여 교수·학습 요소에 따라 분수 나눗셈 단원을 재구성하고 차시별 교수·학습 과정안의 초안을 개발하였다. 셋째, 수업자와 학급을 선정하고, 그 학급의 학생들에게 실태 조사를 실시하였다. 넷째, 학생들의 실태 조사 결과 및 수업자와의 사전 논의를 통해 단원의 재구성 방향과 차시별 교수·학습 과정안을 수정하였다. 마지막으로 실제 수업을 구현하고, 영상 및 전사 자료, 학생들의 활동지, 수업자 및 학생과의 면담 자료 등을 토대로 수업을 분석하였다.

연구자는 각 절차마다 초등 수학 교육 전문가 1명 및 대학원에서 초등 수학 교육으로 박사 과정 중인 교사 4명의 검토를 받아 자료를 수정·보완하였으며, 수업자와의 충분한 논의 과정을 거쳐 자료의 신뢰도를 확보하고자 하였다. 나아가 G광역시 소재 A초등학교 학생들을 대상으로 예비 검사 및 예비 면담을 실시하여 본 연구에서 사용한 자료의 타당성을 검증하였다.

2. 연구 대상

1) 참여 교사에 대한 정보

본 연구에서 제안하는 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업의 필요성을 이해하고 이를 수업에 구현하기를 희망하는 교사를 선정하기 위해, 6학년 담임교사 중에서 분수 나눗셈의 지도에 관심이 있고 초등 수학 교육에 전문성을 지닌 2명의 교사를 편의 표집하였다. 두 교사는 모두 수학 수업에 대한 개선 의지가 강할 뿐 아니라, 학생들이 연산 단원을 학습할 때 알고리즘의 습득보다는 해결 방법을 개념적으로 이해할 수 있도록 지도하는 데 관심이 많았기 때문에 본 연구에 적극적으로 참여할 수 있었다.

2) 참여 학생에 대한 정보

본 연구에서 6학년 학생들을 연구 대상으로 선정한 까닭은 현행 교육 과정 상 6학년에서만 분수의 나눗셈을 학습하고, 6학년 학생들은 분수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈을 모두 학습한 상태이기 때문이다. 이러한 이유로 6학년 학생들이 본 수업에서 강조하고 있는 분수 나눗셈의 문제 맥락에 제시된 두 양의 관계를 탐색하고, 해결 방법을 개념적으로 이해하여 일반화하고 정당화하는 과정에 무리 없이 참여할 수 있을 것으로 판단하였다. 이에 가정의 사회·경제적 수준과 학력 수준이 중위 수준인 6학년 2개 학급을 연구 대상으로 선정하였다.

3. 자료 수집 및 분석

1) 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업의 설계

본 연구에서는 현행 교육과정을 중심으로 하되, 앞서 언급한 '대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소'를 반영하여 총 11차시의 수업을 설계하였다. 그 중 본 논문에서는 4~6차시인 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈 수업의 구현 양상을 중점적으로 기술하였다. 그 이유는 이 차시에서 교과서에 제시된 등분제 맥락, 단위비율의 결정 맥락뿐 아니라 곱셈의 역 맥락과 같이 교과서에 제시되지 않은 문제 맥락까지 다루었기 때문에, 보다 다양한 관점에서 학생들의 사고 과정을 심도 있게 분석할 수 있었다. 나아가 이 차시에서 중점적으로 제시한 이중 척도 모델을 통해, 학생들이 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하는 과정을 보다 면밀하게 살펴볼 수 있었기 때문이다.

이에 구체적인 수업의 설계 방향은 다음과 같다. 첫째, 교과서에서는 분수 나눗셈의 수식 유형별로 차시를 구성했지만 본 연구에서는 문제 맥락별로 요목화하여 각 차시를 설계하였다. 구체적으로 앞서 분수 나눗셈의 문제 맥락([Table 1] 참조)에서 제시한 나누어지는 수와 나누는 수의 관계의 공통점에 따라 크게 세 부분으로 수업을 구성하였다. 즉 나누어지는 수가 나누는 수의 몇 배인지를 구하는 분수 나눗셈(예, 포함제 맥락, 곱셈적 비교 맥락), 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈(예, 등분제 맥락, 단위비율의 결정 맥락, 곱셈의 역 맥락), 직사각형의 넓이를 알 때 직사각

형의 한 변의 길이를 구하는 분수 나눗셈(예, 카테시안 곱의 역 맥락)으로 크게 구분한 다음 각 차시를 설계하였다.

둘째, 각 차시마다 문제 맥락별로 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색한 후에는 해결 방법을 일반화하고 표현하여 정당화할 수 있도록 활동을 구성하여 대수적 사고를 강조하였다(구체적인 교수·학습 과정안은 부록 참조). 예를 들어, 본 논문에서 중점적으로 기술한 4~6차시는 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈을 다루었다. 구체적으로 살펴보면 먼저 등분제 맥락의 (자연수)÷(자연수) 문제를 복습한 다음, 단위비율의 결정 맥락, 곱셈의 역 맥락의 (자연수)÷(분수) 문제를 차례로 제시하였다. 그런 다음, (분수)÷(분수) 유형을 단위비율의 결정 맥락, 곱셈의 역 맥락에서 지도함으로써 학생들이 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 충분히 탐색할 수 있도록 하였다. 학생들이 두 양의 관계를 탐색한 다음에는 각 문제에서 구하는 것은 무엇인지, 나누어지는 수와 나누는 수의 관계에 어떤 공통점이 있는지 살펴보고, 문제 해결 방법의 공통점을 언어로 표현하게 하였다. 그런 다음에는 구체적인 맥락에서 나누어지는 수가 정해지지 않은 경우, 나누어지는 수와 나누는 수가 모두 정해지지 않은 경우를 차례로 제시하여 학생들이 문제 해결 방법을 일반화하여 변수를 사용한 식으로 표현할 수 있도록 지도하였다. 나아가 학생들이 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하여 문제를 해결할 때는 해결 방법을 설명해 보도록 하였고, 해결 방법을 일반화하여 변수를 사용한 식으로 표현한 다음에는 식의 의미를 설명하도록 하여 학생들이 정당화 과정을 경험할 수 있도록 수업을 구성하였다.

셋째, 크게 세 가지로 구분한 문제 맥락별 해결 방법을 비교하여 살펴보고 표준 알고리즘을 도출할 수 있는 차시를 별도로 구성하였다. 나누어지는 수가 나누는 수의 몇 배인지를 구하는 분수 나눗셈, 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈, 직사각형의 넓이를 알 때 직사각형의 한 변의 길이를 구하는 분수 나눗셈의 각 수업에서 일반화한 해결 방법을 비교하고, 나누어지는 수에 나누는 수의 역수를 곱하는 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 도출할 수 있도록 수업을 설계하였다.

이상의 내용을 바탕으로 본 연구에서는 각 차시별 구체적인 교수·학습 과정안, 학생 활동지, 교사용 PPT를 개발하여 두 교사에게 제공하고, 연구자의 의도와 수업에서 중점을 두고 지도해야 할 내용을 안내하였다. 수업을 협의하는 과정에서 두 교사는 연구 대상 학생들의 학습 수준과 특성을 고려하여 수업에 관한 검토 의견을 제시하였고, 연구자는 두 교사의 의견을 수렴하여 교수·학습 과정안을 최종적으로 수정·보완하였다.

2) 수업 관찰 및 녹화

본 연구는 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업의 구현 양상을 분석하는 데 초점이 있다. 이에 두 명의 교사가 실시한 수업 전체(총 22차시)를 분석 대상으로 선정하고, 연구자는 수업에 관찰자로 참여하였다. 그 과정에서 연구자는 교사의 행동, 학생의 반응 및 수행, 교사와 학생의 상호작용 등을 면밀하게 관찰하고 기록하였다. 각 수업은 모두 총 2대의 카메라를 설치하여 녹화하였다. 구체적으로 카메라 1대는 교실의 전반적인 상황을 촬영하기 위해 교실의 뒤편에 설치하였고, 다른 1대는 교실의 앞 편에 설치하여 학생 활동 및 발표에 초점을 두어 촬영하였다. 녹화한 수업은 모두 전사하여 본 연구의 분석 대상으로 활용하였다.

3) 자료 분석

본 연구의 분석 초점은 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소를 적용한 수업이 실제로 어떻게 구현되는지 살펴보는 데 있다. 이를 위해 수업의 전반적인 흐름을 살펴봄으로써, 수업을 실행한 교사와 학생들 사이의 상호작용이 어떻게 이루어지고 수업이 어떻게 구현될 수 있는지 상세히 살펴보았다. 구체적으로 본 연구에서 제안한 분수 나눗셈의 문제 맥락별 특징에 따라 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하고, 해결 방법을 일반화하고 표현하며 정당화하는 과정이 실제 수업에서 어떻게 이루어지는지 분석하였다. 본 논문에서 중점적으로 기술한 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈 수업을 예로 든다면, 본 연구에서 제시한 교수·학습 요소에 따라 나누는 수를 1로 만드는 두 양의 관계를 탐색하는 측면, 나누는 수의 분자로 나누고 분모를 곱하는 해결 방법을 일

반화하고 표현하는 측면, 해결 방법을 정당화하는 측면으로 구분하여 수업의 주요 에피소드, 학생들의 반응 등을 면밀하게 분석하였다. 나아가 수업 실행 과정에서 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업을 성공적으로 이끌기 위한 교사의 관행을 무엇인지 함께 살펴보았다.

Ⅳ. 결과분석 및 논의

본 절에서는 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업의 구현 양상을 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 문제 맥락을 중심으로 분석하였다. 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈 수업의 핵심은 1에 해당하는 양을 구하는 것이다. 교사는 앞서 언급한 '대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소'를 바탕으로 학생들이 문제에서 구하는 것이 무엇인지, 제시된 두 양이 어떤 관계에 있는지, 두 양 중에서 어떤 양을 1로 만들어야 하는지 이해하는 데 중점을 두고 지도하였다. 나아가 문제 해결 방법의 공통점을 일반화하여 이를 언어와 변수를 사용하여 표현하고, 그 과정에서 학생들이 해결 방법을 정당화할 수 있도록 논의를 이끌었다.

1. 나누는 수를 1로 만드는 두 양의 관계 탐색

1) 등분제 맥락

교사는 학생들이 1학기 내용을 복습할 수 있도록 (자연수)÷(자연수)의 등분제 맥락을 제시하고 문제("고구마 5kg을 캐는 데 2시간이 걸렸습니다. 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 양은 몇 kg인가요?")에서 주어진 두 양(2시간, 5kg)이 어떤 관계에 있는지 탐색하도록 도왔다. 먼저 이중 척도 모델을 함께 살펴보며 띠와 수직선이 의미하는 게 무엇인지, 문제에 주어진 두 양인 고구마의 양 5kg과 2시간이 같은 위치에 표시된 것이 어떤 의미인지 생각해보도록 하였다. 이 과정에서 교사는 나누어지는 수가 나누는 수의 몇 배인지를 구하는 분수 나눗셈 맥락(예, 포함제 맥락, 곱셈적 비교 맥락)과 어떤 차이가 있는 비교해 보도록 하였는데 한 학생이 "지난 시간에는 양이랑 양이 나왔고, 이번 시간에는 양이랑 시간이 나왔어요."라고 답하였다. 이에 교사는 지난 시간에는 기준이 되는 양(1에 해당하는 양)이 제시되어 몇 번 또는 몇 배가 되는지를 구해야 했지만, 이번 시간에 배울 내용은 1시간에 해당하는 양을 구해야 한다고 보충 설명하였다. 나아가 지난 시간에는 문제에 주어진 양의 단위가 몇 m 또는 몇 L로 같았지만, 이번 시간에는 시간과 양으로 다르기 때문에 문제를 해결하는 방식이 조금 다르다고 설명하면서 두 문제 맥락에서 제시된 두 양의 관계에 차이가 있음을 학생들이 깨닫도록 하였다.

사실 학생들은 1학기에 이미 학습한 내용이었기 때문에 5÷2와 같이 식을 세우거나, 이중 척도 모델을 사용하여 문제를 어렵지 않게 해결할 수 있었다. 하지만 교사는 학생들에게 답을 구하는 것보다 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 파악하는 것이 더 중요하다고 강조하면서 <Episode 1>에서처럼 "고구마 1kg을 캐는데 몇 시간이 걸리는가?"와 같이 문제를 바꾼다면 어떻게 해결할 수 있을지 질문하였다.

<Episode 1: A process of determining the divisor in a problem>

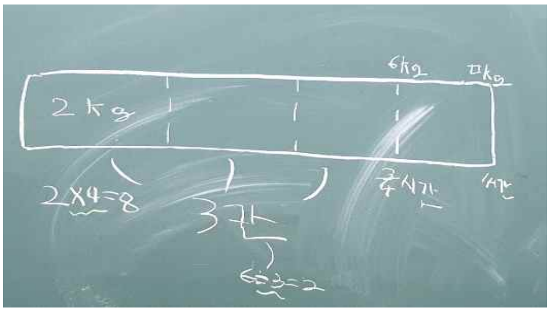
교사:	이 문제에서 1시간은 어떤 의미일까요?
한주:	1에 해당하는 양?
교사:	좋아요. 그럼 왜 5를 2로 나눌까요?
한주:	2가 기준이라서?
교사:	다시 물을게요. 이 문제에서 기준이 되는 양이 무엇일까요?
학생들:	1시간
교사:	1시간에 캘 수 있는 양이 기준이 되지요. 좀 더 보충하면?
시언:	2시간을 1시간으로 바꿔야 하니까 나누기 2를 했어요.
교사:	그럼 만약 문제에서 1kg을 캐는 데 걸리는 시간을 구하라고 한다면 어떻게 식을 세울까요?
승우:	5kg을 1로 만들어야 하니까 나누기 5를 해야 해요.

교사는 이와 같은 논의를 통해 학생들이 문제에서 기준이 되는 양이 1시간에 해당하는 양이 아니라 1kg에 해당하는 양으로 바뀌므로, 5kg을 1kg으로 만들기 위해 식이 2÷5가 된다는 사실을 깨닫도록 하였다. 이 과정에서 학생들은 1에 해당하는 양을 구하기 위해 문제에서 어떤 양을 나누는 수로 해야 하는지를 이해하고, 문제에서 구하는 것이 무엇인지에 따라 나누어지는 수와 나누

는 수가 달라질 수 있음을 탐색하는 시간을 가질 수 있었다.

2) 단위비율의 결정 맥락

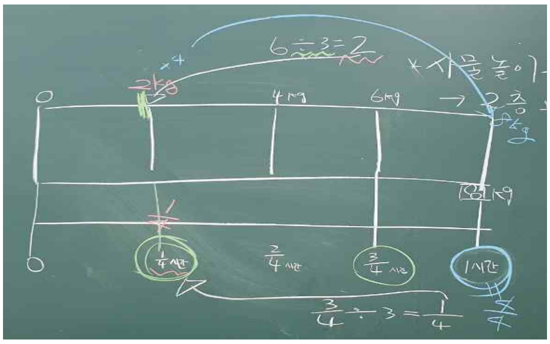
나누는 수가 분수인 단위비율의 결정 맥락에서는 등분제 맥락과 유사한 문제를 제시하였는데 나누어지는 수가 자연수인 경우를 먼저 다루고 분수인 경우를 나중에 다루었다. 교사는 학생들이 각 문제를 해결할 때마다 문제에서 구하는 것이 무엇인지, 이전 문제와는 어떤 공통점이 있는지 탐색할 수 있도록 하였는데, 구체적으로 시간과 고구마의 양은 어떤 관계에 있을지, 왜 이중 척도 모델의 같은 선상에 고구마의 양과 시간을 표시했을지 등을 질문하였다.



[Fig. 1] The first example of using a visual model to explore the relationship between a dividend and a divisor

학생들 대부분은 이중 척도 모델을 이용하여 문제를 해결하였는데 [Fig. 1]의 학생은 3칸에 해당하는 양이 6kg이므로 1칸에 해당하는 양을 구하기 위해서 나누기 3을 한 다음, 4칸에 해당하는 양(1시간에 캘 수 있는 양)을 구하기 위해서 곱하기 4를 하였다고 설명하였다.

[Fig. 2]의 학생은 $\frac{4}{4}$시간이 1시간이기 때문에 1칸이 차지하는 시간은 $\frac{1}{4}$시간이고 $\frac{1}{4}$시간이 차지하는 양은 6÷3을 해서 2kg이므로 1시간이 차지하는 양은 2×4를 해서 8kg이 나온다고 하였다. 이에 교사는 $\frac{1}{4}$시간에 해당하는 양을 먼저 구하기 위해 나누는 수의 분자로 나누고, 1시간 즉 $\frac{4}{4}$시간에 해당하는 양을 구하기 위해 나누는 수의 분모로 곱하는 방법을 정리하여 한 번 더 안내하였다.



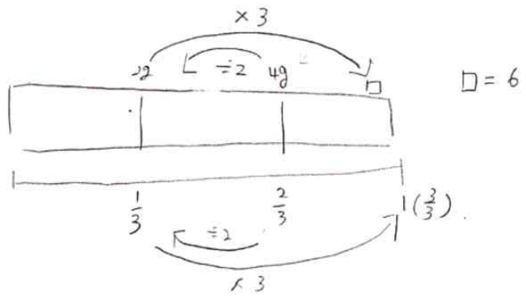
[Fig. 2] The second example of using a visual model to explore the relationship between a dividend and a divisor

3) 곱셈의 역 맥락

앞서 언급한 바와 같이 본 연구에서는 (자연수)÷(분수), (분수)÷(분수) 유형을 다룰 때 교과서에서는 제시되지 않았던 곱셈의 역 맥락을 추가로 제시하여 학생들이 단위비율 결정 맥락과 공통점과 차이점을 탐색할 수 있도록 하였다. 구체적으로 “연필의 무게는 4g입니다. 이것은 지우개 무게의 $\frac{2}{3}$배입니다. 지우개의 무게는 몇 g인가요?”의 문제에서 구하는 것이 무엇인지 질문하였고, 학생들이 단순히 ‘지우개의 무게요.’라고 답하는 것에서 나아가 ‘1배에 해당하는 양인 지우개의 무게’라고 좀 더 정확하게 대답할 수 있도록 이중 척도 모델을 사용하여 지도하였다. 한편 교사는 연필의 무게 4g과 $\frac{2}{3}$배는 어떤 관계에 있는지 논의하기 위해 지우개의 무게와 연필의 무게를 비교하게 하였는데, 이 과정에서 일부 학생들이 “지우개의 무게가 더 가볍다.”라고 답하였다. 이에 교사는 연필의 무게가 지우개 무게의 $\frac{2}{3}$배라는 것의 의미를 학생들에게 설명하고 이중 척도 모델을 통해 확인시켰다. 그런 다음 문제에서 구하고자 하는 지우개의 무게, 즉 □의 위치를 함께 살펴보면서 단위비율의 결정 맥락과 비교해 보도록 하였는데, 이를 통해 학생들은 고구마 문제는 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 양을 구하는 것이고, 연필과 지우개 문제는 1배인 지우개의 무게를 구하는 것으로 두 문제 모두 1에 해당하는 양을 구하는 것

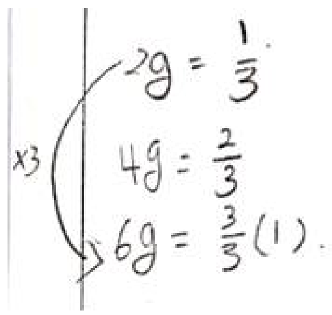
이라는 공통점을 발견할 수 있었다.

두 문제 맥락의 공통점을 발견한 학생들은 [Fig. 3]과 같이 나누는 수를 1로 만들어 문제를 해결하였다. 구체적으로 나누는 수 $\frac{2}{3}$을 1로 만들기 위해 분자 2로 나누고 분모 3을 곱하고, 나누어지는 수에도 같은 수를 나누고 곱하여 문제에서 구하는 지우개의 무게가 6g이라는 것을 구할 수 있었다.



[Fig. 3] The third example of using a visual model to explore the relationship between a dividend and a divisor

일부 학생들은 이중 척도 모델에서 4g과 $\frac{2}{3}$배가 같은 선상에 있다는 것에 주목하여 [Fig. 4]와 같은 식으로 표현하기도 하였다. 이에 교사는 이 학생의 표현이 어떤 의미일지 학생들과 논의하고, 좀 더 정확한 수학적 표현을 위해 등호 대신 화살표를 사용할 것을 제안하였다.



[Fig. 4] An example of an expression of the equality between a dividend and a divisor

이상과 같이 교사는 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈 수업에 제시된 세 가지 문제 맥락을 지도하면서, 각각의 맥락마다 나누어지는 수와 나누는 수가 어떤 관계에 있는지 파악하는 것은 물론, 각 문제 맥락에 제시된 두 양의 관계에서 공통점을 파악할 수 있도록 지도하였다. 특히 각 문제 맥락에서 제시된 이중 척도 모델을 함께 살펴보고 나누어지는 수와 나누는 수가 어떤 관계에 있는지, 문제에서 구하는 몫인 □는 얼마 정도 될지 어림하면서 학생들의 논의를 이끌고 문제를 의미 있게 해결할 수 있도록 하였다. 이를 통해 학생들은 "1시간, 1배 등 1에 해당하는 양을 구하는 점이 같다.", "(이중 척도 모델에서) □ 의 위치가 같다.", "(이중 척도 모델에서) 한 칸의 양을 먼저 구하는 점이 같다." 와 같이 세 가지 문제 맥락에서 나누어지는 수와 나누는 수 관계의 공통점을 발견할 수 있었으며, 1에 해당하는 양을 구하기 위해 나누는 수를 1로 만들어야 한다는 사실을 이해하였다.

2. 나누는 수의 분자로 나누고 분모를 곱하는 해결 방법의 일반화 및 표현

1) 해결 방법을 일반화하고 언어로 표현하기

본 수업에서 교사는 5개의 문제를 제시하고, 학생들이 각 문제 맥락에서 드러나는 나누어지는 수와 나누는 수 관계의 공통점을 발견하여 해결 방법을 일반화할 수 있도록 하였다. 앞서 언급한 바와 같이 (자연수)÷(자연수), (자연수)÷(분수), (분수)÷(분수)의 수식 유형별로 두 양의 관계가 유사한 문제를 제시하고, 학생들이 두 양의 관계를 탐색하여 문제를 해결하도록 도운 다음에는, 나누어지는 수와 나누는 수의 값이 달라지더라도 문제 해결 방법이 같을지 생각해보도록 하였다. 이를 통해 학생들은 5개 문제 맥락에 제시된 몫의 의미, 그리고 나누어지는 수와 나누는 수의 관계의 공통점을 발견하고 "나누는 수의 분자로 나누고 분모를 곱해요."와 같이 해결 방법을 일반화하여 언어로 표현할 수 있었다.

2) 해결 방법을 일반화하고 변수를 사용한 식으로 표현하기

학생들이 문제 해결 방법을 일반화하여 언어로 표현한 다음에 교사는 나누어지는 수와 나누는 수의 값이 변하더라도 적용할 수 있는 식을 만들어 보자고 제안하였다. 특히 본 수업에서는 해결 방법을 일반화하고 변수를

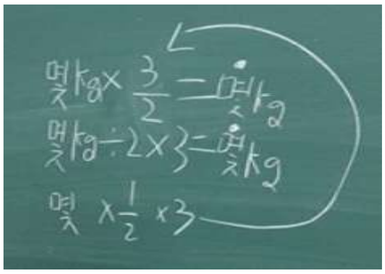
사용한 식으로 표현할 때 두 단계로 나누어 학생들을 지도하였다.

먼저 나누어지는 수가 정해지지 않았을 때 학생들이 이를 변수를 사용하여 어떻게 나타낼 수 있을지 알아보았다. 구체적으로 "고구마 몇 kg을 캐는데 $\frac{2}{3}$시간이 걸린다면 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 양은 몇 kg인가요?"와 같이 나누어지는 수를 정해지지 않은 양으로 제시하였다. 교사는 <Episode 2>와 같이 학생들에게 고구마의 무게가 얼마일지 질문하였고 학생들은 "정해져 있지 않다.", "몇 kg인지 몰라요."라고 답하였다. 이에 교사는 고구마의 무게가 얼마인지 정해져 있지 않지만 나누어지는 수인지 나누는 수인지 묻고는, 나누어지는 수가 정해지지 않았다는 것이 어떤 의미인지 생각해볼 수 있도록 하였다. 학생들은 고구마의 양이 정해지지 않아 계속 바뀐다면 이를 어떻게 나타내면 좋을지 논의한 것을 바탕으로 정해지지 않은 양을 변수를 사용한 식으로 표현할 수 있었다.

<Episode 2: A process of representing an unspecified quantity as a variable>

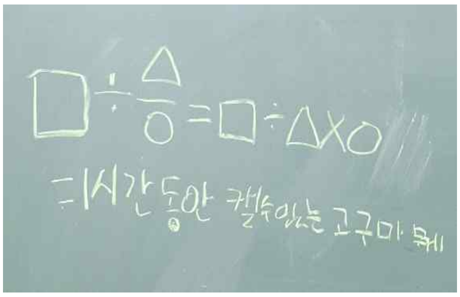
교사:	얘들아, 이 문제를 식으로 나타내려고 하는데 고구마 무게가 앞에서처럼 어떤 수로 정해져 있나요?
학생들:	아니오
교사:	그러면 고구마의 무게 몇 kg은 나누어지는 수예요? 나누는 수예요?
학생들:	나누어지는 수요.
교사:	맞아요. 나누어지는 수가 정해지지 않았다는 것은 어떤 의미일까요?
승연:	얼마인지 몰라요.
은채:	바뀐다는 뜻이예요.
교사:	바뀐다는 게 무슨 말일까요?
승우:	어떤 수인지 모르니까 계속 바뀔 수 있어요.
교사:	그럼 우리가 식을 세울 때 계속 바뀌는 수를 어떻게 표현할 수 있을까요?
학생들:	네모? 도형?
교사:	좋아요. 고구마의 양 몇 kg을 어떻게 표현하면 좋을지 잘 생각해서 식으로 나타내어 보세요.

한편 교사는 정해지지 않은 고구마의 양을 '몇 kg'로 나타내어 식을 완성한 학생을 발표시켰는데, 이 학생은 나누어지는 수를 나누는 수의 분자로 나누고 분모를 곱하는 해결 방법을 일반화하여 '몇 kg÷2×3=몇 kg'이라는 식으로 표현하였다([Fig. 5] 참조). 이에 교사는 서로 다른 양을 나타내는 변수를 나타낼 때는 다른 기호를 사용해야 함을 지도하기 위해, 앞의 몇 kg과 뒤의 몇 kg이 같은 양인지 질문하였고, 학생은 "앞의 몇 kg은 그림에서 두 칸을 차지하는 양이고 뒤의 몇 kg은 세 칸을 차지하는 양입니다."라고 대답하였다. 이에 교사가 두 양이 의미하는 게 다르니까 어떻게 그것을 나타내면 좋을지 묻자 학생은 뒤의 몇 kg에 점을 찍어 표현하였다. 이와 같은 논의 과정을 통해 학생들은 서로 다른 양을 나타내는 변수를 나타낼 때는 다른 기호를 사용해야 함을 깨닫게 되었다.



[Fig. 5] An example of differentiating variables which represent different amounts

이상과 같이 나누어지는 수가 정해지지 않은 문제를 변수를 사용한 식으로 표현한 다음에는, "고구마 몇 kg을 캐는데 몇 시간이 걸렸습니다. 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 무게는 몇 kg인가요?"와 같이 나누어지는 수와 나누는 수가 모두 정해지지 않은 문제를 제시하였다. 학생들은 앞서 정해지지 않은 양이 1개인 경우의 문제를 변수를 사용하여 잘 표현하였기 때문에 정해지지 않은 양이 2개인 경우의 문제도 어렵지 않게 변수를 사용하여 나타내었다([Fig. 6] 참조). 교사는 이 과정에서 학생들이 정해지지 않은 양을 글자로 표현한 경우(예, 몇 kg, 고구마)와 기호를 사용하여 표현한 경우(예, □, △, ○)를 비교해 보도록 하였다. 이를 통해 학생들은 기호를 사용하면 좀 더 간결하게 식을 표현할 수 있고, 정해지지 않은 양이 자연수인지 분수인지 구분할 수 있다는 사실을 이해하였다.

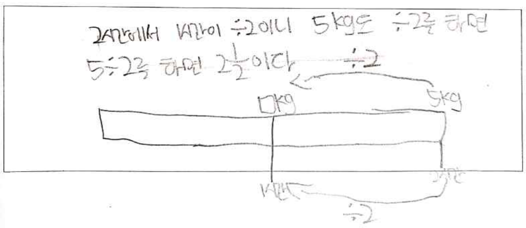


[Fig. 6] An example of expressing an unspecified quantity in a variable expression

3. 나누는 수의 분자로 나누고 분모를 곱하는 해결 방법의 정당화

1) 문제 해결 과정을 정당화하기

학생들이 각 문제를 해결하는 과정에서 교사는 왜 그렇게 해결하였는지 질문함으로써 학생들이 자신의 해결 방법을 정당화할 수 있도록 지도하였다. 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈에서, 학생들은 나누는 수를 1로 만드는 까닭과 나누는 수의 분자로 나누고 분모를 곱하는 방법으로 문제를 해결하는 이유를 이해해야하기 때문이다.



[Fig. 7] An example of solving a problem using arrows in visual model

<Episode 3>은 (자연수)÷(자연수)의 등분제 맥락의 문제를 해결하면서 이중 척도 모델에 화살표를 사용한 학생의 발표 후에 이루어진 논의이다([Fig. 7] 참조). 구체적으로 살펴보면 재혁이가 문제 해결 방법을 설명하는 과정에서 한 학생이 왜 나누기 2를 했는지 질문하였고, 재혁이는 1시간의 2배가 2시간이면 몇 kg의 2배가 5kg 이므로 역으로 나누기 2를 해야 한다고 대답하였다. 이에 보충하여 다른 친구들이 이중 척도 모델에서 2칸은 2시간을 의미하고 1시간에 해당하는 양을 구해야 하므로 나누기 2를 해야 하며, 고구마의 무게에도 똑같이 나누기 2를 할 필요가 있음을 설명하였다. 이처럼 교사는 이중 척도 모델의 위, 아래에 위치하는 고구마의 양과 시간이 같은 비율로 늘어나고 줄어든다는 사실과 이 과정을 화살표로 나타냄으로써 두 양의 관계를 좀 더 명확하게 나타낼 수 있다는 사실을 학생들이 깨달을 수 있도록 논의를 이끌었다.

<Episode 3: A process of justifying the solution method>

재혁: (화살표를 가리키며) 2시간에서 1시간이 되니까 나누기 2를 하고, 똑같이 5kg도 나누기 2를 하면 됩니다.

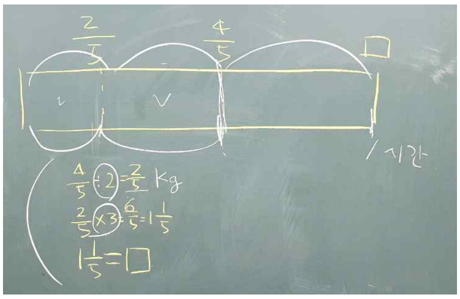
은찬: 왜 나누기 2를 했어?

재혁: 1시간에서 곱하기 2를 하면 2시간이 되니까. 몇 kg에서 곱하기 2를 하면 5가 되어서 거꾸로 했어요.

교사: 재혁이가 화살표를 사용하여 잘 설명하였는데 화살표의 의미를 생각하면서 좀 더 보충해서 설명해 줄 사람 있을까요?

준희: 한 칸이 1시간이고 2칸은 2시간이니까. 2칸이라서 1칸을 구해야 해서 나누기 2를 했어요.

보원: 2시간이니까 1시간이 2개 있는 거니까. 2시간에서 나누기 2를 하면 1시간이 되어서 위에도 똑같이 5를 2로 나누면 1시간에 캘 수 있는 양 $\frac{5}{2}$가 나옵니다.



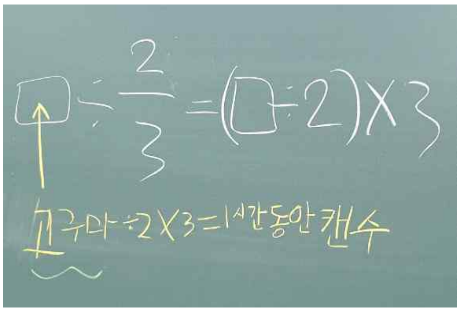
[Fig. 8] An example of justifying the solution method by linking the expression and the visual model

나아가 교사는 학생들이 문제를 해결할 때마다 왜 분자로 나누고 분모를 곱하는 방법으로 문제를 해결하였는지 질문하였다. 예를 들어, [Fig. 8]과 같이 문제 해결 방법을 다 같이 살펴본 후에, 왜 나누는 수의 분자 2로 나누었는지 질문하였다. 이에 학생들은 "$\frac{1}{3}$시간에 해당하

는 양을 먼저 구하기 위해서요.", "두 칸이 $\frac{4}{5}$이니까 나누기 2를 해서 한 칸이 얼마인지 알아야 해요." 등과 같이 답변하였다. 다음으로 분모 3은 왜 곱했는지 질문하자 "세 칸의 값을 알아야 하니까요.", "1시간은 $\frac{3}{3}$시간과 같으니까 3을 곱해야 해요."와 같이 이중 척도 모델과 식을 연결하여 해결 과정을 정당화하였다.

2) 일반화한 해결 방법을 정당화하기

본 수업에서 교사는 학생들이 해결 방법을 일반화하고 변수를 사용한 식으로 표현한 다음에도 학생들에게 식의 의미를 설명하도록 요구하여 자신이 일반화한 해결 방법을 정당화할 수 있는지 살펴보았다. 구체적으로 교사는 학생들에게 각 변수의 의미를 설명하도록 하였고, 앞서 나누어지는 수와 나누는 수가 모두 정해진 경우와 마찬가지로 변수를 사용한 식에서도 왜 분자를 나누고 분모를 곱하여 표현했는지 질문하였다.



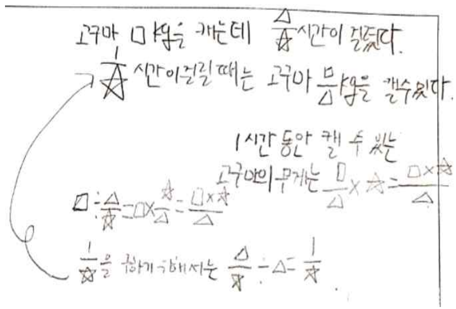
[Fig. 9] The first example exploring the meaning of an expression using variables

예를 들어, <Fig. 9>와 같이 준희는 $\frac{2}{3}$시간 동안 캘 수 있는 고구마의 양을 □로 표현하였는데, <Episode 4>에서 교사가 □의 의미를 묻자 이중 척도 모델에서 3칸 중에 2칸에 해당하는 양이라고 답하였다. 하지만 왜 분자 2로 나누고 분자 3으로 나누었는지 묻는 질문에는 답하지 못하였는데, 이에 승우가 자신이 표현한 식을 칠판에 쓰고 나누는 수의 분자로 나누고 분모를 곱한 까닭을 보충하여 설명하였다. 교사는 두 학생의 식을 비교하여 살펴보면서 이 두 식은 정해지지 않은 양을 각각 '□'와 '고구마'로 표현한 것이 다르지만 식의 의미는 같음을 학생들이 깨닫도록 하였다. 즉 두 식 모두 먼저 분자 2로 나누어 $\frac{1}{3}$시간 동안 캘 수 있는 고구마의 양을 구하고, 분모 3을 곱하여 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 양을 구한 것이 같고, 이를 통해 변수(기호)는 다르지만 두 식의 의미는 같음을 이해할 수 있도록 지도하였다.

<Episode 4: A process exploring the meaning of an expression using variables>

교사:	□가 의미하는 게 뭐야?
준 희:	3칸 중의 2칸이요.
교사:	이중 척도 모델에서 3칸 중에 2칸에 해당하는 양이라는 뜻이야?
준희:	네. 그런데 1시간 동안 캐는 양을 구해야 하니까 3칸에서... (침묵)
교사:	준희의 설명에 보충해 줄 사람?
승우:	(자신의 식을 칠판에 씀)
교사:	준희는 고구마의 양을 □로 나타냈고 승우는 고구마라고 표현했어요. 승우가 표현한 식을 설명해 볼까요?
승 우:	$\frac{1}{3}$시간 동안 캘 수 있는 고구마의 양을 구하기 위해서 나누기 2를 하고, 1시간 동안 캔 고구마의 양을 구하기 위해서 곱하기 3을 했습니다.

이처럼 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하지 않고 분수 나눗셈의 표준 알고리즘만을 이용하여 문제를 해결한 일부 학생들은 자신의 해결 방법을 정당화하는 데 어려움을 겪었다.



[Fig. 10] The second example exploring the meaning of an expression using variables

반면 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색한 학생들은 자신의 해결 방법을 문제의 의미, 식, 시각적 모델 등과 연결하여 정당화할 수 있었다. 예를 들어, [Fig. 10]의 학생은 나누어지는 수와 나누는 수가 모두 정해지지 않은 경우를 변수를 사용하여 식으로 표현하면서 왜 그렇게 나타냈는지를 설명하고 있다. 이처럼 정당화 과정을 통해 학생들이 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하여 문제를 해결한 것인지, 두 양의 관계에 주목하여 해결 방법을 일반화했는지를 확인할 수 있었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업을 구현하여 수업의 흐름을 분석하고 초등학교 분수 나눗셈 수업에서 대수적 사고를 지도하는 방안에 구체적인 시사점을 제공하는 데 그 목적이 있다. 본 연구의 결과를 토대로 초등학교에서 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하는 것에 대한 구체적인 시사점을 논의하면 다음과 같다.

첫째, 초등학교에서 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업의 구현이 가능하다. 본 연구에서는 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업을 구현하기 위해 별도의 단원이나 차시를 마련한 것이 아니라 기존 교육과정에 제시된 분수 나눗셈 단원에 '대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소'를 반영하여 수업을 재구성하였다. 수업에 참여한 학생들은 교사의 지도에 따라 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하고, 해결 방법을 일반화하여 표현하였으며, 자신의 해결 과정을 정당화할 수 있었다. 이에 우리나라 초등학교 수학에서 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하는 방안을 보다 적극적으로 검토할 필요가 있으며, 관련 후속 연구가 계속 이루어지길 기대한다.

둘째, 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업에서 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하는 것은 학생들의 일반화 및 표현, 정당화에 영향을 주는 핵심적인 요소이다. 본 연구에서는 '대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 세 가지 교수·학습 요소'를 추출하고, 이를 반영한 수업을 구현하였다. 구체적으로 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 문제에서 학생들은 나누는 수를 1로 만드는 두 양의 관계를 탐색하고, 1에 해당하는 양을 구하기 위해 나누는 수의 분자로 나누고 분모를 곱하는 해결 방법을 일반화하고 정당화하였다. 하지만 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하지 못한 학생들은 해결 방법을 일반화하거나 정당화하는 데 어려움을 겪었다. 이는 5학년 학생들이 '역 분수 문제'에 제시된 두 양의 관계를 탐색한 것을 바탕으로 아직 학습하지 않은 문제를 해결하고, 이를 일반화하고 표현하였을 뿐 아니라 정당화까지 할 수 있었던 반면, 두 양의 관계를 탐색하지 못한 6학년 학생들이 해결 방법을 정당화하는 데 어려움을 겪었던 Pang 외 (2020)의 연구 결과와 일치하는 부분이다. 다시 말해 선행연구의 결과에서 얻은 시사점을 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업에서도 확인할 수 있었다.

따라서 본 연구에서 도출한 '대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도하기 위한 교수·학습 요소' 중에서 나누어지는 수와 나누는 수의 관계 탐색이 다른 교수·학습 요소에 영향을 주는 핵심적인 요소임을 알 수 있다. 이에 학생들에게 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도할 때는 문제에 제시된 두 양의 관계에 주목하도록 지도하는 것이 매우 중요하다. 학생들은 수학적 관계와 구조의 추론을 통해 해결 방법을 일반화하고 정당화하면서 대수적 사고를 경험할 수 있기 때문이다(Kieran et al., 2016).

셋째, 다양한 분수 나눗셈의 문제 맥락별로 나누어지는 수와 나누는 수 관계를 탐색하고, 나아가 다른 문제 맥락과의 공통점과 차이점을 비교하여 살펴보는 것은 학생들의 대수적 사고 신장에 도움을 줄 수 있다. 본 연구에서는 선행연구(예, Kim, 2020; Lee, 2015; Lamom, 2012; Siebert, 2002)에서 제시한 시사점을 바탕으로 다양한 문제 맥락을 제시함은 물론, 문제 맥락에서 드러나는 몫의 의미 및 나누어지는 수와 나누는 수 관계의 공통점에 따라 분수 나눗셈 수업을 크게 세 가지로 구분하여 지도하였다. 구체적으로 본 논문에서 중점적으로 기술한 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈 수업에서는 등분제 맥락, 단위비율의 결정 맥락, 곱셈의 역 맥락을 제시하고 학생들이 분수 나눗셈의 다양한 문제 맥락을 경험할 수 있도록 돕는 것뿐만 아니라, 문제 맥락별로 탐색한 나누어지는 수와 나누는

수 관계의 차이점과 공통점을 비교하여 살펴볼 수 있도록 하였다. 이에 학생들은 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈 문제에 제시된 세 가지 문제 맥락의 공통점을 찾아낼 수 있었으며, 나누어지는 수가 나누는 수의 몇 배인지를 구하는 문제 맥락과의 차이점도 이해할 수 있었다.

따라서 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업에서는 각 문제 맥락별로 몫의 의미 및 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 탐색하는 것에서 더 나아가 문제 맥락별로 두 양의 관계에 어떤 공통점과 차이점이 있는지 살펴볼 필요가 있다. 이 과정에서 학생들은 각 문제 맥락에 드러나는 나누어지는 수와 나누는 수 관계의 공통점과 차이점을 탐색하고 정당화하면서 대수적 사고를 더 강화할 수 있을 것이다.

넷째, 구체적인 분수 나눗셈 문제 맥락에서 한 양이 정해지지 않은 경우, 두 양이 정해지지 않은 경우와 같이 단계적으로 접근하는 과정은 해결 방법을 일반화하고 변수를 사용하여 식으로 표현하는 데 도움을 줄 수 있다. 본 연구에서 학생들은 나누어지는 수와 나누는 수가 모두 정해진 문제에서 충분히 두 양의 관계를 탐색하는 시간을 가졌기 때문에, 단계적으로 한 양씩 정해지지 않은 양을 제시하였을 때에도 해결 방법을 일반화하고 변수를 사용한 식을 표현할 수 있었다. 이처럼 구체적인 문제 맥락에서 정해지지 않는 양을 제시하는 것은 문제에 내재된 애매모호함으로 학생들을 대수적으로 사고할 수 있도록 돕는다(Carraher & Schliemann, 2007; Pearn & Stephens, 2018). 대수적 사고의 핵심은 수학적 구조와 관계를 일반화하는 것이며(Kieran, 2018), 일반화하는 과정에서 변수 표현은 필수적이기 때문에(Russell, Schifter, & Bastable, 2011), 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업에서 변수 개념의 지도는 매우 중요하다.

초등학교 수학 교과서에는 변수 개념에 대한 이해를 신장시킬 수 있는 내용 요소들이 녹아 있지만(Pang, Cho, & Kim, 2017), 정해지지 않는 양을 변수를 사용하여 나타내는 활동은 별반 제시되어 있지 않기 때문에 이에 대한 학생들의 이해는 낮은 편이다(Pang & Kim, 2018). 하지만 최근의 연구에서는 저학년 학생들도 변수 개념을 의미 있게 이해할 수 있다는 결과를 보여주며(Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens, & Gardiner, 2015), 두 양의 관계를 탐색할 수 있다면 학습하지 않은 문제에서도 해결 방법을 일반화하여 변수를 사용한 식으로 표현할 수 있다는 점을 강조하고 있다(Pang et al., 2020).

따라서 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업에서 좀 더 체계적으로 해결 방법을 일반화하고 표현하는 과정을 지도하기 위해서는, 본 연구에서 제안한 것과 같이 단계적인 접근이 필요하다. 이를 통해 학생들은 나누어지는 수와 나누는 수의 관계에 주목하여 해결 방법을 일반화하고 변수를 사용한 식으로 의미 있게 표현할 수 있을 것이다.

본 연구는 6학년 학생들을 대상으로 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업을 구현하고 그 양상을 분석한 것이다. 이에 부족하나마 본 연구가 대수적 사고를 강조하여 분수 나눗셈을 지도할 때 교사가 어떤 교수·학습 요소를 고려해야 하는지, 이를 어떻게 지도해야 하는지에 관한 실질적인 정보를 제공할 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 34-63.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann. 김수환, 박영희, 백선수, 이경화, 한대희 공역(2006). 어떻게 수학을 배우지? 서울: 경문사.Chang, H. W., Lim, M. I., Yu, M. K., Park, H. M., Kim, J. S., & Lee, H. Y. (2017). A comparative analysis of ratio and rate in elementary mathematics textbooks. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 21*(1), 135-160.

Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). New York: Springer.

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2015). Relationships between students' fractional knowledge and equation writing. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(2), 196-243.

Kang, H. K. (2009). An alternative program for the teaching of multiplication concept based on times idea. *School Mathematics, 11*(1), 17-37.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. New York: Springer.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operation: a fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 79-105). Switzerland: Springer.

Kim, J. H. (2020). Analysis of the Transition Process of Fraction Division Teaching Method. *Journal of Educational Research in Mathematics, 30*(1), 67-88.

Kim, S. H., Shin, J. H., & Lee, S. J. (2019). Algebraic representations of middle school students with different fraction knowledge. *Journal of Educational Research in Mathematics, 29*(4), 625-654.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3rd ed). New York: Routledge.

Lee, M. Y., & Hackenberg, A. J. (2014). Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: The case of Willa. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4), 975-1000.

Lee, M. Y. (2019). A case study examining links between fractional knowledge and linear equation writing of seventh-grade students and whether to introduce linear equations in an earlier grade. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(1), 109-122.

Lee, J. Y. (2015). *Development of fraction division learning trajectory based on quantitative reasoning with unit of elementary school students*. Korea National University thesis of doctor.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: *Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New York: Routledge.

National Mathematics Advisory Panel (2008). Foundations for success: *The final report of the national mathematics advisory panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Pang, J. S., & Cho, S. M. (2019a). An analysis of solution methods by fifth grade students about 'reverse fraction problems'. *The Mathematics Education, 58*(1), 1-20.

Pang, J. S., & Cho, S. M. (2019b). An analysis of solution methods by sixth grade students about reverse fraction problems. *Journal of Educational Research in Mathematics, 29*(1), 71-91.

Pang, J. S., Cho, S. M, & Kim, J. W. (2017). An analysis of variable in the elementary mathematics textbooks and workbooks. *The Mathematics Education, 56*(1), 81-100.

Pang, J. S., Cho, S. M., & Kwon, M. S. (2020). An analysis of fifth and sixth graders' algebraic thinking about reverse fraction problems. *Journal of Educational Research in Mathematics, Special Issue*, 213-227.

Pang, J. S., & Kim, J. W. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: A generalized arithmetic perspective. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 141-165). Switzerland: Springer.

Pang, J. S., & Lee, J. Y. (2009). An analysis of the multiplication and division of fractions in elemetary mathematics instructional materials. *School Mathematics, 11*(4), 723-743.

Park, K. S., Song, S. H., & Yim, J. H. (2004). A study on understanding of the elementary teachers in pre-service with respect to fractional division. *School Mathematics, 6*(3), 235-249.

Pearn, C., & Stephens, M. (2018). Generalizing fractional structures: A critical precursor to algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 237-260). Switzerland: Springer.

Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 43-69). New York: Springer.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: Erlbaum.

Shin, J. S. (2013). A proposal to the construction of textbook contents of fraction division connected to problem context. *The Mathematics Education, 52*(2), 217-230.

Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fraction. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 247-256). Reston, VA: NCTM.

Siegler, R., Duncan, G., Davis-Kean, P., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M. et al. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science, 23*(10), 691-697.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). Reston, VA: NCTM.

Yim, J. H. (2007). Division of fractions in the contexts of the inverse of a cartesian product. *School Mathematics, 9*(1), 13-28.

Yim, J. H., Kim, S. M., & Park, K. S. (2005). Different approaches of introducing the division algorithm of fractions: comparison of mathematics textbooks of North Korea, South Korea, China, and Japan. *School Mathematics, 7*(2), 103-121.

Wu, H. H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator, 25*, 1-7.

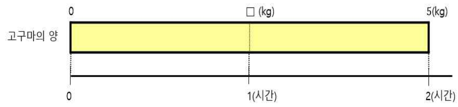
부 록. 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 분수 나눗셈의 교수·학습 과정안(약안)

<table>
<tr><td>학습주제(차시)</td><td colspan="2">· 분수 나눗셈 문제를 해결하고 해결 방법 일반화하기(2) (4~6차시)</td></tr>
<tr><td>학습목표</td><td colspan="2">· 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 문제에 제시된 두 양의 관계를 탐색할 수 있다.
· 나누는 수 1에 대응하는 나누어지는 수의 양을 구하는 문제에서 해결 방법을 일반화하고 표현하며 정당화할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>교수·학습 활동</td><td>주의사항</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>

• 복습하기

<문제 1> (자연수)÷(자연수): 등분제 맥락

고구마 5kg을 캐는 데 2시간이 걸렸습니다. 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 양은 몇 kg인가요?

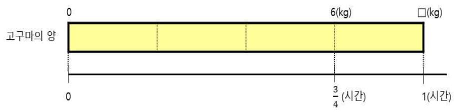


</td><td></td></tr>
<tr><td>전개</td><td>

• 나누어지는 수와 나누는 수의 관계 탐색하기

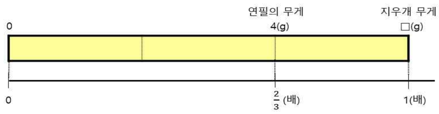
<문제 2> (자연수)÷(분수) (1): 단위비율의 결정 맥락

고구마 6kg을 캐는데 $\frac{3}{4}$시간이 걸렸습니다. 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 양은 몇 kg인가요?



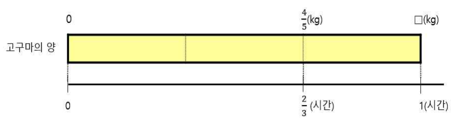
<문제 3> (자연수)÷(분수) (2): 곱셈의 역 맥락

연필의 무게는 4g입니다. 이것은 지우개 무게의 $\frac{2}{3}$배입니다. 지우개의 무게는 몇 g인가요?



<문제 4> (분수)÷(분수) (1): 단위비율의 결정 맥락

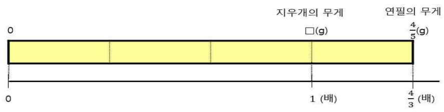
고구마 $\frac{4}{5}$kg을 캐는데 $\frac{2}{3}$시간이 걸렸습니다. 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 무게는 몇 kg인가요?



</td><td>※ 학생들이 문제의 의미와 관련하여 다양한 풀이 방법에 대해 생각해 볼 수 있도록 돕는다.</td></tr>
</table>

<문제 5> (분수)÷(분수) (2): 곱셈의 역 맥락

연필의 무게는 $\frac{4}{5}$g입니다. 이것은 지우개 무게의 $\frac{4}{3}$배입니다. 지우개의 무게는 몇 g인가요?



• **해결 방법을 일반화하고 표현하기**

- <문제 1> ~ <문제 5> 문제의 의미를 생각해 보고, 공통점을 이야기해 봅시다.
- <문제 1> ~ <문제 5> 문제 해결 방법의 공통점을 생각해 봅시다.
- <문제 1> ~ <문제 5> 문제 해결 방법의 공통점을 간단한 식으로 표현해 봅시다.

1) 나누어지는 수가 정해지지 않은 경우: 고구마 **몇 kg**을 캐는 데 $\frac{2}{3}$시간이 걸렸습니다. 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 무게는 몇 kg인가요?

2) 나누어지는 수와 나누는 수가 정해지지 않은 경우: 고구마 **몇 kg**을 캐는데 **몇 시간**이 걸렸습니다. 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 무게는 몇 kg인가요?

예 1) $\blacktriangle \div \frac{\blacksquare}{\bullet} = \blacktriangle \div \blacksquare \times \bullet$

예 2) $\frac{\blacktriangle}{\heartsuit} \div \frac{\blacksquare}{\bullet} = \frac{\blacktriangle}{\heartsuit} \div \blacksquare \times \bullet$

예 3) $\frac{\blacktriangle}{\heartsuit} \div \frac{\blacksquare}{\bullet} = (\frac{\blacktriangle}{\heartsuit} \div \blacksquare \times \bullet) \div (\frac{\blacksquare}{\bullet} \div \blacksquare \times \bullet) = (\frac{\blacktriangle}{\heartsuit} \div \blacksquare \times \bullet) \div 1 = \frac{\blacktriangle}{\heartsuit} \div \blacksquare \times \bullet$

• **해결 방법을 정당화하기**

- 왜 그렇게 표현했는지 식의 의미를 설명해 봅시다.
(문제의 의미 또는 그림과 연결하여 식을 왜 그렇게 표현했는지 설명해 봅시다.)

정리	• **정리하기** - 오늘 공부한 내용을 간단히 정리하고 학습지를 마무리하기	