한국학교수학회논문집 제 23 권, 제 3호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 23, Number 3, 277-297, September 2020
http://doi.org/10.30807/ksms.2020.23.3.003

피타고라스 정리의 이동으로 인한 제곱근과 실수 단원의 변화에 관한 연구

구나영[1] · 송은영[2] · 최은정[3] · 이경화[4]

본 연구에서는 피타고라스 정리의 이동으로 인해 2015 개정 중학교 3학년 교과서의 제곱근과 실수 단원에서 어떤 변화가 나타났는지 파악하는 데 목적을 둔다. 구체적으로, 무리수의 표현 양식과 2015 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의 사항을 기초로 두 가지 측면에서 변화를 살펴보았다. 먼저, 교과서에서 무리수를 기하 표현으로 다룸으로써 잠재적으로 제공하는 무리수의 존재성과 관련된 학습 기회를 분석하였으며 기하 표현이 사용될 경우 피타고라스 정리를 이용하는지 확인하였다. 다음으로, 무리수의 비분수, 소수 표현이 잠재적으로 제공하는 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성을 인식할 수 있는 기회를 분석하였다. 연구 결과, 무리수를 도입할 때 2015 개정 교과서에서 기하 표현을 사용한 빈도가 크게 높아지고 피타고라스 정리를 활용하는 것으로 확인되었다. 또한 다양한 무리수를 나타내는 기하 표현이 새롭게 등장하였다. 한편, 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성을 인식할 수 있는 비분수 표현으로 무리수를 정의한 빈도는 낮아졌다. 본 연구는 2015 개정 교과서에서 무리수 표현의 변화로 인한 무리수의 존재성 및 필요성과 관련된 학습 기회를 확인하고, 그 가능성과 제한점을 확인하였다는 데 의의가 있다.

주요용어 : 무리수, 표현, 2015 개정 수학과 교육과정, 피타고라스 정리, 교과서 분석

Ⅰ. 서론

유리수 체계에서 실수 체계로의 수 개념의 확장과 재구성을 위해 무리수에 대한 이해는 필수적이다(Sirotic & Zazkis, 2007). 수학사에서 무리수는 유리수가 아닌 수의 존재를 인식한 피타고라스 학파에 의해 발견되었다. 같은 단위로 잴 수 없는(incommensurable) 선분의 존재는 두 크기 사이의 관계가 자연수의 비, 즉, 분수로 나타낼 수 없음을 의미한다(Eves, 1999). 그리스 시대에는 통약불가능한 양의 발견으로 이산량과 연속량이 각각 산술과 기하의 영역에서 수와 크기의 개념에 대응되었지만 16세기 이후 Stevin이 제시한 소수 정의로 모든 크기를 수치화할 수 있게 되었다(변희현, 2005). 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 나타내면서 유리수 체계에서 실수 체계로의 확장이 자연스러워졌고, 이를 반영하여 학교 수학에서 무리수를 도입할 때에는 무리수의 존재성을 직관적으로 인식하고, 유리수가 아닌 수로서의 무리수의 필요성을 드러낼 필요가 있다(신보미, 2008; 이지현, 2015; González-Martín,

* MSC2010분류 : 97C70, 97D60
1) 평촌고등학교 교사 (guri39@gmail.com), 제1저자
2) 등촌고등학교 교사 (crabbit@snu.ac.kr)
3) 성서중학교 교사 (dmswjd1823@snu.ac.kr)
4) 서울대학교 교수 (khmath@snu.ac.kr), 교신저자

Giraldo, & Souto, 2013).

박경미 등(2014)은 중학교 3학년의 제곱근과 실수 단원에서 무리수를 도입하는 방법의 다양성을 열어두기 위해서 피타고라스 정리를 이용한 기하학적 방법이 선행될 필요가 있다고 보았다. 특히 2009 개정 교과서에서는 무리수가 순환하지 않는 무한소수로 도입될 수 밖에 없다는 점을 지적하며 피타고라스 정리의 이동으로 유리수가 아닌 수로서 통약불가능성의 아이디어를 구현할 수 있다고 언급하였다. 이 외에 국제학업성취도평가(TIMSS)의 시험 범위에 대한 고려와 학습 부담을 경감하려는 시도도 피타고라스 정리의 이동에 영향을 미쳤다(박경미 등, 2015). 이를 토대로 2015 개정 수학과 교육과정에서는 피타고라스 정리가 중학교 3학년에서 2학년으로 이동하였으며 교수·학습 방법 및 유의 사항에는 제곱근과 무리수 도입, 무리수의 존재성 및 필요성과 관련된 내용들이 추가되었다.

2015 개정 수학과 교육과정에서 피타고라스 정리의 이동으로 인해 무리수 지도와의 관련성에 대한 해석이 요구된다(서보억, 2018). 일부 연구자들은 피타고라스 정리를 활용한 다양한 예시를 제공하여 무리수 이해를 도울 수 있을 것으로 보았고(Sirotic& Zazkis, 2007; Zazkis, 2005) 2009 개정 교과서에서 확인된 부자연스러운 전개를 극복할 수 있을 것이라 예상된다(강향임, 최은아, 2017). 한편 서보억(2018)은 피타고라스 정리의 이동으로 제곱근과 무리수를 학습하기 전에는 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형에서 미지의 한 변의 길이를 구할 수 없다는 등의 문제를 제기하였다.

무리수 지도에 관한 선행 연구를 살펴보면, 무리수 개념을 나타내기 위해 사용되는 비분수 표현(유리수가 아닌 수, 즉, 분수 $\frac{b}{a}(a \neq 0,\ a,b \in Z)$로 표현되지 않는 수)과 소수 표현(순환하지 않는 무한소수)의 강점과 약점을 확인하고, 무리수 개념을 학습하는 학생이 어떠한 어려움을 겪는지 확인한 연구(강정기, 2016; 오국환, 방정숙, 권오남, 2017; Zazkis & Sirotic, 2004)가 있다. 또한 교사나 지도 방법에 초점을 맞추어 예비교사나 현직교사가 무리수의 개념이나 표현을 어떻게 이해하고 있으며 이들에게 어떠한 지식이 요구되는지 확인한 연구(강향임, 최은아, 2017; Sirotic & Zazkis, 2007), 통약불가능성을 지도하는 것의 어려움을 확인하고 대안적인 방법을 시도한 연구(변희현, 박선용, 2002; 이영란, 이경화, 2006)도 이루어졌다.

앞서 기술한 바와 같이 무리수의 학습에서 무리수의 존재성과 필요성을 이해하는 것이 중요하다(신보미, 2008; 이지현, 2015; González-Martín et al., 2013). 2015 개정 수학과 교육과정을 따른 중학교 3학년 교과서는 2020년부터 적용되고 있다. 피타고라스 정리가 이동됨에 따라 무리수의 학습 경로에 변화가 불가피하며(박경미 등, 2014; 서보억, 2018) 그 변화를 무리수의 존재성과 유리수가 아닌 수로서의 무리수의 필요성에 관한 학습 기회의 관점에서 분석할 필요성이 제기된다. 수학적 표현은 수학 학습과 밀접한 관련이 있으며 학생들은 수학적 개념을 나타내는 여러 표현 사이의 관계를 이해해야 한다(Peled & Hershkovitz, 1999). 지금까지 선행 연구에서는 무리수 학습과 관련하여 무리수의 수적(numerical) 표현(비분수 표현, 소수 표현), 기하 표현(도형의 길이나 넓이 등의 측정값으로 무리수를 나타내는 것)에 대한 논의가 주로 이루어졌다(예를 들어, 오국환 등, 2017; 최은아, 강향임, 2016).

이에 본 연구에서는 피타고라스 정리의 이동이 2015 개정 중학교 3학년 교과서의 제곱근과 실수 단원에서 무리수와 관련된 내용의 제시에 어떤 영향을 끼쳤는지를 파악하는 데 목적을 둔다. 구체적으로, 무리수의 표현 양식과 2015 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의 사항을 기초로 무리수가 어떻게 표현되어 있는지를 두 측면에서 살펴보고자 하며 연구 문제는 다음과 같다.

1. 무리수를 기하 표현으로 다룸으로써 잠재적으로 무리수의 존재성을 드러내는가?
2. 무리수의 비분수 표현 또는 소수 표현은 잠재적으로 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성을 드러내는가?

특히 연구 문제 1을 확인하기 위해 기하 표현이 사용될 경우 피타고라스 정리를 이용하는지 살펴보며 2009 개정 교과서와 비교하여 2015 개정 교과서에서 다양한 무리수를 나타내는 기하 표현은 어떻게 사용되었는지도 확인한다. 동일한 기준에 따라 2009 개정 교과서와 2015 개정 교과서를 비교 분석하여 변화를 확인한다.

Ⅱ. 선행 연구 고찰

2015 개정 수학과 교육과정에서 피타고라스 정리의 이동으로 인해 유리수가 아닌 수로서 무리수의 통약불가능성의 아이디어를 구현할 수 있고, 소수 표현 외에 무리수를 다양하게 도입하려는 시도가 예상된다(박경미 등, 2014). 본 절에서는 선행 연구를 고찰하여 무리수의 본질인 통약불가능성을 확인하고 무리수의 표현 양식으로 비분수 표현, 소수 표현, 기하 표현이 무엇인지, 무리수를 나타내는데 각 표현은 어떤 강점과 약점이 있는지를 살펴본다.

1. 무리수의 통약불가능성

무리수는 피타고라스학파에 의하여 발견되었다고 알려져 있다. 그들은 임의의 두 선분이 주어질 때 어떤 다른 선분의 정수배로서 각각을 모두 표시할 수 있는 매우 작은 선분이 존재할 것이라고 확신하였다. 이는 모든 선분들이 같은 단위로 잴 수 있는(commensurable), 공통척도를 갖는다는 것을 뜻한다. 즉, 어떤 선분(e)이 존재하여 두 선분 a, b의 길이를 선분 e의 정수배, 즉 적당한 정수 p, q가 존재하여 $a=pe$, $b=qe$로 나타낼 수 있으며 이는 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{p}{q}$로서 두 선분의 길이의 비가 $\dfrac{(\text{정수})}{(\text{정수})}$꼴로 표현될 수 있다는 것을 뜻한다(변희현, 박선용, 2002, p.643).

Eves(1999)에 따르면, 피타고라스 학파는 한 변의 길이가 단위 길이인 정사각형의 대각선의 길이에 대응되는 유리수가 존재하지 않는다는 것을 확인하였다. 이로부터 무리수의 존재성을 인식하게 되었으며 기하학적인 방법으로 같은 단위로 잴 수 없는 선분의 존재를 보였다. 정사각형의 변과 대각선을 같은 단위로 잴 수 없다는 것은 두 크기 사이의 관계가 자연수의 비 즉, 분수로 나타낼 수 없음을 뜻한다.

통약불가능한 양의 발견으로 그리스 시대에는 이산량과 연속량을 서로 다른 범주로 구분하여 각각 산술과 기하의 영역에서 수와 크기의 개념에 대응시켜 연구하였다. 이는 무리수 개념의 기원이 되는 통약불가능한 양을 수로 표현할 방법을 갖지 못했기 때문이다. 16세기 이후 Stevin이 제시한 소수 정의의 등장으로 연속량을 수로 나타내고, 수에 연속성을 부여하여 수와 크기를 동일시하게 되었다(Moreno-Armella & Waldegg, 2000). Stevin은 십진기수법을 형식적으로 정의하여 모든 크기를 수치화할 수 있게 할 뿐만 아니라, 무리수 아이디어 발생에 결정적인 역할을 하였다. 그로 인해 수직선 위의 모든 점과 유한소수 및 무한소수 사이의 대응 관계를 생각할 수 있게 되었다(Courant & Robbins, 1996; 변희현, 2005, p. 29에서 재인용). 유리수를 소수로 표현하는 과정에서 순환하는 무한소수를 인식하고, 순환하지 않는 무한소수를 유리수가 아닌 수, 즉 무리수로 인식하게 된 것이다.

역사적으로 무리수는 통약불가능한 양으로서 발견되었고, 소수 표현을 사용하여 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 나타내면서 유리수에서 실수로의 수 체계를 확장하는 데 있어서 중요한 역할을 하게 되었다. 따라서 학교수학에서 무리수를 도입할 때에는 측정값으로서 무리수의 존재성을 직관적으로 인식하고, 유리수가 아닌 수로서 통약불가능성의 원리를 담은 무리수의 필요성을 드러낼 필요가 있다(신보미, 2008; 이지현, 2015; González-Martín et al., 2013).

2. 무리수의 표현 양식

Zazkis & Sirotic(2004)에 의하면 무리수는 비분수 표현 또는 소수 표현으로 정의된다. 각 표현은 무리수 개념의 본질적인 특성인 통약불가능성과 비순환성 중 하나를 강조할 수 있다는 강점이 있지만 다른 하나를 나타내는 데 한계가 있다는 약점이 있다(오국환 등, 2017; 최은아, 강향임, 2016). 또한 무리수를 도형의 길이나 넓이와 같은 측정값인 기하 표현으로 나타낼 수도 있다. 이에 본 절에서는 선행 연구를 토대로 무리수를 나타내는 비분수 표현, 소수 표현, 기하 표현을 소개하고, 각 표현의 강점과 약점을 살펴보도록 한다.

앞서 기술한 바와 같이 무리수의 발견은 통약불가능성에서 출발하였다. 그러나 통약불가능성에 관한 기하학적 고찰은 간접증명법을 이용하고 있다. 즉, 학생이 통약불가능성을 이해하기 위해서는 결론을 부정한 상황에서 타당한 추론을 거친 결과가 거짓이면 전제도 거짓이라는 간접증명법의 기본 원리를 이해해야 한다. 따라서 중학교 수준에서 기하학적 고찰을 통해 통약불가능성을 지도하는 것의 어려움이 제기되어 왔다(예를 들어, 변희현, 박선용, 2002).

이에 대부분의 교과서에서는 기하학적 맥락에서의 통약불가능성에 관한 표현이나 증명을 소개하지 않는다. 일부 교과서만 비분수 표현으로 통약불가능성을 설명한다. 두 선분의 길이를 같은 단위로 잴 수 없을 때 통약불가능하다고 하는데 두 선분의 길이를 같은 단위로 잰다는 것은 두 선분의 길이가 유리수 $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0,\ a,b \in Z)$, 두 정수의 비로 표현될 수 있다는 것을 의미한다. 이에 같은 단위로 잴 수 없는 두 선분의 길이의 비는 두 정수의 비로 표현될 수 없다. 비분수 표현은 중학교 수준에서 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성과 통약불가능성을 드러낼 수 있다는 강점이 있으나 무리수의 비순환성을 드러내는 데에는 한계가 있다(강정기, 2016; 신보미, 2008).

2009 개정 교과서 중 일부는 분수 $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0,\ a,b \in Z)$, 두 정수의 비로 나타낼 수 없는 수로 무리수를 정의한다. 그러나 비분수 표현으로 정의한 교과서는 소수에 불과하며 모두 무리수를 정의한 후 '무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타내짐이 알려져 있다'라는 소수 표현을 부연한다. 이는 비분수 표현으로 무리수를 정의할 경우 $0.10100100010\cdots$, π와 같은 제곱근 이외의 무리수가 존재함을 설명하는 과정이 필요한데, 이를 위해 유리수가 유한소수나 순환소수로 표현됨을 밝히고, $0.10100100010\cdots$, π와 같은 순환하지 않는 무한소수가 유리수가 아님을, 즉 무리수임을 설명할 필요가 있다는 점(신보미, 2008)에서 요구되는 단계로 볼 수 있다. 그 외 대부분의 교과서에서는 통약불가능성을 내포한 '분수꼴로 나타낼 수 없는 수'라는 명확한 진술이 없으며 이들은 소수 표현에 의존하는 것으로 확인되었다(강향임, 최은아, 2017).

다른 선행 연구자들도 유사한 경향을 지적하였다. 오국환 등(2017)에 의하면 우리나라 대부분의 교과서에서는 계속되는 유리소수 근사로 $\sqrt{2}$의 값을 찾으며 무리수를 소수 표현으로 정의한다. 소수 표현은 유리수가 유한소수 또는 순환소수로 표현된다는 점과 구분하여 무리수를 이해할 수 있다는 강점이 있다. 그러나 소수 표현이 내포한 소수점 아래의 숫자가 끝없이 계속되고 있는 상태의 무한성(가무한)으로 인해 무리수 이해에 어려움을 초래할 수 있다(강향임, 최은아, 2017; Sirotic & Zazkis, 2007). 실제로 우리나라 교과서는 소수 표현으로 무리수를 유의미하게 제시하며 학생들이 무리수를 '순환하지 않는 무한소수'로 인식하는 데에는 성공적이었지만, '분수로 표현되지 않는 수'이자 '순환하지 않는 무한소수'로 이해하고 소수 표현과 비분수 표현을 유연하게 오가는 것에는 한계가 있는 것으로 확인되었다(오국환 등, 2017).

무리수를 비분수 표현이나 소수 표현으로 정의하는 것에는 또 다른 약점도 있다. 비분수 표현은 분

수로 나타낼 수 없는 수, 소수 표현은 순환하지 않는 무한소수라는 표현 양식을 갖는 수의 존재를 드러낸다기 보다는 가정하고 있다는 것이다(González-Martín et al., 2013). 즉, 비분수 표현과 소수 표현으로 무리수를 정의하는 것은 모두 이미 존재한다고 가정한 실수 집합의 특정 부분집합을 무리수라고 명명하는 것 이상의 역할을 하지 못한다(이지현, 2015, p. 265). 학교수학에서는 무리수를 정의하고 그 다음에 실수 체계로 확장하기 때문에 실수의 정의가 무리수의 정의에 의존하고 있다는 점에서 순환적이라는 한계가 있다.

무리수의 기하 표현은 도형의 길이나 넓이 등의 측정값으로 직관적이며 시각적으로 무리수를 나타내는 것을 뜻한다. 일부 선행 연구자들은 기하 표현과 수직선 위에 무리수에 대응하는 점을 나타내는 수직선 표현을 구분하지만(최은아, 강향임, 2016), 대부분의 2009 개정 교과서에서 정사각형의 한 변의 길이나 대각선의 길이를 수직선에 대응시키는 표현을 포함하고 있었다(오국환 등, 2017). 이에 본 연구에서는 도형의 길이나 넓이 등의 측정값으로 무리수를 나타내거나 수직선 위에 무리수를 나타내는 표현을 포괄하여 기하 표현으로 간주하도록 한다. 무리수의 기하 표현은 무리수의 존재성을 직관적으로 인식할 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 예를 들어, 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선을 이용하여 그 길이에 대응하는 수가 있다는 것을 설명함으로써 무리수 $\sqrt{2}$의 존재성을 직관적으로 인식하도록 할 수 있다(신보미, 2008). 또한 기하 표현은 소수 표현이 내포한 가무한으로서의 무리수를 측정값으로서 하나의 대상으로 다룰 수 있게 한다는 강점이 있다(최은아, 강향임, 2016, Gray & Tall, 1994). 특히, 측정값을 수직선 위에 대응시킬 경우 무리수를 소숫점 아래를 계속 써나가는 것이 아니라 전체로서, 정적인 대상(실무한)으로 이해할 수 있다는 강점이 있다. 또한 수직선의 구조를 통해 간접적으로 실수가 순서 공리와 완비성 공리를 만족시킨다는 설명을 연계할 수 있다(오국환 등, 2017). 그러나 선분의 길이와 같은 측정값에 의존하여 무리수를 다룰 경우 유리수와 무리수의 차이점을 확인하기 어렵고, 무리수가 어떤 수인지를 밝히는 데에는 한계가 있다(신보미, 2008).

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 방법 및 대상

본 연구는 중학교 3학년 교과서의 제곱근과 실수 단원에서 2015 개정 교육과정에서 피타고라스 정리의 이동이 무리수 관련 학습 내용의 제시에 어떤 영향을 끼쳤는지를 살펴보고자 한다. 구체적으로 2009 개정 교과서와의 비교를 통해 무리수를 표현하는 방식에 어떠한 변화가 있는지를 확인하고자 한다. 이를 위해 2009 개정 교과서 13종, 2015 개정 교과서 10종을 수집하였다. 피타고라스 정리가 중학교 2학년으로 이동함에 따라 제곱근과 무리수의 도입부터 개념의 정의, 연습 및 확장에 이르는 전반적인 변화가 예상된다. 따라서 본 연구진은 제곱근과 실수 단원 중 일부에 초점을 맞추지 않고, 단원 전반에 이르는 내용을 모두 확인하였다. 본 연구에서는 분석 대상인 교과서를 제1저자명을 기준으로 가나다 순으로 정렬한 후 알파벳을 부여하였다. 2009 개정 교과서 13종은 A부터 M까지, 2015 개정 교과서 10종은 N부터 W까지 알파벳을 부여하였다.

2. 자료 분석

분석 기준을 선정하기 위해 본 연구진은 먼저 앞서 기술한 무리수의 표현 양식과 제곱근과 실수 단원에 해당하는 2009, 2015 개정 수학과 교육과정을 살펴보았다. 성취기준의 경우 두 교육과정에서 차이가 없었으나 교수·학습 방법 및 유의 사항에는 차이가 확인되었다. <표 Ⅲ-1>[5]과 같이 2015 개정의 교수·학습 방법 및 유의 사항에서는 수를 나타내는 다양한 표현을 비교하도록 하였다. 또한 제곱근과 무리수를 도입하는 데 피타고라스 정리를 이용하도록 하고, 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 등을 이용해 학생들이 직관적으로 무리수의 존재를 이해할 수 있도록 하였다.

<표 Ⅲ-1> 제곱근과 실수 단원과 관련된 2009, 2015 개정 수학과 교육과정의 비교

2009 개정: 교수·학습상의 유의점	2015 개정: 교수·학습 방법 및 유의사항
- 약수와 배수는 자연수의 범위에서만 다룬다. - 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는다. - 순환소수를 분수로 고치는 것은 순환소수가 유리수임을 이해할 수 있는 정도로만 다룬다. - 다양한 상황을 이용하여 음수와 무리수의 필요성을 인식하게 한다. - 수의 계산에서 자신의 풀이 방법을 설명하게 한다.	- 수의 소수 표현과 분수 표현의 장단점을 생각해 보게 하여, 각각의 표현이 가지는 유용성을 인식하게 한다. - 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는다. - 순환소수를 분수로 고치는 것은 순환소수가 유리수임을 이해할 수 있는 정도로 다룬다. - 제곱근과 무리수는 피타고라스 정리를 이용하여 도입할 수 있다. - 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 등을 이용하여 직관적으로 무리수의 존재를 이해하게 할 수 있다. - 실생활에서 사용되는 무리수의 예를 찾아보는 활동을 통해 무리수의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.

이에 본 고에서는 선행 연구 고찰과 2015 개정 교육과정에서의 교수·학습 방법 및 유의 사항을 기초로 무리수 표현의 변화를 두 가지 분석 기준에 따라 확인하고자 한다. 첫째, 무리수를 기하 표현으로 다룸으로써 잠재적으로 무리수의 존재성을 학습할 수 있는 기회를 제공하는지 확인하고, 기하 표현이 사용될 경우 피타고라스 정리를 이용하는지 살펴본다. 이는 기하 표현을 사용하여 무리수의 존재성을 직관적으로 인식하도록 함으로써(신보미, 2008) 비분수 표현이나 소수 표현이 무리수를 이미 존재한다고 가정하고 명명하는 것 이상의 역할을 하지 못한다는 점(이지현, 2015)을 보완할 수 있다는 점을 고려한 것이다. 또한 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 '제곱근과 무리수는 피타고라스 정리를 이용하여 도입할 수 있다'와 '한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 등을 이용하여 직관적으로 무리수의

5) 2009 개정 교육과정과 비교하여 2015 개정 교육과정에서 새롭게 추가된 교수·학습 방법 및 유의 사항에는 본 연구진이 밑줄을 그어 강조하였다.

존재를 이해하게 할 수 있다'는 내용을 반영한 것이기도 하다. 특히 피타고라스 정리의 이동으로 2009 개정 교과서보다 다양한 예시를 제공하여 무리수 이해에 도움을 제공할 수 있을 것으로 예상되므로 (Sirotic& Zazkis, 2007; Zazkis, 2005) 다양한 무리수를 나타내는 기하 표현도 확인하였다.

둘째, 무리수의 비분수 표현 또는 소수 표현이 잠재적으로 제공하는 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성 인식 기회를 확인한다. 유리수를 소수로 나타내면 유한소수나 순환소수가 됨을 알도록 함으로써 유리수와 소수 표현의 관련성을 나타낼 수 있다. 중학교 3학년에서 무리수를 정의하고 그 개념을 이해하는 과정은 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성과 통약불가능성을 드러낼 수 있는 비분수 표현으로 무리수를 정의하고, 직관적으로 유리수와 다르게 구분할 수 있는 소수 표현으로 자연스럽게 연결되는 것이 필요하다(신보미, 2008; 최은아, 강향임, 2016). 또한 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 수의 표현 양식의 장단점을 생각하도록 하여 각 표현의 유용성을 생각하도록 한 내용을 반영한 것이기도 하다. 이에 동일한 기준에 따라 2009 개정 교과서를 분석함으로써 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 변화를 파악하였다.

Ⅳ. 연구 결과

본 절에서는 교과서에서 무리수를 기하 표현으로 다룸으로써 무리수의 존재성과 관련된 학습 기회를 잠재적으로 제공하는지, 비분수 표현 또는 소수 표현으로 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성을 인식하는 기회를 잠재적으로 제공하는지 확인하였다. 이를 위해 2009 개정 수학과 교육과정을 따른 교과서 13종과 2015 개정 수학과 교육과정을 따른 교과서 10종을 비교 분석하였다. 무리수의 존재성을 나타내는 기하 표현의 경우 제곱근 도입과 무리수 도입에서의 기하 표현, 다양한 무리수를 나타내는 기하 표현으로 나누어 제시한다. 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성을 나타내는 비분수 표현과 소수 표현의 경우 무리수를 정의하는 전반적인 과정에 초점을 맞추어 분석하였다.

1. 기하 표현

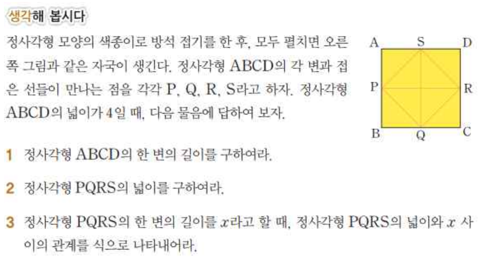
1) 제곱근의 도입에서의 기하 표현

제곱근의 도입에서의 기하 표현은 2009 개정 교과서에서는 피타고라스 정리를 이용할 수 없으므로 기하 표현의 사용 여부만 확인하였으며 2015 개정 교과서에서는 기하 표현의 사용 여부와 함께 피타고라스 정리를 이용하여 도입하고 있는지를 파악하였다. 분석 결과 2009 개정 교과서 13종 중 3종의 교과서와 2015 개정 교과서 10종 중 3종의 교과서에서 기하 표현을 사용하여 제곱근을 도입하였다. 2015 개정 교과서에서 기하 표현을 사용한 3종 중 2종은 피타고라스 정리를 사용하여 기하 표현을 도입하는 것으로 확인되었다. 피타고라스 정리가 중학교 2학년으로 이동하였지만 2015 개정 교과서 중 기하 표현을 사용한 빈도에는 큰 차이가 없었으며 피타고라스 정리를 이용한 빈도도 3종 중 2종에 그치는 것으로 나타났다.

제곱근의 도입에서의 기하 표현은 두 가지 방식으로 사용되는 것으로 확인되었다. 먼저, 정사각형의 넓이나 직각삼각형의 빗변의 길이를 활용하여 $x^2=a$라는 식을 유도하고, 제곱근을 정의할 때에는 $2^2=4$, $(-2)^2=4$와 같은 식을 이용하여 대수적 설명과 기호($\sqrt{\ }$)의 사용에 초점을 맞춘 사례가 확인되었다. 다음으로 $x^2=a$라는 식을 유도하는 데 그치지 않고, 무리수와 연계하여 측정값 $\sqrt{a}$를

부각시킨 사례가 확인되었다.

2009 개정 교과서 중 2종(I, J)의 교과서에서는 정사각형의 넓이가 2일 때 한 변의 길이를 x라고 하고, $x^2=2$라는 식을 유도하였다. 이들은 앞서 설명한 바와 같이 제곱근의 대수적 설명과 기호 사용에 초점을 맞추었다. 기하 표현을 이용해 제곱근을 도입하였으나 제곱근을 정의할 때에는 $2^2=4$, $(-2)^2=4$의 예를 이용하여 4의 제곱근으로 2와 -2를 설명하였다는 점에서 측정값 $\sqrt{2}$를 부각시키는 의도보다 $x^2=2$라는 식을 나타내기 위해 기하 표현을 사용한 것으로 확인된다. 한편 K 교과서에서는 전지의 가로와 세로의 길이의 비를 $1:x$라고 하면 $1:x=\dfrac{x}{2}:1$이 성립하여야 하므로 $x^2=2$라는 식을 유도하였다. 이후 제곱근을 정의하면서 x가 2의 제곱근이라고 설명함으로써 $\sqrt{2}$를 직사각형의 한 변의 길이인 측정값으로 부각시키는 시도를 한 유일한 교과서였다([그림 Ⅳ-1] 참고).

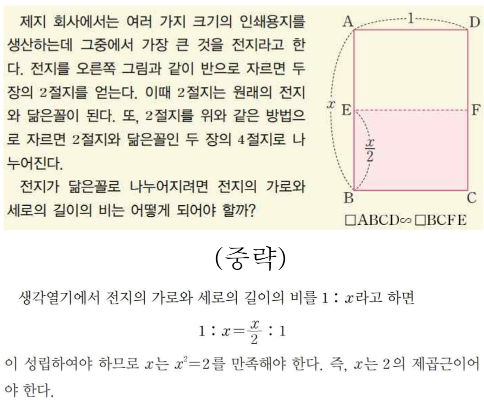

생각해 봅시다

정사각형 모양의 색종이로 방석 접기를 한 후, 모두 펼치면 오른쪽 그림과 같은 자국이 생긴다. 정사각형 ABCD의 각 변과 접은 선들이 만나는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. 정사각형 ABCD의 넓이가 4일 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 구하여라.

2 정사각형 PQRS의 넓이를 구하여라.

3 정사각형 PQRS의 한 변의 길이를 x라고 할 때, 정사각형 PQRS의 넓이와 x 사이의 관계를 식으로 나타내어라.


제지 회사에서는 여러 가지 크기의 인쇄용지를 생산하는데 그중에서 가장 큰 것을 전지라고 한다. 전지를 오른쪽 그림과 같이 반으로 자르면 두 장의 2절지를 얻는다. 이때 2절지는 원래의 전지와 닮은꼴이 된다. 또, 2절지를 위와 같은 방법으로 자르면 2절지와 닮은꼴인 두 장의 4절지로 나누어진다.

전지가 닮은꼴로 나누어지려면 전지의 가로와 세로의 길이의 비는 어떻게 되어야 할까?

(중략)

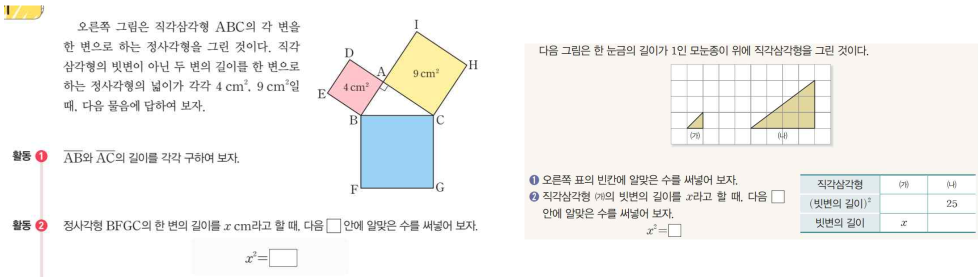
생각열기에서 전지의 가로와 세로의 길이의 비를 $1:x$라고 하면

$$1:x=\frac{x}{2}:1$$

이 성립하여야 하므로 x는 $x^2=2$를 만족해야 한다. 즉, x는 2의 제곱근이어야 한다.

[그림 Ⅳ-1] 2009 개정 교과서 중 제곱근 도입에서 기하 표현을 사용하는 예(I, K)

2015 개정 교과서 중 N 교과서는 정사각형의 넓이를 이용하여 한 변의 길이를 구하기 위해 $x^2=50$이라는 식을 유도하였지만 이후 $3^2=9$, $(-3)^2=9$의 예를 이용하여 제곱근을 설명하였다. 이는 앞서 설명한 바와 같이 제곱근의 대수적 설명과 기호 사용에 초점을 맞추고 측정값 $5\sqrt{2}$를 부각시키기보다 $x^2=50$이라는 식을 나타내기 위해 기하 표현을 사용하였다는 점에서 I, J 교과서와 유사하다. 한편, U와 T 교과서는 [그림 Ⅳ-2]와 같이 피타고라스 정리를 이용하여 기하 표현을 사용하였다. 먼저 U 교과서는 큰 정사각형의 넓이가 다른 두 정사각형의 넓이의 합과 같다는 피타고라스 정리를 이용하여 $x^2=13$이라는 식을 유도하였다. T 교과서도 피타고라스 정리를 이용하여 한 변의 길이가 1인 직각삼각형의 빗변의 길이를 x라 할 때 $x^2=2$를 유도하였다. 두 교과서 모두 피타고라스 정리를 이용하여 정사각형의 넓이나 직각삼각형의 (빗변의 길이)^{2}의 계산 과정을 축소하여 학생들에게 학습 부담 경감의 기회를 제공할 수 있다. 그러나 제곱근을 정의할 때 측정값으로 $\sqrt{13}$과 $\sqrt{2}$를 언급하지는 않았다는 점에서 N 교과서와 마찬가지로 제곱근의 정의와 기호 사용에 초점을 맞춘 것으로 확인되었다.



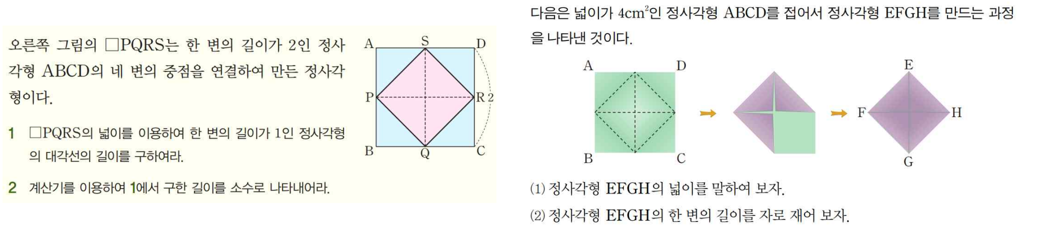
[그림 Ⅳ-2] 2015 개정 교과서 중 제곱근 도입에서 기하 표현을 사용하는 예(U, T)

대부분의 2009와 2015 개정 교과서에서는 제곱근을 도입할 때 기하 표현을 $x^2 = a$을 유도하는 데 활용하고, 제곱하여 a가 되는 수, 기호($\sqrt{\ }$)의 사용과 같은 대수적 설명에 초점을 맞추는 것으로 나타났다. 2009 개정 교과서 중 1종만이 직사각형의 한 변의 길이인 측정값으로 기하 표현을 사용했다는 점에서 무리수와 연계하여 무리수의 존재성을 드러내는 잠재적 학습 기회를 제공했다고 판단할 수 있다. 그러나 2015 개정 교과서에서는 이러한 시도를 한 교과서는 확인할 수 없었다는 점에서 제곱근 도입에서의 다양성은 다소 축소되고, 제곱근 개념의 정의와 기호 사용에 주로 초점을 맞추어 대수적인 면이 강조된 것으로 볼 수 있다. 일부 교과서의 경우 피타고라스 정리를 이용함으로써 계산 과정을 축소하고 학생의 학습 부담을 경감하였다는 면에 의의가 있다.

2) 무리수의 도입에서의 기하 표현

무리수 도입에서의 기하 표현은 앞서 언급한 바와 같이 2009 개정 교과서에서는 기하 표현의 사용 여부만 확인하였으며 2015 개정 교과서에서는 기하 표현의 사용 여부와 함께 피타고라스 정리를 이용하여 도입하고 있는지를 파악하였다. 분석 결과 2009 개정 교과서 13종 중 4종의 교과서에서 기하 표현을 사용하여 무리수를 도입한 것과 달리 2015 개정 교과서는 10종 중 8종의 교과서에서 기하 표현을 사용하여 그 빈도가 크게 높아졌다. 특히 기하 표현을 사용한 2015 개정 교과서 8종 중 6종이 피타고라스 정리를 이용한 것으로 나타났다. 본 절에서는 무리수 도입에서의 기하 표현뿐만 아니라 제시된 탐구 활동까지 살펴봄으로써 무리수의 존재성과 관련된 학습 기회를 제공하는지 확인하였다.

2009 개정 교과서 중 4종(B, D, E, J)의 교과서에서는 [그림 Ⅳ-3]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이나, 넓이가 2인 정사각형의 한 변의 길이를 나타내는 기하 표현을 사용하여 $\sqrt{2}$를 도입하였다. 이후 탐구 활동에서는 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 확인하기 위해 한 변의 길이를 계산기에 입력해 $\sqrt{2}$의 소수 표현을 확인하도록 하거나 자로 정사각형의 한 변의 길이를 재도록 하여 $\sqrt{2}$가 1.4와 1.5 사이의 값임을 확인한 후 $\sqrt{2}$의 값의 범위를 점차 정밀하게 찾아가도록 하였다. 유사하게 J 교과서는 계산기로 $\sqrt{2}$의 소수 표현을 확인하도록 한 후 순환마디를 찾을 수 있는지 판단하도록 하였다. 이들은 모두 직관적, 시각적으로 도형의 길이와 같은 측정값으로 무리수의 존재를 확인하도록 했으나 무리수 정의로의 연결을 위해 순환하지 않는 무한소수임을 확인하는 데 주된 의도가 있었다.

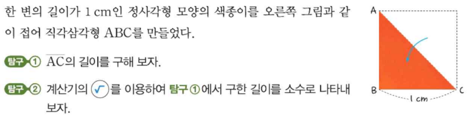


[그림 Ⅳ-3] 2009 개정 교과서 중 무리수 도입에서 기하 표현을 사용하는 예(D, B)

앞서 언급한 바와 같이 대다수의 2015 개정 교과서는 무리수의 도입에서 기하 표현을 사용하였고, 피타고라스 정리를 이용하였다. 특히 정사각형의 넓이로부터 한 변의 길이를 구하는 과정이 피타고라스 정리를 사용하여 바로 한 변의 길이를 구하는 것으로 축소됨으로써 학생들의 학습 부담도 경감한 효과가 있고 중학교 2학년에서 학습한 내용과의 연계를 강조하였다고 볼 수 있다. 그러나 대부분의 교과서는 2009 개정 교과서와 유사하게 정사각형의 대각선의 길이나 직각삼각형의 빗변의 길이를 기하 표현으로 나타내고, 계산기를 이용해 $\sqrt{2}$의 소수 표현을 확인하도록 하거나 $\sqrt{2}$의 범위를 확인하도록 하였다. 기하 표현을 사용하지만 피타고라스 정리를 사용하지 않는 교과서는 2종(Q, T)으로 정사각형의 대각선의 길이나 직각삼각형의 빗변의 길이가 $\sqrt{2}$라고 제시하고, 자로 측정하여 범위를 구하거나 계산기로 소수 표현을 확인하도록 하였다([그림 Ⅳ-4] 참조).

대부분의 교과서들이 무리수의 도입에서 기하 표현을 사용하여 직관적, 시각적으로 도형의 길이와 같은 측정값으로 무리수의 존재성과 관련된 학습 기회를 제공하지만 소수 표현으로 제시된 무리수 정의로의 연결을 위하여 계산기를 이용해 $\sqrt{2}$의 소수 표현을 확인하도록 하거나 $\sqrt{2}$의 범위를 확인하도록 하는 것으로 나타났다. 이는 2015 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의사항에서 '한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 등을 이용하여 직관적으로 무리수의 존재를 이해하게 할 수 있다'고 추가된 내용이 교과서 집필진에 의해 일부 구현되었다고도 볼 수 있다. 그러나 이후의 탐구 활동이 소수 표현으로의 연결에 초점을 맞추고 있다는 점은 학생들이 무리수의 존재성을 이해하는 데 충분하지 않을 수 있다. 또한 기하 표현은 소수 표현이 내포한 가무한으로서의 무리수를 측정값으로서 하나의 대상으로 다룰 수 있게 한다는 강점이 있다(최은아, 강향임, 2016, Gray & Tall, 1994). 이에 비추어볼 때 대상으로서의 무리수가 도입 단계에서 먼저 제시됨으로써 가무한으로서의 무리수를 학습하는 과정과 자연스럽게 연계되지 않을 수 있다는 한계를 가질 수 있다.

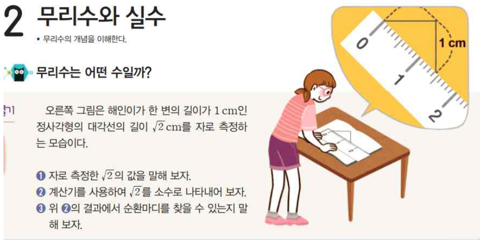
2015 개정 교과서 중 2종(U, W)의 교과서는 무리수를 도입할 때 기하 표현을 사용하지 않았다. W 교과서는 기하 표현을 제시하지 않고 수를 제곱해가며 $\sqrt{2}$의 범위를 좁히는 활동으로 무리수를 도입했으며 U 교과서는 [그림 Ⅳ-5]와 같이 유리수를 정수와 정수가 아닌 유리수로 분류한 후 $(\text{정수})^2$은 정수이며 $(\text{정수가 아닌 유리수})^2$은 정수가 아닌 유리수임을 확인하도록 한다. 이후 $(\sqrt{2})^2$은 정수이며 $\sqrt{2}$가 유리수인지 판단하도록 한다. 이후 $\sqrt{2}$를 제곱하면 정수가 되고, 정수가 아닌 유리수를 제곱하면 정수가 될 수 없으므로 $\sqrt{2}$는 정수가 아닌 유리수가 아니라는 것으로부터 무리수를 정의한다. 이러한 전개 방식은 2009 개정 교과서와 2015 개정 교과서 중 U 교과서가 유일하였다. 이로부터 2015 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의사항에 피타고라스 정리를 이용하거나 측정값으로 직관적으로 무리수의 존재를 이해하게 하도록 명시되어 있지만 교과서 집필진의 의도에 따라 구현되지 않을 수도 있다는 점을 확인할 수 있다.



한 변의 길이가 1 cm인 정사각형 모양의 색종이를 오른쪽 그림과 같이 접어 직각삼각형 ABC를 만들었다.

탐구① $\overline{AC}$의 길이를 구해 보자.

탐구② 계산기의 √ 를 이용하여 탐구①에서 구한 길이를 소수로 나타내 보자.



2 무리수와 실수

• 무리수의 개념을 이해한다.

무리수는 어떤 수일까?

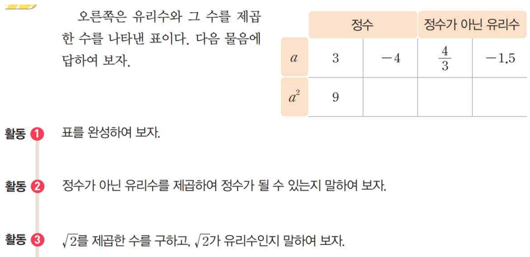
오른쪽 그림은 해인이가 한 변의 길이가 1 cm인 정사각형의 대각선의 길이 $\sqrt{2}$ cm를 자로 측정하는 모습이다.

❶ 자로 측정한 $\sqrt{2}$의 값을 말해 보자.

❷ 계산기를 사용하여 $\sqrt{2}$를 소수로 나타내어 보자.

❸ 위 ❷의 결과에서 순환마디를 찾을 수 있는지 말해 보자.

[그림 Ⅳ-4] 2015 개정 교과서 중 무리수 도입에서 기하 표현을 사용하는 예(Q, T)



오른쪽은 유리수와 그 수를 제곱한 수를 나타낸 표이다. 다음 물음에 답하여 보자.

	정수		정수가 아닌 유리수	
a	3	-4	$\frac{4}{3}$	-1.5
a^2	9			

활동 ❶ 표를 완성하여 보자.

활동 ❷ 정수가 아닌 유리수를 제곱하여 정수가 될 수 있는지 말하여 보자.

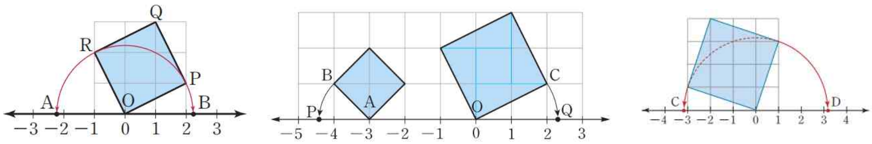
활동 ❸ $\sqrt{2}$를 제곱한 수를 구하고, $\sqrt{2}$가 유리수인지 말하여 보자.

[그림 Ⅳ-5] 2015 개정 교과서 중 무리수 도입에서
기하 표현을 사용하지 않는 예(U)

3) 다양한 무리수를 나타내는 기하 표현

본 절에서는 피타고라스 정리의 이동으로 제곱근과 실수 단원에서 다양한 무리수를 나타내는 기하 표현이 새롭게 등장하였는지를 살펴보고, 그 의의를 확인하도록 한다.

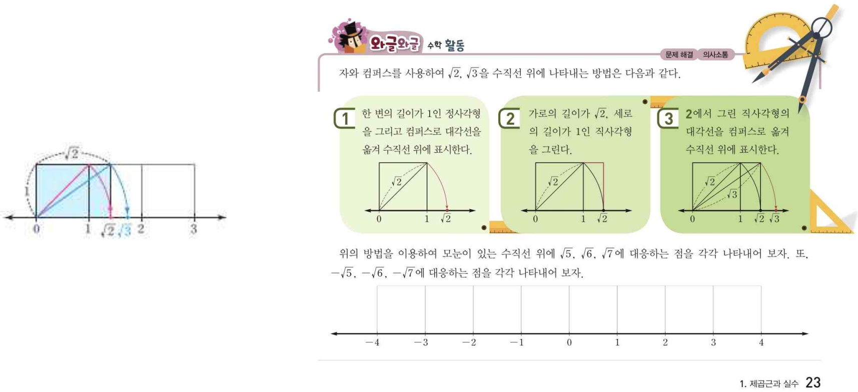
2009 개정 교과서에서는 도형의 길이와 같은 측정값으로서의 무리수를 수직선에 나타낼 때 [그림 Ⅳ-6]과 같이 정사각형의 넓이를 이용하여 한 변의 길이를 수직선 위에 표현하도록 하였다. 정사각형의 넓이로부터 한 변의 길이를 구해야 하므로 수직선에 나타낼 수 있는 무리수는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$과 같이 $\sqrt{(정수)^2+(정수)^2}$로 나타내어지는 수로 제한된다. 또한 $-3-\sqrt{2}$와 같은 무리수를 수직선 위에 나타내기 위해서는 정사각형의 한 꼭짓점이 -3으로 이동한 상황에서 정사각형의 한 변의 길이를 수직선에 나타내는 다소 작위적인 상황이 제시되는 한계가 있다.



[그림 Ⅳ-6] 2009 개정 교과서 중 수직선을 이용한 기하 표현을 사용하는 예(E, M, H)

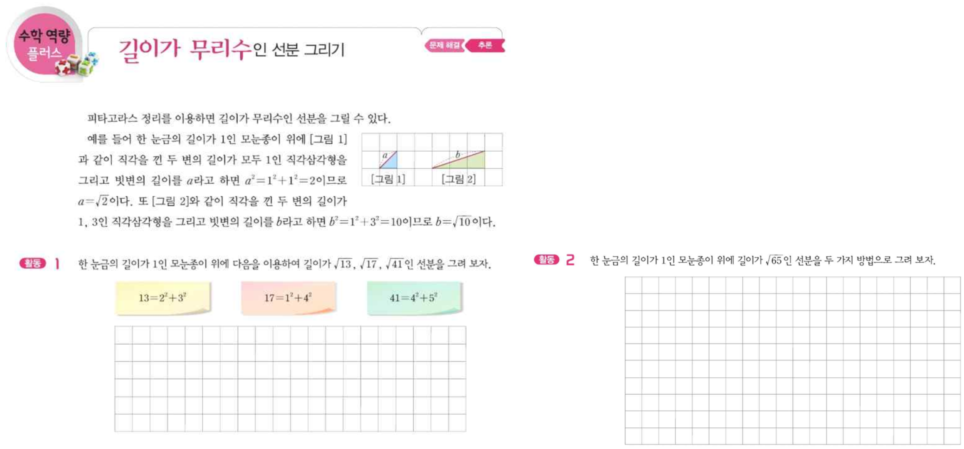
2015 개정 수학과 교육과정에서 피타고라스 정리가 중학교 2학년으로 이동함에 따라 2015 개정 교과서에서는 $\sqrt{(정수)^2+(정수)^2}$ 꼴의 무리수 뿐만 아니라 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$과 같은 무리수를 수직선에 나타낼 수 있고, 실제로 학생들이 다양한 무리수를 수직선에 나타내도록 하는 활동

이 제시되었다. [그림 Ⅳ-7]과 같이 가로의 길이가 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \cdots$ 이고 세로의 길이가 1인 직각삼각형에 피타고라스 정리를 이용하면 2009 개정 교과서에서는 다룰 수 없었던 수도 수직선에 나타낼 수 있다. 이는 직사각형의 대각선의 길이에 대응하는 수가 존재한다는 것을 직관적으로 보여줌으로써 무리수의 존재성을 드러내는데 활용될 수 있다. 또한 정사각형의 넓이를 이용하여 한 변의 길이를 구하는 계산 과정이 피타고라스 정리를 이용하여 바로 직각삼각형의 변의 길이를 구하는 계산 과정으로 축소됨으로써 학생들이 쉽게 제곱근으로 표현되는 다양한 수들이 실수에 대응된다는 점을 이해하게 할 수 있다. 그러나 현재 교과서에서는 무리수를 수직선에 나타내고, 실수의 대소를 비교하는 데에만 초점을 맞추어져 있기 때문에 활동의 역할이 다소 제한된다는 점이 한계로 남는다.



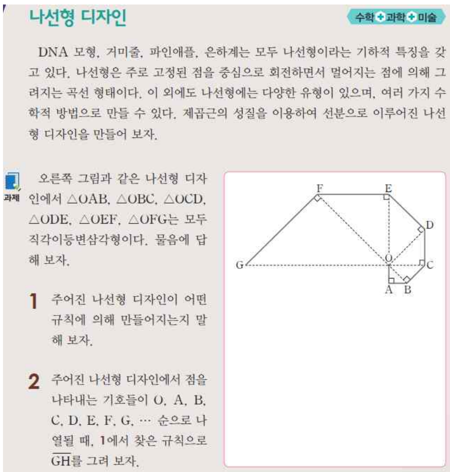
[그림 Ⅳ-7] 2015 개정 교과서 중 수직선을 이용한 기하 표현을 사용하는 예(P, T)

유사한 활동은 Q 교과서에서도 확인할 수 있다. 피타고라스 정리를 이용하여 길이가 무리수인 선분을 그려 보도록 하는 활동으로 2009 개정 교과서와 달리 정사각형을 제시하지 않고, 직각삼각형을 이용하여 길이가 무리수인 선분을 그리도록 하였다. 특히 길이가 $\sqrt{65}$ 인 선분을 두 가지 방법으로 그리도록 함으로써 2009 개정 교과서에서 주로 다루는 $\sqrt{(\text{정수})^2+(\text{정수})^2}$ 꼴의 수이지만 다양한 방법을 유도하는 전개라고 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-8] 2015 개정 교과서 중 기하 표현을 사용하는 예(Q)

N 교과서에서는 이영란, 이경화(2006)에서 제시한 Theodorus 바퀴와 유사한 기하 표현을 확인할 수 있다. 피타고라스 정리를 이용하여 Theodorus의 방법으로 무리수를 확장시키는 활동은 학생들이 측정값으로서의 무리수의 존재성을 이해하고, 무리수의 크기를 실제로 경험하고 피타고라스 정리에 대한 직관적인 이해에 기초하여 무리수를 확장하기 위한 전개라고 볼 수 있다(이영란, 이경화, 2006). 그러나 N 교과서에서는 한 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형에서 출발하여 연속적으로 직각이등변삼각형만을 만들고, 피타고라스 정리를 이용하기 때문에 다루어지는 무리수가 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}, \cdots$ 와 같이 $n\sqrt{2}$(단, n은 짝수)로 제한된다는 한계가 있다.



[그림 Ⅳ-9] 2015 개정 교과서 중 기하 표현을 사용하는 예(N)

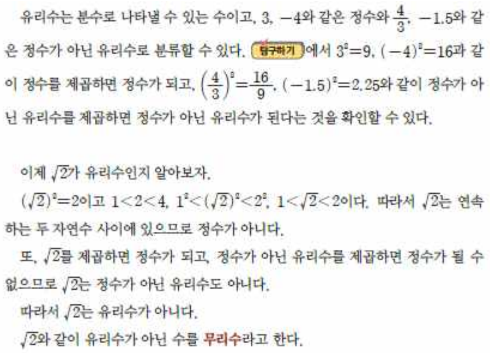
이러한 활동들([그림 Ⅳ-8], [그림 Ⅳ-9])은 피타고라스 정리를 이용하여 무리수의 존재성을 직관적, 시각적으로 드러내는데 활용될 수 있다. 그러나 이들은 무리수의 개념이나 성질이 설명되는 본문에 위치하지 않고, 소단원이나 중단원이 끝나고 프로젝트 활동 형식으로 제시되고 있다. 그러나 프로젝트 활동은 실제 수업에서 활용도가 떨어질 수 있고(김유경, 김판수, 2012), 무리수에 대해 이미 많은 내용을 학습한 학생들은 근호를 포함한 식의 계산과 같은 절차적인 측면에 몰입할 수 있다는 점에서 본래의 의도대로 수업에서 구현되지 않을 수 있다.

2. 비분수 표현과 소수 표현

무리수는 정수의 비로 표현할 수 없는 수의 발견으로부터 등장한 개념이기 때문에 학생들이 이러한 무리수의 개념을 이해하기 위해서는 정수의 비로 표현될 수 없는 수의 존재를 파악하는 것으로부터 무리수를 도입하는 과정이 필요하다. 2009 개정 교과서 13종 중 2종(A, G)의 교과서가 무리수를 정의할 때 기약분수 즉, $\frac{b}{a}$(a, b는 서로소인 정수, $a \neq 0$)의 꼴로 나타낼 수 없는 수가 존재함을 보임으로써 비분수 표현을 사용하여 무리수의 통약불가능성을 나타내었다. 2015 개정 교과서 10종 중에서 단 1종(U)의 교과서만 비분수 표현을 사용하여 무리수의 통약불가능성을 설명하였다.

무리수 개념의 정의에서 비분수 표현은 궁극적으로 $\sqrt{2}$가 정수도 아니고 기약분수도 아니므로 $\sqrt{2}$를 유리수가 아닌 수로 정의하는 것으로 확인되었다. 2009 개정 교과서 A, G는 $\sqrt{2}$는 정수가 아니고, 정수가 아닌 유리수는 모두 기약분수로 나타낼 수 있으므로 이 기약분수를 제곱하면 그 결과는 정수가 될 수 없다는 점을 이용하여 $\sqrt{2}$를 기약분수로 나타낼 수 있다면 $(\sqrt{2})^2$은 정수가 될 수 없을 것이라고 가정하였다. 그러나 $(\sqrt{2})^2 = 2$로 정수가 되므로 $\sqrt{2}$는 기약분수로 나타낼 수 없고, 따라서 $\sqrt{2}$는 정수도 아니고 기약분수로 나타낼 수 없으므로 유리수가 아닌 수라는 결론을 얻었다.

2015 개정 교과서 중에서는 U 교과서만 비분수 표현을 사용하여 무리수의 통약불가능성을 설명하였다. 이 교과서는 [그림 Ⅳ-10]과 같이 유리수는 분수로 나타낼 수 있는 수로 정수와 정수가 아닌 유리수로 분류할 수 있고, 정수의 제곱은 정수가 되고 정수가 아닌 유리수의 제곱은 정수가 아닌 유리수가 됨을 이용하여 $\sqrt{2}$는 유리수가 아님을 보였다. 그리고 $\sqrt{2}$와 같이 유리수가 아닌 수를 무리수로 정의하였다.


유리수는 분수로 나타낼 수 있는 수이고, 3, -4와 같은 정수와 $\frac{4}{3}$, -1.5와 같은 정수가 아닌 유리수로 분류할 수 있다. 탐구하기 에서 $3^2=9$, $(-4)^2=16$과 같이 정수를 제곱하면 정수가 되고, $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$, $(-1.5)^2=2.25$와 같이 정수가 아닌 유리수를 제곱하면 정수가 아닌 유리수가 된다는 것을 확인할 수 있다.

이제 $\sqrt{2}$가 유리수인지 알아보자.

$(\sqrt{2})^2=2$이고 $1<2<4$, $1^2<(\sqrt{2})^2<2^2$, $1<\sqrt{2}<2$이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 연속하는 두 자연수 사이에 있으므로 정수가 아니다.

또, $\sqrt{2}$를 제곱하면 정수가 되고, 정수가 아닌 유리수를 제곱하면 정수가 될 수 없으므로 $\sqrt{2}$는 정수가 아닌 유리수도 아니다.

따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

$\sqrt{2}$와 같이 유리수가 아닌 수를 **무리수**라고 한다.

[그림 Ⅳ-10] 2015 개정 교과서 중 무리수 정의에서 비분수 표현을 사용하는 예(U)

2009 개정 교과서 13종 중 11종의 교과서와 2015 개정 교과서 10종 중 9종의 교과서에서는 소수 표현으로 무리수를 정의하였다. 무리수 개념의 정의에서 소수 표현은 대부분 [그림 Ⅳ-11]과 같이 제곱근의 대소 관계를 이용하여 $\sqrt{2}$를 소수로 어떻게 나타내는지를 살펴보고, $1.41421356237309\cdots$와 같이 $\sqrt{2}$가 순환소수가 아닌 무한소수로 알려져 있다는 내용을 제시하는 것으로 확인되었다. 유리수는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있는데 $\sqrt{2}$와 같이 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 없는 수, 즉, 순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수가 있으며 이러한 수를 무리수라고 정의하였다. 2009 개정 교과서 중 1종(H)은 [그림 Ⅳ-12]와 같이 $\sqrt{2}$가 정수도 아니고 기약분수로 나타낼 수 없으므로 유리수가 아니라는 통약불가능성을 나타내었으나 순환하지 않는 무한소수라는 소수 표현으로 무리수를 정의하였고, 2종(K, L)의 교과서는 정수를 제곱하면 정수, 정수가 아닌 유리수를 제곱하면 정수가 아니므로 제곱하여 정수가 되는 유리수는 정수뿐임을 이용하여 $\sqrt{2}$는 유리수가 아님을 보였으나 무리수에 대한 통약불가능성을 언급하지 않고 소수 표현으로 무리수를 정의하였다.

이와 같은 방법으로 계속하면 다음을 알 수 있다.

$$1.414<\sqrt{2}<1.415$$
$$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$$
$$\vdots$$

$\sqrt{2}$를 소수로 나타내면

$$\sqrt{2}=1.41421356237309504880 16\cdots$$

과 같이 된다. 이 수는 순환소수가 아닌 무한소수임이 알려져 있다.

유리수는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있다. 또, 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있는 수는 유리수임을 배웠다. 그런데 $\sqrt{2}$와 같이 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 없는 수, 즉 순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수가 있다. 이와 같이 소수로 나타낼 때 순환소수가 아닌 무한소수가 되는 수, 즉 유리수가 아닌 수를 **무리수**라고 한다.

[그림 Ⅳ-11] 2015 개정 교과서 중 무리수 정의에서 소수 표현을 사용하는 예(S)

유리수는 2, -5와 같은 정수나 $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{7}$와 같이 정수가 아닌 기약분수로 나타낼 수 있다. 이때 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$, $\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{81}{49}$과 같이 정수가 아닌 기약분수를 제곱하면 다시 기약분수가 된다.

이제 $\sqrt{2}$가 유리수인지 알아보자.

$1<\sqrt{2}<2$이므로 $\sqrt{2}$는 정수가 아니다. 또, 정수가 아닌 기약분수를 제곱하면 정수가 될 수 없는데 $(\sqrt{2})^2=2$이므로 $\sqrt{2}$는 기약분수로 나타낼 수 없다.

$\sqrt{2}$는 정수도 아니고 기약분수로도 나타낼 수 없으므로 유리수가 아니다. 이와 같이 수 중에는 유리수가 아닌 수도 있다.

유리수는

$$\frac{1}{2}=0.5,\ \frac{31}{25}=1.24,\ \frac{1}{3}=0.\dot{3},\ \frac{26}{11}=2.\dot{3}\dot{6}$$

과 같이 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있다. 그런데 앞에서 알아보았듯이 $\sqrt{2}$는 순환하지 않는 무한소수로 나타내어진다.

이와 같이 소수로 나타낼 때 순환하지 않는 무한소수가 되는 수를 **무리수**라고 한다.

[그림 Ⅳ-12] 2009 개정 교과서 중 무리수 정의에서 통약불가능성을 언급하고 소수 표현으로 무리수를 정의한 예(H)

무리수를 비분수 표현으로 정의한 교과서에서도 소수 표현은 모두 제시되었다. 2009 개정 교과서 중 2종(A, G)에서는 정수가 아닌 수 중 기약분수로 나타낼 수 없는 유리수가 아닌 수를 무리수로 정의하고, 무리수를 소수로 나타낼 때 순환하지 않는 무한소수가 됨을 인식하도록 하였다. 그 중 G 교과서는 정수가 아닌 유리수를 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있고, 유리수가 아닌 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타낼 수 있음을 보여주며 비분수 표현과 소수 표현의 연결성을 보여주었다. 한편, 2015 개정 교과서 중 1종(U)에서는 분수로 나타낼 수 있는 유리수가 아닌 수를 무리수로 정의하고, 무리수를 소수로 나타내면 순환소수가 아닌 무한소수가 됨을 인식하도록 하였으나 비분수 표현과 소수 표현의 연결성은 구체적으로 드러나지 않았다. 피타고라스 정리의 이동으로 인해 무리수를 유리수가 아닌 수로서 통약불가능성의 아이디어를 구현할 수 있고, 소수 표현 외에 무리수를 다양하게 도입하려는 시도를 기대한 선행 연구의 결과(박경미 등, 2014)와 달리 2015 개정 교과서에서는 비분수 표현으로 통약불가능성을 드러내는 시도가 약화된 것으로 확인되었다.

Ⅴ. 요약 및 논의

본 연구는 피타고라스 정리의 이동이 2015 개정 중학교 3학년 교과서의 제곱근과 실수 단원에서 무리수 관련 학습 내용의 제시에 어떤 영향을 끼쳤는지를 파악하는 데 목적을 두었다. 구체적으로, 무리수의 표현 양식과 2015 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의 사항을 기초로 변화를 두 가

지 측면에서 살펴보았다. 먼저, 교과서에서 무리수를 기하 표현으로 다룸으로써 잠재적으로 제공하는 무리수의 존재성 관련 학습 기회를 분석하고, 무리수를 기하 표현으로 다룰 경우 피타고라스 정리를 이용하는지, 다양한 무리수를 나타내는 기하 표현은 어떠한지도 확인하였다. 무리수를 정의하고 그 개념을 이해하는 과정은 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성이 인식될 수 있도록 비분수 표현으로 무리수를 정의하고, 직관적으로 유리수와 다르게 구분할 수 있는 소수 표현으로의 연결이 요구된다. 따라서 무리수의 비분수 표현 또는 소수 표현이 잠재적으로 제공하는 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성 인식 기회를 분석하였다. 2009 개정 교과서 13종과 2015 개정 교과서 10종을 분석한 연구 결과를 정리하고 선행 연구와 비교하여 논의한 결과는 다음과 같다.

첫째, 제곱근을 도입할 때 2009 개정 교과서와 2015 개정 교과서에서 기하 표현을 사용한 빈도에는 큰 차이가 없었으며 2009 개정 교과서 대비 2015 개정 교과서에서는 다양성이 다소 축소되었다. 각 3종의 교과서에서 기하 표현을 사용하여 제곱근을 도입하였으며 이 중 2015 개정 교과서 2종은 피타고라스 정리를 이용하였다. 피타고라스 정리의 이동에 학습 부담을 경감하려는 시도가 영향을 미쳤다는 점(박경미 등, 2015)에 비추어볼 때 학생들이 이미 배운 피타고라스 정리를 이용해 계산 과정을 축소하여 식을 유도할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 2015 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의사항에서 제곱근의 도입에 피타고라스 정리를 이용할 수 있다는 내용이 추가되었지만 이를 반영한 교과서는 10종 중 2종에 불과하다. 이는 교과서 집필진의 의도에 의해 교육과정과 교과서의 불일치가 일어날 수 있다는 선행 연구의 결과(박교식 등, 2013)를 뒷받침한다.

유일하게 2009 개정 교과서 1종에서만 무리수와 연계하여 측정값 $\sqrt{2}$를 부각시키는 시도를 하였으며 이를 제외한 2009, 2015 개정 교과서에서는 측정값으로 무리수의 직관적인 존재성을 드러내기보다 $x^2=2$를 유도하려는 의도로 기하 표현을 사용하고 제곱근의 정의에 대한 대수적 설명과 기호($\sqrt{\ }$)의 사용에 초점을 맞추었다. 즉, 교육과정의 의도(박경미 등, 2014)와 달리 2009 개정 교과서보다 2015 개정 교과서의 제곱근 도입에서의 다양성은 다소 축소되었다는 점은 한계로 남는다.

둘째, 무리수를 도입할 때 2009 개정 교과서 대비 2015 개정 교과서에서 기하 표현을 사용한 빈도가 크게 높아졌으며 상당수는 피타고라스 정리를 이용하였다. 피타고라스 정리를 이용한 경우 이전 학년에서 학습한 내용과의 연계가 자연스럽고, 앞서 언급한 바와 같이 계산 과정이 축소된다는 강점이 있다. 기하 표현을 사용한 대부분의 2015 개정 교과서는 2009 개정 교과서와 유사하게 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 등을 이용하여 $\sqrt{2}$를 도입하였다. 이들은 직관적으로 도형의 길이와 같은 측정값으로 무리수의 존재성과 관련된 학습 기회를 제공하지만 소수 표현으로 제시된 무리수 정의로의 연결을 위해 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 확인하는데 주된 의도가 있는 것으로 확인되었다.

이는 2015 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의사항에서 직관적으로 무리수의 존재를 이해하게 할 수 있다고 강조한 내용이 교과서에 일부 구현되었다고 볼 수 있다. 그러나 이후의 탐구 활동이 소수 표현으로의 연결에 초점을 맞추고 있다는 점에 비추어 볼 때 학생들이 무리수의 존재성을 인식하도록 하는 데 한계가 있다. 또한 기하 표현은 소수 표현이 내포한 가무한으로서의 무리수를 측정값으로서 하나의 대상으로 다룰 수 있게 한다는 강점(최은아, 강향임, 2016, Gray & Tall, 1994)이 있는데 대상으로서의 무리수가 도입 단계에서 먼저 제시됨으로써 가무한으로서의 무리수를 학습하는 과정과 자연스럽게 연계되지 않을 수 있다. 따라서 교사가 교과서의 한계를 극복하고 교육과정의 의도를 반영한 수업을 하기 위해서는 무리수의 존재를 인식할 수 있도록 추가적인 발문을 하고, 소수 표현과 유기적으로 연결되도록 수업을 설계할 필요가 있다. 교육과정이나 교과서에 구체적인 안내가 없을 때 교사가 수업 설계에서 어려움을 겪는다는 점(이경화, 이은정, 박미미, 송창근, 2017)에 비추어

볼 때 이는 교사에게 부담으로 작용할 수 있고, 교육과정의 의도대로 수업이 구현되지 않을 수도 있다는 점을 시사한다.

셋째, 2009 개정 교과서 대비 2015 개정 교과서에서는 다양한 무리수를 나타내는 기하 표현이 새롭게 등장하였다. 2009 개정 교과서에서는 측정값으로서의 무리수를 수직선에 나타낼 때 $\sqrt{(\text{정수})^2+(\text{정수})^2}$ 꼴로 나타내어지는 수만 표현할 수 있고, 다소 작위적인 상황이 연출되는 한계가 있었다. 한편, 2015 개정 교과서에서는 피타고라스 정리를 이용하여 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$와 같이 2009 개정 교과서에서는 다룰 수 없었던 다양한 무리수를 수직선에 나타낼 수 있다는 점이 확인되었다. 이는 피타고라스 정리를 이용하여 계산 과정이 축소되고 직사각형의 대각선의 길이에 대응하는 수가 존재한다는 것을 직관적으로 보여줌으로써 무리수의 존재성을 드러내는데 활용될 수 있다. 그러나 현재 교과서에서는 무리수를 수직선에 나타내고, 실수의 대소를 비교하는 데에만 초점을 맞추고 있기 때문에 실제 수업에서 활동의 역할이 다소 제한될 수 있다는 점은 한계로 남는다.

또한 무리수를 다양한 방법을 이용하여 기하학적으로 나타내거나 이영란, 이경화(2006)에서 제시한 Theodorus 바퀴와 유사한 기하 표현을 활용하여 무리수의 존재성을 이해하고 무리수를 확장시키는 활동도 다루고 있었다. 이는 피타고라스 정리의 이동으로 다양한 예시를 제공해 무리수 이해에 도움을 제공할 수 있을 것이라는 선행 연구 결과(Sirotic & Zazkis, 2007; Zazkis, 2005)를 뒷받침한다. 이러한 활동들도 피타고라스 정리를 이용하여 무리수의 존재성을 시각적으로 드러내는데 활용될 수 있다. 그러나 이들이 소단원이나 중단원이 마무리 된 후 프로젝트 활동으로 제시되어 활용도가 떨어질 수 있고(김유경, 김판수, 2012) 무리수에 대해 이미 많은 내용을 학습한 학생들은 근호를 포함한 식의 계산과 같은 절차적인 측면에 몰입할 수 있다. 따라서 학생들이 측정값으로서의 무리수의 존재성을 이해하고, 무리수의 크기를 실제로 경험하도록 하기 위해 수업에서 재배치하여 지도하는 방안도 고려할 필요가 있다.

넷째, 2009 개정 교과서 대비 2015 개정 교과서에서 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성이 인식될 수 있는 비분수 표현으로 무리수를 정의한 빈도는 낮아지고 소수 표현을 사용한 빈도는 높아졌다. 2009 개정 교과서 13종 중 2종의 교과서에서 비분수 표현을 사용하여 무리수의 통약불가능성을 나타내었으나 2015 개정 교과서는 10종 중 단 1종에서만 무리수의 통약불가능성을 설명하였다. 비분수 표현으로 무리수를 정의한 2009 개정 교과서 1종은 정수가 아닌 유리수를 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있고, 유리수가 아닌 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타낼 수 있음을 보여주며 비분수 표현과 소수 표현의 연결을 보여주었다. 그러나 유일하게 비분수 표현을 사용한 2015 개정 교과서 1종은 분수로 나타낼 수 있는 유리수가 아닌 수를 무리수로 정의하고, 무리수를 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수가 됨을 인식하도록 하였으나 비분수 표현과 소수 표현의 연결은 구체적으로 드러나지 않았다.

이는 피타고라스 정리의 이동으로 유리수가 아닌 수로서 통약불가능성의 아이디어를 담아낼 수 있다는 선행 연구(박경미 등, 2014)의 결과와 대비된다. 우리나라 수학 교사들의 경우 교과서에 제시된 수학적 개념의 정의를 따르는 경향이 있다는 선행 연구(김민혁, 2013)의 결과에 비추어 볼 때 학생들이 무리수를 이해하는 과정에서 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성을 인식하지 못할 가능성이 있다. 또한 2009 개정 교과서로 수업한 학생들이 무리수의 소수 표현과 비분수 표현을 유연하게 오가는 것에 한계가 있다는 선행 연구(오국환 등, 2017)의 결과가 2015 개정 교과서로 수업한 학생에게서도 나타날 수 있다는 우려가 있다.

이를 토대로 본 고에서는 다음과 같은 제언을 하고자 한다. 첫째, 교과서 집필진은 개정 교육과정의 변화와 그 배경을 충분히 이해하고, 이를 반영하여 교과서를 집필할 필요가 있으며 교육과정 개발자

는 교과서 집필진의 교육과정에 대한 해석이 다양할 수 있다는 점을 고려하여 교육과정을 개발할 필요가 있다. 제곱근과 실수 단원의 교수·학습 방법 및 유의 사항은 다수의 선행 연구 결과를 검토하고, 우리나라 수학교육의 현실을 고려하여 만들어졌다. 그러나 본 연구 결과에서 확인한 바와 같이 무리수를 도입하거나 정의하는 과정에서의 다양한 표현의 활용은 부각되지 않았고 교육과정 개정의 의도가 교과서에 반영되지 않을 경우 수업에서 구현될 가능성은 더욱 낮아진다. 따라서 교과서 집필진은 교육과정의 텍스트 이면에 있는 교육과정 개정의 방향을 이해하고 이를 세심하게 반영하여 교과서를 집필할 필요가 있다. 특히 교육과정 개정의 의도를 반영하여 중학교 수준에서 통약불가능성을 이해하고, 무리수의 다양한 표현 양식을 유연하게 오갈 수 있도록 수업에서 활용할 수 있는 교수·학습 자료를 개발하는 후속 연구가 수행될 필요가 있다.

둘째, 교사는 2015 개정 수학과 교육과정의 변화에 주의를 기울이고, 학생들이 무리수의 존재성을 직관적으로 이해할 수 있도록 학습 기회를 제공할 필요가 있다. 피타고라스 정리의 이동으로 무리수를 도입할 때 2015 개정 교과서에서 기하 표현을 사용한 빈도가 크게 높아지고 직관적으로 무리수의 존재를 이해시키려는 시도가 확인되었다. 그러나 소수 표현으로 제시된 무리수 정의로의 연결을 위해 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 확인하는데 주된 의도가 있어 무리수의 존재성을 인식하도록 하는 데 한계가 있을 수 있다. 따라서 교사가 교육과정의 의도를 반영한 수업을 하기 위해서는 무리수의 존재를 인식할 수 있도록 추가적인 발문을 하고, 소수 표현과 유기적으로 연결되도록 수업을 설계할 필요가 있다. 구체적으로, 무리수의 개념을 정의하고 본 연구에서 소개한 다양한 무리수를 나타내는 기하 표현을 활용하는 것을 무리수의 존재성을 학습할 기회를 제공하는 한 가지 방안으로 제안한다.

셋째, 교사는 학생들이 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성을 이해할 수 있도록 학습 기회를 제공할 필요가 있다. 무리수 도입에서의 다양한 가능성을 열어두기 위해 선행 연구자들은 피타고라스 정리의 이동을 고려하였으며(박경미 등, 2014) 피타고라스 정리의 이동은 중학교 교육과정에서 두드러진 변화로 언급되었다(서보억, 2018). 그러나 본 연구 결과에서 확인한 바와 같이 무리수를 도입하거나 정의하는 과정에서의 다양한 시도는 두드러지지 않았고, 유리수가 아닌 수로서 무리수의 필요성이 인식될 수 있는 비분수 표현으로 무리수를 정의한 빈도는 낮아졌다. 대부분의 교과서가 소수 표현으로 무리수를 제시하여 학생들이 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 인식하는 데에는 성공적일 수 있으나 비분수 표현과 소수 표현 사이의 관계를 명확히 짚어내고 유연하게 오가는 데 한계가 있었다. 따라서 교사는 학생이 무리수를 분수로 표현되지 않는 수이자 순환하지 않는 무한소수로 이해할 수 있도록 수업을 설계할 필요가 있다.

본 연구는 피타고라스 정리의 이동이 2015 개정 중학교 3학년 교과서의 제곱근과 실수 단원에서 무리수 관련 학습 내용의 제시에 어떤 영향을 끼쳤는지를 무리수 표현을 중심으로 파악하였다는 데 의의가 있다. 그러나 본 연구는 교과서 분석에 목적을 두었으며 피타고라스 정리의 이동으로 교과서를 활용한 실제 수업에서 어떠한 변화가 나타나는지를 확인하지는 않았다는 한계가 있다. 교과서에서 무리수를 기하 표현으로 다룸으로써 잠재적으로 제공하는 무리수의 존재성 관련 학습 기회와 무리수의 비분수 표현 또는 소수 표현이 잠재적으로 제공하는 유리수가 아닌 수로서의 무리수의 필요성 인식 기회가 어떠한지, 제한점은 무엇인지를 확인하였다는 점에서 본 연구는 이후에 이루어질 후속 연구의 방향을 제시할 수 있다. 본 연구 결과를 토대로 제곱근과 실수 단원의 교육과정 개발, 교과서 집필, 교사의 교육과정 자료의 사용에 실천적인 시사점을 제공할 수 있는 연구가 이루어질 것으로 기대한다.

참고 문헌

강옥기, 권언근, 이형주, 우희정, 윤상혁, 김태희 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 두산동아.

강옥기, 권언근, 황혜정, 전대열, 노지화, 우희정 등. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 동아출판.

강정기. (2016). 표기 관점에서 무리수 개념 학습의 어려움과 대안. **한국학교수학회논문집, 19**(1), 63-82.

강향임, 최은아. (2017). 무리수 개념에 관한 학생의 오류와 어려움 해석에 필요한 교사지식. **학교수학, 19**(2), 319-343.

고호경, 김응환, 양순열, 권세화, 권순학, 정낙영 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 교학사.

고호경, 김응환, 김인수, 이봉주, 한준철, 정낙연 등. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 교학사.

김민혁. (2013). 수학교사의 교과서 및 교사용 지도서 활용도 조사. **학교수학, 15**(3), 503-531.

김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 김원, 김양수 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 천재교육.

김원경, 조민식, 방금성, 김수미, 배수경, 오혜정 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 비상교육.

김원경, 조민석, 방금성, 임석훈, 김동화, 강순자 등. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 비상교육.

김유경, 김판수. (2012). 초등수학 교과서의 탐구활동 분석 및 재구성 연구. **한국초등수학교육학회지, 16**(3), 471-489.

김화경, 나귀수, 이미라, 이애경, 권영기. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 좋은책 신사고.

류희찬, 류성림, 이경화, 신보미, 강순모, 윤옥교 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 천재교육.

류희찬, 선우하식, 신보미, 정동승, 장영훈, 설정수 등. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 천재교육.

박경미, 권오남, 박선화, 박만구, 변희현, 강은주 등. (2014). **문·이과 통합형 수학과 교육과정 재구조화 연구.** 교육부.

박경미, 박선화, 권점례, 윤상혁, 강현영, 이경진 등. (2015). **2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ.** 한국과학창의재단 연구보고 BD15120005.

박교식, 강현영, 권석일, 남진영, 박선용, 이동환 등. (2013). **고등학교 수학 교육과정 실태 분석 연구.** 한국과학창의재단.

박교식, 이종희, 김진환, 남진영, 김남희, 임재훈 등. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 동아출판.

변희현, 박선용. (2002). 무리수의 개념적 측면을 강조한 교육방안: 통약불가능성을 통한 무리수 고찰. **학교수학, 4**(4), 643-655.

변희현. (2005). **소수 개념의 교수학적 분석.** 서울대학교 대학원. 박사학위논문.

서보억. (2018). 학교수학에서 '피타고라스 정리'관련 내용의 재구조화 연구. **A-수학교육, 57**(2), 93-110.

신보미. (2008). 실수로의 수 체계 확장을 위한 유리수의 재해석에 대하여. **한국학교수학회논문집, 11**(2), 285-298.

신준국, 권오남, 윤갑진, 박종률, 김인수, 김부윤 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 두배의 느낌.

신항균, 황혜정, 이광연, 김화영, 조준모, 최화정 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 지학사.

오국환, 박정숙, 권오남. (2017). 무리수 단원에 대한 교과서 분석 연구: 과정과 대상의 관점으로. **A-수학교육, 56**(2), 131-145.

우정호, 박교식, 이종희, 박경미, 김남희, 임재훈 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 두산동아.

이강섭, 최상기, 왕규채, 이강희, 송교식, 안인숙 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 미래엔.

이경화, 이은정, 박미미, 송창근. (2017). 반성적 저널에 나타난 중등수학교사의 교수학적 변환에 대한 인식. **수학교육학연구, 27**(3), 469-489.

이영란, 이경화. (2006). Freudenthal 의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 지도 방법의 적용 사례. **수학교육학연구, 16**(4), 297-312.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 천재교육.

이준열, 최부림, 김동재, 김상미, 원유미, 강해기 등. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 천재교육.

이지현. (2015). 유리수와 무리수의 합집합을 넘어서: 실수가 자명하다는 착각으로부터 어떻게 벗어날 수 있는가?. **수학교육학연구, 25**(3), 263-279.

장경윤, 강현영, 김동원, 안재만, 이동환, 홍은지 등. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 지학사.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 강은주 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 금성출판사.

주미경, 강은주, 강소영, 강석주, 김호경, 오화평 등. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 금성출판사.

최은아, 강향임. (2016). 예비교사의 무리수의 개념과 표현에 대한 이해. **학교수학, 18**(3), 647-666.

허민, 김선희, 도종훈, 조혜정, 조숙영, 이경은 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 대교.

황선욱, 강병개, 한길준, 한철형, 권혁천, 김의석 등. (2013). **중학교 수학 3.** 서울: 좋은책 신사고.

황선욱, 강병개, 윤갑진, 이광연, 장홍월, 정종식 등. (2020). **중학교 수학 3.** 서울: 미래엔.

Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?.* New York: Oxford University Press.

Eves, H. (1999). **수학사** (이우영, 신항균 역). 서울: 경문사. (원저 1953년 출판)

González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 230-248.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 116-140.

Moreno-Armella, L. E. & Waldeg, G. C. (2000). An Epistemological history of number and variation. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: an international perspective*. Washington: Mathematical Association of America.

Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), 39-46.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line‐where are they?. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(4), 477-488.

Zazkis, R. and Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation, in *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, Vol. 4,* pp. 497‐505.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3), 207-217.

A Study on Changes of the Textbooks due to the shift of Pythagorean Theorem

Ku, Nayoung[1) · Song, Eunyoung[2) · Choi, Eunjeong[3) · Lee, Kyeong-Hwa[4)

Abstract

The purpose of this study is to understand how the shift of the Pythagorean theorem influenced the representation of irrational numbers in the 3rd grade textbook of 2015 revised mathematics curriculum by textbook analysis. Specifically, the changes in the representation of irrational numbers were examined in two aspects based on the nature of irrational numbers and the teaching and learning methods of the 2015 revised mathematics curriculum. First, we analyzed the learning opportunities related to the existence of irrational numbers that were potentially provided by treating irrational numbers as geometric representations in textbooks, and confirmed that Pythagorean theorem was used. Next, we analyzed opportunities to recognize the necessity of irrational numbers provided by numerical representations of irrational numbers. This study has significance in that it confirmed the possibility and limitation of learning opportunities related to the existence and necessity of irrational numbers that were potentially provided by changes in irrational number representations in the 2015 revised textbooks.

Key Words : irrational number, representation, 2015 revised mathematics curriculum, Pythagorean theorem, textbook analysis

Received August 07, 2020
Revised September 07, 2020
Accepted September 21, 2020

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97D60

1) Pyeongchon High School (guri39@gmail.com)
2) Deungchon High School (crabbit@snu.ac.kr)
3) Sungseo Middle School (dmswjd1823@snu.ac.kr)
4) Seoul National University (khmath@snu.ac.kr), Corresponding Author