

# Multivariate exponential smoothing models with application to exchange rates

Yeonha Lee<sup>a</sup> · Byeongchan Seong<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Applied Statistics, Chung-Ang University

(Received February 4, 2020; Revised February 29, 2020; Accepted March 17, 2020)

---

## Abstract

We introduce multivariate exponential smoothing models based on a vector innovations structural time series framework. The models enable us to exploit potential inter-series dependencies to improve the fit and forecasts of multivariate (vector) time series. Models are applied to forecast the exchange rates of the UK pound (UKP) and US dollar (USD) against the Korean won (KRW) observed on monthly basis; subsequently, we compare their performance with alternative models. We observe that the multivariate exponential smoothing models are superior to alternatives.

Keywords: exponential smoothing methods, vector innovations structural time series frameworks, multivariate time series, state space models

---

## 1. 서론

지수평활법은 최근 발전을 거듭하였으며, autoregressive integrated moving average (ARIMA) 모형의 경쟁적 위상까지 도달하였다 (Hyndman과 Athanasopoulos, 2018). 예를 들어, 지수평활법은 다변량 모형 및 이노베이션 상태공간모형으로 표현될 수 있으며 이를 통하여 통계학적 이론 및 분포에 기반한 모형으로 분류되고 있다. 특히, 지수평활모형을 이용한 예측은 많은 경제 시계열 분야에서 높은 정확도를 입증하고 있다. 최초의 다변량 지수평활법은 Jones (1966)에 의해 개발되었다. Jones는 단순 지수평활법 (Brown, 1959)을 확장한 다변량 방정식을 개발했으며 이는 상태공간모형의 형태를 갖추고 있다. Harvey (1990)는 Jones의 다변량 지수평활법을 근간으로 한 구조 시계열 모형을 제안했다. Harvey의 모형은 추세(trend)와 주기(cycle), 계절성(seasonality)에 상응하는 상태벡터들(state vectors)을 표현하며, 모형 안의 각 상태방정식은 서로 독립인 다중오차들(multiple sources of error)을 사용한다.

Anderson과 Moore (1979)는 이노베이션 상태공간모형을 제안했다. 이것은 단일오차(single sources of error)만을 사용하며 모형의 추정은 최대우도법을 사용한다. Snyder (1985)는 이노베이션 상태공간 모형과 지수평활법 사이의 관련성을 입증했다. De Silva 등 (2010)은 지수평활법을 근간으로 한 벡터 이노베이션 구조 시계열(vector innovations structural time series framework; VISTS)을 제안하였다.

본 논문에서는 이 모형을 다변량 지수평활모형이라고 부르기로 한다. 본 논문에서는 다변량 지수평활모형을 소개하고, 환율자료에 적용한다. 이 모형은 시계열의 움직임을 수준(level) 및 추세와 같은 비관측 요소들로 표현한다. 또한 단일오차만을 사용하기 때문에 구현이 간단하고 유용한 도구이다.

---

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 84 Heukseok-ro, Dongjak-gu, Seoul 06974, Korea. E-mail: bcseong@cau.ac.kr

본 논문은 총 5장으로 구성되어 있다. 2장에서는 대안모형으로서 기존 모형인 단변량 지수평활모형 및 ARIMA 모형을 살펴본다. 3장에서는 다변량 지수평활모형의 정의와 구현방법에 대해 살펴보고, 4장에서는 원/달러와 원/파운드 환율자료를 이용하여 대안모형과의 예측성능을 비교한다. 마지막 5장에서 결론을 맺는다.

## 2. 기존 모형

본 장에서는, 다변량 지수평활모형의 대안으로 사용될 수 있는 기존 모형들에 대해서 살펴본다.

### • 단변량 지수평활모형(ETS)

비계절형 단변량 지수평활모형으로 가장 널리 사용되는 형태는, 단변량 국소수준모형(univariate local level model; ULL)과 국소추세모형(univariate local trend model; ULT), 감쇠국소추세모형(univariate damped local trend model; UDLT)이다.

ULL 모형은 다음과 같은 모형식으로 표현된다.

$$y_t = l_{t-1} + e_t, \quad (2.1)$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha e_t. \quad (2.2)$$

여기서,  $l_t$ 는 수준을 나타내며,  $e_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ 을 따르는 오차항이다. ULT 및 UDLT 모형은 추세를 반영하기 위하여 다음과 같이  $b_t$  항을 도입한다.

$$y_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + e_t, \quad (2.3)$$

$$l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha e_t, \quad (2.4)$$

$$b_t = \phi b_{t-1} + \beta e_t. \quad (2.5)$$

$\phi = 1$ 인 경우는 시계열  $y_t$ 에 추세가 그대로 반영되는 ULT 모형을,  $0 < \phi < 1$ 인 경우는 추세가 감쇠(약화)되어 반영되는 UDLT 모형을 나타낸다. 단변량 지수평활모형의 적합 및 예측을 위해서는 R 프로그램의 forecast 패키지 및 ets 함수를 가장 널리 사용한다 (Hyndman과 Athanasopoulos, 2018). 경험적으로 추세가 포함된 모형을 더 많이 사용하며, 특히 감쇠국소추세모형이 예측 측면에서는 더 우수하다고 알려져 있다.

### • ARIMA 모형

ARIMA 모형은 Box와 Jenkins (1976)에 의해 제안된 모형으로 시계열 자료를 모형화하기 위하여 가장 널리 사용되고 있다. 시계열이 정상성(stationarity)을 만족하지 않는 경우 비정상성을 제거하기 위해 차분을 이용하여 정상성을 만족시킨 후 ARMA 모형에 적합하게 된다. 시계열  $y_t$ 가  $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ 를 따르면 아래와 같이 표현할 수 있다,

$$\phi_p(L)\Phi_P(L^s)\Delta^d\Delta_s^D y_t = \theta_q(L)\Theta_Q(L^s)e_t. \quad (2.6)$$

이때,  $p, d, q$ 는 각각 AR의 차수, 차분차수, MA의 차수를,  $P, D, Q$ 는 계절 AR의 차수, 계절 차분차수, 계절 MA차수를,  $s$ 는 계절주기를 나타내며;  $L$ 은 후진연산자(backshift operator),  $\Delta = 1 - L$ 은 차분연산자,  $\Delta_s = 1 - L^s$ 은 계절 차분연산자이다.  $\phi_p(L)$ 과  $\Phi_P(L^s)$ 은 AR 시차다항식이며,  $\theta_q(L)$ 과  $\Theta_Q(L^s)$ 은 MA 시차다항식이다. 예를 들어,  $\phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$ 와 같다.

위와 같이 ARIMA 모형은, 현재 시계열의 생성을 과거 시계열과 오차 그리고 현재 발생한 새로운 오차항으로 설명한다. 이와는 달리 지수평활법은 실제로 관측할 수 없는 수준, 추세와 같은 성분들(components)의 개념을 인위적으로 만들고 이들의 결합으로 현재 시계열의 생성을 설명한다. 또한, ARIMA 모형에서는 추세의 존재 유무를 검정하는 절차가 있지만, 지수평활모형에서는, 국소모형, 국소추세모형 및 감쇠국소추세모형 등을 선택하는 특별한 기준은 없다. 단변량 지수평활모형과 동일하게 ARIMA 모형의 적합 및 예측은 forecast 패키지 및 auto.arima 함수를 주로 사용한다.

#### • 벡터 ARIMA 모형

$N$ 차원의 다변량 시계열  $\mathbf{y}_t$ 에 대하여, Sims (1980)가 제안한 VAR 모형은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{y}_t = \sum_{i=1}^p \Phi_i \mathbf{y}_{t-i} + \mathbf{e}_t, \quad (2.7)$$

여기서  $\mathbf{e}_t$ 는 독립이고 평균이 0, 분산이  $\Sigma$ 인  $N$ 차원 정규분포를 따르는 오차항이다. 자기회귀항의 차수가  $p$ 인 VAR 모형은 VAR( $p$ ) 모형이라고 하며, 단변량 모형의 표시와 유사하게 VARIMA( $p, 0, 0$ ) 모형으로 나타내기도 한다. 모형 적합 및 예측을 위하여 R의 vars 패키지 (Pfaff, 2008)를 주로 사용한다.

### 3. 다변량 지수평활모형과 추정

다변량 지수평활모형은, 단변량 지수평활모형의 확장된 형태로서, 단변량 모형에서 존재하는 단순모형(simple exponential smoothing model), 홀트 추세모형(Holt's trend model), 감쇠추세모형(damped trend model) 등이 다변량의 형태(multivariate or vector)로 확장된 것이다.

#### 3.1. 다변량 지수평활모형

##### • 벡터국소수준모형

$N$ 차원의 다변량 시계열  $\mathbf{y}_t$ 에 대하여, 다변량 지수평활모형 중 가장 간단한 모형은 벡터국소수준모형(vector local level model; VLL)이다. VLL 모형은 비관측요인들 중 수준 성분으로만 이루어져 있으며, 수준 성분은 시간이 지남에 따라 임의보행(random walk)을 따른다. VLL 모형은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\ell}_{t-1} + \mathbf{e}_t, \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\ell}_t = \boldsymbol{\ell}_{t-1} + \mathbf{A}\mathbf{e}_t. \quad (3.2)$$

VLL 모형에 의한 미래  $T+h$ 시점의 예측방정식은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{y}}_{T+h} = \boldsymbol{\ell}_T, \quad h = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

여기서  $T$ 는 예측원점(forecast origin)이고,  $\mathbf{y}_t$ 에 관한 식은 측정방정식(measurement equation),  $\boldsymbol{\ell}_t$ 에 관한 식은 전이방정식(transition equation)이다. 일반적으로 오차항의 공분산 행렬  $\Sigma$ 는 대각행렬로 가정할 수 있다. 왜냐하면,  $\mathbf{y}_t$ 를 구성하는 단변량 시계열들의 상호종속성은 평활모수 행렬  $\mathbf{A}$ 의 비대각원소로 나타낼 수 있기 때문이다.

$N$ 차원 벡터  $\boldsymbol{\ell}_t$ 는  $t$ 시점에서의 수준을 의미하며,  $(N \times N)$ 차원의 행렬  $\mathbf{A}$ 는  $(\alpha_{ij})$ 의 원소로 구성된 평활모수(smoothing parameters)를 의미한다. 행렬  $\mathbf{A}$ 가 0이 아닌 비대각원소를 갖는 경우 이는 변수들간의 상호의존성을 가진다는 것을 반영한다. 식 (2.1)과 (2.2)은 방정식  $\Delta \mathbf{y}_t = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{e}_t$ 로 표현 가능하므로 VLL 모형은 VARIMA(0, 1, 1) 모형의 특별한 형태로 볼 수 있다.

- 벡터국소추세모형

벡터국소추세모형(vector local trend model; VLT)은 비관측요인인 수준과 추세 성분이 포함되며, 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\ell}_{t-1} + \mathbf{b}_{t-1} + \mathbf{e}_t, \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\ell}_t = \boldsymbol{\ell}_{t-1} + \mathbf{b}_{t-1} + \mathbf{A}\mathbf{e}_t, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{b}_t = \mathbf{b}_{t-1} + \mathbf{B}\mathbf{e}_t. \quad (3.6)$$

VLT 모형의 예측방정식은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{y}}_{T+h} = \boldsymbol{\ell}_T + (h-1)\mathbf{b}_T, \quad h = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

여기서  $\mathbf{b}_t$ 에 관한 식은 전이방정식이다.  $N$ 차원 벡터  $\mathbf{b}_t$ 는  $t$ 시점에서의 추세를 의미하며,  $(N \times N)$ 차원 행렬  $\mathbf{B}$ 는  $(\beta_{i,j})$ 로 구성된 평활모수를 의미하며 비대각원소의 의미는  $\mathbf{A}$ 와 동일하다. 식 (2.4) 및 (2.5), (2.6)은 방정식  $\Delta^2 \mathbf{y}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{e}_{t-2} + (\mathbf{A} + \mathbf{B} - 2\mathbf{I})\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{e}_t$ 로 표현 가능하므로 VLT 모형은 VARIMA(0, 2, 2) 모형에 속한다.

- 벡터감쇠국소추세모형

벡터감쇠국소추세모형(vector damped local trend model; VDLT)은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\ell}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{b}_{t-1} + \mathbf{e}_t, \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\ell}_t = \boldsymbol{\ell}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{b}_{t-1} + \mathbf{A}\mathbf{e}_t, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{b}_t = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{b}_{t-1} + \mathbf{B}\mathbf{e}_t. \quad (3.10)$$

VDLT 모형의 예측방정식은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{y}}_{T+h} = \boldsymbol{\ell}_T + \boldsymbol{\Phi}^{h-1}\mathbf{b}_T, \quad h = 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

여기서  $(N \times N)$ 차원의 대각행렬  $\boldsymbol{\Phi}$ 는 감쇠인자(damping factor)라고 하며, 과다예측이 발생하지 않도록 보정해주는 역할을 한다.  $\boldsymbol{\Phi}$ 의 대각원소는 0과 1사이 값을 가진다. 식 (2.8) 및 (2.9), (2.10)은 방정식  $\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Phi}\Delta \mathbf{y}_{t-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi})\mathbf{e}_{t-2} + (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{I} - \mathbf{A}))\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{e}_t$ 로 표현 가능하므로 VDLT 모형은 VARIMA(1, 1, 2) 모형에 속한다.

### 3.2. 모형의 추정 및 예측

- 상태공간모형

다변량 지수평활모형은 De Silva 등 (2010)이 제안한 벡터 이노베이션 구조 시계열 형태(vector innovations structural time series framework; VISTS)의 형태로서 다음과 같은 상태공간모형으로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{e}_t, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{G}\mathbf{e}_t, \quad (3.13)$$

식 (2.12)와 (2.13)는 각각 측정방정식과 전이방정식이다.  $\mathbf{y}_t$ 는  $N$ 차원 관측치 벡터(observation vector)로서  $k$ 차원 상태벡터  $\mathbf{x}_t$ 와  $N$ 차원 이노베이션 벡터  $\mathbf{e}_t$ 를 포함하고 있다. 특히, 이와 같은 상태공간 모형은 단일오차를 사용한다는 특징이 있으며 이로 인하여 모수의 추정이 아주 쉽다는 장점을 가진다.

측정방정식은 관측치 벡터  $\mathbf{y}_t$ 와 상태벡터  $\mathbf{x}_t$ 를  $(N \times k)$ 차원 행렬  $\mathbf{H}$ 로 연결하며, 행렬  $\mathbf{H}$ 는 측정행렬(measurement matrix)이라고 한다. 전이방정식은  $t$ 시점의 값이  $(t-1)$ 시점의 값에만 의존하는 1차 마코프 성질(Markov property)을 가진다.  $(k \times k)$ 차원 행렬  $\mathbf{F}$ 와  $(k \times N)$ 차원 행렬  $\mathbf{G}$ 는 각각 전이행렬(transition matrix)과 지속행렬(persistence matrix)이라고 한다.

#### • 모수의 추정

다변량 지수평활모형에서 계수행렬  $\mathbf{H}$ 와  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 와 공분산행렬  $\Sigma$ 는 모수  $\theta$ 를 구성한다. 모수의 추정은 최대가능도추정법(maximum likelihood estimation)을 사용하며, 미지의 모수벡터  $\theta$ 와 상태벡터의 초기값  $\mathbf{x}_0$ 를 추정하기 위한 로그우도함수는 아래와 같이 표현된다.

$$\log L(\theta, \mathbf{x}_0) = -\frac{T}{2} \left[ \log(2\pi) + \sum_{i=1}^N \log(\sigma_i^2) \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \frac{e_{it}^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.14)$$

여기서  $e_{it}$ 는 단일오차항  $e_t$ 의  $i$ 번째 원소를 의미하며,  $\sigma_i^2$ 는  $\Sigma$ 의  $i$ 번째 대각원소를 의미한다.

#### • 예측

예측원점  $T$ 에서  $h$ 시점의 예측분포와 관련된 적률은 다음과 같이 재귀적으로 계산할 수 있다.

$$\boldsymbol{\mu}_{T+h|T} = \mathbf{H}\mathbf{m}_{T+h-1|T}, \quad V_{T+h|T} = \mathbf{H}W_{T+h-1|T}\mathbf{H}' + \Sigma, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{m}_{T+h|T} = \mathbf{F}\mathbf{m}_{T+h-1|T}, \quad W_{T+h|T} = \mathbf{F}W_{T+h-1|T}\mathbf{F}' + \mathbf{G}\Sigma\mathbf{G}', \quad (3.16)$$

$$\mathbf{m}_{T|T} = \mathbf{x}_T \quad \text{and} \quad W_{T|T} = \mathbf{O}, \quad (3.17)$$

여기서  $\boldsymbol{\mu}_{T+h|T}$ 와  $V_{T+h|T}$ 은  $T+h$ 시점의 예측치에 대한 평균과 분산 행렬을 각각 나타낸다.  $\mathbf{m}_{T+h|T}$ 와  $W_{T+h|T}$ 는 각각 상태벡터에 대한 평균과 분산 행렬이다.

## 4. 실증분석

본 장에서는, 2장에서 소개한 대안모형과 3장에서 소개한 다변량 지수평활모형을 이용하여 환율자료를 예측하고 예측성능을 비교한다. 즉, 단변량 지수평활 3가지(ULL, ULT, UDLT)와 ARIMA, VAR 모형의 총 5가지 모형을 비교 대상으로 삼았다.

### 4.1. 환율자료

실증분석에 사용된 자료는 미국 달러와 영국 파운드에 대한 원화 환율의 월평균 자료이며, 기간은 1964년 5월부터 2019년 10월까지의 666개월을 대상으로 하였다. Figure 4.1은 분석에 사용된 이변량 환율자료를 이중 Y축 시계열 그림으로 보여주고 있다. 두 환율은 국내 경제 상황의 변화에 동시에 영향을 받고 있으며 이를 통하여 상호의존성이 존재함을 알 수 있다. 따라서, 단변량 분석보다는 다변량 분석이 더 정교한 예측을 할 것이라고 기대할 수 있다.

모형적합을 위한 훈련자료(training set)의 기간은 1964년 5월부터 2013년 8월까지이며, 예측성능평가를 위한 검증자료(test set)의 기간은 2013년 9월부터 2019년 10월까지 6년 2개월간의 자료를 사용하였다. 분산 안정화를 위해 모형 적합 전 자료에 로그 변환을 하였으며, 자료는 한국은행 경제통계시스템(<https://ecos.bok.or.kr/>)을 통해 얻을 수 있다.

다변량 지수평활모형을 이용한 예측은 R의 smooth 패키지 (Svetunkov, 2019), VAR은 vars 패키지 (Pfaff, 2008), 나머지 다른 모형들은 forecast 패키지 (Hyndman 등, 2019)를 이용하였다. 모든

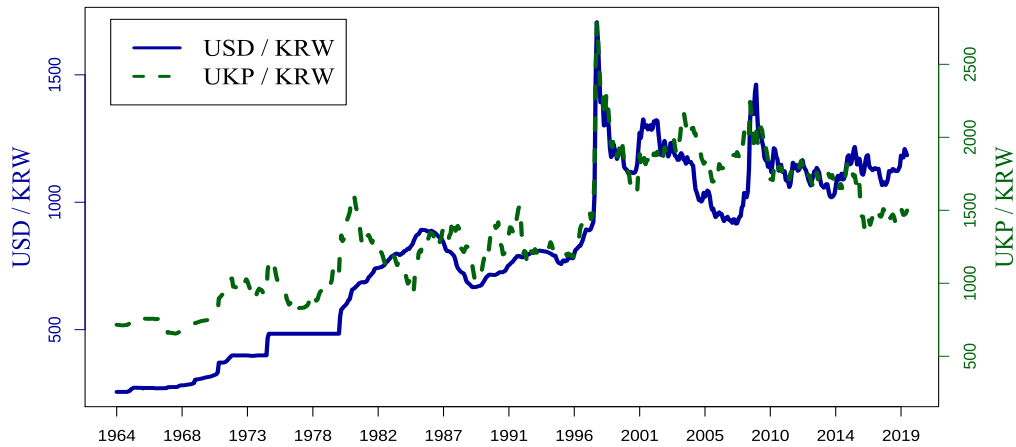


Figure 4.1. US and UK monthly exchange rates with dual Y axis.

ARIMA 모형에서 최적 모형의 선택은 corrected Akaike information criterion (AICc) 정보량을 기준으로 결정하였다. 특히, 원/달러 환율자료 분석을 위한 ARIMA 모형은  $ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 0, 1)_{s=12}$ , 원/파운드 환율자료분석을 위해서  $ARIMA(0, 1, 1)$  모형이 사용되었으며, VAR 모형에서는 최적 모형으로 VAR(3) 모형이 사용되었다.

평가의 정확도 향상을 위해 확장창 또는 롤링 원점 방법(expanding window or rolling origin approach)을 사용하였다. 총 관측치 666개 중 마지막 관측치 74개를 보류하고 나머지 592개의 훈련자료를 이용하여 1개월부터 24개월 미래 예측시점까지 예측치를 생성한다. 그 후 보류해 둔 관측치 중 가장 오래된 관측치 한 개씩을 훈련자료에 추가하고 다시 예측시점에 대한 예측치를 생성한다. 본 논문에서는 이 과정을 50번 반복하여 한 개의 예측시점에 대하여 총 50개씩의 반복된 예측치를 만들었다.

#### 4.2. 성능평가방법

각 모형의 예측성능을 평가하기 위해 평균절대백분율오차(mean absolute percentage error; MAPE)와 제곱근평균제곱오차(root mean square error; RMSE), 평균절대척도오차(mean absolute scaled error; MASE)를 사용하였다. MAPE는 예측성능을 오차의 백분율로 표시하므로 쉽게 이해할 수 있다는 장점이 있다. RMSE는 예측오차의 크기 측면에서 오류 및 이상치에 민감하다는 장점을 가지며, MASE는 단위나 크기에 관련없이 동일한 기준으로 비교 가능하다는 장점을 가진다.

예측시점  $h$ 에서 MAPE는 다음과 같이 계산하였다.

$$MAPE_h = \frac{1}{S \times I} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^I \left| \frac{y_h^{s,i} - \hat{y}_h^{s,i}}{y_h^{s,i}} \right|, \quad (4.1)$$

여기서  $S$ 는 변량의 개수로서 2이며,  $I$ 는 반복횟수의 값으로 50이다.  $\hat{y}_h^{s,i}$ 는  $s$ 번째 변량에서  $i$ 번째 반복시 예측시점  $h$ 에 대한 예측치를 의미한다.

예측시점  $h$ 에서 RMSE는 다음과 같이 계산하였다.

$$RMSE_h = \sqrt{\frac{1}{S \times I} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^I (y_h^{s,i} - \hat{y}_h^{s,i})^2}. \quad (4.2)$$

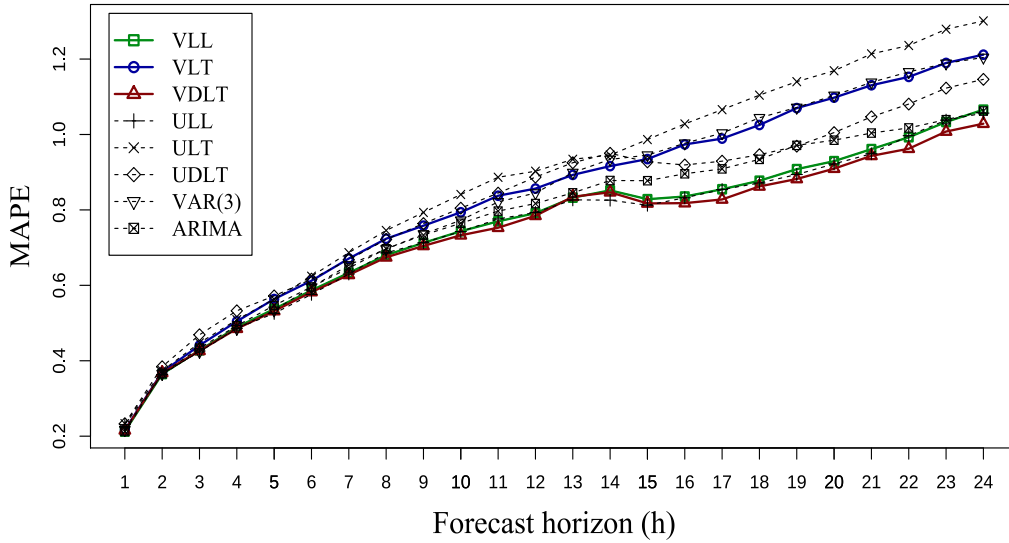


Figure 4.2. MAPE for forecasting by 8 competing models.

예측시점  $h$ 에서 MASE는 다음과 같이 계산하였다.

$$MASE_h = \frac{1}{S \times I} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^I \left| \frac{y_h^{s,i} - \hat{y}_h^{s,i}}{\frac{1}{n^{s,i}-1} \sum_{t=2}^{n^{s,i}} |y_t^{s,i} - y_{t-1}^{s,i}|} \right|. \tag{4.3}$$

여기서, 분모는  $s$ 번째 변량의  $i$ 번째 반복에 대한  $n^{s,i}$ 개의 훈련자료를 임의보행 모형으로 적합했을 때의 평균절대오차(mean absolute error)를 나타낸다. 그러므로 MASE를 이용하여 해당모형과 임의보행 모형 간의 상대적인 예측성능을 알 수 있다.

### 4.3. 분석결과

Figures 4.2-4.4는 예측시점 1-24에서 3가지 예측 평가방법에 따른 각 모형들의 성능을 보여준다. 서로 다른 평가방법을 사용하였지만 결과는 비슷함을 알 수 있다. 특히 VDLT 모형은 다른 경쟁모형과 비교할 때 가장 우수한 예측성능을 보여준다. 국소수준모형인 VLL과 ULL은 대체로 비슷한 예측 성능을 보이고 있으며 국소추세모형인 VLT와 ULT 또한 비슷한 성능을 보였다.

Tables 4.1-4.3은 특정 예측시점 및 예측시점의 구간에 따른 모형들의 예측성능평가 결과표이며 각각 MAPE, RMSE, MASE를 나타낸다. 표 안의 “Forecast horizon”은 예측시점이 1일 때와 24일 때 예측 성능을 보여준다. “Average measures”는 예측시점의 구간에 대해서 예측성능을 평균한 것이다. 예를 들어, 1-3의 이름표를 가진 열은 예측시점 1부터 3시점까지의 3개 예측성능을 평균한 것이다. 결과를 쉽게 알아보기 위해 가장 작은 예측성능의 값을 가지는 경우 밑줄을 긋고 진하게 처리하였다.

평균순위를 의미하는 “Rank”는 각 예측시점 1~24에서 각 모형의 예측성능 순위를 매긴 후 평균화한 값이다. 평균순위값이 작을수록 모형의 예측성능이 우수함을 의미한다. 표의 정렬은 모형의 평균순위값을 기준으로 하여 오름차순으로 정렬하였다.

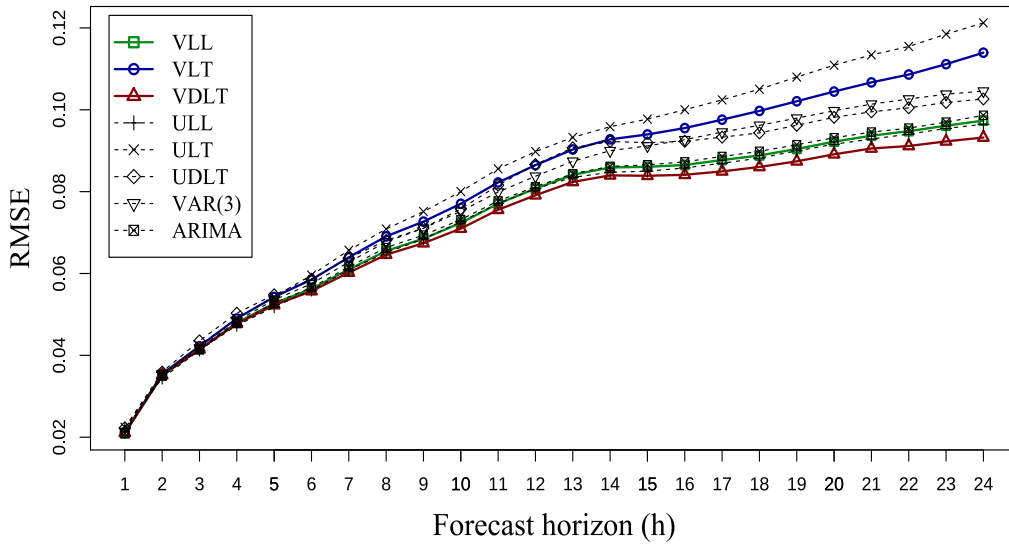


Figure 4.3. RMSE for forecasting by 8 competing models.

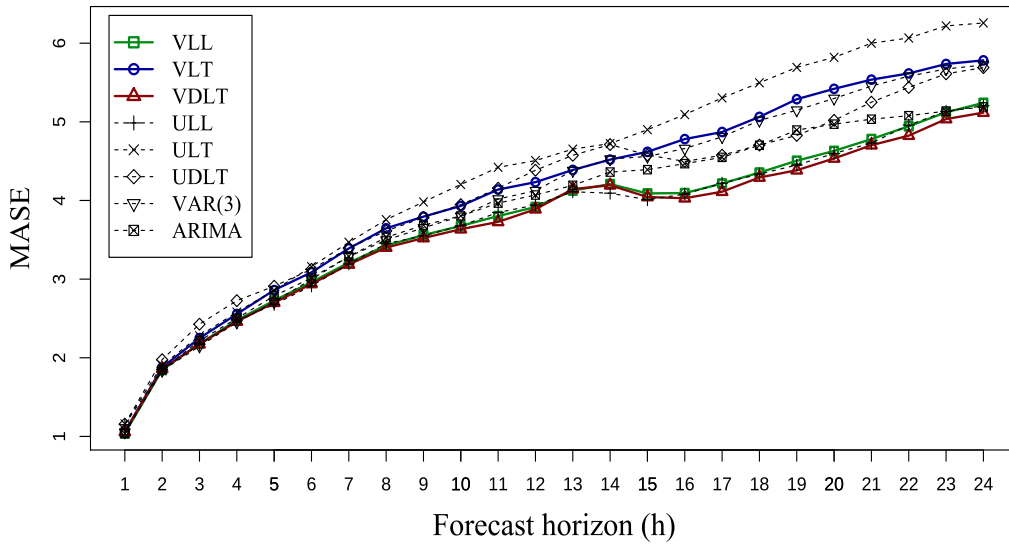


Figure 4.4. MASE for forecasting by 8 competing models.

Tables 4.1~4.3를 통해서 볼 때, VDLT 모형은 예측시점이 1일 때와 예측시점 구간이 1-3일 때를 제외 하고는 모든 예측시점 및 구간에서 가장 좋은 예측성능을 가진다. 또한 평균순위에 따르면 8가지 경쟁 모형 중 VDLT 모형이 가장 우수한 예측성능을 보여주고 있고, 뒤이어 ULL과 VLL 모형순으로 좋은 예측성능을 보여주고 있다. 감쇠모형을 제외하고는 각 모형들은 종류별로 예측성능이 그룹화되는 경향을 보인다. 예측성능은 VDLT, 국소수준모형 2가지, (벡터) ARIMA 모형 2가지, UDLT, 국소추세모형 2가지의 순서로 좋은 것으로 나타났다.



**Table 4.1.** MAPE for some selected forecast horizons

	Forecast horizon		Selected forecast horizons					Rank
	1	24	1~3	1~12	1~24	13~24	19~24	1~24
VDLT	0.2155	<b>1.0287</b>	0.3365	<b>0.5737</b>	<b>0.7344</b>	<b>0.8950</b>	<b>0.9556</b>	1.58
ULL	0.2307	1.0567	0.3400	0.5791	0.7428	0.9066	0.9761	2.21
VLL	0.2124	1.0657	<b>0.3349</b>	0.5790	0.7466	0.9142	0.9817	2.79
ARIMA	<b>0.2123</b>	1.0621	0.3372	0.5918	0.7716	0.9515	1.0131	4.04
VAR	0.2169	1.2043	0.3354	0.5954	0.8259	1.0563	1.1454	5.33
VLT	0.2168	1.2116	0.3424	0.6124	0.8305	1.0487	1.1421	6.04
UDLT	0.2331	1.1462	0.3621	0.6247	0.8110	0.9973	1.0618	6.25
ULT	0.2332	1.3011	0.3514	0.6338	0.8754	1.1169	1.2232	7.75

**Table 4.2.** RMSE for some selected forecast horizons

	Forecast horizon		Selected forecast horizons					Rank
	1	24	1~3	1~12	1~24	13~24	19~24	1~24
VDLT	0.0211	<b>0.0932</b>	0.0326	<b>0.0559</b>	<b>0.0717</b>	<b>0.0874</b>	<b>0.0906</b>	1.42
ULL	0.0221	0.0965	0.0326	0.0565	0.0730	0.0895	0.0934	2.08
VLL	<b>0.0209</b>	0.0974	0.0325	0.0566	0.0735	0.0903	0.0941	2.92
ARIMA	0.0210	0.0986	<b>0.0325</b>	0.0570	0.0740	0.0911	0.0951	3.71
VAR	0.0214	0.1046	0.0329	0.0582	0.0775	0.0968	0.1017	5.46
UDLT	0.0223	0.1026	0.0339	0.0594	0.0778	0.0961	0.0998	6.13
VLT	0.0212	0.1139	0.0330	0.0593	0.0804	0.1014	0.1078	6.63
ULT	0.0224	0.1212	0.0333	0.0608	0.0838	0.1068	0.1146	7.67

**Table 4.3.** MASE for some selected forecast horizons

	Forecast horizon		Selected forecast horizons					Rank
	1	24	1~3	1~12	1~24	13~24	19~24	1~24
VDLT	1.0558	<b>5.1169</b>	1.6966	<b>2.8791</b>	<b>3.6651</b>	<b>4.4510</b>	<b>4.7663</b>	1.67
ULL	1.1494	5.2040	1.7235	2.9081	3.7009	4.4937	4.8457	2.42
VLL	1.0376	5.2409	1.6869	2.9016	3.7137	4.5257	4.8702	2.75
ARIMA	<b>1.0362</b>	5.1896	1.7004	2.9790	3.8631	4.7472	5.0504	4.13
VAR	1.0542	5.7226	<b>1.6794</b>	2.9646	4.0167	5.0688	5.4790	4.54
UDLT	1.1564	5.6892	1.8531	3.1330	4.0445	4.9560	5.3053	6.25
VLT	1.0614	5.7816	1.7297	3.0686	4.1017	5.1347	5.5626	6.46
ULT	1.1590	6.2568	1.7812	3.1898	4.3541	5.5185	6.0088	7.79

Figure 4.5는 모형들 간의 평균순위를 용이하게 비교하기 위해 그림으로 표현한 것이다. 이를 통하여 다음과 같은 3가지 점들은 흥미로운 결과이며, 이는 추후 좀더 면밀한 검토가 필요한 부분이라고 보여진다; (i) 다변량 지수평활모형 중에서 VLT 모형의 성능이 좋지 않은 점, (ii) 단변량 지수평활모형임에도 ULL 모형은 VDLT와 유사한 예측 성능을 보이는 점, (iii) VAR는 다변량 모형임에도 불구하고 성능이 아주 좋지 않은 점.

## 5. 결론

본 논문에서는 다변량 지수평활모형을 소개하고 실증분석을 통하여 그 예측성능을 평가하였다. 다변량 지수평활모형은 단변량 지수평활법을 다변량 시계열 자료의 모형화를 위하여 확장한 기법이다. 이 모

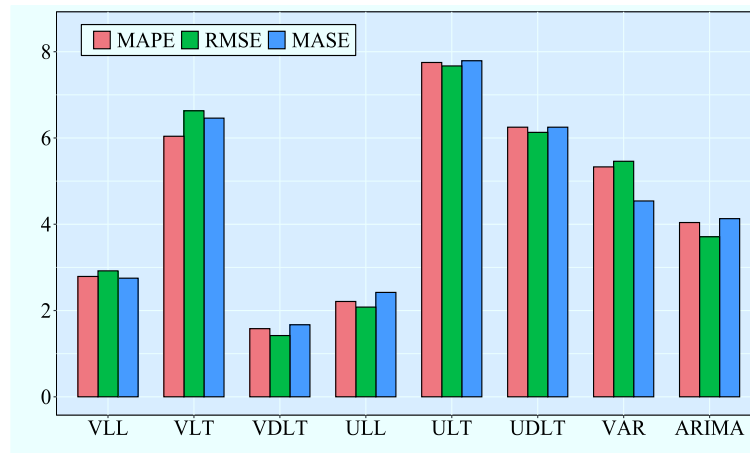


Figure 4.5. Average rank scores across all forecast horizons for 8 competing models.

형은 변량들의 잠재적인 상호의존성을 포착하여 다변량 시계열의 적합도 및 예측성능을 향상시키며, 직관적이고 손쉽게 사용할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 다변량 지수평활모형과 대안모형을 이용하여 원/달러환율과 원/파운드환율로 구성된 시계열 자료에 적합하고 모형들의 예측성능을 비교하였다. 대안모형으로는 단변량 지수평활모형과 VAR, ARIMA 모형을 사용하였다. 결과적으로 이변량 환율자료 예측에 있어 다변량 지수평활모형이 경쟁모형에 비하여 상대적으로 우수한 예측성능을 보여주었다.

## References

- Anderson, B. D. and Moore, J. B. (1979). *Optimal Filtering*, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Box, G. E. P. and Jenkins, G. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, Oakland.
- Brown, R. G. (1959). *Statistical forecasting for inventory control*. McGraw/Hill.
- De Silva, A., Hyndman, R. J., and Snyder, R. (2010). The vector innovations structural time series framework: a simple approach to multivariate forecasting, *Statistical Modelling*, **10**, 353–374.
- Harvey, A. C. (1990). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hyndman, R. J. and Athanasopoulos, G. (2018). *Forecasting: Principles and Practice* (2nd ed), OTexts, Lexington.
- Hyndman, R. J., Athanasopoulos, G., Bergmeir, C., Caceres, G., Chhay, L., O'Hara-Wild, M., Petropoulos, F., and Razbash, S. (2019). *forecast: Forecasting functions for time series and linear models*. R package version 8.10, URL <http://pkg.robjhyndman.com/forecast>.
- Jones, R. H. (1966). Exponential smoothing for multivariate time series, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **28**, 241–251.
- Pfaff, B. (2008). VAR, SVAR and SVEC models: implementation within R Package vars, *Journal of Statistical Software*, **27**. URL <http://www.jstatsoft.org/v27/i04/>
- Sims, C. A. (1980). Macroeconomics and reality, *Econometrica*, **48**, 1–48.
- Snyder, R. D. (1985). Recursive estimation of dynamic linear models, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **47**, 272–276.
- Svetunkov, I. (2019). *smooth: Forecasting Using State Space Models*. R package version 2.5.4, URL <https://github.com/config-i1/smooth>

# 다변량 지수평활모형을 이용한 환율 분석

이연하<sup>a</sup> · 성병찬<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>중앙대학교 응용통계학과

(2020년 2월 4일 접수, 2020년 2월 29일 수정, 2020년 3월 17일 채택)

---

## 요약

본 논문은 단변량 지수평활법의 확장된 형태인 다변량 지수평활법을 소개하고 다변량 시계열 분석에 활용한다. 다변량 지수평활법은 한 개의 오차를 기반으로 하는 상태공간모형을 이용하여 추정의 편리성을 제고하며, 다변량 시계열 간의 잠재적인 상호연관성을 활용하여 적합도 및 예측력을 향상시킨다. 다변량 지수평활법의 성능을 평가하기 위하여 월별 원/달러 및 원/파운드 환율자료를 분석하고 예측한다. 대안 모형의 예측 결과와 비교하여 다변량 지수평활법의 우수성을 확인한다.

주요용어: 지수평활법, 벡터 이노베이션 구조 시계열, 다변량 시계열, 상태공간모형

---

<sup>1</sup>교신저자: (06974) 서울시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 경영경제대학 응용통계학과.  
E-mail: bcseong@cau.ac.kr