

부분 내재적 체비셰브 스펙트럴 기법을 이용한 주기적인 비정상 유동 해석

임동균^{1,†}

¹청주대학교 항공기계공학과

Partially Implicit Chebyshev Pseudo-spectral Method for a Periodic Unsteady Flow Analysis

Dong Kyun Im^{1,†}

¹Department of Aeronautical Maintenance and Mechanical Engineering, Cheongju University

Abstract

In this paper, the efficient periodic unsteady flow analysis is developed by using a Chebyshev collocation operator applied to the time differential term of the governing equations. The partial implicit time integration method was also applied in the governing equation for a fluid, which means flux terms were implicitly processed for a time integration and the time derivative terms were applied explicitly in the form of the source term by applying the Chebyshev collocation operator. To verify this method, we applied the 1D unsteady Burgers equation and the 2D oscillating airfoil. The results were compared with the existing unsteady flow frequency analysis technique, the Harmonic Balance Method, and the experimental data. The Chebyshev collocation operator can manage time derivatives for periodic and non-periodic problems, so it can be applied to non-periodic problems later.

초 록

본 연구는 Chebyshev collocation operator를 지배 방정식의 시간 미분항에 적용하여 비정상 유동해석을 해석할 수 있는 기법을 개발한 논문이다. 시간적분으로 유속항은 내재적으로 처리하였으며 시간 미분항은 Chebyshev collocation operator를 적용하여 원천항 형태로 외재적으로 처리하여 부분 내재적 시간적분법을 적용하였다. 본 연구의 방법을 검증하기 위해 1차원 비정상 burgers 방정식과 2차원 진동하는 airfoil에 적용하였으며 기존의 비정상 유동 주파수 해석기법과 시험 결과를 비교하여 나타내었다. Chebyshev collocation operator는 주기적인 문제와 비주기적인 문제에 대해서 시간 미분항을 처리할 수 있으므로 추후 비주기적인 문제에 적용할 예정이다.

Key Words : Unsteady flow(비정상 유동), CFD(전산유체역학), Time Spectral method(시간 스펙트럴 기법), Chebyshev polynomial(체비셰브 다항식), Harmonic Balance method(조화균형법)

1. 서 론

전산 유체 역학을 이용한 다양한 비정상 유동 해석 기법들에 대한 연구가 진행 중이다[1-9]. 비정상 유동 해석을 위해서는 지배 방정식의 시간 미분항을 처리해야하는데 Jameson등은 이중시간 적분법을 이용하여 가상 시간으로 내부적으로 수립시킨 후 수립된 해를

유한차분법으로 실제 시간 단위로 전진하여 비정상 유동을 해석하는 방법을 제안 하였다[1-2]. 이러한 방법은 순차적으로 비정상 유동 해를 얻을 수 있다. 반면에 순차적으로 해를 접근하는 방법과 달리 비정상 시간 미분항을 원천항으로 처리하여 주기단위로 수립시키는 방법이 연구되어 왔다. 즉 Fourier transform을 활용하여 시간 미분항을 계산하여 지배 방정식에 시간 미분항을 소거시켜 가상시간으로 적분하여 비정상 유동을 마치 정상 유동 해석과 같이 수립시키는 연구가 활발히 진행되고 있다[3-9]. Hall등은 Fourier series를

Received: Feb. 05, 2020 Revised: Mar. 23, 2020 Accepted: Apr. 10, 2020

† Corresponding Author

Tel: +82-43-229-7870, E-mail: mark0923@cju.ac.kr

© The Society for Aerospace System Engineering

이용한 Harmonic balance method를 제안하여 주기적인 거동을 보이는 2차원 압축기 내부 유동을 해석하였다[3]. 또한 Thomas등은 Fourier series로 유동 변수를 주파수 영역으로 변환하고 지배방정식의 시간 미분항을 Fourier 계수로 표현하여 나타내고 Fourier 계수로 변환된 지배 방정식을 역 Fourier 변환 행렬을 취해줌으로 다시 시간 영역 변수로 해석 영역을 치환하여 주기 단위로 수렴시켜 비정상 유동을 해석하는 방법으로 Harmonic balance method를 적용하기 편리하도록 개선하였다[4-5]. McMullen 등은 FFT(Fast Fourier Transform)를 활용하여 비정상 유동을 해석하였다[7-8]. Hall등이 제안한 방법과 유사하게 지배 방정식을 주파수 영역으로 치환한다. 하지만 유동 변수를 시간 영역으로 역변환 하지 않고 주파수 영역으로 해석을 수행하는데 이때 주파수 영역에서의 잔류치를 계산하기 위해 보존변수를 역변환하여 잔류치를 계산하는 방법을 제안하였으며 FFT(Fast Fourier Transform)를 활용하여 효율적으로 해석을 수행하였다. Gopinath 등은 matrix operator for Fourier spectral differentiation을 적용하여 시간 미분항을 처리하므로 비정상 유동을 해석할 수 있는 time spectral method를 제안하였다[9]. 이 방법은 Thomas가 제안한 harmonic balance method와 같이 시간 미분항이 원천항으로 나타나며 시간영역에서 가상시간으로 적분하여 해석한다. 이러한 Fourier transform을 활용한 비정상 유동 기법들은 주기적인 거동을 나타내는 유동에 대해서 효율적이며 정확한 비정상 해를 주기단위로 해석한다.

Chebyshev pseudospectral method는 지배 방정식의 근사해에 대한 Chebyshev 근사값을 토대로 미분값을 근사하는 방법이다. Chebyshev polynomial은 $[-1, 1]$ 의 범위에서 정의되며 orthogonal polynomial 군으로 함수의 근사값을 매우 정확하게 나타낼 수 있어서 수학, 물리 등의 분야에서 이용되고 있다[10-12]. Dinu 등은 공탄성 해석 시 비정상 공력을 추정할 때 Chebyshev polynomial를 적용하여 매우 정확한 근사해를 보여주었으며 Niu 등은 비정상 실린더 주위 유동 해석 시 모멘텀 보존 방정식과 에너지 보존 방정식의 공간 미분항을 Chebyshev spectral method를 적용하여 고해상도의 결과를 얻었으며 3차 정확도의 R-K의 결과와 비교하였다[10-11]. Khater 등은 다양한 형태의 burgers 방정식에 Chebyshev spectral collocation method를 적용하여 공간 미분항에 적용하여 고해상도 결과를 도출하였다[12].

본 연구에서는 Chebyshev collocation operator를 공간 미분항이 아닌 시간 미분항에 적용하여 비정상 유동 지배 방정식의 시간 미분항을 원천항(source term)

으로 추가하여 비정상 유동을 정상 유동 해석처럼 수렴시켜 처리하였다. 이와 같은 방법은 주파수 기법의 해석 과정과 유사하다[4-5,13]. 다만 주파수 기법에서 적용되는 differential operator는 주기적인 문제를 가정으로 유도된 것이지만 본 연구의 Chebyshev operator는 비주기적인 문제에 적용가능하다. 이러한 기법을 2차원 NS방정식에 적용하였으며 진동하는 날개골에 적용하여 기존의 주파수 기법과 비교하였다. 추후 부분내재적으로 적용한 시간적분 방법을 완전 내재적기법으로 적용할 예정이며 Chebyshev operator가 가지는 수렴불안정성을 Im 등이 제안한 Mapping 함수 등을 적용하여 개선할 예정이다[14].

2. Chebyshev Pseudo-spectral Method

2.1 Chebyshev collocation operator[15]

시간에 대한 임의의 함수 $u(t)$ 가 $[a,b]$ 의 시간범위에서 정의 되어질 때 Chebyshev polynomial은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$u_j(t) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(t_j) = \sum_{n=0}^N a_n \cos \frac{j\pi}{N} n \quad (1)$$

여기서

$$a_n = \frac{2}{Nc_n} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} u_j T_n(t_j) = \frac{2}{Nc_n} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} u_j \cos \frac{j\pi}{N} n \quad (2)$$

$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 0, N \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

Chebyshev의 계수를 vector형태로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{a} = D\vec{u} = \frac{2}{N} \begin{bmatrix} \frac{T_0(t_0)}{4} & \frac{T_0(t_1)}{2} & \frac{T_0(t_N)}{4} \\ \frac{T_1(t_0)}{2} & T_1(t_1) & \frac{T_1(t_N)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{T_N(t_0)}{4} & \frac{T_N(t_1)}{2} & \frac{T_N(t_N)}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (4)$$

또한 함수값에 대한 미분항을 이와 유사하게 표현하면 다음과 같으며

$$\vec{u}' = \hat{D}\vec{b} = \begin{bmatrix} T_0(t_0)T_1(t_0) & T_N(t_0) \\ T_0(t_1)T_1(t_1) & T_N(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ T_0(t_N)T_1(t_N) & T_N(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

함수값의 미분항의 Chebyshev계수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{b} = G\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & \dots & G_{1,N+1} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & \dots & G_{2,N+1} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & G_{3,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$G_{ij} = \frac{2j}{c_i}, \quad c_i = \begin{cases} 2, & i = 1, N+1 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

위 식의 $G_{i,j}$ 는 $(i+j)$ 가 홀수일 때만 정의되며 짝수일

경우에는 0이다. 만약 해석하고자 하는 범위가 $[-1,1]$ 이 아닌 $[a,b]$ 의 경우 $G_{i,j}$ 의 각 원소값을 $\frac{b-a}{2}$ 으로 나누어 주면 된다. 그러므로 시간에 대한 임의의 함수 $u(t)$ 의 미분은 다음과 같이 계산된다.

$$\vec{u}' = \widehat{D}\vec{b} = \widehat{D}G\vec{a} = \widehat{D}GD\vec{u} = D_{ch}\vec{u} \quad (8)$$

위 식에서 D_{ch} 는 Chebyshev collocation operator를 나타내며 $[N+1, N+1]$ 의 matrix 크기를 갖는다.

2.2 Implementation

아래의 식은 2차원 비정상 N-S 방정식을 나타낸다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Q 는 2차원 N-S방정식의 해로 보존변수이며 G 와 H 는 각각 x 방향과 y 방향의 유속항으로 점성과 비점성항을 포함한 잔류치를 나타낸다. $[0,a]$ 시간에 대해 Q 에 대한 시간 미분항을 앞에서 계산한 Chebyshev collocation operator를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$D_{ch}\vec{Q} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = \vec{0} \quad (10)$$

위 식에서 \vec{Q} 과 \vec{G} , \vec{H} 은 $[N+1,1]$ 의 크기를 갖는 matrix이며, Chebyshev polynomial에 의해서 결정된 점들(points)에 의한 값이다.

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix}, \vec{G} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_N \end{bmatrix}, \vec{H} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} \quad (11)$$

주파수 영역 기법과 차이점은 등간격의 시간으로 \vec{Q} 과 \vec{G} , \vec{H} 이 결정되는 것이 아니고 cosine 함수에 의해서 결정되는 것이다. 가상 시간 전진법을 적용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau} + D_{ch}\vec{Q} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = \vec{0} \quad (12)$$

본 연구에서는 효율적으로 Chebyshev operator항을 처리하기 위해서 유속항에 대해서 내재적으로 처리하고 Chebyshev operator에 대해서는 외재적으로 처리하였다.

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau} + D_{ch}\vec{Q}^n + \frac{\partial \vec{G}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{H}^{n+1}}{\partial y} = \vec{0} \quad (13)$$

내재적으로 처리된 유속항에 대해서 선형화 기법을 취하여 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{G}^{n+1} = \vec{G}^n + V(\Delta\vec{Q}^n) \quad (14)$$

$$\vec{H}^{n+1} = \vec{H}^n + W(\Delta\vec{Q}^n) \quad (15)$$

위 식에서 V 와 W 는 $[N+1, N+1]$ 의 크기를 갖는 유속 자코비안 matrix이며 각각의 요소는 $[4,4]$ 의 크기를 갖는 matrix이다. 선형화된 유속항을 위 식에 대입하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\Delta\vec{Q}^n}{\Delta\tau} + \frac{\partial}{\partial x}V(\Delta\vec{Q}^n) + \frac{\partial}{\partial y}W(\Delta\vec{Q}^n) = -\frac{\partial \vec{G}^n}{\partial x} - \frac{\partial \vec{H}^n}{\partial y} - D_{ch}\vec{Q}^n \quad (16)$$

위 식에서 유속벡터는 각각의 시간에서 보존변수만의

함수가 된다. 그러므로 대각항을 제외한 나머지 항은 서로 다른 시간에서의 미분에 대한 유속벡터 값이 되어 0으로 간주할 수 있다.

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_0}{\partial Q_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial G_N}{\partial Q_N} \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial Q_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial H_N}{\partial Q_N} \end{bmatrix} \quad (17)$$

위 식의 유속자코비안 matrix는 각 요소가 $[4,4]$ 의 크기를 가지고 있으며 cosine 함수에 의한 점들(points)에서 계산되어 진다. 또한 기존의 유속 자코비안 행렬과 같으므로 추가적인 처리를 하지 않아도 된다. 위의 유속 자코비안 matrix를 대입하고 미소시간을 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$[I + \delta_x V \Delta\tau + \delta_y W \Delta\tau] \Delta\vec{Q}^n = -\frac{\partial \vec{G}^n}{\partial x} \Delta\tau - \frac{\partial \vec{H}^n}{\partial y} \Delta\tau - \Delta\tau D_{ch} \vec{Q}^n \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} T_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_0 \\ \vdots \\ \Delta Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$T_i = I + \delta_x V_{ii} \Delta\tau + \delta_y W_{ii} \Delta\tau \quad (20)$$

$$S_i = -\frac{\partial G_i^n}{\partial x} \Delta\tau - \frac{\partial H_i^n}{\partial y} \Delta\tau - \Delta\tau D_{ch} Q_i^n \quad (21)$$

그러므로 본 연구에서는 Chebyshev collocation operator를 적용한 시간 미분항은 기존의 지배 방정식에 원천항이 추가된 형태로 나타나며 주파수 해석기법과 유사한 형태의 지배방정식을 보여준다.

또한 난류모델에 대한 Chebyshev collocation operator를 적용하기 위해서 지배방정식에 적용한 방법과 유사하게 난류모델의 시간미분항을 원천항으로 변환하여 적용하면 된다.

3. Numerical Experiment

3.1 1차원 비정상 Burgers 방정식

본 연구의 방법을 검증하기 위해서 먼저 간단한 1차원 비정상 burgers 방정식에 적용하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

위 식은 시간 $0 < t \leq \frac{2\pi}{\omega}$ 에서 초기조건으로 $u(x,0) = 1 + \alpha \cdot \sin(2\pi\theta t)$ 을 갖는 문제이다. α 는 진폭을 나타내며 θ 는 주파수를 의미한다. 본 연구의 Chebyshev collocation operator를 적용하기 위해 시간 미분항을 다음과 같이 처리하고 가상시간 전진 기법을 적용한다.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + D_{ch}\vec{u} = \vec{0}, \vec{F} = \frac{1}{2}\vec{u}^2 \quad (23)$$

본 연구에서는 비정상 유동 해석 기법인 Harmonic balance method를 적용하여 시간항에 대한 미분계산을 처리하여 본 연구의 결과와 비교하였다[13]. 비점성 burgers 방정식이므로 해의 진동을 줄이고자 인공 점성항을 추가하였다. 또한 주기적인 거동을 나타내

로 주기적인 경계조건을 적용하였다.

Figure 1은 $t=0$ 에서 해석 결과를 나타낸다. 검은색 실선은 본연구의 결과를 나타내고 붉은색 점선은 주파수 비정상 해석기법인 HBM(Harmonic Balance Method)의 결과이다. 조화 균형법은 Fourier series를 이용한 주파수 기법이다. 조화 균형법에서는 Fourier series를 이용하여 differential operator를 구성하여 시간 미분항을 원천항으로 처리한다. 해석에 적용된 진폭은 0.3과 0.5이며 주파수는 0.75와 1.5, 3.0을 적용하였다. Figure 1에서 아래방향으로 주파수가 증가하고 오른쪽으로 진폭이 증가한 조건을 적용한 결과이다. 조화 균형법에 적용된 하모닉 수는 49개이며 501개의 격자점을 적용하였다. 본 연구의 Chebyshev Pseudo-spectral method에도 유사하게 48개의 시간점과 501개의 격자점을 적용하였다. 비점성 burgers 방정식은 Fig. 1의 결과에서와 같이 진폭이 증가할수록 불연속면이 뚜렷하게 보이며 주파수가 증가할수록 진동횟수가 증가하여 나타난다. 또한 Figure 1에서와 같이 본 연구의 결과와 조화 균형법의 해석 결과가 진동의 크기 및 불연속면 위치 등 서로 매우 정확하게 일치하는 것을 볼 수 있다.

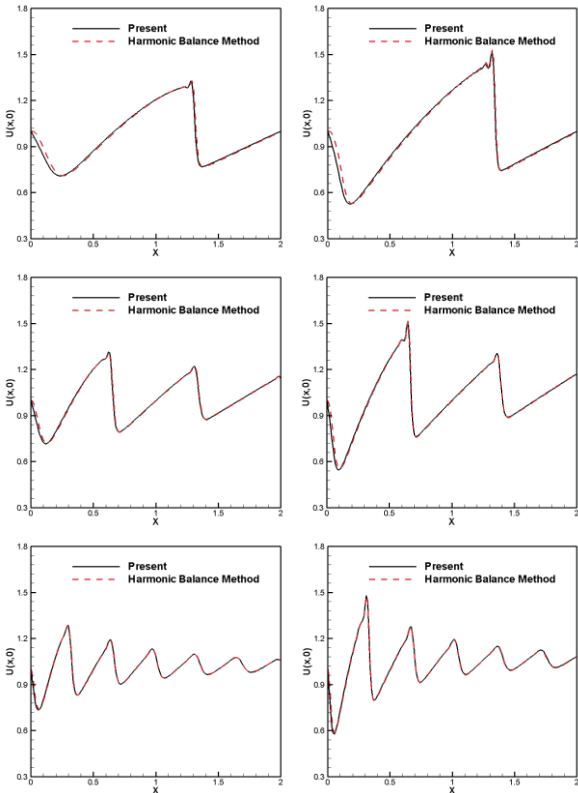


Fig. 1 Comparison of the results from present method and harmonic balance method

3.2 2차원 진동하는 Airfoil

두번째 검증 문제로 진동하는 2차원 날개꼴에 적용하였다. 해석 대상으로는 AGARD Report 702를 토대로 많은 실험데이터가 있는 NACA0012으로 하였으며 2차원 N-S방정식을 적용하기 위해 Fig. 2와 같이 C 형태 격자로 [309 X 81]크기로 격자를 구성하였다[16].

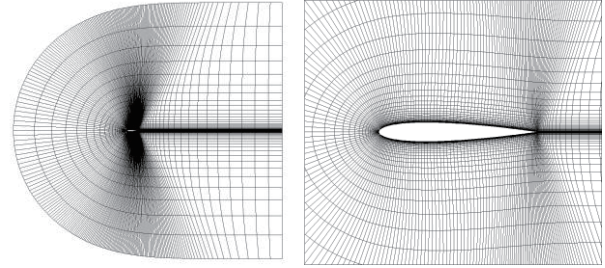


Fig. 2 NACA0012 Grid [309 x 81]

해석 조건은 아래식과 같이 평균 받음각 α_0 는 2.89° 이며, 진동 크기각 α_m 은 2.41° 이다. 감쇄 주파수 k_c 는 0.0808, 자유류 마하수는 0.6이다. 그러므로 초기 받음각이 있으며 받음각이 Eq. 24와 같이 $0.48^\circ \leq AOA \leq 5.30^\circ$ 범위에서 빠르게 진동하는 경우이다. 또한 레이놀즈 수는 4.8×10^6 이다.

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_m \sin(k_c M_\infty t) \quad (24)$$

본 연구에서 제안한 Chebyshev Pseudo-spectral method를 이용하여 대각 ADI 시간 적분법을 적용하였으며[17] 유속항을 계산하기 위해 Roe's FDS 기법을 사용하여 공간차분식을 이산화하였다. 또한 3차 정확도의 MUSCL 기법을 적용하여 고차정확도를 확보하였다. 난류 점성 계수의 결정을 위해 제 2 방정식 k-w WD+ 난류 모형을 적용하였다[18]. 해석에 적용된 점들(points)는 최대 21개까지 적용하였다.

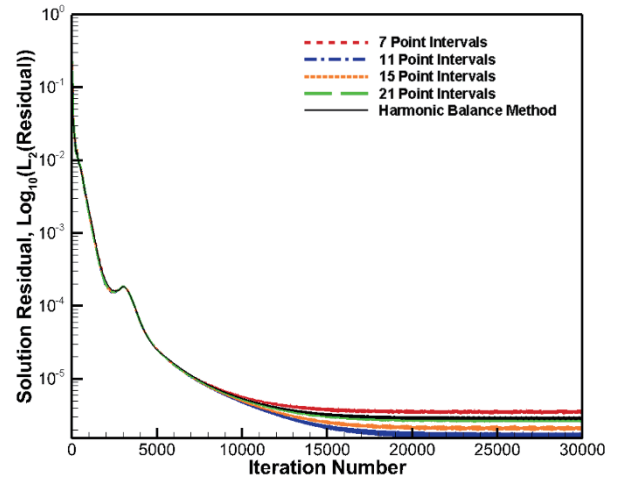


Fig. 3 Comparison of convergence history

해석의 결과는 실험 데이터 및 주파수 영역 기법인 조화 균형법과 비교하였으며 서로 한 주기에서의 점들

(points)의 수를 동일하게 하여 유사한 해상도에서 결과를 비교하여 나타내었다.

본 연구의 수렴성을 Fig. 3과 같이 나타내었다. 점선은 본 연구의 결과로 적용한 점들(points)의 수에 따라 나타내었으며 실선은 주파수 기법인 HBM(Harmonic Balance Method)을 적용하여 수렴성을 비교하여 나타내었다. HBM(Harmonic Balance Method)에서 적용된 조화함수 수는 9개로 해석시 19 간격(Intervals)이 필요하다. HBM(Harmonic Balance Method)와 본 연구의 수렴성을 비교한 이유는 두 기법이 유사하게 지배방정식에 원천항을 추가하여 비정상 유동을 정상 유동처럼 해석하기 때문이다. Figure 3에서 두 기법은 유사하게 수렴하는 경향을 나타내는 것을 알 수 있다. 본 연구의 기법은 간격(Interval)의 수와 무관하게 안정적인 수렴성을 보여주는 것을 확인할 수 있다.

Chebyshev polynomial식을 사용하여 각각의 점들(points)에 대해서 양력, 항력 및 모멘트 계수에 대해서 approximation을 하였다.

$$Q_j(t) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(t_j) = \sum_{n=0}^N a_n \cos \frac{j\pi}{M} n \quad (25)$$

$$a_n = \frac{2}{Nc_n} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} Q_j T_n(t_j) = \frac{2}{Nc_n} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} Q_j \cos \frac{j\pi}{N} n \quad (26)$$

$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 0, N \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (27)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, M \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (28)$$

위 식에서 M은 approximation을 위한 점들(points)의 수를 의미하며 N은 계산된 간격(Interval)의 수를 나타낸다. 또한 Chebyshev coefficient인 Eq. 26의 a_n 에서 $Q_j(t)$ 는 mapping 함수가 적용된 시간에서의 값이며 Eq. 25의 $Q_j(t)$ 은 새롭게 approximation된 값이다. 즉 approximation하는 Eq. 25, Eq. 26은 Eq. 1, Eq. 2와 동일한 식이지만 M과 N이 다르므로 이에 유의해야 한다.

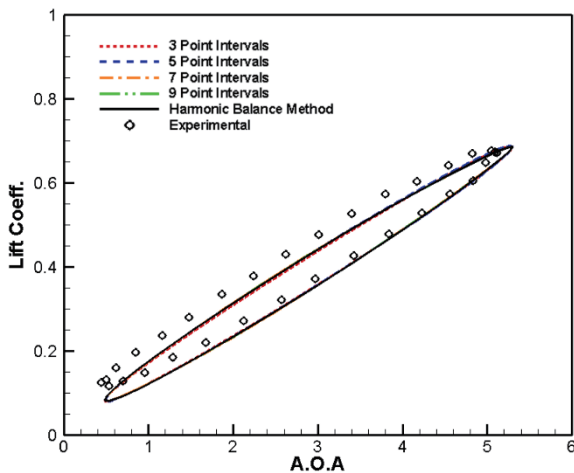


Fig. 4 Comparison of lift coefficient

Figure 4, 5, 6은 비정상 유동에 대한 양력계수, 항력계수 및 모멘트계수의 히스테리시스 곡선을 보여준다.

본 연구의 결과는 점선으로 나타내었으며 3개에서 9개의 점(Point)을 적용하였고 Harmonic Balance Method는 검은색 실선으로 9개의 간격(Intervals)을 적용한 결과이다. 또한 검은색 원형 심볼은 시험데이터에 의한 결과를 나타낸다. Figure 4의 결과를 보면 3개의 점(Point)만으로 비정상 유동에 대한 양력의 히스테리시스를 정확하게 묘사할 수 있음을 보여준다. 즉 양력에 영향을 주는 가장 유효한 움직임이 감쇄주파수임을 확인할 수 있다. Figure 5에서는 7개 점(Point) 이상을 적용할 때 비정상 항력의 히스테리시스 곡선이 수렴되는 것을 알 수 있다. 항력의 경우 양력과 달리 점성에 의한 영향이 크므로 진동주파수인 감쇄주파수에 의해 추가로 유동에 발생하는 주파수의 영향이 나타남을 확인할 수 있다.

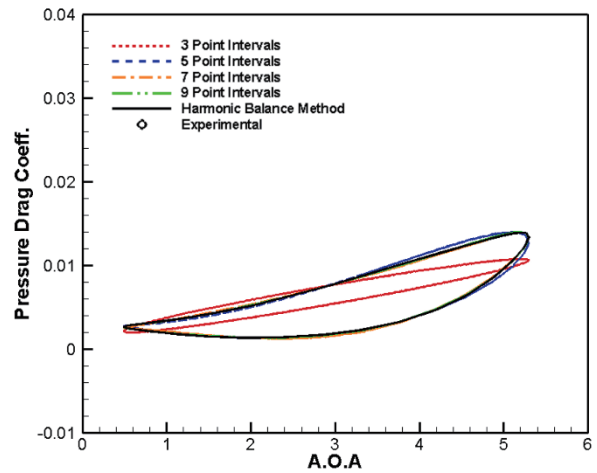


Fig. 5 Comparison of pressure drag coefficient

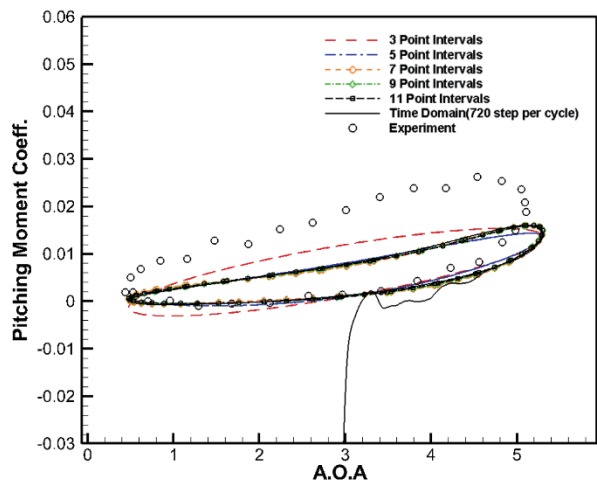


Fig. 6 Comparison of pitching moment coefficient

Figure 6은 피칭모멘트 계수에 비정상 히스테리시스 곡선을 보여주며 항력과 유사하게 7개 점(Point) 이상에서 수렴되고 있음을 보여준다. 이러한 이유 역시 항력의 결과와 유사하게 점성의 효과가 유동 흐름의 주

과수 특성에 영향을 주었기 때문이라고 보여진다. 즉 본 연구의 기법으로 빠르게 진동하는 날개 문제에 적용할 경우 한주기를 7개 점으로만 양력과 항력, 모멘트를 예측할 수 있는 장점이 있으며 이는 시간적분 방법으로 해석할 경우 보통 한주기를 180개의 점이 필요한 것과 비교할 때 효율적인 해석이 가능함을 보여준다.

4. 결 론

본 연구에서는 Chebyshev collocation operator으로 시간 미분항을 처리하여 비정상 유동을 해석하는 기법을 개발하였다. 시간적분을 위해 유속항은 내재적으로 처리하였으며 시간 미분항은 Chebyshev collocation operator을 적용하여 원천항 형태로 외재적으로 처리하였다. 1차원 해석으로 비정상 burgers 방정식을 적용하였으며 주파수 기법과 비교하여 검증하였다. 이때 진폭에 따라 주파수에 따라 변화시켜 가며 비교하였으며 강한 불연속면 및 진동의 수가 정확하게 일치함을 보여주었다. 2차원 비정상 유동의 경우 2차원 N-S 방정식을 적용하여 진동하는 2차원 날개를 해석하였다. 간격(Interval)을 21개까지 증가시켜가며 해석을 수행하였으며 간격(Interval)의 수와 무관하게 수렴 안정성을 나타내었다. 해석 결과를 시험 결과 및 주파수 기법의 결과와 비교하였을 때 유사함을 나타내었다. 또한 Chebyshev polynomial식을 적용하여 각 간격(Interval)의 해석 결과를 approximation하였으며 유사하게 나타남을 확인하였다.

향후 본 연구의 Chebyshev collocation operator를 이용하여 비주기적인 비정상 문제에 대해서 적용할 예정이다.

후 기

이 논문은 2020학년도에 청주대학교 산업과학연구소가 지원한 학술연구조성비(특별연구과제)에 의해 연구되었음

References

- [1] Jameson, A., "Time dependent calculations using multigrid with applications to unsteady flows past airfoils and wings," *AIAA Paper* 91-1596, 1991.
- [2] Jameson, A., and Schmidt, W., "Solution of the Euler equations for two dimensional transonic flow by a multigrid method," *Applied Mathematics and Computations*, Vol.13, pp. 327-356, 1983.
- [3] Hall, K.C., Thomas, J.P., and Clark, W.S., "Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique," *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 5, pp. 879-886, 2002.
- [4] Thomas, J.P., Custer, C.H., Dowell, E.H. and Hall, K.C., "Compact implementation strategy for a harmonic balance method within implicit flow solvers," *AIAA Journal*, Vol. 51, No. 6, June 2013.
- [5] Thomas, J.P., Custer, C.H., Dowell, E.H. and Hall, K.C., "Unsteady flow computation using a harmonic balance approach implemented about the OVERFLOW 2 flow solver," *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2009.
- [6] Ekici, K., Hall, K.C. and Dowell, E.H., "Computationally fast harmonic balance methods for unsteady aerodynamic predictions of helicopter rotors," *Journal of Computational Physics*, Vol.227, pp. 6206-6225, 2008.
- [7] McMullen, M., Jameson, A., and Alonso, J., "Demonstration of nonlinear frequency domain methods," *AIAA Journal* Vol.44, No.7, pp. 1428-1435, 2006.
- [8] McMullen, M., Jameson, A., and Alonso, J., "Application of a non-linear frequency domain solver to the Euler and Navier-Stokes equations," *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, 2002.
- [9] Gopinath, A. K. and Jameson, A., "Time spectral method for periodic unsteady computations over two- and three-dimensional bodies," *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2005.
- [10] Khater, A. H., Temsah, R. S., Hassan, M. M., "A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-type equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 222, Issue 2, 2008.
- [11] Dinu, A. D., Botez, R.,M., and Cotoi, I., "Chebyshev polynomials for unsteady aerodynamic calculations in aeroservoelasticity," *Journal of Aircraft*, Vol. 43, No. 1, 2006.
- [12] Niu, J., Zheng, L., Yang, Y., and Shu, C., "Chebyshev spectral method for unsteady axisymmetric mixed convection heat transfer of power law fluid over a cylinder with variable transport properties," *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, Vol. 11, No. 3, 2014.
- [13] Im, D. K., Kwon, J. H., and Park, S. H., "Periodic unsteady flow analysis using a diagonally implicit harmonic balance method," *AIAA Journal*, Vol. 50, No. 3, 2012.
- [14] Im, D. K., Cho, S., McClure, J.E., and Skiles, F., "Mapped Chebyshev pseudospectral method for unsteady flow

- analysis," *AIAA Journal*, Vol. 53, No.12, 2015.
- [15] Moin, P., "Fundamentals of engineering numerical analysis," Cambridge University Press, 2001.
- [16] "Compendium of unsteady aerodynamic measurements," AGARD Rept.702, 1982.
- [17] Sung, C.H., Park, S.H., and Kwon, J.H., "Multigrid diagonalized ADI method for compressible Flows," *AIAA Paper* 2001-2556, June, 2001.
- [18] Park, S.H. and Kwon, J.H., "Implementation of $k-\omega$ turbulence models in an implicit multigrid method," *AIAA Journal*, Vol.42, No.7, pp. 1348-1357, 2004.