韓國數學教育學會誌 시리즈 C <初等數學教育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2020.23.3.135
2020. 7. 제 23권, 제 3호, 135-156

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
July. 2020, Vol. 23, No. 3, 135-156

평균 단원 학습이 초등학교 5학년 학생의 대푯값에 대한 지식에 미치는 영향

문 은 혜 (한국교원대학교 대학원 학생)
이 광 호 (한국교원대학교 교수)†

다양한 자료를 수집, 정리 및 해석하는 통계의 주요 과정에서 수집된 자료를 올바르게 해석하기 위해서는 자료의 요약이 중요하다. 대푯값은 통계 집단의 변량 전체를 대표하여 그 자료 전체의 특징을 하나의 수로 나타낸 값으로 자료를 조직하고 요약하기 위하여 사용된다. 대푯값에는 여러 가지 형태가 있으나, 우리나라 초등학교 수학과 교육과정에서는 대푯값으로 평균만을 다루고 있다. 따라서 본 연구에서는 초등학교 5학년 학생들이 평균 단원을 학습하기 전 대푯값에 대하여 갖는 비형식적 지식 유형을 알아보고, 평균 단원을 학습한 후와 비교하여 대푯값에 대한 지식의 변화를 살펴봄으로써 학교 수학에서 대푯값 지도에 대한 시사점을 제공하고자 하였다. 그 결과 형식적인 학습을 하기 전 학생들이 대푯값에 대해 풍부한 지식을 가지고 있었고, 이러한 비형식적 지식이 형식화된 개념 유형과 유사함을 알 수 있었다. 초등학생의 대푯값에 대한 비형식적 유형을 살펴보는 것은 초등학교에서 다루어야 하는 대푯값 개념 및 지도 방법에 대하여 시사점을 줄 수 있으며, 중·고등학교에서 대푯값 개념의 형식화를 위한 학습에 도움을 줄 수 있을 것이다.

I. 서론

정보화 사회를 살아가는 현대인에게 정보를 다루는 능력은 중요한 생활 수단이 되었다. 많은 양의 자료 중에서 필요한 자료를 선택하여 목적에 맞게 활용하기 위해서는 통계자료를 나타내는 숫자를 올바르게 해석할 수 있어야 하며, 이러한 통계적 안목을 발전시킬 수 있도록 통계교육이 이루어져야 한다.

수집된 자료로부터 의사결정을 위한 정보를 생산하기 위해서는 낱낱의 자료에서는 파악할 수 없는 자료 집합의 전체적인 특징을 기술할 수 있어야 한다(권지현, 2006). 대푯값은 자료 분석 과정에서 자료의 맥락과 그에 따른 의미를 해석할 수 있어야 하고, 경향과 패턴을 표현하는 도구로 활용될 수 있어야 한다. 이때 기초가 되는 것은 자료의 '분포'이며, 대푯값은 이러한 '분포'의 특징을 기술하고 예측하는 도구로 학습되어야 한다(권지현, 2006). 자료의 분포에서 어떤 특정 값을 중심으로 몰려있는 특성을 중심 경향성이라고 한다. 대부분의 기술 통계에서 대표성은 중심 경향성을 뜻한다고 할 수 있다(문양자, 2006).

교육 현장에서 자료 분포를 대표하는 값과 중심 경향성에 대하여 지도할 때, 대푯값에 대한 이해보다 계산 알고리즘과 그 적용을 연습하는데 더 초점을 두고 있다는 문제점은 계속하여 제기되어 왔다. 예를 들어 대푯값으로 평균을 지도할 때, 평균이 자료 집합에 대해 어떤 정보를 주는지, 자료의 특성이 다른 문맥에서 어떻게 해석되어야 하는지에 관심을 두기보다 어떻게 구할 수 있는지에 중점을 두는 것이다(문양자, 2006).

통계적 자료는 그 맥락에 따라 자료의 의미가 달리 해석되며, 자료의 특성에 따라서 분석 방법이 결정된다. 따라서 자료의 특성과 맥락을 고려하여 통계적 자료를 분석할 수 있도록 지도하는 것이 중요하다. 그러나 우리나라 초등 수학과 교육과정에서는 대푯값으로 평균만을 다루고 있어 자료의 특성과 맥락에 따라 통계적 분석 방법의 선택과 의미해석을 달리할 수 있어야 한다는 점을 반영하지 못하고 있다. 자료의 특성에 따라 여러 가지 대푯값 가운데에서 적절한 것을 선택하는 활동을 통해 대푯값의 의미를 맥락에 따라 해석하는 경험을 할 필요가 있다(Moore, 1990).

학교 수학에서 통계적 사고의 기본이 되는 대푯값

* 접수일(2020년 6월 19일), 심사(수정)일(2020년 7월 15일), 게재확정일(2020년 07월 21일)
* ZDM분류:
* MSC2000분류:
* 주제어: 대푯값, 산술평균, 비형식적 지식, 최빈값, 중앙값
† 교신저자: paransol@knue.ac.kr

개념을 바람직하게 지도하기 위해서는 대푯값에 대한 학생들의 이해 정도를 분석할 필요가 있다. 따라서 본 연구에서는 대푯값에 대하여 학습하지 않은 학습자가 대푯값에 대해 갖는 비형식적 지식의 유형은 어떠한지 알아본다. 그리고 학교 수학에서 대푯값에 대한 단원을 학습하고 난 후 학생들의 대푯값에 대한 지식에 어떠한 변화가 있었는지 살펴보며 바람직한 대푯값 개념의 학습 및 지도 방향에 대해 논의하고자 한다. 대푯값으로 평균을 선택하는 것이 적절하지 않은 문제 상황에서 학생들의 반응을 살펴보는 것은 대푯값으로 평균만을 가르치고 있는 현 교육과정에 유의미한 메시지를 전달할 수 있다. 학생들이 지닌 대푯값에 대한 비형식적 이해의 유형을 파악하면, 학생들의 비형식적 지식이 형식화로 나아가는 사고 과정에 도움을 줄 수 있을 것이다.

연구 문제는 다음과 같다.

1. 평균 단원을 학습하기 전 5학년 학생들의 대푯값에 대한 비형식적 개념 유형의 특성은 어떠한가?
2. 평균 단원을 학습한 후 5학년 학생들의 대푯값에 대한 지식에는 어떤 변화가 있는가?
3. 대푯값으로 평균을 선택하는 것이 적절하지 않을 때 학생들은 어떤 대푯값을 선택하는가?

II. 이론적 배경

1. 대푯값

대푯값이란 주어진 자료들이 어떤 값을 중심으로 분포되어 있는지 나타내는 것으로, 통계 집단의 자료를 하나의 수치로 요약한 값을 말한다. 대푯값에는 평균, 중앙값, 최빈값이 있으며, 초등학교 교육과정에서 소개되는 대푯값은 평균이다. 중앙값과 최빈값은 중학교 교육과정에서 등장한다.

평균이란 모든 관측치를 합한 값을 관측치의 총 도수로 나눈 값으로서 양적 변수 자료의 중심을 측정하는 대표적인 수치이다. 통계학에서 쓰는 평균에는 산술평균, 기하평균, 조화평균, 가중평균, 절사평균이 있다. 초등학교 수학에서 다루는 것은 산술평균으로 이는 평균이라는 용어로 설명된다. 일상적으로 사용하는 평균이라는 용어는 산술평균을 의미하는 경우가 많으며, 초등학교는 산술평균만을 다룬다는 점에서 본 연구에서는 산술평균을 의미하는 말로 평균을 사용하였다.

평균은 일반적으로 n개의 자료 χ_1, χ_2, $\cdots$, χ_n의 합을 자료의 크기 n으로 나눈 것으로, 기호로 $\overline{\chi}$와 같이 나타내고 구하는 방법은 다음과 같다.

$$\overline{\chi}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

학생들은 ‘고르게 나누는 경험’을 통해 평균 개념에 접근하고, 이에 익숙해진 다음에 모든 수를 더한 후 나누는 알고리즘을 발견하게 된다. 평균을 지도할 때에는 평균이 대푯값의 유일한 형태가 아님을 인식할 수 있도록 해야 하며, 교사는 학생이 단순하게 평균을 구하는 알고리즘을 말하거나 활용할 수 있다고 해서 그 의미를 이해하고 있는 것이 아님을 알아야 한다.

자료의 값 중에 매우 크거나 작은 극단적인 값이 있는 경우, 평균은 이와 같은 극단적인 값에 의하여 많은 영향을 받는다. 이때, 평균보다 특이값에 둔감한 특성을 가진 중앙값을 사용한다.

중앙값은 자료를 작은 값에서부터 차례로 크기 순으로 나열하였을 때 가운데 위치한 값으로, 평균보다 그 자료의 중심 위치를 잘 나타낸다. 중앙값은 자료의 크기 n이 홀수일 때와 짝수일 때 구하는 방법이 다르다. 자료의 크기 n이 홀수일 때에는 자료를 작은 값에서부터 차례로 크기 순서로 나열하였을 때 $\frac{n+1}{2}$번째 자료의 값이 중앙값이 된다. 자료의 크기 n이 짝수일 때에는 자료를 작은 값에서부터 차례로 크기 순서로 나열하였을 때 $\frac{n}{2}$번째와 $(\frac{n}{2}+1)$번째 자료의 값의 평균이 중앙값이 된다.

중앙값은 수치 자료에서만 활용할 수 있으며 주어진 자료를 개수가 같은 두 부분집합으로 나누기 때문에 중앙값을 중심으로 아래에 있는 자료의 수와 위에 있는 자료의 수가 같다. GAISE에서는 학생들에게 처음으로 중앙값을 도입할 때 중앙값이 자료 중 어느 한 값이 되도록 개수가 홀수인 자료를 활용할 것을 권고한다. 중앙값은 계산 없이 쉽게 구할 수 있다는 장점이 있다.

최빈값은 자료의 값 중에서 가장 많이 발생한 값을

말한다. 최빈값은 숫자로 이루어진 수치 자료뿐만 아니라, 소위 범주형 자료라 불리는 수치가 아닌 자료에도 활용될 수 있다는 점에서 유용한 대푯값이다. 최빈값은 구하기 쉬우며, 특이값에 영향을 받지 않는다는 특징이 있다.

대푯값은 다양한 정보를 통계적 절차에 따라 처리하여 표현하는 방법 중 대표적인 통계적 개념으로, 그 자료의 성격에 따라 다르게 결정된다. 따라서 대푯값의 표현뿐 아니라 자료가 가지고 있는 성질과 대푯값이 사용되고 있는 상황을 함께 고려해야 한다.동일한 자료에 대해 평균, 중앙값, 최빈값을 구하는 것은 언제 특정한 대푯값을 사용해야 하는지에 대한 논의를 가능하게 한다. 통계를 지도할 때 '구하는 방법'에 멈추어서는 안 되며, '대푯값이 언제 유용한가'와 같은 질문에 답을 찾기 위해 노력해야 한다(Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009).

2. 대푯값에 대한 비형식적 지식

대푯값에 대한 비형식적 지식이란 대푯값에 대한 이론적인 개념 지식이 완성되지 않은 학생들이 대푯값에 대해 갖는 지식으로, 학생들이 일상생활의 경험을 통해 자연스럽게 형성된 개념과 학문적인 개념, 학생들 스스로 생성해낸 개념 모두를 의미한다(이춘재·전평국, 2006). 이춘재와 전평국(2006)은 대푯값에 대한 비형식적인 개념 지식은 대푯값에 대하여 특수하고, 구체적이며, 일상의 언어를 사용하는 특징이 있다고 하였다.

1987년부터 1996년까지 초·중등학교 학생들의 대푯값 개념에 대한 Mokros & Russell의 연구에 따르면 학생들은 대푯값에 대해 배우기 이전에 대푯값에 대한 비형식적 지식을 갖고 있으며, 이것을 바탕으로 고학년에서 알고리즘 형태의 개념을 이해하게 된다고 한다(Mokros & Russell, 1995).

Mokros & Russell(1995)은 대푯값에 대한 비형식적 개념 유형을 최빈수, 중간값, 알고리즘, 합당한 값, 수학적 균형 값의 5가지로 분류하였다.

이춘재와 전평국(2006)은 대푯값에 대한 비형식적인 개념 유형이 5, 6학년 학생들에게서 어떻게 나타나는지 살펴보았다. 그 결과 학생들에게서 나타나는 대푯값에 대한 비형식적 개념 유형들을 최빈값, 알고리즘에 의한 산술평균, 균형 값, 중앙값, 중간값, 최대최소의 중간값, 최댓값, 최솟값, 범위 값으로 정리하였다. 학생들의 비형식적 개념 유형이 형식화된 개념 유형과 같거나 유사하며, 나름대로 논리성과 타당성을 지니고 있었다(이춘재·전평국, 2006).

비형식적 지식은 학생들에게 친숙하고, 의미가 있으며, 형식적인 지식만을 강요하는 환경보다 덜 위협적이고, 덜 억압적인 환경을 제공한다(Baroody & Coslick, 1998). 따라서 학생들은 비형식적 지식이 허용된 환경에서 더 자유롭고 다양한 탐구를 시도할 수 있으며, 개념에 대한 이해를 높여 자신만의 창의적인 해법을 산출할 수 있다. 따라서 교사는 학생의 비형식적 지식을 파악함으로써 학생들의 이해 수준을 알고 형식적 지식으로의 연결을 용이하게 할 수 있다(Baroody & Coslick, 1998).

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 참여자

본 연구는 경기도 소재의 한 초등학교에서 5학년 학생 169명을 대상으로 진행되었다. 2015 개정 교육과정에서 평균은 5학년 2학기 '평균과 가능성' 단원에서 처음으로 등장한다. 따라서 평균 단원의 학습이 대푯값에 대한 비형식적 지식에 미치는 영향을 연구하기 위하여 연구 대상을 5학년 학생으로 선정하였다. 이 연구는 초등학교 5학년 학생들이 대푯값에 대해 가지고 있는 비형식적 지식 유형과 학교 교육을 통한 학생들의 대푯값에 대한 개념 변화를 살펴보며 초등 통계 교육에 유의미한 시사점을 제공할 수 있다.

[표 1] 연구 참여자
[Table 1] A research participant information

학년	남자	여자	합계
5학년	88	81	169

2. 자료 수집

가. 실험 설계

본 연구에서는 5학년 2학기에 등장하는 '평균과 가능성' 단원을 학습하기 전 5학년 학생들의 대푯값에

대한 지식을 알아보기 위하여 사전검사를 실시하고, 이를 바탕으로 학생들이 대푯값에 대하여 가지고 있는 비형식적 지식 유형을 살펴보고자 하였다. 사후검사는 평균에 대한 형식적인 학습이 이루어진 후 실시하여 학생들의 대푯값에 대한 지식에 어떠한 변화가 있는지 알아보고자 하였다. 사후검사는 사전검사와 동형의 검사지를 사용하였으며 실험 설계는 다음과 같다.

[표 2] 실험 설계
[Table 2]] Experimental Design for Research

집단	사전검사	실험 처치	사후검사
단일집단	O_1	X	O_2

O_1: 대푯값에 대한 비형식적 지식 사전검사
X: 5학년 2학기 평균과 가능성 단원 수업
O_2: 대푯값에 대한 비형식적 지식 사후검사

사전검사가 사후검사에 미치는 간섭 효과를 최소화하기 위하여 사전검사와 사후검사 사이의 충분한 기간을 확보하고자 하였다. 이에 따라 사전검사는 1학기 말인 2019년 7월에 실시하였으며, 사후검사는 2학기 말인 2019년 12월에 실시하였다. 또한, 실험에서 변인을 통제하기 위하여 5학년 7개 학급 지도교사와 충분한 협의를 통해 평균 단원을 지도함에 있어서 지도 순서 및 지도 내용을 동일하게 설정하였으며, 기본적으로 교과서에 충실하여 가르치기로 약속하였다.

나. 검사 도구

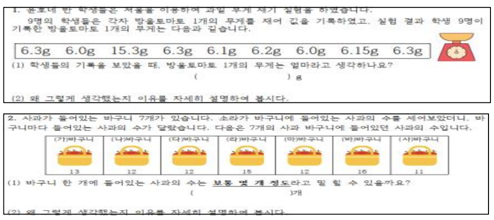
본 연구에서는 초등학교 5학년 학생들의 대푯값에 대한 비형식적 지식을 알아보고, 평균 단원 학습이 이루어진 후 지식의 변화에 대하여 알아보고자 한다. 이를 위하여 Mokros & Russell(1995, 1996)의 연구를 바탕으로 이춘재와 전평국(2006)의 연구에서 사용한 검사지와 2015 개정 교육과정에 따른 5학년 수학 교과서를 연구 목적에 부합하도록 재구성하여 사전, 사후 검사지를 제작하였다. 사전·사후 검사지는 모두 5문항으로 이루어져 있으며, 1~4번은 동형문항으로 대푯값에 대한 비형식적 지식을 알아볼 수 있도록 구성하고, 마지막 5번 문항은 2015 개정 교육과정에 따른 5학년 2학기 교과서 '도전 수학'을 재구성하였다. 이는 평균을 대푯값으로 사용할 수 없을 때 학생들이 어떤 대푯값을 선택하는지 알아보기 위한 것으로, 사전·사후검사에서 같은 문항을 사용하였다. 사전검사가 사후검사에 미치는 영향을 최소화하기 위하여 사전검사와 사후검사의 시기를 여름방학을 포함하여 6개월 정도 차이를 두었다.

[표 3] 검사 도구
[Table 3] Items of Assessment

문제 제시 방법	검사 항목	문항수
자료에서 대푯값 구하기	이산량	1
	연속량	1
대푯값을 주고 자료의 값 예상하기	이산량	1
	연속량	1
평균이 같을 때 대푯값 선택하기		1

같은 답을 썼더라도 왜 그렇게 생각했는지에 따라 대푯값에 대한 지식 유형이 다르게 분류될 수 있다는 점에서 모든 문항에는 왜 그렇게 생각했는지 이유를 자세히 서술하도록 요구하였다. 검사 도구의 신뢰도와 타당도를 높이기 위하여 초등학교 5학년 학생 5명을 대상으로 예비 검사를 실시하여 문항의 적절성을 살펴보았다. 그 결과 학생들에게 그저 이해를 돕고자 제시한 그림에 학생들이 의미를 두고 해석하는 모습을 보여 그림이 자료 해석에 영향을 주지 않도록 단순하게 교체 및 재배치하였으며, 문항 진술 상의 문제점을 확인하여 수정하는 작업을 거쳐 검사 도구를 완성하였다.

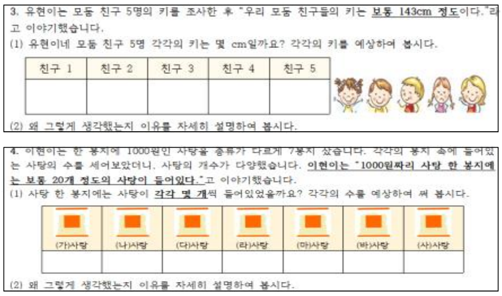
자료에서 대푯값을 구하는 문제 유형은 [그림 1]과 같이 몇 개의 자료를 주고 이에 근거하여 자료의 값을 대표할 수 있는 값을 구하는 것이다. 수의 성질에 따라 다시 연속량과 이산량으로 나누어 검사 문항을 구성하였으며, 문항 예시는 [그림 1]과 같다.



[그림 1] 자료에서 대푯값 구하기 문제
[Fig. 1] Task about the estimating representative value with given data

대푯값을 바탕으로 자료의 값을 예상하는 문제 유형은 '보통 ~정도'라는 표현에 대해 자료의 값을 예상해보도록 하는 것이다. 이 역시 수의 속성에 따라

다시 이산량과 연속량으로 나누어 검사 문항을 구성하였으며, 문항 예시는 [그림 2]와 같다.


3. 유현이는 모둠 친구 5명의 키를 조사한 후 "우리 모둠 친구들의 키는 보통 143cm 정도이다."라고 이야기했습니다.
(1) 유현이네 모둠 친구 5명 각각의 키는 몇 cm일까요? 각각의 키를 예상하여 봅시다.

친구 1	친구 2	친구 3	친구 4	친구 5

(2) 왜 그렇게 생각했는지 이유를 자세히 설명하여 봅시다.

4. 이현이는 한 봉지에 1000원인 사탕을 종류가 다르게 7봉지 샀습니다. 각각의 봉지 속에 들어있는 사탕의 수를 세어보았더니, 사탕의 개수가 다양했습니다. 이현이는 "1000원짜리 사탕 한 봉지에는 보통 20개 정도의 사탕이 들어있다."고 이야기했습니다.
(1) 사탕 한 봉지에는 사탕이 각각 몇 개씩 들어있었을까요? 각각의 수를 예상하여 써 봅시다.

(가)사탕	(나)사탕	(다)사탕	(라)사탕	(마)사탕	(바)사탕	(사)사탕

(2) 왜 그렇게 생각했는지 이유를 자세히 설명하여 봅시다.

[그림 2] 대푯값을 바탕으로 자료의 값을 예상하는 문제
[Fig. 2] Task about the estimating data based on the representative value

대푯값으로 평균을 사용하는 것이 적절하지 않을 때 어떠한 대푯값을 선택할 것인지 묻는 문항은 [그림 3]과 같다.


5. 피겨 스케이팅 대회에 원형, 희정, 다희가 참가했습니다. 심사위원들의 평가 결과를 보고, 가장 잘했다고 생각하는 친구를 선택해 봅시다.

이름	심사위원1	심사위원2	심사위원3	심사위원4	심사위원5
원형	94	91	88	96	91
희정	94	97	93	95	81
다희	91	90	94	92	93

(1) 피겨 스케이팅 대회에서 가장 잘 한 친구는 누구라고 생각합니까?
( )
(2) 왜 그렇게 생각했는지 이유를 자세히 설명하여 봅시다.

[그림 3] 대푯값으로 평균을 사용할 수 없을 때 대푯값 구하기 문제
[Fig. 3] Task about the estimating representative data when the average is not available as a representative value

검사 도구의 적절성에 대하여 초등수학교육 석·박사과정 6인과 전문가 1인의 검토를 받았으며, 그 결과 본 검사 도구가 학생들의 대푯값에 대한 비형식적 지식 유형 및 그 변화를 살펴보는데 적절함을 확인하였다.

연구 결과의 신뢰도를 높이기 위하여 연구자를 포함한 2인이 학생들의 응답을 분류하였고, 그 결과를 바탕으로 채점자 간 신뢰도 검사를 실시하였다. 분류한 유형에 대하여 최빈값은 1, 산술평균은 2, 중앙값은 3과 같이 명명척도를 설정하였고, SPSS 프로그램을 통하여 *Cohen Kappa(K)값을 구하여 이를 채점자 간 신뢰도로 해석하였다. 그 결과 문항 1에 대한 채점자 간 신뢰도는 .913, 문항 2는 .978, 문항 3은 .898, 문항 4는 .884, 문항 5는 .919로 모든 문항에서 '완벽한 일치도'를 보이는 것으로 나타났다. 채점자 간 신뢰도가 매우 높게 나타난 것은 본 연구에서 채점자에 따라 응답 유형이 다르게 분류되지 않았음을 보여 준다.

다. 평균에 대한 교수학습내용

2015 개정 교육과정에 따른 5학년 2학기 교과서를 살펴보면 실생활 속의 친숙한 소재를 이용하여 평균을 학습하도록 구성되어 있으며, 평균의 의미를 직관적으로 파악하고 이해하는 데에 중점을 두고 있다. 단순히 평균을 구하는 연산 활동이 아닌 다양한 조작 활동을 통해 평균의 의미를 파악하여 구할 수 있도록 한다.

교과서에서는 평균에 대한 개념을 바탕으로 실생활 상황에서 나타난 자료들의 평균을 구하고, 평균을 통해 자료를 예측해 보도록 하며, 평균을 통해 알 수 있는 사실을 파악하도록 활동이 구성되어 있다.

[표 4] 5학년 2학기 평균 교수학습내용
[Table 4] Teaching and Learning Program on Average (Second Semester of Fifth Grade)

차시	주제	수업 내용 및 활동
2	평균을 알아볼까요	• 여러 개의 자료를 대표할 수 있는 값을 무엇이라 할지 생각해보게 하여 평균의 의미와 필요성을 이해하게 한다.
3	평균을 구해 볼까요(1)	• 각 자료의 값을 고르게 하는 활동을 통해 평균의 계산 원리를 이해하고 구할 수 있게 한다. • 자료의 값을 모두 더해 자료의 수로 나누는 활동을 통해 평균의 계산 원리를 이해하고 구할 수 있게 한다.
4	평균을 구해 볼까요(2)	• 평균을 여러 가지 방법으로 구할 수 있게 한다.
5	평균을 어떻게 이용할까요	• 평균을 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

* Cohen's Kappa 계수는 두 관찰자 간의 측정 범주 값에 대한 일치도를 측정하는 방법이다. .601~.800이면 '상당한 일치도', .801~1.00이면 '완벽한 일치도'를 보이는 것으로 분류된다(Landis, J. Richard, Gary G. Koch, 1977).

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 평균 단원을 학습하기 전 5학년 학생들의 대푯값에 대한 비형식적 지식 유형

대푯값에 대한 검사 문항을 해결하는 과정에서 학생들이 사용한 언어, 표현 등 세부 요소를 고려하여 응답을 분류한 결과, 최빈값, 알고리즘에 의한 산술평균, 균형 값, 중앙값, 중간값, 최댓값, 최솟값, 최대최소의 중간값, 범위수, 기타의 10가지 유형이 도출되었다. 문항에 따라 도출되는 유형의 종류는 다양하게 나타나며, 응답을 분류하는 과정은 이춘재와 전평국(2006)의 연구를 참고하였다. 문제 제시 방법 및 자료 구성에 대한 학생들의 응답 유형별 비율은 다음과 같다.

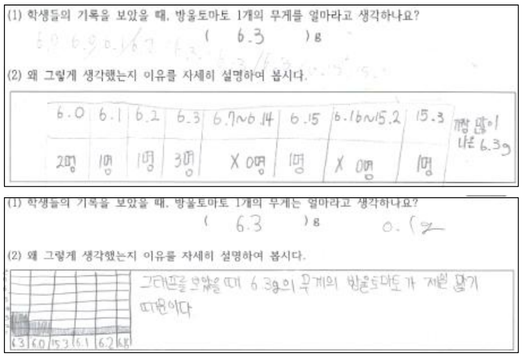
[표 5] 평균 단원을 학습하기 전 5학년 학생들의 대푯값에 대한 비형식적 지식 응답 유형
[Table 5] Type of informal knowledge of the representative data of fifth-grade students before learning the average unit

	문항 1		문항 2		문항 3		문항 4		전체 합계	
	횟수	(%)	횟수	(%)	횟수	(%)	횟수	(%)	횟수	(%)
최빈값	111	65.7	104	61.5	64	37.9	93	55	372	55.0
산술평균	9	5.3	16	9.5	8	4.7	13	7.7	46	6.8
중앙값	10	5.9	1	0.6	51	30.2	6	3.6	68	10.1
중간값	0	0	11	6.5	0	0	7	4.1	18	2.7
최댓값	8	4.7	0	0	8	4.7	11	6.5	27	4.0
최솟값	20	11.8	12	7.1	21	12.4	26	15.4	79	11.7
최대 최소의 중간값	2	1.2	10	5.9	3	1.8	0	0	15	2.2
균형 값	1	0.6	2	1.2	0	0	0	0	3	0.4
범위 값	0	0.0	0	0	3	1.8	5	3	8	1.2
기타	8	4.7	13	7.7	11	6.5	8	4.7	40	5.9
총합	169		169		169		169		676	

가. 최빈값

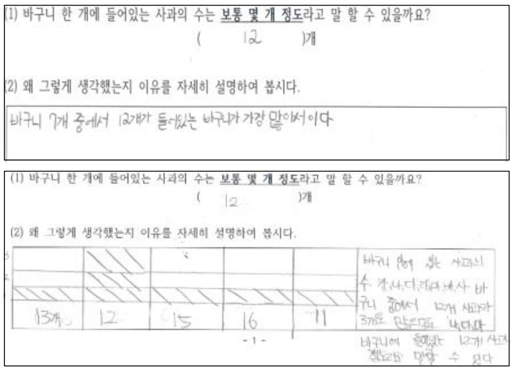
최빈값은 자료에서 가장 많이 나타나는 값을 대푯값으로 생각하는 것이다. 대푯값을 바탕으로 자료의 값을 예상하는 문제에서는 자료의 값으로 대푯값을 가장 많이 표현한 경우 최빈값으로 분류된다.

방울토마토의 무게를 여러 번 재어 나타난 다양한 자료의 값에서 어떤 값이 방울토마토 1개의 무게를 대표할 수 있는지 질문하였을 때 전체의 65.7%에 해당하는 학생들이 가장 많이 표현된 자료의 값인 6.3g을 대푯값으로 골랐다. 학생들은 '가장 많은 학생이 기록했기 때문', '6.3g이 가장 많기 때문'으로 설명하며, 표나 그래프를 그려 자신의 의견을 뒷받침하기도 하였다.



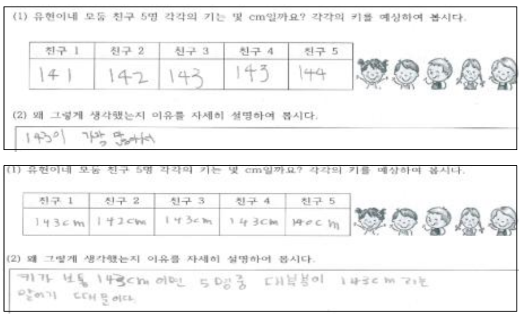
[그림 4] 최빈값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항1)
[Fig. 4] Two examples of responses approaching mode (Task 1)

바구니 1개에 들어있는 사과의 수는 보통 몇 개인지 묻는 문항에 최빈값으로 접근한 학생들은 104명으로 전체의 61.5%를 차지하였다. 학생들은 12개의 사과가 들어있는 바구니가 가장 많다는 점에서 대푯값을 12로 보았다.



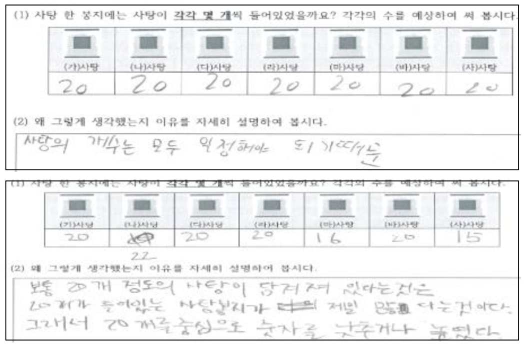
[그림 5] 최빈값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 2)
[Fig. 5] Two examples of responses approaching mode (Task 2)

키에 대한 대푯값을 주고 모둠 학생들의 키를 예상하는 문제에서는 전체의 37.9%에 해당하는 학생들이 대푯값으로 제시된 143cm를 자료의 값으로 가장 많이 등장하도록 응답을 작성하였다. 최빈값으로 응답한 학생 64명 중 5명은 각각의 자료의 값을 예상할 때 모든 값을 143cm 하나의 단일 값으로 나타냈다. 이 경우는 통계의 중요한 특성인 변이성 개념을 바르게 이해하지 못한 것으로, 통계교육에서 자료를 다룰 때 변이성을 학생들이 인식하도록 지도할 필요성을 보여준다.



[그림 6] 최빈값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 3)
[Fig. 6] Two examples of responses approaching mode (Task 3)

'1000원짜리 사탕 한 봉지에 보통 20개의 사탕이 들어있다.'라는 대푯값에 대한 정보를 바탕으로 이산량 자료의 값을 예상하는 문제에서도 최빈값으로 응답이 분류된 학생이 전체의 55%를 차지하였다. 학생들의 응답을 살펴보면 20개를 자료의 값으로 가장 많이 표현하였다. 최빈값으로 응답이 분류된 학생 93명 중 18명은 7개의 자료의 값을 모두 20이라는 하나의 값으로 나타내었다. 이처럼 단일 값으로 나타낸 학생의 비율이 전체의 10.7%라는 것을 보았을 때, 연속량보다도 이산량에서 학생들의 통계적 변이성에 대한 개념이 부족하다는 것을 알 수 있다. 일부 통계적 소양 수준이 높은 학생들은 '공장에서 만든 사탕이지만 봉지당 1~2개씩 차이가 있을 수 있다.'라고 서술하였으나, 몇몇 학생들은 '사탕의 개수는 모두 같아야 한다.'고 주장하였다.

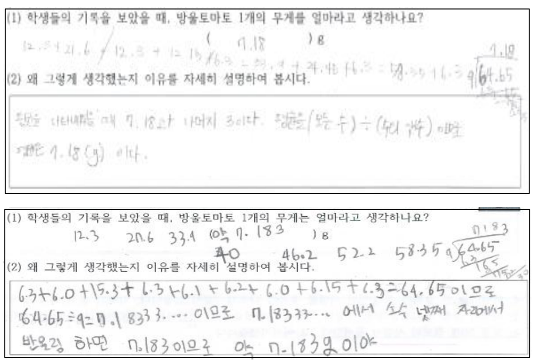


[그림 7] 최빈값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 4)
[Fig. 7] Two examples of responses approaching mode (Task 4)

나. 산술평균

산술평균을 구하는 공식으로 대푯값을 구하거나, 대푯값에 자료의 수를 곱하여 합을 구하고 전체의 합을 고려하여 자료의 값을 예상하는 경우는 산술평균으로 분류하였다.

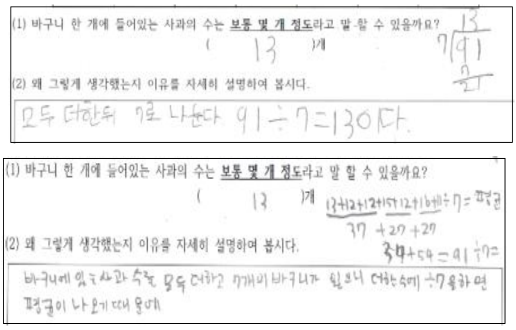
검사 시기가 5학년 1학기였으므로 학생들은 평균을 구하는 공식을 형식적으로 학습하지 않았다. 사전검사 결과, 아주 적은 수의 학생만이 알고리즘에 의한 산술평균으로 문제를 해결하였으며 이 학생들은 모두 학원, 가정 등에서 5학년 2학기 평균 단원을 예습하였다고 응답하였다.



[그림 8] 산술평균으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 1)
[Fig. 8] Two examples of responses approaching arithmetic mean (Task 1)

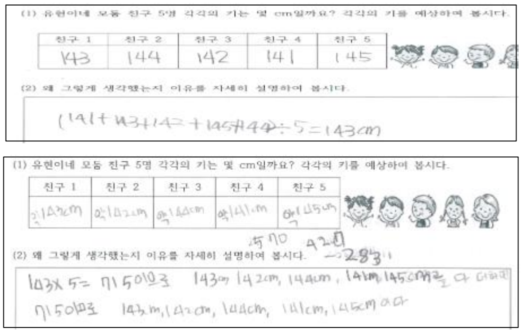
방울토마토의 무게를 여러 번 재어 나타난 다양한 자료의 값에서 어떤 값이 방울토마토 1개의 무게를 대표할 수 있는지 질문하였을 때 산술평균으로 대푯값을 구한 학생은 9명으로, 전체의 5.3%를 차지하였다. 학생들은 자료의 값을 모두 더하여 자료의 수로 나누는 산술평균 계산식을 이용하여 대푯값을 구하였다. 산술평균으로 대푯값을 구한 학생 9명 모두 15.3g이라는 특이값을 고려하지 않았으며, 평균은 측정된 모든 값을 포함하여 구해야 한다고 생각하였다.

바구니 1개에 들어있는 사과의 수는 보통 몇 개인지 묻는 문제에 산술평균으로 접근한 학생은 16명으로 전체의 9.5%를 차지하였다. 학생들은 자료의 값을 모두 더하여 자료의 수로 나누는 산술평균 계산식을 이용하여 대푯값을 구하였다.



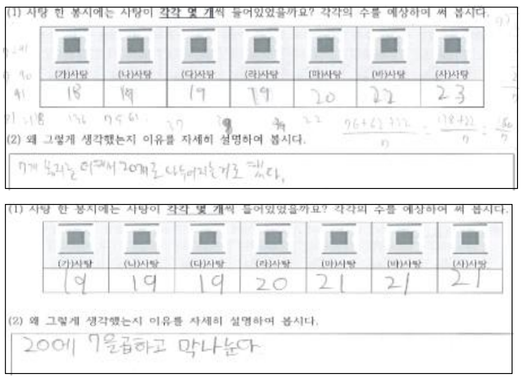
[그림 9] 산술평균으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 2)
[Fig. 9] Two examples of responses approaching arithmetic mean (Task 2)

대푯값을 주고 각각의 자료의 값을 예상하는 문제에 산술평균으로 접근한 학생은 8명으로 전체의 4.7%를 차지하였다. 이 학생들은 '보통 143cm이다.'라는 표현을 '평균이 143cm이다.'로 생각하여, 평균이 143cm가 나오도록 자료의 값을 구성하였다. 학생들은 143이라는 값에 자료의 수인 5를 곱하여 나온 수인 715가 합계가 되도록 각각의 키를 예상하였다. 학생들의 응답을 살펴보면 대푯값 개념을 산술평균으로 접근하여 자료의 값을 예상할 때, 대푯값과 관련하여 범위를 고려하지 않고 전체의 합에 대해서만 고려하는 경향이 있음을 알 수 있었다.



[그림 10] 산술평균으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 3)
[Fig. 10] Two examples of responses approaching arithmetic mean (Task 3)

'1000원짜리 사탕 한 봉지에 보통 20개의 사탕이 들어있다.'라는 대푯값에 대한 정보를 바탕으로 이산량 자료의 값을 예상하는 문제에서 대푯값이 알고리즘에 의한 산술평균이 되도록 각 자료의 값을 예상한 학생은 13명으로 전체의 7.7%를 차지하였다. 이 학생들은 '보통 20개이다.'라는 표현을 '평균이 20개이다.'로 생각하여, 평균이 20개가 나오도록 각 자료의 값을 구성하였다. 이 과정에서 학생들은 20에 자료의 수인 7을 곱하여 합계를 구하고, 자료 각각의 값을 예상하는 모습을 보였다.

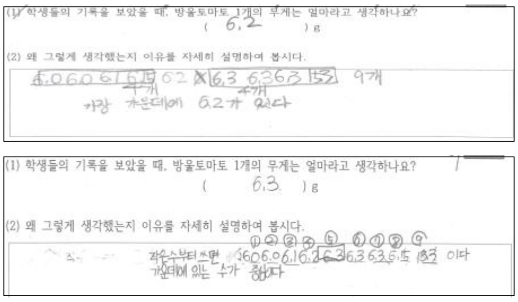


[그림 11] 산술평균으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 4)
[Fig. 11] Two examples of responses approaching arithmetic mean (Task 4)

다. 중앙값

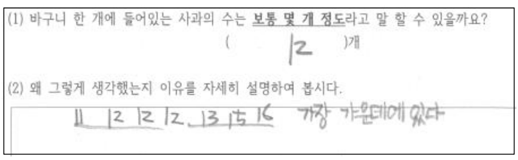
중앙값은 자료의 값을 모두 크기순으로 나열하였을 때 중앙에 위치한 수를 대푯값으로 생각하는 것으로, 대푯값을 기준으로 대푯값보다 크기가 큰 수들과 작은 수들의 개수가 같다는 특징이 있다.

방울토마토 무게의 대푯값을 구하는 문제에서는 10명의 학생이 대푯값 개념을 중앙값으로 접근하였으며, 전체의 5.9%를 차지하였다. 이 문제를 중앙값으로 접근하였을 때 대푯값은 6.2g이어야 하나, 한 학생의 경우 자료의 값을 크기순으로 배열하는 과정에서 오류를 보여 6.3g을 중앙값으로 생각하였다. 이는 소수 두 자리 수의 크기 비교를 하지 못한 것으로, 중앙값 개념 형성에는 문제가 없다고 판단하여 중앙값으로 분류하였다.



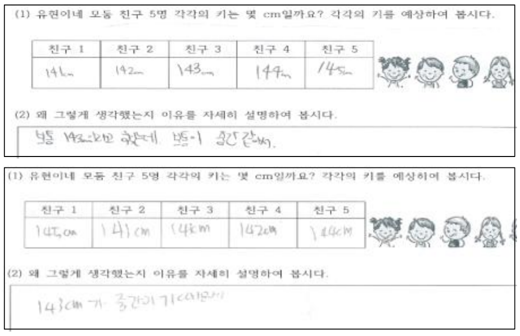
[그림 12] 중앙값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 1)
[Fig. 12] Two examples of responses approaching median (Task 1)

바구니 1개에 들어있는 사과의 수는 보통 몇 개인지 묻는 문제를 해결할 때 중앙값으로 접근한 학생은 1명으로 전체의 0.6%였다. 중앙값은 중복을 고려하지 않고 모든 자료의 값을 크기순으로 나열한다는 점에서 중복을 고려하는 중간값과 차이가 있다. 따라서 중앙값으로 접근하였을 때 대푯값은 12개가 된다.



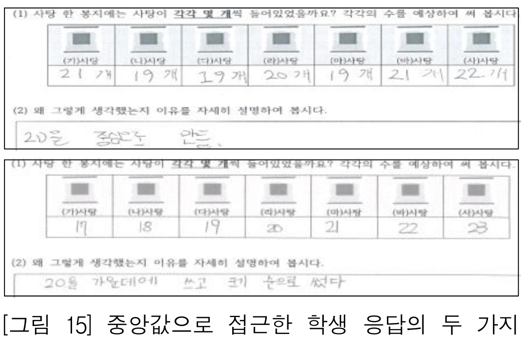
[그림 13] 중앙값으로 접근한 학생 응답의 예 (문항 2)
[Fig. 13] An example of response approaching median (Task 2)

대푯값을 주고 모둠 친구들의 키를 예상하는 문제에서 대푯값이 중앙값이 되도록 자료의 값을 예상한 학생은 51명으로 전체의 30.2%를 차지하였다. 이 유형의 학생들은 자료의 값을 크기 순서로 놓았을 때 3번째 위치에 143이 올 수 있도록 수를 구성하고, '중간에 있다.' 혹은 '가운데 있다.'라고 설명하였다.



[그림 14] 중앙값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 3)
[Fig. 14] Two examples of responses approaching median (Task 3)

'1000원짜리 사탕 한 봉지에 보통 20개의 사탕이 들어있다.'라는 대푯값에 대한 정보를 바탕으로 이산량 자료의 값을 예상하는 문제에서 대푯값이 중앙값이 되도록 자료의 값을 예상한 학생은 6명으로 전체의 3.3%를 차지하였다. 이 학생들은 중복을 고려하지 않고 자료의 값을 크기 순서대로 놓았을 때 4번째 위치에 20이 올 수 있도록 수를 구성하고, '중간에 있다.' 혹은 '가운데 있다.'라고 설명하였다.



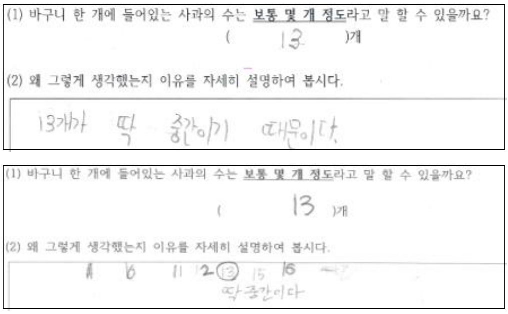
[그림 15] 중앙값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 4)
[Fig. 15] Two examples of responses approaching median (Task 4)

라. 중간값

중간값은 자료의 값을 크기순으로 나열하되, 반복해서 나타나는 숫자는 한 번만 나타내어 중간에 위치한 수를 대푯값으로 생각하는 경우이다.

방울토마토 무게의 대푯값을 생각하는 문제에서는 중간값으로 접근한 학생이 한 명도 없었다. 중앙값으로 접근한 학생의 수가 10명이었다는 점과 비교해 보면 학생들은 자료의 값이 연속량으로 주어졌을 때, 자료 각각의 값 하나하나를 의미 있게 보려 한다는 것을 알 수 있다.

바구니에 들어있는 사과의 수를 구하는 문제에서 중간값으로 접근한 학생은 11명으로 전체의 6.5%를 차지하였다. 중간값으로 접근하면 대푯값은 13개가 된다. 학생들은 '딱 중간이다.'라는 표현을 쓰며 대푯값을 구하였다.

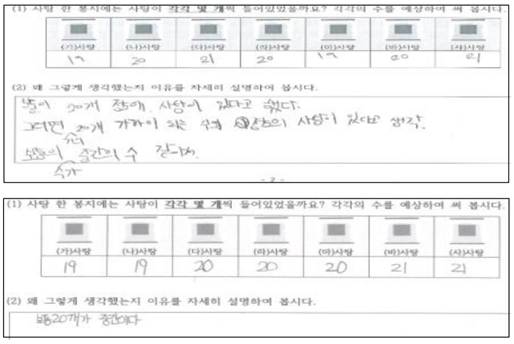


[그림 16] 중간값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 2)

[Fig. 16] Two examples of responses approaching mid-point (Task 2)

'보통 143cm'가 되도록 학생들의 키를 나타내어보는 문제에서도 대푯값이 중간값이 되도록 자료의 값을 예상한 학생은 0명이었다. 이 역시 중앙값으로 접근한 학생이 51명이라는 것과 비교해 보면 학생들이 '키'라는 연속량은 거의 중복되지 않는다고 생각하고 있음을 알 수 있었으며, 이러한 결과는 형식적으로 중앙값과 중간값을 학습하기 이전에는 둘의 개념을 구분하여 사용하기가 어렵다는 점을 반영한다.

사탕의 개수를 생각하는 문제에서 대푯값이 중간값이 되도록 자료의 값을 예상한 학생은 7명으로 전체의 4.1%를 차지하였다. 학생들은 중복된 값을 한 번만 나타내어 자료의 값을 크기 순서대로 놓았을 때 가운데에 20이 위치하도록 수를 구성하였다.



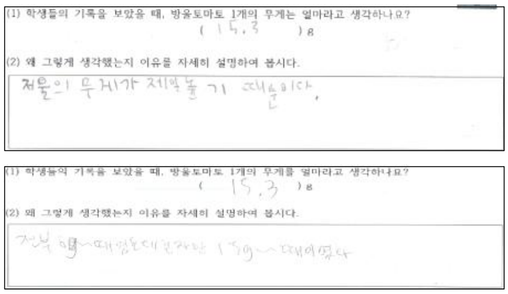
[그림 17] 중간값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 4)

[Fig. 17] Two examples of responses approaching mid-point (Task 4)

마. 최댓값

최댓값은 자료에서 가장 큰 값을 대푯값으로 생각하는 것으로 자료의 값을 예상할 때 자료의 범위에 대한 기준을 세워서 그 이하의 값을 나타내는 경우이다.

방울토마토의 무게에 대한 문제에서 최댓값으로 문제를 해결하려고 했던 학생은 8명으로 전체의 4.7%를 차지하였다. 학생들은 '무게가 가장 높기 때문', '전부 6g대인데 혼자만 15g대이기 때문'으로 설명하였다. 이 문제에서 최댓값에 해당하는 15.3g은 특이값으로 제외해야 하는 값이다. 하지만 특이값을 대푯값으로 생각하는 것은 오개념으로 이어질 위험이 있으므로 주의하여 지도해야 한다.

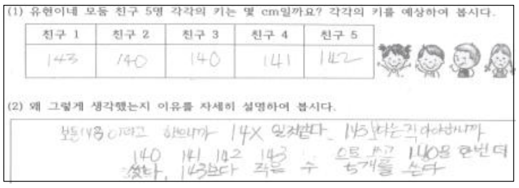


[그림 18] 최댓값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 1)

[Fig. 18] Two examples of responses approaching maximum (Task 1)

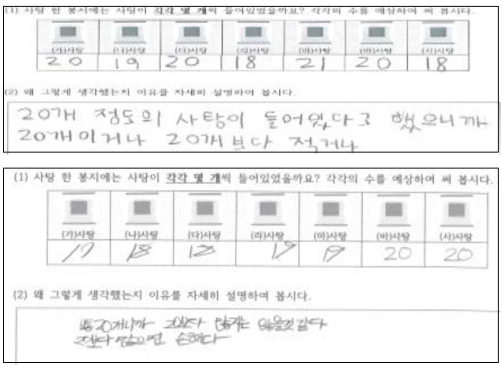
바구니에 들어있는 사과의 수를 구하는 문제에서 최댓값으로 접근한 학생은 아무도 없었다.

모둠 친구 5명 각각의 키를 나타내는 문제에서 143cm가 최댓값이 되도록 자료의 값을 예상한 학생은 8명으로 전체의 4.7%를 차지하였다. 최댓값으로 접근한 학생들은 보통 143cm라는 표현을 보고 143cm이거나, 143cm보다 작아야 한다고 해석을 하였으며, 자료의 범위에 대한 기준을 세워서 그 이하의 값을 나타내기도 하였다.



[그림 19] 최댓값으로 접근한 학생 응답의 예 (문항 3)
[Fig. 19] An example of response approaching maximum (Task 3)

한 봉지에 들어있는 사탕의 수를 예상할 때 20개가 최댓값이 되도록 자료의 값을 나타낸 학생은 11명으로 전체의 6.5%를 차지하였다. 학생들은 '보통 20개'라는 말을 '20개이거나, 20개보다 적거나'라고 해석을 하였으며, 20개보다 많으면 판매자 입장에서 손해라고 서술하기도 하였다.

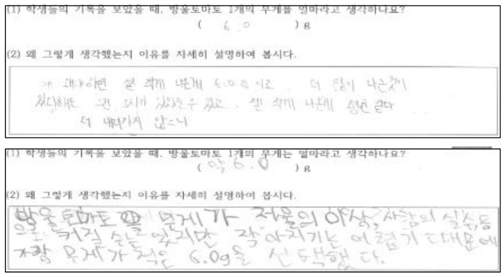


[그림 20] 최댓값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 4)
[Fig. 20] Two examples of responses approaching maximum (Task 4)

바. 최솟값

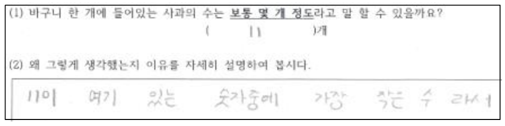
최솟값은 가장 작은 값을 대푯값으로 생각하는 것으로, 문제를 해결할 때 최솟값으로 접근하는 학생들은 자료의 값을 예상할 때 자료의 범위에 대한 기준을 세워서 그 이상의 값을 나타내는 모습을 보였다.

방울토마토 무게의 대푯값을 구하는 문제에서는 제시된 측정값 중 가장 작은 값을 대푯값으로 생각한 학생이 전체의 11.8%를 차지하였으며, 이는 최빈값에 이어 두 번째로 높은 비율이었다. 학생의 응답을 살펴보면 제일 작은 것을 기준으로 더 내려가지는 않을 것으로 생각하고 이를 대푯값으로 설정하는 모습을 볼 수 있었다. 또한, 대부분 6으로 시작하기 때문에 6.0g을 대푯값으로 생각한 경우도 있었다.



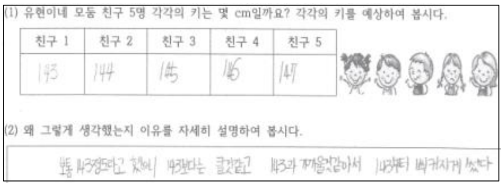
[그림 21] 최솟값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 1)
[Fig. 21] Two examples of responses approaching minimum (Task 1)

바구니에 들어있는 사과의 수를 생각해보는 문제에서 가장 작은 값을 대푯값으로 생각한 학생은 12명으로, 전체의 7.1%를 차지하였다. 한 학생은 사과는 크기가 크기 때문에 바구니에 들어가는 데 한계가 있을 것이라 생각하여 대푯값으로 최솟값을 설정하였다. 이는 학생들이 '사과의 수'라는 맥락을 고려하여 대푯값에 접근함을 보여주는 사례로, 이를 통해 통계에서 맥락의 중요성을 생각해 볼 수 있다.



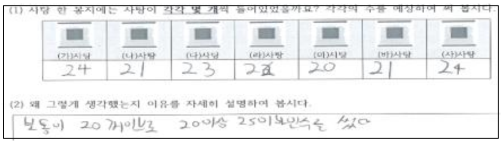
[그림 22] 최솟값으로 접근한 학생 응답의 예 (문항 2)
[Fig. 22] An example of response approaching minimum (Task 2)

모둠 친구들의 키를 예상해보는 문제에서 143cm가 최솟값이 되도록 자료의 값을 예상한 학생은 21명으로 12.4%를 차지하였다. 최솟값으로 접근한 학생들은 보통 143cm라는 표현을 보고 '143cm보다는 클 것이다.'라고 생각하며, 가장 작은 친구의 키가 143cm라고 판단하였다.



[그림 23] 최솟값으로 접근한 학생 응답의 예 (문항 3)
[Fig. 23] An example of response approaching minimum (Task 3)

사탕의 수를 나타내는 문제에서 20개가 최솟값이 되도록 자료의 값을 예상한 학생은 26명으로 15.4%를 차지하였다. 학생들은 한 봉지의 가격이 같으므로, 한 봉지에는 적어도 20개의 사탕이 들어있어야 한다고 생각하였다. '보통 20개이므로 20 이상 25 이하인 수를 썼다.'와 같이 자료의 범위에 대한 기준을 세워서 그 값을 표현하기도 하였다.

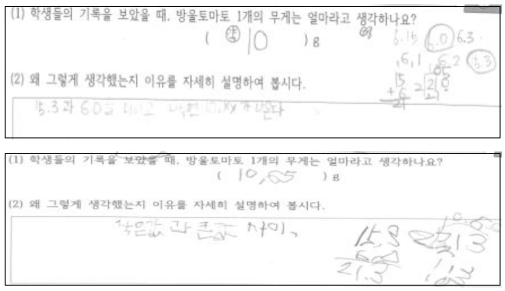


[그림 24] 최솟값으로 접근한 학생 응답의 예 (문항 4)
[Fig. 24] An example of response approaching minimum (Task 4)

사. 최대·최소의 중간값

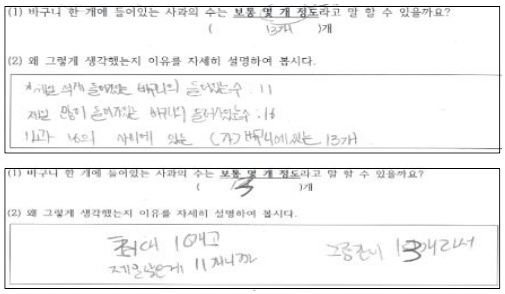
최댓값과 최솟값의 중간값(평균)을 대푯값이라 생각하는 경우이다. 제시된 자료의 값들에 대푯값이 포함되어 있지 않은 경우는 새로 구한 값을 나타내기도 하고, 제시된 자료의 값에서 가장 가까운 수로 나타내기도 한다.

방울토마토 무게의 대푯값을 구하는 문제에서 최댓값과 최솟값의 중간값으로 접근한 학생은 2명으로, 이 2명의 학생 모두 제시된 자료의 값에 대푯값이 없었기 때문에 자신이 새로 구한 값을 대푯값으로 적었다.



[그림 25] 최대·최소의 중간값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 1)
[Fig. 25] Two examples of responses approaching the average of maximum and minimum (Task 1)

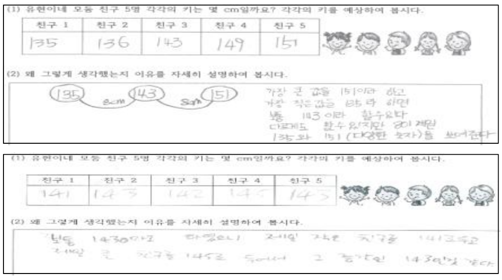
바구니 속 사과의 수에 대한 대푯값을 생각하는 문제에서 최댓값과 최솟값의 중간값으로 접근한 학생들은 10명으로 전체의 5.9%를 차지하였다. 이 문제에서 최댓값인 16과 최솟값인 11의 중간값은 13.5이다. 그러나 학생 10명 모두 13.5를 대푯값으로 제시하지 않고, 제시된 자료의 값 중에서 13.5와 가장 가까운 수인 13을 대푯값으로 보았다. 이는 연속량의 대푯값을 구하는 문항에서 학생들이 보였던 응답 유형과 다르다. 학생들은 '사과의 수'라는 이산량 문맥을 반영하여 문제를 해결하고자 하였다.



[그림 26] 최대·최소의 중간값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 2)
[Fig. 26] Two examples of responses approaching the average of maximum and minimum (Task 2)

모둠 친구들의 키를 예상하는 문제에서 143cm가 최댓값과 최솟값의 중간값이 되도록 자료의 값을 예상한

학생은 3명으로, 1.8%를 차지하였다. 학생들은 143cm를 기준으로 가장 키가 큰 학생의 값과 작은 학생의 값이 같은 차이가 나도록 키를 설정하였다.



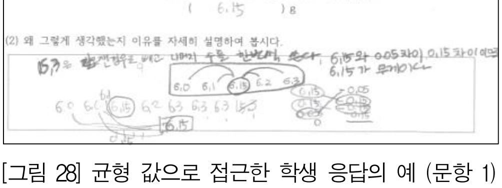
[그림 27] 최대·최소의 중간값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 3)
[Fig. 27] Two examples of responses approaching the average of maximum and minimum (Task 3)

한 봉지에 들어있는 사탕의 수를 예상하는 문제에서 최대·최소의 중간값으로 접근한 학생은 아무도 없었다.

아. 균형 값

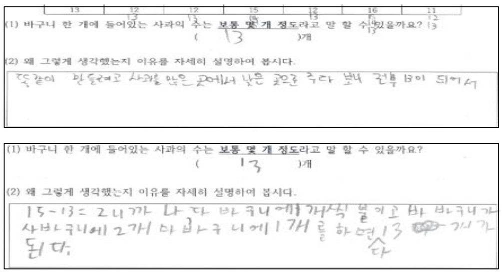
균형 값은 대푯값을 기준으로 좌우 값을 대칭 시켜 예상하는 경우로, 3개의 자료의 값을 짝지어 가운데에 대푯값을 놓고 좌우에 큰 수와 작은 수를 대칭 시키기도 한다(이춘재·전평국, 2006). 문항 3, 4와 같이 대푯값을 바탕으로 자료의 값을 예상하는 문제 유형에서는 균형 값으로 접근한 학생이 없었다.

방울토마토 무게의 대푯값을 구하는 문제에서는 단 1명의 학생만이 균형 값으로 접근하였으며, 이 학생은 자료의 값이 중복되지 않게 한 번씩 써서 크기순으로 나열한 후, 대푯값과 각각 자료의 값들과의 차이를 구했다. 이때 15.3g이라는 특이값을 “잘못 잰 것”으로 생각하여 제외하고 자료의 값을 나열했다는 점은 눈여겨 볼만하다.



[그림 28] 균형 값으로 접근한 학생 응답의 예 (문항 1)
[Fig. 28] An example of response approaching equilibrium value (Task 1)

바구니 한 개에 들어있는 사과의 수를 생각하는 문제에서 균형 값으로 접근한 학생은 2명으로 전체의 1.2%를 차지하였다. 응답 내용을 살펴보면 학생들이 평균의 의미 중 ‘균형’, ‘균등 분배’의 의미를 정확하게 이해하고 있음을 알 수 있다.

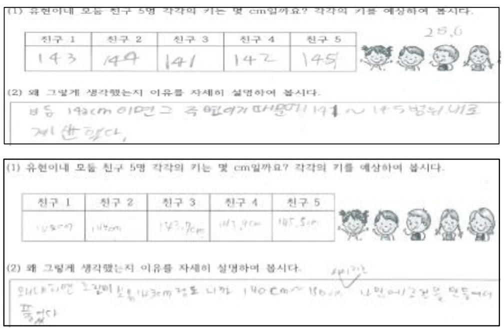


[그림 29] 균형 값으로 접근한 학생 응답의 예 (문항 2)
[Fig. 29] Two examples of responses approaching equilibrium value(Task 2)

자. 범위 값

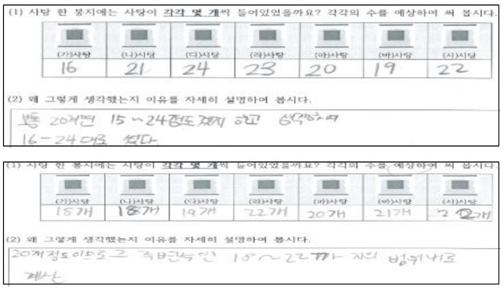
범위 값은 대푯값을 기준으로 범위를 정한 후 범위 안에 있는 수들을 나타내는 경우로(이춘재·전평국, 2006), 문항 1, 2와 같이 자료에서 대푯값을 구하는 문제 유형에서는 범위 값으로 접근한 학생이 없었다.

모둠 친구들의 키를 예상할 때 대푯값을 기준으로 하여 범위를 정한 후 범위 안에 있는 수로 자료의 값을 나타낸 학생은 3명으로 전체의 1.8%이다. 학생들은 143cm를 기준으로 하여 근접한 수들로 자료의 값을 예상하였다.



[그림 30] 범위 값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 3)
[Fig. 30] Two examples of responses approaching range value (Task 3)

사탕 한 봉지에 들어있는 사탕의 수를 생각하는 문제에서 범위 값으로 접근한 학생은 5명으로 전체의 3%이다. 학생들은 20개를 기준으로 하여 근접한 수들로 자료의 값을 예상하였다.



[그림 31] 범위 값으로 접근한 학생 응답의 두 가지 예 (문항 4)

[Fig. 31] Two examples of responses approaching range value (Task 4)

차. 기타

문항을 제대로 이해하지 못했거나, 대푯값에 대한 비형식적 개념으로 분석하기 어려운 경우는 기타로 분류하였다.

2. 평균 단원을 학습한 후 5학년 학생들의 대푯값에 대한 지식 변화

평균 단원을 학습한 후 동형문항으로 구성된 사후검사를 실시한 결과 5학년 학생들의 대푯값에 대한 지식에 많은 변화가 있었다. 그중 가장 눈에 띄는 변화는 모든 문항에 있어서 대푯값의 개념을 산술평균으로 접근하는 학생이 가장 많았다는 것이며, 사전검사와 비교했을 때 응답 유형이 단순화되었다는 것이다. 전체의 70.3%에 해당하는 학생들이 대푯값에서 산술평균을 선택하였으며, 최빈값 19.8%가 그다음으로 많았고, 나머지 유형은 모두 다 합하여 10%가 넘지 않았다.

산술평균으로 분류된 응답일지라도 사전검사와 사후검사에서 학생들의 설명에는 차이가 있었다. 사전검사에서 산술평균으로 접근했던 학생들의 응답을 살펴보면 모두 알고리즘에 의해 평균을 구하고 '더하고 나눈다'는 관점에서 설명하였다. 그러나 사후검사에서 평균으로 접근하는 학생들은 '균형'과 '고르게 한다.'는 평균의 기본적인 의미를 설명하는 경우가 많았다. 이는 2015 개정 교육과정에 따른 5학년 2학기 수학 교과서의 평균 학습 내용이 '똑같이 나누기' 외에도 '균형' 모형을 사용하여 평균의 다양한 의미를 지도하고 있음을 보여주며, 균등 분배의 의미를 담아 평균을 설명하여 대푯값으로써 평균 개념 이해에 도움을 주고 있음을 나타낸다. 사전검사와 사후검사의 결과를 비교한 결과는 다음과 같다.

[표 6] 평균 단원을 학습한 후 5학년 학생들의 대푯값에 대한 지식 유형

[Table 6] Type of the knowledge of the representative data of fifth-grade students after learning the average unit

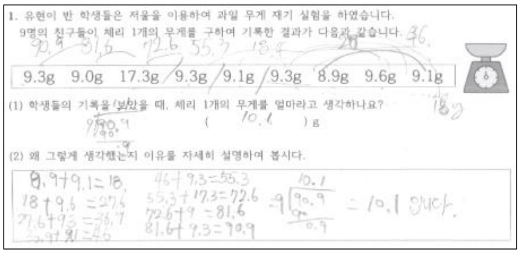
	문항 1		문항 2		문항 3		문항 4		전체 합계	
	횟수	(%)	횟수	(%)	횟수	(%)	횟수	(%)	횟수	(%)
최빈값	42	24.9	11	6.5	54	32.0	27	16.0	134	19.8
산술평균	115	68.0	140	82.8	97	57.4	123	72.8	475	70.3
중앙값	1	0.6	1	0.6	2	1.2	2	1.2	6	0.9
중간값	0	0.0	1	0.6	1	0.6	0	0.0	2	0.3
최댓값	2	1.2	2	1.2	2	1.2	2	1.2	8	1.2
최솟값	2	1.2	2	1.2	3	1.8	3	1.8	10	1.5
최대 최소의 중간값	0	0.0	1	0.6	0	0.0	0	0.0	1	0.1
균형 값	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0
범위 값	0	0.0	0	0.0	2	1.2	2	1.2	4	0.6
기타	7	4.1	11	6.5	8	4.7	10	5.9	36	5.3
총합	169		169		169		169		676	

가. 연속량 자료를 바탕으로 대푯값 구하기(문항 1)

연속량 자료를 주고 이에 대한 대푯값을 구하도록 한 문제에서는 최빈값을 대푯값으로 구한 학생이 사전검사에서 66.3%로 가장 높은 비율을 차지했으나, 사후검사에서는 24.9%로 감소하였다. 사후검사에서 가장 높은 비율을 차지한 비형식적 지식 유형은 산술평균이었으며, 115명의 학생이 이에 해당하여 전체의 68%를 차지하였다. 그러나 115명의 학생 중 특이값을 고려한 학생은 아무도 없었다. 115명의 학생 모두 다른 무게보다 지나치게 높은 특이값을 포함 시켜 평균을 구했으며, 평균을 구하는 것이 대푯값으로 가장 적절하다고 표현하였다. 이는 학생들이 평균 단원을 학습했음에도 특이값이 존재할 때 자료의 대푯값으로서 평균이 갖는 한계를 이해하지 못한 것으로 설명할 수 있다.

[표 7] 사전검사와 사후검사 결과 비교 (문항 1)
[Table 7] Comparison of the results about the pre- and post-test (Task 1)

유형	사전검사		사후검사	
	응답수(명)	비율(%)	응답수(명)	비율(%)
최빈값	111	66.3	42	24.9
산술평균	9	5.3	115	68
중앙값	10	5.9	1	0.6
최댓값	8	4.7	2	1.2
최솟값	20	11.8	2	1.2
최대최소의 중간값	2	1.2	0	0
균형 값	1	0.6	0	0
기타	7	4.1	7	4.1
총합계	169		169	



[그림 32] 특이값을 고려하지 않은 학생의 응답 예시
[Fig. 32] An example of student response that do not consider outlier

나. 이산량 자료를 바탕으로 대푯값 구하기(문항 2)

이산량 자료를 주고 이에 대한 대푯값을 구하도록 한 문제에서는 최빈값을 대푯값으로 구한 학생이 사전검사에서 61.5%로 가장 높은 비율을 차지하였다. 그러나 사후검사에서는 11명의 학생만이 최빈값으로 접근하여 6.5%로 감소하였다. 사후검사에서 가장 높은 비율을 차지한 비형식적 지식 유형은 산술평균으로, 140명 학생이 이에 해당하여 전체의 82.8%를 차지하였다.

[표 8] 사전검사와 사후검사 결과 비교 (문항 2)
[Table 8] Comparison of the results about the pre- and post-test(Task 2)

유형	사전검사		사후검사	
	응답수(명)	비율(%)	응답수(명)	비율(%)
최빈값	104	61.5	11	6.5
산술평균	16	9.5	140	82.8
중앙값	1	0.6	1	0.6
중간값	11	6.5	1	0.6
최댓값	0	0	2	1.2
최솟값	12	7.1	2	1.2
최대최소의 중간값	10	5.9	1	0.6
균형 값	2	1.2	0	0
기타	13	7.7	11	6.5
총합계	169		169	

다. 대푯값을 바탕으로 연속량 자료 예상하기(문항 3)

사전검사에서는 주어진 대푯값이 최빈값이 되도록 자료의 값을 구성한 학생이 37.9%로 가장 많았고, 그 다음이 중앙값으로 30.2%를 차지했었다. 그러나 사후검사에서는 산술평균이 57.4%로 가장 많았고, 최빈값이 32%로 두 번째로 많았다. 눈여겨볼 것은 중앙값이다. 사후검사에서 대푯값이 중앙값이 되도록 자료의 값을 구성한 학생은 단 2명으로 1.2%를 차지하였다.

[표 9] 사전검사와 사후검사 결과 비교 (문항 3)
[Table 9] Comparison of the results about the pre- and post-test (Task 3)

유형	사전검사		사후검사	
	응답수(명)	비율(%)	응답수(명)	비율(%)
최빈값	64	37.9	54	32
산술평균	8	4.7	97	57.4
중앙값	51	30.2	2	1.2
중간값	0	0	1	0.6
최댓값	8	4.7	2	1.2
최솟값	21	12.4	3	1.8
최대 최소의 중간값	3	1.8	0	0
범위 값	3	1.8	2	1.2
기타	11	6.5	8	4.7
총합계	169		169	

라. 대푯값을 바탕으로 이산량 자료 예상하기(문항 4)

사전검사 결과, 대푯값을 주고 이산량 자료의 값을

[표 10] 사전검사와 사후검사 결과 비교 (문항 4)
[Table 10] Comparison of the results about the pre- and post-test (Task 4)

유형	사전검사		사후검사	
	응답수(명)	비율(%)	응답수(명)	비율(%)
최빈값	93	55	27	16
산술평균	13	7.7	123	72.8
중앙값	6	3.6	2	1.2
중간값	7	4.1	0	0
최댓값	11	6.5	2	1.2
최솟값	26	15.4	3	1.8
범위 값	5	3	2	1.2
기타	8	4.7	10	5.9
총합계	169		169	

예상해보도록 한 문항에서는 주어진 대푯값이 최빈값이 되도록 자료의 값을 구성한 학생이 55%로 가장 높은 비율을 차지하였다. 그러나 사후검사에서는 대푯값이 산술평균이 되도록 수를 구성한 학생이 72.8%로 가장 많았으며, 최빈값은 16%를 차지하였다.

3. 대푯값으로 평균을 사용하는 것이 적절하지 않은 문항에서 대푯값 선택하기

이 문항은 2015 개정 교육과정에 따른 5학년 2학기 교과서 ‘도전 수학’을 재구성한 것으로 평균을 대푯값으로 사용할 수 없을 때 학생들이 어떤 대푯값을 선택하는지 알아보기 위한 것이다. 사전검사를 진행했던 2019년 7월에는 2015 개정 5학년 2학기 교과서가 아직 시중에 나오지 않은 상태였으며, 사전 조사 결과 연구 참여자 169명 모두 이 유형의 문항을 사전검사에서 처음 접했다고 응답하였다.

심사위원들의 평가 점수를 바탕으로 가장 잘한 친구를 고르기 위해 학생들은 나름의 기준을 세우게 된다. 이 상황에서 학생 대부분은 먼저 심사위원별 점수를 더하여 총합을 계산해 보지만 이 문제에서는 총합이 모두 같다. 즉 평균이 모두 92점인 상황에서 누구를 가장 잘했다고 할 수 있을지 다른 조건을 비교하여 선택해야 하는 것이다.

대푯값으로 ‘평균’만을 지도하는 초등학교 수학 교육과정에서 ‘평균’을 이용할 수 없는 상황을 제시했을 때 학생들의 응답을 분석하는 것은 의미가 있다. 연구 문제를 해결하기 위하여, 사전검사에서 학생들의 응답 유형을 살펴보고, 사후검사와 비교하여 학생들의 응답 유형에 어떠한 변화가 있었는지 살펴보았다.

가. 평균 단원을 학습하기 전 학생들의 응답 유형 분석

평균 단원을 학습하기 전 사전검사에서 학생들의 응답을 비슷한 유형끼리 분류하였을 때, 기준을 최하점에 둔 경우, 기준을 최고점에 둔 경우, 기준을 최하점과 최고점의 차이에 둔 경우, 심사위원별 순위를 점수화한 경우, 기준을 합계에 둔 경우, 기준을 합계에 두고 계산하였으나 계산 오류로 합계를 잘못 구한 경우, 기타까지 총 7가지 유형을 볼 수 있었다.

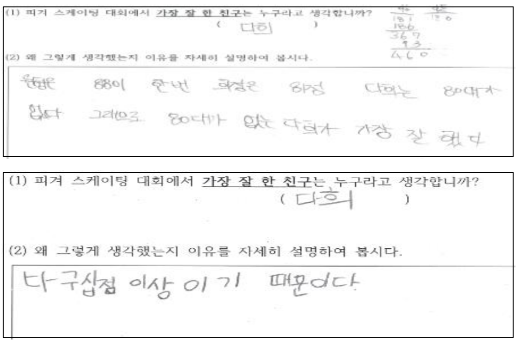
[표 11] 평균 단원을 학습하기 전 학생들의 응답 유형
[Table 11] Type of responses before learning the average unit

유형	응답수(명)	비율(%)
‘80점대가 없음’과 같이 최하점을 기준으로 함	66	39.1
최고점을 기준으로 함	38	22.5
최하점과 최고점의 차이를 기준으로 함	2	1.2
심사위원별 순위를 점수화함	4	2.4
합계를 기준으로 함	24	14.2
합계를 기준으로 접근하였으나, 계산 실수로 합계를 잘못 구함	21	12.4
기타	14	8.3
총합계	169	

사전검사에서 학생들의 응답 유형과 특징을 살펴보면 다음과 같다.

1) 최하점을 기준으로 한 경우

원형이와 희정이는 80점대 점수가 존재하지만 ‘다희만 80점대 점수가 없다.’, ‘다희는 90점 이하가 없다.’, ‘다희의 점수는 모두 90점 이상이다.’와 같이 최하점에 초점을 두고 다희가 가장 잘했다고 응답한 학생들을 ‘최하점을 기준으로 함’으로 분류하였다. 최하점을 기준으로 한 학생은 66명으로 전체의 39.1%를 차지하였다.

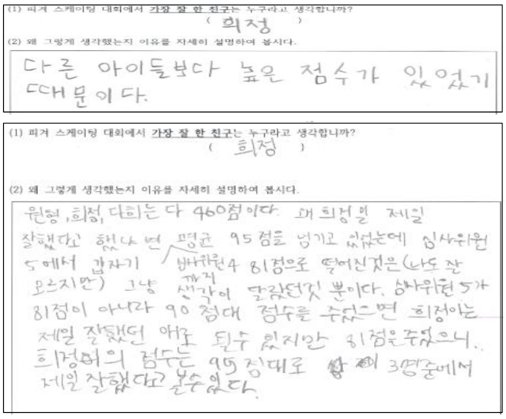


[그림 33] 최하점에 초점을 둔 응답의 두 가지 예
[Fig. 33] Two examples of responses focused on the lowest point

2) 최고점을 기준으로 한 경우

희정이가 받은 97점이라는 점수에 주목하여 ‘다른 아이들보다 높은 점수가 있다.’, ‘가장 높은 점수를 갖고 있다.’의 이유로 희정이를 고른 학생들을 ‘최고점을 기준으로 함’으로 분류하였다. 심사위원4에게 81점이라

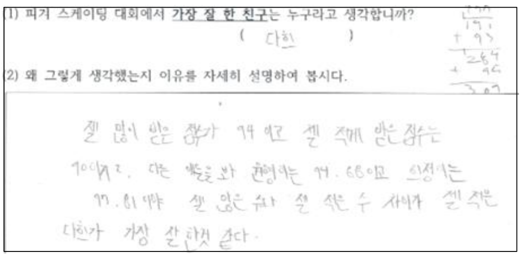
는 아주 낮은 점수를 받지 않았으면 희정이의 평균이 높았을 것이라고 응답한 학생도 최고점을 기준으로 한 경우로 분류하였다. 이 학생은 '심사위원4에게만 81점을 받은 것은 심사위원의 생각이 달랐던 것뿐이다.'라고 응답하며 특이값을 인식하고, 지나치게 떨어지는 점수를 제외하면 희정이의 평균이 높다고 주장하였다. 최고점에 초점을 둔 학생은 38명으로 전체의 22.5%를 차지하였다.



[그림 34] 최고점에 초점을 둔 응답의 두 가지 예
[Fig. 34] Two examples of responses focused on the highest point

3) 최하점과 최고점의 차이를 기준으로 한 경우

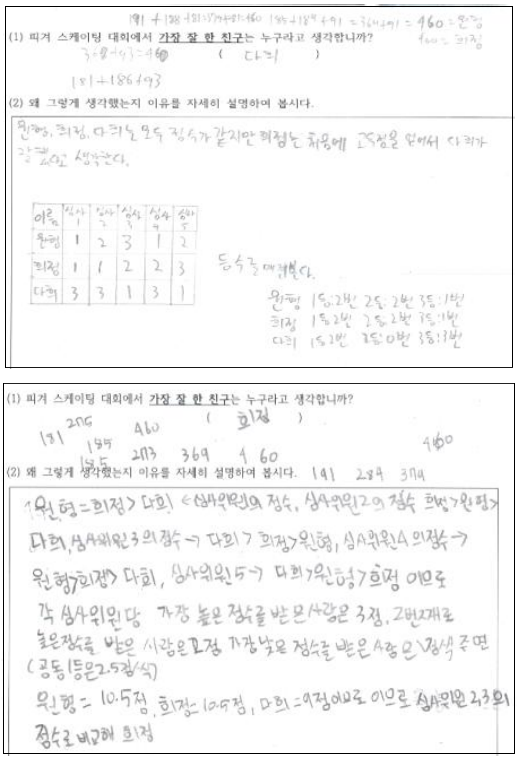
최고점과 최저점의 차이를 비교하여 차이가 작은 학생이 잘했다고 응답한 학생은 2명으로 1.2%를 차지하였다. 이 2명의 학생 모두 처음에는 심사위원의 점수를 모두 더하여 합계를 구하였고, 합계가 모두 460점으로 같게 나오자 다른 방법을 생각해내고자 노력한 흔적이 있었다.



[그림 35] 최고점과 최하점의 차이에 초점을 응답의 예
[Fig. 35] An example of response focused on the difference between the highest and lowest points

4) 심사위원별 순위를 점수로 계산한 경우

심사위원별로 점수를 가장 높게 준 사람부터 1등, 2등, 3등으로 순위를 매기는 방법으로 문제를 해결한 학생은 4명으로 전체의 2.4%를 차지하였다. 1등, 2등, 3등의 개수를 세어 비교하기도 하고, 순위에 따라 점수를 주어 합계를 구하기도 하였다. 순위에 따라 점수를 계산한 학생의 경우 1등을 3점, 2등을 2점, 3등을 1점으로 계산하거나, 1등은 3점, 공동 1등인 경우 2.5점과 같이 계산하기도 하였다.

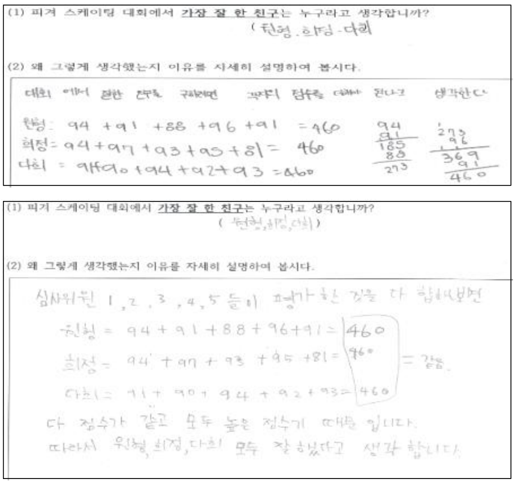


[그림 36] 순위를 점수화한 응답의 두 가지 예
[Fig. 36] Two examples of responses using the way that convert rankings into scores

5) 합계를 기준으로 한 경우

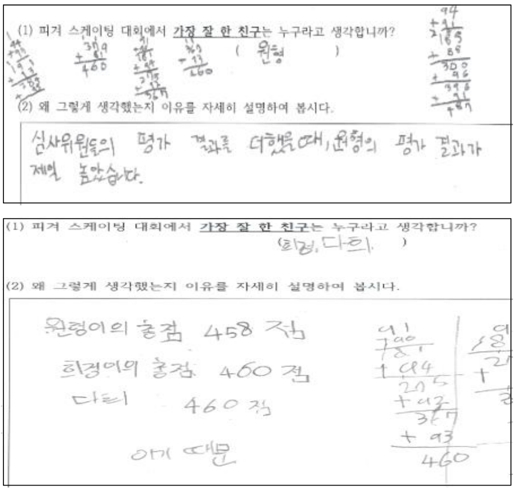
학생 대부분이 합계를 먼저 구하여 문제를 해결하려고 하였으나, 합계가 같다는 것을 알고 나서 다른 기준으로 가장 잘한 학생을 뽑으려고 하였다. 그러나 사전검사에서 전체의 14.2%에 해당하는 학생이 '합계가 같다는 것'을 바탕으로 '모두 다 잘했다.'라는 결론

을 내렸다. 합계가 모두 460점으로 같으므로 누구 한 명이 잘했다고 말할 수 없다는 것이다.



[그림 37] 합계에 초점을 둔 응답의 두 가지 예
[Fig. 37] Two examples of responses focused on the sum

6) 합계를 구하는 과정에서 계산 실수를 한 경우



[그림 38] 합계를 구하는 과정에서 계산 실수를 한 응답의 두 가지 예시
[Fig. 38] Two examples of responses adding wrong

심사위원 모두의 점수를 더하는 과정에서 계산을 잘못하여 합계를 잘못 구하고, 그에 따라 심사위원 점수의 합이 가장 높은 학생을 대표 학생으로 뽑은 경우로, 총 21명의 학생이 이 유형에 해당하였다. 이러한 응답은 기타로 분류하여도 되지만, 전체의 12.4%나 되는 학생들이 비슷한 실수를 보였다는 점에서 하나의 응답 유형으로 분류하였다.

7) 기타

문항을 제대로 이해하지 못했거나, 하나의 유형으로 나타내기 어려운 경우는 기타로 분류하였다. 그 결과 학생 14명이 기타로 분류되었으며, 전체의 8.3%를 차지하였으며, 응답 예시로는 '보통 1등의 이름을 맨 위에 놓으므로 원형이가 가장 잘했다.', '잘 모르겠다.' 등이 있다.

나. 평균 단원을 학습한 후 학생들의 응답 유형의 변화 분석

평균 단원을 학습한 후 실시한 사후검사에서 학생들의 응답 유형은 사전검사 결과보다 단순하게 나타났다. 사후검사 결과 학생들의 응답 유형은 최하점을 기준으로 함, 최고점을 기준으로 함, 최고점과 최하점의 차이를 기준으로 함, 합계를 기준으로 함, 합계를 기준으로 접근하였으나 계산 오류로 합계를 잘못 구함, 기타까지 총 6가지로 분류되었다. [표 12]는 사전검사와 사후검사 결과를 비교한 것이다.

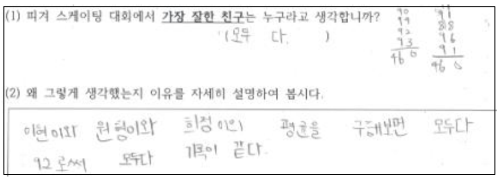
[표 12] 사전검사와 사후검사 결과 비교
[Table 12] Comparison of pre- and post-test results

유형	사전검사 비율(%)	사후검사 비율(%)
최하점을 기준으로 함 (80점대가 없음)	39.1	17.8
최고점을 기준으로 함	22.5	7.7
최고점과 최하점의 차이를 기준으로 함	1.2	0.6
심사위원별 순위를 점수화함	2.4	0
합계를 기준으로 함	14.2	46.2
합계를 기준으로 접근하였으나, 계산 실수로 합계를 잘못 구함	12.4	19.5
기타	8.3	8.3
총 합계	100%	100%

사전검사에서 학생들은 합계가 460점으로 모두 같

다는 것을 알고 난 후에 다른 기준을 찾기 위해 자료의 값을 비교하려는 노력을 보였다. 그 결과 사전검사에서는 최하점을 기준으로 한 학생들이 39.1%로 가장 많았으며, 최고점을 기준으로 한 학생들이 22.5%로 두 번째로 비율이 높았다. 합계를 기준으로 '합계가 같으므로 모두 다 잘했다.'고 응답한 학생은 14.2%였다. 그러나 평균 단원을 학습한 후 실시했던 사후검사에서는 사전검사 결과의 약 3배인 46.2%에 해당하는 학생이 '합계가 같으므로 모두 다 잘했다.'고 응답하였다. 사전검사와 달리 상당수의 학생이 자료의 값을 바탕으로 평균이 같다는 것을 확인한 다음 더 이상 가장 잘한 1명의 학생을 찾기 위해 노력하지 않았으며, 다른 대푯값을 고려하지 않고 결론을 내리는 모습을 보였다. 학생들은 합계가 같고, 평균이 같다는 것을 근거로 세 학생 모두 똑같이 잘했다고 주장하였으며, 누구 하나를 더 잘했다고 이야기할 수 없다고 하였다.

[그림 39]는 사전검사에서 [그림 34]의 첫 번째 그림과 같이 응답했던 학생의 답안이다. 이 학생은 사전검사에서 합계가 같기 때문에 '최고점을 받았던 다희가 잘했다.'라고 응답했으나, 사후검사에서 '합계가 같기 때문에 모두 다 잘했다.'고 응답하였다. 이는 평균 단원을 학습한 후에 학생들이 평균을 가장 공정한 대푯값으로 인식하고 있으며, 자료의 대푯값으로 평균이 가장 합리적이라고 생각하고 있음을 보여준다.



[그림 39] 한 학생의 사후검사에서의 응답 변화 예시
[Fig. 39] Example of changes in response from a student's post-test

가장 잘한 학생을 뽑기 위한 방법으로 심사위원별 오차 확률을 줄이려는 아이디어를 내거나, 최댓값과 최솟값을 제외하는 절사평균을 생각한 학생은 사전검사와 사후검사를 통틀어 아무도 없었다. 절사평균이란 편차가 큰 자료의 경우, 산술평균이 적합하지 않기 때문에 자료의 총 개수에서 일정 비율만큼 가장 큰 부분과 가장 작은 부분을 제거한 후 평균을 산출하는 방법이다. 절사평균은 초등학교 수학에서 주요 학습 내용이 아니지만, 산술평균에 대하여 지도할 때 산술평균의 한계와 함께 언급함으로써 대푯값으로써 산술평균에 대한 초등학생의 이해를 높이는 데 도움을 줄 수 있다.

V. 결론 및 논의

본 연구 결과를 바탕으로 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 대푯값을 지도할 때에는 학생들의 비형식적 지식에서 출발하여 사고를 정교화 해 나가도록 해야 한다. [표 5]와 같이 평균 단원을 학습하기 전 초등학교 5학년 학생들은 대푯값에 대하여 풍부한 비형식적 지식을 갖고 있었으며, 이는 형식화된 개념 유형과 같거나 유사했다. 따라서 학생들이 대푯값에 대해 가지고 있는 다양한 비형식적 지식의 유형과 학생들의 생각을 이해하고 조정하여 사고가 정교화 될 수 있도록 도와주는 방향으로 교육이 이루어져야 한다. 교사는 비형식적 지식이 형식화로 나아가는 사고의 경로 및 그 과정에서 나타날 수 있는 다양한 반응들을 충분히 예측할 수 있어야 하며, 학생들이 올바른 개념을 형성할 수 있도록 도움을 주어야 한다.

둘째, 평균의 개념을 도입할 때 대푯값의 의미를 강조해야 한다. 학생들은 일상생활의 경험을 통하여 대푯값에 대한 개념을 형성하고 있었으며, 공정함과 공평성의 개념으로 자신의 논리를 이용하여 대푯값을 설명하였다. 그러나 학생들이 대푯값에 대해 갖는 다양한 비형식적 지식 유형은 교과서 평균 단원을 학습하면서 [표 6]처럼 변화하였다. 전체의 70.3%에 해당하는 학생들이 대푯값을 산술평균으로 접근하였으며 문제 상황이나 맥락을 고려하지 않았다. 학생들은 산술평균으로 구하는 것이 가장 정확하고 공평하다고 설명하였으며, 자료의 대푯값을 구하기 위해 자료의 값을 살펴보지 않고 바로 평균을 구하는 공식을 이용하기도 하였다. 이는 학생들이 평균에 대하여 자료의 값을 요약하고 표현하는 수치로 다루기보다는 특별한 절차에 의해서 구해지는 수로 본다고 했던 Mokros & Russell(1995)의 연구 결과와도 일치한다. 따라서 학교 수학에서 평균을 도입할 때 통계자료를 해석하고 요약하는 도구로서의 평균의 개념을 강조할 필요가 있으며,

평균과 자료 사이에 어떠한 관계가 있는지를 가르치며 대푯값 중 하나의 개념으로 평균을 도입해야 한다. 이와 함께 평균 이외의 다른 대푯값도 자연스럽게 언급함으로써 평균이 유일한 대푯값이 아님을 학생들이 인식할 수 있도록 도와야 한다.

셋째, 평균 개념에 대한 학생들의 이해가 풍부해질 수 있도록 교과서 지도 내용상의 보완이 필요하다. 학생들은 평균으로 접근할 때 교과서에서 배운 대로 고르게 나누어 주어 평균값을 찾거나, 모두 더한 후 자료의 수로 나누는 방법으로 평균을 구했다. 그러나 [그림 32]가 보여주듯이 해결 과정에서 특이값을 고려한 학생은 아무도 없었다. 학생들에게 산술평균이 항상 가장 합리적인 방법이 아닐지도 모른다는 것을 이해시킬 필요가 있으며, 이를 위해 교과서에서 특이값이 포함된 자료 집합을 다룰 필요가 있다. 특이값이 포함된 자료 집합을 다루는 것은 자료의 특성에 따라 바람직한 대푯값을 선택하는 활동으로 자연스럽게 이어질 수 있다. 따라서 학생들에게 특이값이 포함된 자료 집합을 제공하여 분포의 특성에 따라 평균이 자료 집합의 경향성을 나타내기에 부족함이 있다는 것을 인식하게 하고, 대푯값으로 평균을 이용할 때 유의점을 이해할 수 있도록 한다. 또한, 평균을 계산하는 것에서 더 나아가 평균을 해석하는 경험을 제공해야 할 것이다.

넷째, 최빈값의 지도 시기를 재고할 필요가 있다. [표 5]가 말해주듯이 사전검사 결과 모든 문항에서 대푯값을 최빈값 개념으로 접근한 학생의 비율이 가장 높았다. 이는 학생들이 최빈값에 대해 학습하지 않았어도 최빈값에 대한 지식을 갖고 있음을 보여준다. 학생들은 평균을 학습하기 이전에 이미 표나 그래프를 학습할 때 '어느 항목이 가장 많은 표를 얻었는지'와 같이 최빈값의 개념이 반영된 문제를 해결했던 경험이 있다. 이처럼 최빈값은 범주형 자료라 불리는 수치가 아닌 자료에도 활용될 수 있으며, 특이값에 영향을 받지 않는다는 점에서 유용한 대푯값이다. 현재 최빈값은 초등학교 교육과정에서 가르치지 않으나, 학생들이 이미 최빈값에 대한 비형식적 지식을 갖추고 있으며, 구하기 쉽다는 점에서 최빈값이라는 개념의 지도 시기를 재고할 필요가 있다. 최빈값이라는 수학적 용어를 일찍 도입하여 지도한다면 학생들이 이 용어를 이용하여 생각을 서술하고, 의견을 정당화하는데 편안함을 느낄 수 있을 것이다. 따라서 자료를 대표하는 값 중 하나로 최빈값의 개념을 초등학교 수학에서 함께 가르치는 방안을 생각해볼 필요가 있다.

다섯째, 대푯값에 대한 다양한 비형식적 지식은 학생들의 창의적인 사고와 깊은 관련이 있으며, 하나의 대푯값만을 지도하는 것은 학생들의 창의적인 사고를 제한할 위험이 있다. 대푯값으로 평균을 사용할 수 없을 때 평균 단원을 학습하기 전과 후의 학생들의 반응은 명확하게 달랐다. 총합이 같은 상황에서 어떤 학생을 1등으로 선정해야 하는가에 대해 사전검사에서는 학생들이 총합이 같다는 것을 알고 자신만의 기준을 세워 1등을 선정하려는 모습을 보였다. 그러나 사후검사에서는 총합이 같다는 것을 알고 난 후 학생들이 더 이상 사고하지 않는 모습을 보였다. 가장 많은 학생들이 '평균이 같으므로 모두 다 잘했다.'와 같이 응답하였으며, 더 나아가 사고의 확장을 하지 않고 결론을 내린 경우가 많았다. 이는 산술평균만을 다루고 있는 현행 교육과정이 학생들의 사고에 영향을 주었음을 의미한다. 학생들은 평균 단원을 학습하면서 산술평균을 가장 공정하고 정확한 방법으로 받아들이게 되며, 대푯값을 정하는 상황에서 산술평균만을 떠올리는 위험에 빠질 수 있다. 따라서 학생들에게 다양한 대푯값이 있으며, 자료의 특성에 따라 유용한 대푯값이 다르다는 것을 인식하게 할 필요가 있다. 또한, 학생들이 대푯값 중 하나의 개념으로 평균을 받아들이고, 대푯값에 대해 이미 형성되어 있는 다양한 비형식적 지식을 이용하여 보다 융통성 있는 사고의 확장을 할 수 있도록 도와야 한다.

학생들은 대푯값과 관련한 형식적 정의를 배우지 않았음에도 산술평균, 중앙값, 최빈값을 절충하는 아이디어를 포함한 다양한 비형식적 지식을 가지고 있다. 대표성이라는 아이디어의 발달은 평균 개념을 이해하는 하나의 부분이 되며, 이는 최빈값과 중앙값이 형식적으로 소개될 때에도 학생들의 이해는 대표성의 아이디어와 연결될 수 있음을 보여준다. 교육과정에서 최빈값, 중앙값과 관련한 직관적인 아이디어를 보다 명확히 한 후에 산술평균의 개념을 마지막에 도입해야 한다고 했던 Mokros & Russell(1995)의 권고처럼, 우리나라에서도 학생들이 주어진 상황에 대하여 올바른 대푯값을 선택하고 사용할 수 있도록 대푯값에 대한 지도 순서를 재고할 필요가 있다.

참 고 문 헌

교육부(2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74 호 [별책 8]

Ministry of Education. (2015). *Mathematics Curriculum.* Bulletin of MOE No. 2015-74 [Seperate Volume #8]

교육부(2019). 초등학교 수학 5-2. 서울: 교육부.

Ministry of Education (2019). *Elementary School Mathematics Textbook 5-2.* Seoul: Ministry of Education.

권지현(2006). RME이론에 근거한 대표값 개념 교수 학습 방법 분석 및 적용. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

Kwon, J. H. (2006). *An Analysis and Application on Teaching/Learaing Method of Average Value Concept Based on RME Theory,* Korea National University of Education.

문양자(2006). 평균 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

Moon, Y. J. (2006). *A Study on the Understanding of Average Concepts.* University of Seoul.

이춘재, 전평국(2006). 5, 6학년 학생들의 대푯값에 대한 비형식적 개념 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 45(3), 319-343.

Lee, C. J. & Jeon, P. K (2006). An Analysis of Informal Concepts of Average Found in Fifth and Sixth Graders. *J. Korea. Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education, 45*(3), 319-343.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (2005). 수학의 힘을 길러주자. 권성룡 외(역). 서울: 경문사.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). Fostering children's mathematical power: *An investigative approach to K-8 mathematics instruction. Routledge.*

Garrett, C. G. & Brattain, W. (1956), Distribution and Cross Sections of Fast States on Germanium Surfaces, *Bell Labs Technical Journal, 35*(5), 1051-1058.

Landis, J. & Gary, G. (1977). The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. *Biometrics 33*(1), 159-174.

Mokros, J. & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Mokros, J. & Russell, S. J. (1996). What do children understand about average?. *Teaching Children Mathematics, 2*(6), 360-364.

Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith. N. L. (2009). Helping Children Learn Mathematics (9th ed.). 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 역(2012). 초등 교사를 위한 수학과 교수법. 서울: 경문사.

The Effect of Average Unit Learning on the Knowledge of the Representative Value of 5th Grade Elementary School Students

Moon, Eunhye
Graduate School of Korea National University of Education
250 Taeseongtabyeon-ri, Gangnae-myeon, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, South Korea.
E-mail : mehstar@korea.kr

Lee, Kwangho†
Korea National University of Education
250 Taeseongtabyeon-ri, Gangnae-myeon, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, South Korea.
E-mail : paransol@knue.ac.kr

The purpose of this study is to analyze the effect of average unit learning on the knowledge of the representative value of 5th grade elementary school students. In the information-oriented society, the ability to organize and summarize the data has become an essential resource. In the process of correctly analyzing statistical data and making reasonable decisions, the summary of the data plays an important role, and it is necessary to learn the concept of representative values in order to describe the center of the data in a series of numbers. For research, an informal knowledge type possessed by a fifth grade elementary school student with respect to a representative value before learning an average unit is examined and compared with the representative value after learning the average unit. A suggestion point for representative value guidance in school mathematics is provided while examining the change in knowledge with respect to the representative value. Seeing the informal types of elementary school students' representative values will help them learn how to formalize the concept of representative values in middle and high schools. It will give suggestions about the concept of representative values and the method of instruction that should be dealt with in elementary schools. The informal knowledge about the representative value can help with formal representative value that will be learned later. Therefore, This study’s discussions on statistical learning of elementary school students are expected to present meaningful implications for statistical education.

* ZDM Classification : K13
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : average, representative value, informal knowledge, mean, mode, median.
† Corresponding Author