

## 초등학교 영재학급용 교수·학습 자료 개발을 위한 가변칠교판 활용 소재 발굴<sup>1)</sup>

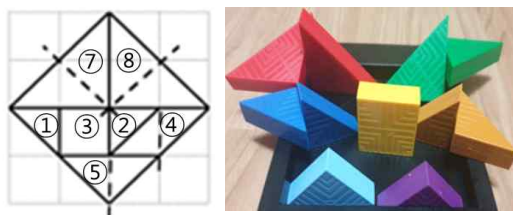
강민정<sup>2)</sup> · 송상헌<sup>3)</sup>

본 연구는 보통의 초등학생들에게도 익숙한 전통칠교판을 변형하여 만든 가변칠교판을 활용하여 초등학교 영재학급용 교수·학습 자료 개발을 위한 소재 발굴을 목적으로 한다. 가변칠교판은 영재학급 학생들이 수학적 의사소통을 통해 정당화할 수 있다. 다만, 영재학급 학생이라도 초등학교 수준에서는 ‘기호화’ 단계를 거치지 않으면 모든 크기의 삼각형, 직사각형을 찾아 정당화(증명)하기에는 어느 정도의 한계가 있다. 따라서 문자와 기호에 대한 탐구 과정이 필요한 학생들에게는 보충 학습 자료와 추가 발문을 제공할 필요가 있다. 초등학교 영재학급용 교수·학습 자료 개발을 위한 가변칠교판이라는 소재는 영재학급 학생들의 수학적 추론능력과 수학적 의사소통능력을 발달시키는데 기여할 수 있을 것으로 기대한다.

주제어: 가변칠교판, 정당화, 의사소통, 영재학급용 교수학습 소재 발굴, 기호화

### I. 서론

전통칠교판을 정사각형 단위 격자점 위에 그려놓고 그 격자들끼리 연결한 선분을 축으로 하여 회전시켜 만들 수 있는 모든 조각들로 이루어진 새로운 도형 퍼즐을 회전 가능한 칠교판(rotatable tangram, 이하 가변칠교판)이라고 하자([그림 1]). 이 가변칠교판의 조각들은 특정한 모양으로 고정시켜놓고 하나의 유사칠교판처럼 활용해도 되고, 가변인 조각들을 자유롭게 수시로 변형할 수도 있어서 용도에 따라서는 탐구 활동의 난이도가 다양해진다. 가변칠교판을 사용하면 전통칠교판에 비해 만들 수 있는 다각형의 모양도 다양하고 개수도 더 많다. 예를 들어, 7조각을 일부 또는 전부를 사용하여 만들 수 있는 직사각형의 개수는 전통칠교판으로는 11개, 가변칠교판으로는 16개이며, 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 넓이가 8인 볼록



[그림 1] 정사각 격자 위에 그린 칠교판(탱그램)과 이를 활용하여 만든 가변칠교판

1) 이 논문은 강민정(2020)의 석사학위논문의 내용을 보충하면서 재구성한 것임.  
2) [제1저자] 경인교육대학교 교육전문대학원, 대학원생  
3) [교신저자] 경인교육대학교, 교수

다각형은 전통칠교판으로는 13개, 가변칠교판으로는 19개이다.

송상현(2008)에 따르면 칠교판으로 모양(실루엣)보다는 다각형 탐구가 필요하며 학생들의 사고 수준에 따라 그것들을 일정한 유형으로 분류, 토론하면서 그 이유까지 설명해 보도록 하면 수학적 사고와 태도의 향상이라는 수학교육의 목표 중 하나를 달성하기에 좋은 소재가 될 수 있다고 하였다. 정규교육과정에서는 다루지 않는 칠교판 각 조각들의 특성(각도, 변의 길이, 넓이 등)까지 활용하면서 다양한 다각형들을 탐구하되 그 해법을 좀 더 간결하게 표현하도록 요구하면서 가변칠교판으로 변형까지 할 수 있다면 기호화, 수량화, 도형화와 같은 내용적 사고에 더하여 유추적, 확장적, 일반화의 사고와 같은 방법적 사고까지 활용하면서 칠교판의 수학적 의미를 보다 풍부하게 탐구할 수 있게 된다.

전통칠교판에 관한 연구들 외에 유사탱그램에 관한 선행 연구들(박교식, 2007, 심상길, 조정길, 2008; 송상현, 2008, 방신영, 송상현, 2013; 황지남, 2015; 유재근, 박문환, 2019)을 통해서도 수학적 활용성과 효용성은 계속 거론되고 있다. 특히 칠교판을 활용한 가장 최근 연구인 유재근, 박문환(2019a, b)은 중학교급에서 변이 이론을 적용한 핵심 특징으로서 다각형에서 ‘변들 사이의 위치 관계’, ‘조각들의 넓이와 길이 사이의 관계’와 같은 내용 연구는 물론 초등학교급에서도 ‘내용 기반 개방형 과제’로의 변형을 시도하면서 보다 깊이있는 탐구의 가능성을 열어주었으나 칠교판을 소재로 한 영재교육과의 연계를 시도하고 있지는 않다. 한편, 유사탱그램 중 하나인 가변칠교판에 대한 소개와 활용 방안에 대한 연구는 아직 없다.

본 연구는 영재학급용 교수·학습 자료 개발을 위해 가변칠교판이라는 소재 발굴을 목적으로 한다. 특히 초등학교 영재학급 학생들이 가변칠교판을 이용하여 만들 수 있는 모든 삼각형과 직사각형을 찾는 과정을 영재학급에서의 실제 수업에 적용해 보면서 학생들의 문제 해결 과정과 사고 과정 분석에서 드러난 문제점을 바탕으로 보다 개선된 교수·학습 자료 개발에 기여할 수 있을 것으로 기대한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 전통칠교판(탱그램)과 유사탱그램

전통칠교판이란 정사각형 모양의 판을 일곱 조각으로 나눈 뒤, 각 조각을 재배열하여 다양한 실루엣(그림자, 이미지)을 만드는 퍼즐로 ‘칠교놀이’ 또는 ‘탱그램’으로도 불린다. 전통칠교판에 사용되는 7개의 조각이 칠교이고, 그렇게 만든 여러 가지 형상(이미지)이 칠교도이다(박교식, 2004). 전통칠교판과 유사한 실루엣 도형 퍼즐이 다양하게 소개되고 있는데, 정사각형, 평행사변형, 이등변삼각형, 직각이등변삼각형, 등변사다리꼴, 사다리꼴, 원 모양, 하트 모양, 달걀 모양, 입체 모양 등으로 확장하여 몇 개의 조각으로 자른 다음 여러 가지 모양 만들기 활동이 대부분이다. 7조각 이외에도 더 적거나 더 많은 조각으로 자르는 것도 가능하며 14조각으로 이루어진 아르키메데스 퍼즐과 심지어 19조각으로 자른 것도 있다. 전통칠교판과 다른 것들을 구별하기 위해 원래의 칠교판은 탱그램, 그 외 유사한 것들은 ‘유사탱그램’으로 부르기도 한다(박교식, 2004).

유사탱그램에 관한 논의들 중 다각형이 아닌 모양(실루엣)에 초점을 두거나 정사각형을 정삼각형으로 바꾼 7조각 모자이크 퍼즐(일명 스프링크스퍼즐)만 독자적으로 연구하는 것은 논의로 하며 그것을 전통칠교판과 관련하여 수업에 활용 가능한 경우만 논의한다.

## 2. Dienes의 수학놀이학습 6단계 이론

Dienes(2020)의 수학놀이학습이론의 본질은 ‘수학적 추상화’의 과정이다. Dienes는 미숙한 학생들의 이해와 성숙한 수학자들의 이해 간에는 현격한 차이가 존재하며 이 양극단적 이해 사이에는 6단계가 존재한다고 주장하는데, 각 단계별 명칭 및 내용은 다음과 같다. 제 1단계(자유놀이)에서는 학습자가 주어진 상황에 친밀함을 느낄 수 있도록 시행착오, 상호작용 활동을 하게 된다. 어떤 의미의 동기유발 단계이므로 때로는 생략이 가능하고 반드시 교구가 활용되어야 하는 것도 아니다. 제 2단계(규칙놀이, 게임)에서는 학습자들은 규칙을 이용해 놀이하는 방법을 학습해야 한다. 규칙놀이는 교육자가 지도하고자 하는 수학적 내용에 근거한 놀이여야 하며 가급적 지각적 다양성의 원리와 수학적 다양성의 원리에 입각해서 설계되어야 한다. 제 3단계(공통성 파악, 비교)에서는 게임들을 비교하고 거기서 드러나는 공통 구조를 파악한다. 학습자들이 게임에서 경험한 상황과 관련된 것이라고 해도 아동 스스로 교육자들이 찾기를 바라는 모든 항목을 찾기란 어렵다. 이러한 경우 교사의 적절한 안내가 요구된다. 제 4단계(표현, 표상)에서는 앞 단계에서 추출한 공통성을 표나 다이어그램, 도해 등의 시각적인 형태로 표현하는 단계로 앞 단계에서 수집된 공통적인 본질을 학습자가 인식하고 탐구한다. 제 5단계(기호화)에서는 공통적인 성질을 탐구하는 과정에서 혹은 성질이 탐구된 이후 그것을 표현할 새로운 언어가 필요한 시점에서 학습자들은 나름대로의 수학 기호를 개발하고 사용하게 된다. 이 때 교사는 학습자들이 개발한 기호를 기존의 수학 기호로 표현할 수 있도록 지도할 필요성이 있다. 제 6단계(형식화)에서는 발견한 성질들을 정리하게 되는데 이 중 같은 성질들에 의해 유도된 성질들이 공리가 되고 그 후 연역한 성질이 정리가 되며 초기 공리에서 정리로 나아가는 방법이 증명이다. 초등학교에서는 공리-정리-증명의 형식을 갖추지는 않지만 형식화 단계의 핵심은 앞 단계에서 추상해낸 개념이나 공통된 성질 속에 들어있는 수학적 구조를 파악하고 그 성질을 체계화하는 과정이다. 추상화는 어린 학습자뿐만 아니라 성인에게도 매우 어려운 작업이다. 따라서 교사의 적절한 안내와 개입이 필수적이며 Dienes도 이 과정을 매우 중요하게 여겼다. Dienes의 수학놀이학습 6단계를 적용할 때에는 현행 단계에서의 활동에 충분히 익숙해져야만 다음 단계로의 이행이 가능하므로 교사가 각 단계에 적절한 안내가 필요하며, 설령 그 안내와 개입이 있었다 하더라도 모든 학습자들이 추상화 또는 형식화 단계에 도달할 수 있는 것은 아니다. 따라서 모든 학습자들이 형식화 단계에 도달할 것을 무리하게 요구하면 안 된다(김수미, 2008에서 재인용).

## 3. 선행연구 분석

김남희(2000)는 수, 연산, 측정, 도형, 추론 등 다양한 영역에서의 칠교판 활용 방법을 소개함으로써 전통칠교판의 수학교육적 가치를 드러낼 수 있는 5가지의 지도 사례(조각들의 변의 길이와 넓이의 관계를 설명하는 수학적 추론 지도에 활용; 분수 또는 소수, 배수 등의 개념을 설명하는 수와 연산의 지도; 변의 길이, 넓이, 각의 측정, 대칭, 내각의 합을 구하는 측정 영역에서의 활동; 삼각형, 사각형, 평행사변형의 성질 탐구와 공간감각 발달을 위한 평면도형에서의 지도; 특히 평행사변형의 넓이 공식 지도)에 활용할 수 있다고 하였다. 박교식(2007)은 피크의 정리와 와々草의 이용하여 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형을 모두 구하였다. 송상현(2008)은 초등학교 수학 교과서와 익힘책에 제시하고 있는 탱그램 사용이 교육과정과의 관련에서 갖는 문제점과 한계를 분석하면서 학교 현장에서 바르게 활용할 수 있는 방안과 유사 탱그램까지 확장하여 적극적으로

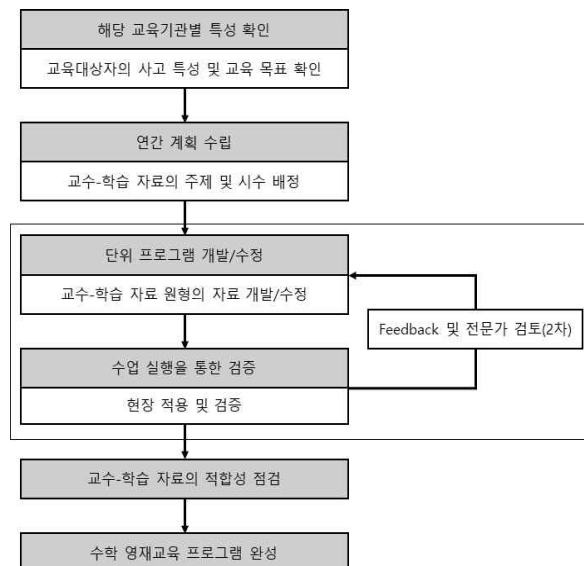
활용할 수 있는 대안을 제안하였다. 방신영, 송상현(2013)은 직사각형 칠교판인 스펡크스퍼즐로 만들 수 있는 서로 다른 크기의 모든 삼각형의 개수와 그 도형들의 보다 깔끔한 해법 찾기 프로그램을 구성하였고 과제를 해결하는 동안 학생들에게서 나타나는 수학적 사고 특성을 가타기리의 수학적 사고·태도 중 조작의 사고, 연역적 사고, 보다 나은 방법을 알아보려는 태도를 중심으로 분석하였다. 황지남(2015)은 칠교판 일곱 조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 볼록다각형의 개수를 초등 수준에서 적용이 가능한 증명 방법인 단위넓이를 이용한 방법과 최소넓이를 이용한 방법으로 대안을 제시하고 수업 프로그램을 구성하였으며 그 결과 5학년 초등수학영재 수준에서 칠교판으로 만들 수 있는 볼록다각형의 개수를 정당화하는 것이 가능함을 보였다. 유재근, 박문환(2019a)은 변이 이론을 적용하여 탱그램 활동을 위한 핵심 특징으로 ‘변들 사이의 위치 관계’, ‘조각들의 넓이와 길이 사이의 관계’를 다루었고, 유재근, 박문환(2019b)에서는 초등 수학 교과서의 과제를 내용 기반 개방형 과제로 변형함으로써 보다 깊이있는 탐구를 위한 탱그램의 활용 가능성을 탐색하면서 폐쇄형 과제를 개방형 과제로 변형을 시도하였다.

그러나 이 중 어떠한 연구에서도 기존에 주어진 조각의 형태만 가지고 탐구할 뿐 조각의 일부분을 회전한 가변칠교판의 가능성에 대해서는 언급하고 있지 않았다. 단지 최근 송상현, 박은정, 허지연, 최종현, 고준석(2020)이 초등 1주제(통일된 사각형 퍼즐 나라를 꿈꾸며)의 1-2차시에서 가변칠교판을 소개하고 있으며, 송상현, 김지원, 최종현, 조영득(2020)이 중등 1주제(새로운 다각형 퍼즐의 탄생)의 7-9차시에서 정삼각형 칠교판인 스펡크스퍼즐에 가변성을 도입한 산출물을 계획할 수 있음을 제안하고 있다.

### III. 연구의 방법

#### 1. 연구의 절차 및 방법, 대상자, 자료 분석 기준

가변칠교판을 이용한 초등학교 영재학급용 교수·학습 자료의 적용 가능성을 탐색하기 위해 우선 [그림 2]와 같이 국가영재교육프로그램 기준(이희현 외 6인, 2017)의 절차를 따르되 그 절차를 간소화하여 사용하였다. 먼저 교육 대상자인 초등학교 영재학급용 학생들의 특징을 파악하고 단위 학교 영재학급의 교육목표를 파악하고 가변칠교판을 이용한 교수·학습 자료의 개발을 위해 가변칠교판을 이용하여 만들 수 있는 모든 크기의 삼각형과 직사각형을 찾는 활동 주제를 설정하였다. 이를 위해 우선 초등학교 정규 교육과정을 분석하면서 현행 교육과정에서 5-1학기에 학습하는 도형의 넓이, 5-2학기에 학습하는 도형의



[그림 2] 교수·학습 자료 개발의 절차 모형  
(이희현 외 6인, 2017)

대칭과 합동, 모든 크기의 삼각형과 직사각형 찾기 활동에서는 넓이, 대칭, 합동의 수학적 개념을 모두 알고 있어야하기 때문에 선행학습을 최소화하기 위해서는 5-2학기 이후 이 프로그램을 적용하는 것이 적합하다는 전제 하에 교육 과정과 가변칠교판 교구를 분석한 후에 교수·학습 자료의 원형을 개발하였다. 핵심 주제어로는 ‘다각형의 구성 요소’, ‘대칭’, ‘등적변형’으로 선정하고 학습 목표를 설정하였다.

1차 수업으로 H초등학교 6학년 영재학급 학생 3명을 대상으로 실시하였고 수업 중에 드러나는 학생들의 활동을 분석한 후 수업자, 학생, 전문가 집단의 피드백을 거쳐 교수·학습 자료를 수정하고 2차 본 교수·학습 자료를 완성했다. 2차 수업으로 N초등학교 6학년 영재학급 학생 15명을 대상으로 교수·학습 자료를 투입하고 학생들의 활동을 분석한 후 최종 교수·학습 자료를 완성했다. 연구 자료는 영재학급 학생들이 수행한 학습지, 연구자의 참여 관찰, 비디오 촬영, 녹음, 특정 대답을 보인 학생에 대한 면담을 통해 수집하고 삼각분석법을 통해 분석을 실시하되 개발한 최종 교수·학습 자료가 개발 근거와 방향에 적합한지 판단하기 위해 소재는 다르지만 연구 방법이 비슷한 한송이(2015)의 <표 1>을 본 연구의 분석 기준으로 삼았다.

<표 1> 자료 분석 기준

기준	개발 요소	내용 및 준거
1	합목적성	▶개발하려는 영재학급용 교수·학습 자료가 교육 목적의 성격에 부합하는가?
2	수준의 적합성	▶영재학급 학생들의 특성을 고려하여 선수학습을 지양하는가? ▶학습 소재가 학습 대상들에게 충분한 호기심과 창의성, 도전의식을 불러 일으키는가? ▶심도 있게 주제를 탐구할 수 있는가?
3	수학적 의미	▶일반 교육과정에서 수학적 개념을 기초로 고차원적인 수학적 사고능력을 자극할 수 있는 프로그램인가?
4	계열성	▶흥미 있는 활동에서 점차 깊이 있게 탐구하는 활동으로 차례로 구성하면서 각 활동에는 연계성이 있도록 구성하였는가?
5	자기 주도적 탐구	▶학생의 관심과 호기심에 따라 학습자 자신이 학습의 내용을 결정하는 주체가 되도록 교사의 강의식 수업보다 학생의 자기 주도적 탐구 활동에 비중을 두어 개발하였는가?
6	재구성 편의성	▶교육 현장에서 교수·학습 상황에 따라 융통성 있게 재구성할 수 있고 후속적인 창의적 산출물을 만드는 데 도움이 되는 프로그램인가?

## 2. 연구의 소재 분석

가변칠교판은 전통칠교판 7개의 퍼즐 조각 중 가장 큰 2개의 직각이등변삼각형을 [그림 1]의 중간 크기의 직각이등변삼각형 1개, 평행사변형 1개 총 4개의 조각이 회전하여 다른 도형을 만들 수 있는 칠교판이다. 회전하는 조각들과 회전축, 회전 후 조각의 모양을 <표 2>로 정리하였다. 이 칠교판의 7조각들을 격자점을 이어 회전시킬 수 있는 조각은 ④, ⑤, ⑥, ⑦ 조각이고 이들을 각각 ④-1, ⑤-1, ⑥-1, ⑦-1이라 하면 각 조각들의 특징은 <표 3>과 같다.

<표 2> 가변칠교판에서 회전가능한 조각들

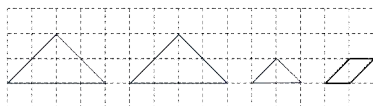
원래의 조각	가변 회전축	회전후 조각의 모양	회전 전후 모습 (가운데 붉은 빨간색은 회전축)
넓이가 2인 직각이등변삼각형	직각인 꼭지점에서 내린 수선	넓이가 2인 평행사변형	
넓이가 1인 직각이등변삼각형	직각인 꼭지점에서 내린 수선	넓이가 1인 평행사변형	
넓이가 1인 평행사변형	짧은 대각선	넓이가 1인 직각삼각형	

<표 3> 가변칠교판 각 조각들의 특징

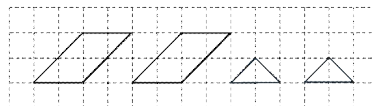
번호	조각		조각들의 각도(단위°)	길이 (단위 cm)	넓이 (단위 cm <sup>2</sup> )
	이름				
①, ②	직각이등변삼각형		45°, 45°, 90°	1, 1, $\sqrt{2}$	0.5
③	정사각형		90°, 90°, 90°, 90°	1, 1, 1, 1	1
④	평행사변형		45°, 45°, 135°, 135°	1, $\sqrt{2}$ , 1, $\sqrt{2}$	1
④-1	직각이등변삼각형		45°, 45°, 90°	$\sqrt{2}$ , $\sqrt{2}$ , 2	
⑤	직각이등변삼각형		45°, 45°, 90°	$\sqrt{2}$ , $\sqrt{2}$ , 2	1
⑤-1	평행사변형		45°, 135°, 45°, 135°	1, $\sqrt{2}$ , 1, $\sqrt{2}$	
⑥, ⑦	직각이등변삼각형		45°, 45°, 90°	2, 2, $2\sqrt{2}$	2
⑥-1 ⑦-1	평행사변형		45°, 135°, 45°, 135°	$\sqrt{2}$ , 2, $\sqrt{2}$ , 2	
종합	3×3=9세트 가능		45°의 배수 (3종)	1, $\sqrt{2}$ , 2, $2\sqrt{2}$ (4종)	0.5, 1, 2 (3종)

가변칠교판은 기존의 조각에서 단지 회전에 의해서 모양만 바뀌는 것이기 때문에 전통 칠교판과 공통된 특징이 있다. 가변칠교판과 전통칠교판 모두 각 조각의 넓이가 0.5, 1, 2로 3가지이고, 조각 7개의 전체 넓이가 8이다. 변의 길이는 1,  $\sqrt{2}$ , 2,  $2\sqrt{2}$ 로 4가지만 생기고, 각 조각들의 각도는 45°, 90°, 135°로 45°의 배수인 3가지만 나타난다.

가변칠교판은 총 9종류의 서로 다른 칠교판을 만들 수 있다. ⑥과 ⑦번 조각을 이용해서 만들 수 있는 칠교판의 경우의 수는 3가지(큰 삼각형 2개, 큰 삼각형 1개와 큰 평행사변형 1개, 큰 평행사변형 2개)이고 ④와 ⑤번 조각을 이용해서 만들 수 있는 칠교판의 경우의 수는 3가지(중간 크기의 삼각형 2개, 중간 삼각형 1개와 중간 크기의 평행사변형 1개, 중간 크기의 평행사변형 2개)이므로 전통칠교를 포함하여 9세트의 가변 칠교판을 만들 수 있다. 가변칠교판의 종류를 나타내기 위해 변형 조각을 순서쌍(넓이가 2인 변형 조각, 넓이가 2인 변형 조각 ; 넓이가 1인 변형 조각, 넓이가 1인 변형 조각)으로 나타내고 조각의 모양이 삼각형일 때는 3, 평행사변형일 때는 4로 기호화하였다. 예를 들어, 전통칠교판은 [그림 3]와 같이 넓이가 2인 직각삼각형이 2개, 넓이가 1인 직각삼각형이 1개, 넓이가 1인 평행사변형이 1개이므로 (3,3;3,4)가 된다. 이 조각들을 변형하여 [그림 4]의 모양으로 바꾼 가변칠교판은 넓이가 2인 평행사변형이 2개, 넓이가 1인 직각이등변삼각형이 2개인 경우이므로 (4,4;3,3)으로 나타낸다.



[그림 3] (3,3;3,4)의 가변칠교판(전통칠교판)



[그림 4] (4,4;3,3)의 가변칠교판

가변칠교판으로 만들 수 있는 넓이가 서로 다른 삼각형은 총 6종류가 된다. 가변칠교판 조각은 모든 각이  $45^\circ$  의 배수들로 이루어졌다. 따라서 가변칠교판으로 만들 수 있는 삼각형은 직각이등변삼각형뿐이다. 가변칠교판의 넓이는 최대 8이므로 가변칠교판을 이용해서 만들 수 있는 삼각형의 종류는 (밑변, 높이)가  $(1, 1)$ ,  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ,  $(3, 3)$ ,  $(4, 4)$ 로 넓이가 0.5, 1, 2, 4, 4.5, 8인 6종류의 삼각형을 만들 수 있다. 단, 각각의 조각을 고정시켜서 생각했을 때 일부 세트의 가변칠교판에서는 조각들의 변의 길이와 각도로 만들 수 없는 모양이 생긴다. 각각의 조각을 고정시켰을 때 각 모양의 가변칠교판이 만들 수 있는 삼각형은 <표 4>와 같다.

<표 4> 가변칠교판으로 만들 수 있는 모든 삼각형

밑변의 길이 (높이) 세트	1 (0.5)	$\sqrt{2}$ (1)	2 (2)	$2\sqrt{2}$ (4)	3 (4.5)	4 (8)	총 개수	삼각형의 구성 모양(예시)
(3,3;3,3)	○	○	○	○	○	○	6	
(3,3;3,4)	○	○	○	○	○	○	6	
(3,3;4,4)	○	○	○	○	○	○	6	
(3,4;3,3)	○	○	○	○	○	○	6	
(3,4;3,4)	○	○	○	○	○	○	6	
(3,4;4,4)	○	○	○	○	○	○	6	
(4,4;3,3)	○	○	○	○	○	○	6	
(4,4;3,4)	○	○	○	○	△	△	4	
(4,4;4,4)	○	○	○	△	△	△	3	
모든 경우	○	○	○	○	○	○	6	

가변칠교판을 이용해서 만들 수 있는 모든 직사각형의 종류는 <표 5>와 같이 총 16종류가 된다. 직사각형의 변을 (가로, 세로)로 나타냈을 때  $(a, b)$ ,  $(b, a)$ 는 같은 넓이의 도형을 회전한 것이므로 1종류이다. 가변칠교판 7조각을 모두 사용했을 때 최대 넓이는 8이다. 따라서 세로변이 짧은 변이라고 생각하면 세로변은 1,  $\sqrt{2}$ , 2,  $2\sqrt{2}$ 가 가능하고 각각의 경우를 살펴보면 가변칠교판으로 만들 수 있는 직사각형은 (가로, 세로)의 길이가  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(6, 1)$ ,  $(7, 1)$ ,  $(8, 1)$ ,  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(4\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 로 총 16종류이다. 실제로 도형이 만들어지는지 확인을 해보면 전통칠교판으로는 위에 제시한 16종류의 직사각형을 모두 만들 수 없지만, 가변 칠교판 중  $(4,4;3,3)$ 의 칠교판 세트로는 직사각형을 모두 만들 수 있는 것을 알 수 있다.

<표 5> 가변칠교판으로 만들 수 있는 직사각형

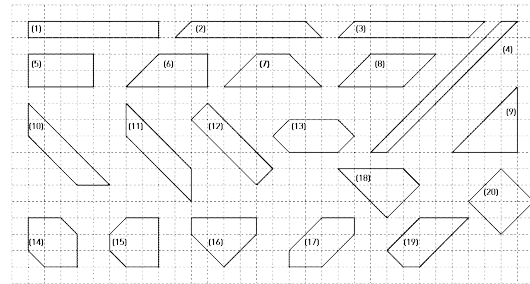
가로,세로 변의 길이 세트	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1	7, 1	8, 1	$\sqrt{2}$ , $\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$ , $\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$ , $\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$ , $\sqrt{2}$	2, 2	3, 2	4, 2	$2\sqrt{2}$ , $2\sqrt{2}$	총
(3,3;3,3)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12
(3,3;3,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	11
(3,3;4,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	9
(3,4;3,3)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	14
(3,4;3,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12
(3,4;4,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	10
(4,4;3,3)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	16
(4,4;3,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	14
(4,4;4,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	9
모든 경우	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	16

<표 6> 가변칠교판으로 만들 수 있는 블록다각형

블록다각 형의 번호 세트	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	총	
(3,3;3,3)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	15
(3,3;3,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	13
(3,3;4,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	13
(3,4;3,3)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	15
(3,4;3,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12
(3,4;4,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	13
(4,4;3,3)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	17
(4,4;3,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	13
(4,4;4,4)	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	11
모든 경우	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	19

박교식(2007)은 피크의 정리 또는 和々草(2007)의 방법에 의하면 변의 길이 조건을 만족 하면서 넓이가 8이 되는 블록다각형은 [그림 4]와 같이 20개라고 하였다. 가변칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 블록다각형의 수는 칠교판의 각 조각의 조건에 따라 좌우되는데 (3,3;3,4)의 전통칠교판이 13개의 블록다각형을 만들 수 있는 것에 비해 (3,3;3,3), (4,4;3,3)의 가변칠교판은 15개, (3,4;3,3)의 가변칠교판은 17개의 블록다각형을 만들 수 있다. 또 가변칠교판 종류 전체를 생각했을 때는 20개의 블록다각형 중 <표 6>과 같이 (4)번 모양을 제외한 19개의 블록다각형을 만들 수 있다.

가변칠교판은 전통칠교판을 포함한 여러 모양의 칠교판을 만들 수 있기 때문에 전통칠교판을 이용하여 수행할 수 있는 활동



[그림 4] 넓이가 8인 칠교판 7조각으로 만들 수 있는 블록다각형들의 종류



이외에 다양하게 활용할 수 있다. 하나의 예로 가변칠교판의 종류에 따라 만들 수 있는 삼각형, 직사각형, 블록다각형의 개수가 다른 이유를 경우의 수를 이용하여 연역적으로 정당화할 수 있다. 또 본인이 교구 제작자라고 가정할 때 가변칠교판 중에서 어떤 모양을 대표적인 이미지로 제공할지, 왜 그렇게 생각하는지 토론해보는 의사결정 중심의 활동을 할 수도 있을 것이다.

### 3. 현장 적용 수업

#### 가. 1차 현장 적용 수업

1차 현장 적용 수업 자료는 문제해결학습모형으로 개발하였으며, 주요 활동 내용은 <표 7>과 같다. 다. 연구 대상자가 3명으로 모든 활동은 개인별 활동으로 이루어졌고 총 3차시로 구성하였다. 총 3차시지만 활동의 진행에 따라 활동 1, 활동 2, 활동 3의 활동 시간을 달리하였다. 활동 1은 0.5시수(20분)에 걸쳐 진행되었고 과제를 설명하고 칠교판 조각의 성질을 탐구하는 활동을 했다. 활동 2는 1시수(40분)에 걸쳐 진행되고 가변칠교판으로 크기가 다른 모든 삼각형의 개수를 만들어보고 분류하며 모든 삼각형을 찾았다는 것을 정당화하는 활동으로 구성하였다. 활동 3은 1.5시수(60분)로 진행되고 가변칠교판으로 크기가 다른 모든 직사각형의 개수를 찾고 분류하며 모든 직사각형을 찾았다는 것을 정당화하는 활동으로 구성하였다.

<표 7> 1차 현장 적용 수업 활동 내용

활동	주제	단계명	활동 내용	시간
활동1	가변칠교판 조각의 특징 알기	문제의 이해	탐구1-1. 가변칠교판 게임하기 탐구1-2. 전통칠교판과 가변칠교판 비교하기 탐구1-3. 가변칠교판 조각의 특징 알기	0.5 차시 (20분)
		계획의 수립	탐구1-4. 가변칠교판으로 만들 수 있는 삼각형 모양 알기	
활동2	가변칠교판으로 모든 삼각형 만들기	계획의 실행	탐구2-1. 가변칠교판으로 크기 다른 삼각형 만들기	1차시 (40분)
		반성	탐구2-2. 만든 삼각형 분류하기 탐구2-3. 모든 삼각형을 다 찾았을까?(정당화)	
활동3	가변칠교판으로 모든 직사각형 만들기	계획의 실행	탐구3-1. 가변칠교판으로 직사각형 만들기	1.5 차시 (60분)
		반성	탐구3-2. 만든 직사각형 분류하기 탐구3-3. 모든 직사각형을 다 찾았을까?(정당화)	

#### 나. 2차 현장 적용 수업

1차 수업 결과 분석을 토대로 개선한 2차 수업 자료는 <표 8>과 같다. 2차 수업 자료는 1차 현장 적용에서 발견되었던 문제점을 수정하고 불필요한 부분을 삭제하거나 활동지의 설명을 추가하였다. 1차 수업 자료와 달리 2차 수업 자료는 Dienes의 수학놀이학습모형으로 구성하였다. 1차 현장 결과 ‘기호화’ 단계의 중요성이 발견되었기 때문이다. 다만, Dienes의 수학놀이학습 6단계에서는 ‘자유놀이-규칙놀이-비교-기호화-표현-형식화’의 단계로 이루어졌다면 2차 현장 수업에서는 자유놀이 단계를 생략하고 기호화 단계를 표현 단계와 바꿔 ‘규칙놀이-비교-기호화-표현-형식화’로 적용하였다. 2차 수업에서는 학생

들이 1차 수업 때의 5명에서 15명으로 늘어남에 따라 모둠별 활동이 이루어졌다. 활동 중에는 학생들끼리 토의를 하거나 의견을 나누고 정당화 과정을 활발하게 이루어지도록 유도하였다. 2차 수업도 1차 수업과 동일하게 3차시로 활동을 계획하였다. 하지만, 적용한 수학놀이학습모형이 달라지고 활동의 추가, 삭제되는 부분이 있어 활동 1, 활동 2, 활동 3의 각각의 활동 시간은 달라졌다. 활동 1에서는 칠교판에 익숙하지 않은 학생들도 있어 가변칠교판을 충분히 파악하기 위해 다양한 짝 게임 활동을 통해 조각의 특징에 대한 이미지가 형성되도록 하였고, 활동 2와 활동 3은 각각 1시수(40분)씩에 걸쳐 가변칠교판으로 크기가 다른 삼각형과 직사각형의 모두 만들어보고 분류하면서 모두 찾았다는 것을 정당화하는 활동으로 구성하였다.

&lt;표 8&gt; 2차 수업 활동 내용

활동	주제	단계명	활동 내용	시간
활동 1	가변칠교판 조각의 특징 알기	규칙 놀이	탐구1-1. 가변칠교판으로 볼록다각형 만들기 짝 게임하기 탐구1-2. 조각의 특징 탐색	1차시 (40분)
활동 2	가변칠교판으로 모든 삼각형 만들기	비교	탐구1-2. 가변칠교판과 전통칠교판 비교하기 탐구1-3. 가변칠교판 알아보기	1차시 (40분)
		기호화	탐구1-4. 대각선의 길이 기호화하기	
		표현	탐구2-1. 가변칠교판으로 만들 수 있는 삼각형 모양 탐구	
			탐구2-2. 가변칠교판으로 모든 크기의 삼각형 만들기	
형식화	탐구2-3. 만든 삼각형 분류하여 그리기 탐구2-4. 모든 크기의 삼각형을 찾았다는 정당화하기			
활동 3	가변칠교판으로 모든 직사각형 만들기	표현	탐구3-1. 가변칠교판으로 모든 크기의 직사각형 만들기 탐구3-2. 만든 직사각형 분류하여 그리기	1차시 (40분)
		형식화	탐구3-3. 모든 크기의 직사각형을 찾았다는 정당화하기	

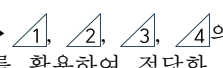

#### IV. 현장 적용 및 결과 분석

##### 1. 1차 현장 적용 수업 결과

1차 현장 적용 수업 결과 드러난 문제점 및 개선점을 정리한 내용은 <표 9>와 같다.

1차 수업에서 가장 큰 문제점은 기호와 관련한 문제였다. 학생들이 활동 2와 활동 3에서 삼각형, 직사각형의 넓이가 자연수가 되고 넓이는 1~8까지 가능하다는 전체적인 구조를 알면서도 글이나 말로 설명이 어려워했다. 특히 변의 길이가 무리수일 경우에는 전혀 설명을 하지 못했다. 기호를 활용하지 못하고 있기 때문이다. 이는 2가지 경우로 분석할 수 있는데 첫째, 기호에 문제가 있고, 둘째, 기호에 대한 탐구가 부족했기 때문이다. 우선,  $\triangle_1$ ,  $\triangle_2$ ,  $\triangle_3$ ,  $\triangle_4$ 라는 기호를 전문가 집단에서 살펴봤을 때 문제점이 발생했다. 본 연구에서 사용한 기호는 ‘ $\triangle_1 \times \triangle_1 = 2$ ,  $\triangle_2 \times \triangle_1 = 4$ ,  $\triangle_3 \times \triangle_1 = 6$ ,  $\triangle_4 \times \triangle_1 = 8$ ,  $\triangle_2 \times \triangle_2 = 8$ ’의 수식이 성립한다. 이는 ‘ $1 \times 1 = 1$ ,  $2 \times 1 = 2$ ,  $3 \times 1 = 3$ ,  $4 \times 1 = 4$ ,  $2 \times 2 = 4$ ’의 식으로 인식할 수 있기 때문에 학생들이 수식을 이해하기 어렵고, 헷갈려할 수 있다. 따라서 다른 기호로의 변환이 필요했다. 전문가 집단의 의견을 종합해서  $\sqrt{2}$ 를 ‘ $\text{ㄷ}$ ’,  $2\sqrt{2}$ 를 ‘ $\text{ㄷ} \times 2$ ’,  $3\sqrt{2}$ 를

<표 9> 1차 현장 적용에서 드러난 문제점 및 개선점

활동	단계	문제점	개선점
활동1	문제의 이해 <탐구 1-3>	▶가변칠교판 조각은 7조각인데 활동표에서 6칸만 있어 전체넓이를 구하는 데 있어 한눈에 파악하기 힘들.	▶칠교 조각 수만큼 활동표에서 조각 ①, ②칸을 따로 만들어 7칸으로 만들.
		▶활동지 중 ‘칠교조각을 회전해서 만들 수 있는 칠교판의 종류는 몇 가지인가?’ 질문이 활동에서 불필요하고 시간이 많이 소요됨.	▶질문 삭제.
활동2, 3	형식화 <탐구2-3, 탐구3-3>	▶  의 기호를 활용하여 정당화 과정을 설명하지 못함.	▶전문가 집단과 논의 후 기호에 문제가 있다는 결론을 내림. 기호  을 ‘ㄷ’으로 수정하고 기호에 대해 탐구하는 활동을 추가함.
종합		▶서로 찾은 삼각형, 직사각형을 발표하고 정당화 과정을 발표하는 시간이 부족함.	▶활동2,3의 시간을 늘려 충분히 의사소통할 수 있도록 조정함.
		▶문제해결학습모형으로는 ‘기호화’ 단계가 따로 없어 연구문제를 해결하는 데 어려움.	▶전문가 집단과 의논한 결과 본 프로그램에서 핵심 단계가 기호화 단계라는 결론을 내림. Dienes의 수학놀이학습 6단계 모형으로 교수·학습 자료를 수정함.

‘ $c \times 3$ ’,  $4\sqrt{2}$ 를 ‘ $c \times 4$ ’로 약속해서 2차 실험에서 적용하였다. 또 기호에 대한 탐구가 부족한 측면에서는 활동 1 가변칠교판의 특징 알기에서 조각들의 특징을 파악할 때 기호에 대한 탐구 활동을 추가로 넣도록 수정하였다. 2차 적용에서는 학생들이 스스로 기호화하고 ‘ㄷ’으로 약속한 후에 기호를 탐구하는 활동을 추가하였다.

1차 실험 결과 가변칠교판으로 만들 수 있는 직사각형을 모두 찾았다는 것을 정당화하기 위해서는 반드시 ‘기호화’의 과정이 필요하다는 것을 알 수 있었다. Polya의 문제해결학습모형에서는 ‘기호화’, ‘정당화’의 과정이 강조되어 있지 않다. 따라서 2차 적용시 학습 모형을 Dienes의 수학놀이학습모형으로 변형을 해서 기호화, 형식화를 강조한 프로그램으로 재구성하였다.

2. 2차 현장 적용 수업 결과

2차 현장 적용 수업 결과 드러난 문제점 및 개선점을 정리한 내용은 <표 10>과 같다.

&lt;표 10&gt; 2차 현장 적용 수업에서 드러난 문제점 및 개선점

활동	단계	문제점	개선점
활동 1	기호화 <탐구2-3, 탐구3-3>	▶ $\sqrt{2}$ 를 기호화하고 연습하는 활동 순서가 Dienes의 수학놀이학습의 단계에 맞지 않음.	▶ 스스로 기호화하여 정당할 수 있도록 활동 순서를 조정함.
	기호화 <탐구2-3, 탐구3-3>	▶ $\sqrt{2}$ 를 기호화하는 과정을 학생들이 생각할 시간을 주지 않고 과도하게 안내함.	▶ 스스로 정당화해보려는 자세를 지니도록 활동지에서는 기호화 활동 단계를 삭제함. 대신 기호화 때문에 정당화과정으로 나아가지 못하는 학생들을 위하여 보충용 활동지를 만들어 필요한 학생들에게 제시함.
활동 2, 3	표현 <탐구2-1, 탐구3-1>	▶ 삼각형 만들기, 직사각형 만들기 후 다른 사람과 만든 도형을 비교하는 활동이 필요함.	▶ 삼각형, 직사각형 만들기 게임 후 전체적으로 만든 도형을 공유하는 시간을 가짐.
		▶ 삼각형, 직사각형 찾기 활동에 흥미를 느끼지 못함. 또는 만드는 방법이 다르지만 크기와 모양이 같은 삼각형, 직사각형을 찾고 같은 크기와 모양이 같은 도형인지 알아차리지 못함.	▶ 게임 활동으로 바꿈.
	표현 <탐구2-2, 탐구3-2>	▶ ‘삼각형, 직사각형을 자신이 정한 기준으로 분류해 봅시다.’의 활동안내가 부족하여 분류, 정렬이 제대로 되지 않음.	▶ 활동 단계를 분류하기, 정렬하여 그리기 2단계로 수정함.
	형식화 <탐구2-3, 탐구3-3>	▶ ‘모든 삼각형, 직사각형을 찾았는가? 정당화해보아라.’의 발문이 2개의 질문을 포함하고 있음.	▶ ‘모든 삼각형, 직사각형을 찾았는가?’와 정당화하기 2개의 활동으로 활동을 나누고 순서를 조정함.
종합		▶ 수학 활동과 Dienes의 수학놀이학습 단계가 맞지 않는 부분이 있어 수업의 흐름이 어색함.	▶ 활동 단계를 조정함
		▶ 서로 찾은 직사각형을 발표하고 정당화 과정을 발표하는 시간이 부족함.	▶ 활동 1의 시간을 줄이고 활동 3의 시간을 늘려 충분히 의사소통할 수 있도록 조정함.

2차 현장 적용 수업에서 가장 큰 문제점도 역시 기호화 단계와 기호 제시 방법이었다. 탐구 1-4 기호화 단계에서 대부분의 학생들은 ‘ $\sqrt{2}$ ’을 기호화하고 탐구활동을 해결하는데 어려움이 없었다고 답하였다. 하지만 실제 활동 2와 활동 3 형식화 단계에서 ‘ $\sqrt{2}$ ’을 이용해서 정당화하는 학생들은 5명에 불과했다. 활동 1에 나온 기호화 과정이 학생들의 기호에 대한 이해에는 도움이 되나, 연구 목표에 맞게 순서를 변경할 필요성이 보였다. 또한 전문가 집단에서도 학생들이 영재학급 학생들임을 충분히 감안하면 활동 2, 활동 3을 해보기도 전에 기호화 활동 문제를 제공하는 것은 학생들이 자기주도적 탐구 기회를 빼앗는 것이라는 조언이 있었다. 학생들이 연구과제에 대한 고민 없이 활동 1에서 기호화 활동 문제를 해결하고 활동 2, 활동 3에서 정당화하려고 하니 먼저 해결한 기호화 활동 문제를 활용하지도 못했던 것이다. 따라서 최종 교수·학습 자료는 Dienes의 수학놀이학습 단계 중 자유놀이는 생략하고 ‘규칙놀이-비교(공통성 탐구)-표현(표상)-기호화-형식화’ 단계로 구성하였고 기호의 탐구 활동은 활동 2, 활동 3의 정당화하는 부분에서 기호화에 어려움을 겪는 학생들에게 교사가 제시할 수 있도록 보충학습지 형태로 수정하였다.

3. 최종 교수·학습 자료

두 차례의 현장 적용 수업을 통해 개선한 최종 교수·학습 자료의 활동 내용은 <표 11>과 같다. 이 자료는 Dienes의 수학놀이학습모형에 기반하여 자료를 개발하였다. 활동 1은 0.5시수(20분)에 걸쳐 진행되고 칠교판 조각의 성질을 탐구하는 활동이다. 활동 2는 1시수(40분)에 걸쳐 진행되고 가변칠교판으로 크기가 다른 모든 삼각형의 개수를 만들어보고 분류하며 모든 삼각형을 찾았다는 것을 정당화하는 활동으로 구성하였다. 활동 3은 1.5시수(60분)로 진행되고 가변칠교판으로 크기가 다른 모든 직사각형의 개수를 찾고 분류하며 모든 직사각형을 찾았다는 것을 정당화하는 활동으로 구성하였다(교사용 자료와 학습지는 강민정(2020)을 참조 바람).

<표 11> 최종 교수·학습 자료 활동 내용

프로그램명		가변칠교판으로 다각형 만들기		대상 (프로그램 수준)	초등학교 (○) 중학교 ( ) 도시지역 (○) 읍면지역 ( ) 영재교육원용 ( ) 영재학급용 (○)	
원 자료명 (출처)	내가 만드는 새로운 도형 퍼즐 ( <a href="https://ged.kedi.re.kr">https://ged.kedi.re.kr</a> 영재교육종합데이터베이스)				총시수 (분)	3시수 ( 120분 )
핵심 주제어	가변칠교판, 다각형의 구성 요소, 대칭, 등적 변형					
배경	주개념 (영역)	다각형과 다각형의 넓이 (평면도형과 측정)		관련 (후속) 주제/내용	삼각형 칠교판 (스핑크스퍼즐)	
	부개념 (영역)	평면도형 조각퍼즐 (게임/퍼즐)		타교과 및 생활소재	생활 속 칠교판 디자인	
학습 목표	내용면	1. 가변칠교판을 조작하여 원하는 도형으로 만들 수 있다. 2. 가변칠교판 조각들의 평면도형의 이름과 성질(각도, 변의 길이, 넓이, 대칭 등)을 이해할 수 있다. 3. 가변칠교판으로 만들 수 있는 모든 종류의 삼각형과 직사각형이 몇 개인지 탐구할 수 있다.				
	역량면	1. 가변칠교판으로 만들 수 있는 다양한 삼각형, 직사각형을 기준에 따라 분류할 수 있다.(기준에 따른 분류) 2. 단위넓이의 대각선의 길이를 기호로 약속하고 활용할 수 있다.(기호화) 3. 가변칠교판으로 모든 크기의 삼각형 찾기 활동에서 유추하여 모든 직사각형 찾기 활동 문제를 해결할 수 있었다.(추론, 문제해결) 4. 빠트리거나 중복되지 않게 모든 삼각형과 직사각형을 찾았다는 이유를 설명할 수 있다.(의사소통, 정당화)				
자료/준비물	교사용	(여분의) 학습지와 가변칠교판, 실물화상기				
	학생용	학습지, 가변칠교판,				
활동	주제	단계	학생들에게 제시할 중심적인 문제(질문) 또는 안내(과제)	주요 핵심 역량	하위 요소	시수 (분)
활동 1	가변 칠교판 조각의 특징 알기 (기본)	규칙 놀이	<b>탐구 1-1. 가변칠교판과 놀이</b> ▶(게임1) 조각을 담은 케이스를 쏟아 부었다가 다시 케이스에 빨리 집어넣기 게임(2회 먼저 성공)을 해 봅시다. ▶(게임1) 두 사람이 번갈아 가며 변의 길이를 맞춘 블록다각형 만들기 게임을 해 봅시다.(더 이상 조각을 놓지 못하는 사람이 지며, 이긴 사람은 그 조각의 개수만큼 득점함. 3판 후 고득점자가 승리함)	의사소통 및 협업능력	표현 및 변환	0.5 (20)
		비교	<b>탐구 1-2. 가변칠교판과 전통칠교판 비교하기</b> ▶기존의 칠교판과 어떤 점이 같고 어떤 점이 다른지 말해봅시다. 탐구 1-3. 가변칠교판 알아보기 ▶가변칠교판 조각들의 특징을 알아봅시다. 각 조각의 이름, 각도, 변의 길이, 넓이, 회전했을 때의 조각의 모양을 알아봅시다. (대각선의 길이 $\sqrt{2}$ 는 중학교 교육과정이므로 ‘c’ 로 약속한다.)	정보처리 및 도구 활용 능력	정보처리	
활동	가변	규칙 놀이	<b>탐구 2-1. 가변칠교판으로 모든 크기의 삼각형 만들기 게임</b>		논리적	1

활동 2 칠교판으로 만들 수 있는 삼각형 찾기 (발전)	이	▶가변칠교판 조각을 1조각부터 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 모든 크기의 삼각형을 그려 봅시다. 정해진 시간에 가장 많은 크기의 삼각형을 만드는 모둠이 승리하는 게임입니다.	고등추론 능력	절차 수행	(40)
	비교	<b>탐구 2-2-1. 가변칠교판으로 만들 수 있는 삼각형 모양 탐구</b> ▶칠교판의 일부 또는 전부를 사용하여 정삼각형/예각삼각형/둔각삼각형을 만들 수 있습니까? 그 이유는 무엇입니까? ▶칠교판으로 만들 수 있는 삼각형은 어떤 삼각형입니까?	고등추론 능력	논리적 절차 수행	
	표현	<b>탐구 2-2-2. 만든 삼각형 정렬하여 그리기</b> ▶다른 크기의 삼각형이 정말 없는지 알아보기 위하여 찾은 삼각형을 몇 가지로 분류하여 봅시다. <탐구 2-1>에 그린 그림에 표시하여 보세요. ▶어떤 기준으로 분류하였습니까? ▶분류한 삼각형들을 크기 순으로 정렬하여 모눈에 그려 봅시다.	의사소통 및 협업능력	협업	
	기호화	<b>탐구 2-3. 정당화하기 위해 빗변의 길이 기호화하기(보충)</b> ▶기호 'c' 을 이용하여 다음 도형의 넓이를 구하여 봅시다. (보충 단계가 필요한 학생에게만 투입함)	의사소통 및 협업능력	표현 및 변환	
	형식화	<b>탐구 2-4. 모든 크기의 삼각형을 찾았다는 정당화하기</b> ▶가변칠교판 조각을 1조각부터 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 모든 크기의 삼각형은 모두 몇 가지입니까? ▶빠트리지 않고 가변칠교판으로 만들 수 있는 모든 크기의 삼각형을 찾았다는 것을 어떻게 알 수 있습니까? 수학적으로 설명해 봅시다.	고등추론 능력 태도와 실천의지	정당화 수학적 사고 태도	
활동 3 가변 칠교판으로 만들 수 있는 직사각형 찾기 (발전)	규칙 놀이 및 비교	<b>탐구 3-1. 가변칠교판으로 모든 크기의 직사각형 만들기 게임</b> ▶가변칠교판 조각을 1조각부터 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 모든 크기의 직사각형을 그려 봅시다. 정해진 시간에 가장 많은 크기의 삼각형을 만드는 모둠이 승리하는 게임입니다.	고등추론 능력	논리적 절차 수행	1.5 (60)
	표현	<b>탐구 3-2. 만든 직사각형 정렬하여 그리기</b> ▶다른 크기의 직사각형이 정말 없는지 알아보기 위하여 찾은 직사각형을 몇 가지로 분류하여 봅시다. <탐구 3-1>에 그린 그림에 표시하여 보세요. ▶어떤 기준으로 분류하였습니까? ▶분류한 직사각형들을 크기순으로 정렬하여 모눈에 그려 봅시다.	의사소통 및 협업능력	협업	
	기호화	<b>탐구 3-3. 정당화하기 위해 빗변의 길이 기호화하기(보충)</b> ▶대각선을 나타낼 수 있는 기호(예, c)를 이용하여 직사각형의 넓이를 구하여 봅시다. (보충 단계가 필요한 학생에게만 투입함)	의사소통 및 협업능력	표현 및 변환	
	형식화	<b>탐구 3-4. 모든 크기의 직사각형을 찾았다는 정당화하기</b> ▶가변칠교판 조각을 1조각부터 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 모든 크기의 직사각형은 모두 몇 가지입니까? ▶빠트리지 않고 가변칠교판으로 만들 수 있는 모든 크기의 직사각형을 찾았다는 것을 어떻게 알 수 있습니까? 수학적으로 설명해 봅시다.	고등추론 능력 태도와 실천의지	정당화 수학적 사고 태도	

이상의 활동을 구현하기 위한 최종 교수·학습 자료(교사용)를 6가지의 분석 기준(합목적성, 수준의 적합성, 수학적 의미, 계열성, 자기 주도적 탐구, 재구성의 편의성 요소)에 따라 검토한 결과는 <표 12>와 같다(강민정, 2020).

<표 12> 최종 교수·학습 자료의 분석

구분	분석 기준	분석 내용
1	합목적성	활동 1의 과정을 거쳐 불필요한 활동을 삭제하여 본 활동의 학습 목표에 맞는 활동들로만 한정하여 구성되어 있음.
2	수준의 적합성	정규교육과정과의 연계를 위해서는 5-2학기 이상의 학생들에게 적용하기 적합한 내용임. 가변칠교판이라는 소재 또한 학생들의 흥미를 불러일으키고 게임의 요소를 적절하게 사용하여 학생들이 모든 삼각형과 직사각형을 찾고자 하는 도전 의식을 불러일으킴.
3	수학적 의미	다각형, 길이와 넓이, 합동과 대칭, 등적변형 등의 수학적 내용 요소가 풍부함. 다만, 엄밀한 정당화에 대한 어려움을 느낄 수는 있으므로 학생들이 정당화 과정을 충

구분	분석 기준	분석 내용
		분히 경험할 수 있도록 수학적으로 의사소통하는 시간을 충분히 제공할 필요가 있음.
4	계열성	이전의 활동이 다음의 활동과 연계되고 심화되도록 수업을 구성하였음. 기호화 보충학습지 투입 시점을 잘 판단하여 제공하여야 하고 때에 따라 활동 2, 활동 3의 두 차례에 걸쳐 제공하는 경우도 고려해야 함.
5	자기 주도적 탐구	자기주도적으로 해결할 수 있도록 활동이 구성되어 있음. 기호화 단계에서 처음부터 교사가 개입하지 않고 스스로 탐구할 시간을 주어야 함. 정당화 과정이 때론 교사에게도 어려운 과정이므로 각 단계마다 적절한 안내가 제공되어야 함.
6	재구성 편의성	교사용 자료로 개발하여 수준에 따른 지도 시 내용의 가감이 가능하고 다각형 등 영역을 확장하여 수업에 적용할 수 있도록 재구성이 용이함.

#### 4. 연구 결과

초등학교 영재학급에서 활용할 수 있는 소재로서의 가변칠교판을 발굴하였고, 이를 이용한 교수·학습 자료를 개발하여 현장 적용한 결과는 다음과 같다.

첫째, 가변칠교판은 전통칠교판에 익숙했던 초등학교 영재학급 학생들에게 확장 가능성 및 수학적 의사소통이라는 방법적 측면과 다각형의 변의 길이와 넓이, 대칭성 등의 성질 이해에 유용한 소재임을 확인하였다.

둘째, 문자와  $\sqrt{2}$ 라는 기호에 익숙하지 않은 초등학교 영재학급 학생들은 가변칠교판을 활용한 다각형 탐구에서 변의 길이에 대한 정당화 활동에 어려움을 겪었으나 기호화 단계를 거쳐 그 어려움을 일부 해소할 수 있었다. 모든 크기의 삼각형, 직사각형 찾기 활동은 Dienes의 수학놀이학습 6단계 모형의 기호화 단계를 거칠 때 학습 목표에 도달하고 수학적 추론(정당화)에 필요한 수학적 의사소통이 가능해짐을 확인하였다.

### V. 요약 및 결론

본 연구는 초등학교 영재학급용 교수·학습 자료 개발을 위해 전통칠교판을 개선한 가변칠교판이라는 소재를 발굴을 목적으로 한다. 이를 위해 “가변칠교판을 이용하여 만들 수 있는 모든 삼각형과 직사각형 찾아 설명하기”라는 탐구 과제를 설정하였다. 국가영재교육프로그램 기준에 따라 영재교육진흥법에 의거 개설된 제주지역 구도심권 소재 영재학급 학생 3명을 대상으로한 모둠 학습 형식의 1차 현장 적용과 교육 환경이 비슷한 인근 학교의 영재학급 1개반(학생 15명)을 대상으로 한 2차 현장 적용을 통해 영재 교수·학습 자료로서의 적절성 검토를 위한 분석 기준에 따라 수업 자료를 분석하였다. 그 결과 다음의 두 가지 결론을 얻었다.

첫째, 가변칠교판을 이용한 활동(모든 삼각형과 직사각형을 찾아 설명하기)은 3차시(120분) 분량의 초등학교 영재학급용 탐구과제형 교수·학습 자료의 소재로 활용이 가능하다.

전통칠교판과 달리 가변칠교판은 회전축을 중심으로 각 조각들을 회전하여 다른 모양을 만들 수도 있어서 실루엣퍼즐이든 다각형퍼즐이든 보다 쉽게 맞출 수 있다. 학생들 중 일부는 몇 차례의 구체적 조작 활동 후에는 손 조작 교구가 없이 머릿속 생각만으로도 도형의 해법을 만들 수 있는 도형을 먼저 추리하고 그것을 구체물로 구현하는 모습을 보였다. 가변칠교판은 전통칠교판보다 다양한 방법으로 동일한 도형을 만들 수 있다. 그 활동 속

에는 도형의 대칭, 회전, 합동 등의 다양한 수학적 사고가 이루어진다. 학생들은 전통칠교판에 비해서 다양하게 조작하면서 수학적으로 다양하게 사고할 수 있었기에 쉽다고 느낀다. 본 프로그램은 등적변형하면서 다양한 다각형(특히, 모든 삼각형과 직사각형)을 만들어 기정당화하기, 이미 알고 있는 것으로부터 유추하기, 기호화를 통한 수학적 의사소통하기 등을 목표로 하는 교수·학습 자료로 활용이 가능함을 확인하였다.

둘째, 선행학습을 하지 않은 초등학교급 단위학교 영재학급 수준에서 형식화 단계의 경험을 위해 어느 정도의 수학적 추론(정당화)과 수학적 의사소통이 가능하도록 하려면 그에 앞선 기호화 단계가 필요하고 문자와 기호에 대한 탐구 과정을 담은 보충 학습 자료의 제공이 필요하다.

형식화 단계에서의 수학적 정당화(증명)라는 사고 행위는 수학에서는 매우 중요하지만 성인에게도 쉽지 않은 사고 활동이다. 따라서 처음에는 가변칠교판을 손으로 조작하고 찾은 도형을 분류하는 등의 계획한 활동을 거쳐 학생들이 점차적으로 추상화, 형식화의 사고를 해 나가도록 안내할 필요가 있다. 본 연구를 위해 적용해본 수업 모형은 ‘기호화’ 단계가 들어있는 Dienes의 수학놀이학습 6단계 모형이다. 초등학교 영재학급이라도 선행학습을 하지 않은 학생들은  $\sqrt{2}$ 를 들어보기는 했어도 그 값과 의미(정사각형에서 한 변의 길이에 대한 대각선의 길이 비)를 제대로 알지 못한다. 그러나 이 수치를 대신할 적절한 기호를 사용함으로써 ‘가변칠교판을 활용한 크기가 다른 모든 삼각형과 직사각형 찾기’ 과제를 해결하고 정당화(설명)할 수 있었다. 기호는 학생들이 그 기호의 필요성을 느낄 때 제공하여야 한다. 두 차례의 수업을 통해 기호의 필요성을 느끼지 못한 채 기호를 탐구하면 주어진 문제는 형식적으로 일부 해결할 수 있지만 정당화 과정에서 기호를 제대로 활용할 수 없음을 확인하였다. 정당화 과정에서 기호의 필요성을 느낄 때 보충자료의 형태로 기호에 대한 약속 및 탐구 활동이 이루어졌다.

본 연구를 통해 아직 검증하지는 못한 후속연구를 위한 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 영재학급에서 가변칠교판을 이용한 교수·학습 자료를 활용할 경우 활동을 재구성하거나 가감하여 활용할 수 있다. 본 연구는 국가수준 영재교육 프로그램 기준에서 제안하는 기본 수준과 발전 수준에 해당하는 활동만 개발하였으나 추상적, 형식적인 수준의 깊이 있는 수학적 활동을 추가하여 확장 수준까지 범위를 확대한 단위프로그램을 개발할 수도 있을 것으로 기대한다. 유재근, 박문환(2019b)이 제안한 개방형 과제는 영재교육에서 이미 많이 사용하고 있는 방법이지만 특히 유재근, 박문환(2019a)의 변이 이론에 따른 여러 조각들의 변의 길이와 넓이 사이의 관계를 이용하면 수학적 정당화가 용이해 질 수도 있다.

둘째, 가변칠교판과 관련한 보다 다양한 <주제 탐구형> 수업 아이디어와 더불어 영재들의 핵심 역량을 신장시킬 수 있는 <역량중심형> 프로그램의 개발도 가능할 것으로 기대한다. 가변칠교판은 전통칠교판보다 다양한 경우의 수까지 고려해야 한다는 점에서 난도가 높다. 수업 시수의 제한으로 현장 적용을 생략하거나 축소했지만 가변칠교판 조각으로 만들 수 있는 모든 경우의 수(9종)를 직접 탐구한다거나 그 9가지 유형 중에서 어떤 유형으로 이루어진 가변칠교판이 삼각형, 직사각형, 블록다각형을 가장 많이 만들 수 있는지의 증명(수학적 정당화)을 통해 고등수학적 추론능력, 해법에서 내부 선부의 수 가장 적은 깔끔한 해법은 무엇인지를 통해 수학적 태도 및 실천의지력, 어떤 유형의 가변칠교판을 대표적인 이미지로 할지를 모둠 토론을 거쳐 학급 토론으로 결정하는 의사소통능력 등에도 활용할 수 있을 것이며 가변성을 정사각형 칠교판뿐 아니라 정삼각형 칠교판(스핑크스퍼즐)에 적용하여 새로운 교구를 개발하는 창의적 문제해결력의 신장을 기대한다.



## 참 고 문 헌

- 강민정 (2020). **가변칠교판을 이용한 초등학교 영재학급용 교수·학습자료 개발**. 석사학위 논문. 경인교육대학교 .
- 김남희 (2000). 탱그램 활용을 통한 수학적 사고의 구체화. **학교수학**, 2(2), 563-587.
- 김수미 (2008). Zoltan Dienes의 수학학습 6단계 이론의 재음미. **학교수학**, 10(3), 339-355.
- 박교식 (2004). **탱그램 다시 보기**. 수학사랑.
- 박교식 (2007). 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 탐색. **수학교육학연구**, 17(3), 221-232.
- 방신영, 송상현 (2013). 스펅크스퍼즐로 모든 삼각형 해법 찾기 과제에서 나타나는 학생들의 수학적 사고 특성 분석. **한국초등수학교육학회지**, 17(1), 165-184.
- 송상현 (2008). 수학과 교육과정에 비추어 본 탱그램과 유사탱그램의 재조명. **수학교육학연구**, 18(3), 391-405.
- 송상현, 김지원, 최종현, 조영득 (2020). **2019 역량중심 영재교육 프로그램 개발. 중등수학 조화와 균형 <기하+조합>**. 역량중심프로그램개발 2년차 인천교육-2019-0149. 인천광역시 교육청.
- 송상현, 박은정, 허지연, 최종현, 고준석 (2020). **2019 역량중심 영재교육 프로그램 개발. 초등수학 조화와 균형 <기하+조합>**. 역량중심프로그램개발 2년차 인천교육-2019-0148. 인천광역시 교육청.
- 심상길, 조정길 (2008). 칠교판의 기하학적 특징을 이용한 교육자료 개발에 대한 연구. **한국수학사학회지**, 21(4), 169-182.
- 유재근, 박문환 (2019a). 중학교에서 변이 이론을 적용한 탱그램 활용 방안 탐색. **수학교육학연구**, 29(1), 189-208.
- 유재근, 박문환 (2019b). 초등 수학에서 탐구를 위한 탱그램 과제 변형. **초등수학교육**, 22(1), 95-111.
- 이경화 (2001). 수업아이디어: 다각형의 둘레와 넓이에 관한 수업 아이디어. **학교수학**, 3(2), 423-445.
- 이희현 외 6인 (2017). **국가 영재교육 프로그램 기준 : 초·중학교 수학**. 한국교육개발원.
- 한송이 (2015) **스핑크스퍼즐을 활용한 초등 수학 영재 교수·학습 자료 개발 연구**. 석사학위 논문. 경인교육대학교 .
- 황지남 (2015). 초등수학영재의 수학적 정당화를 위한 칠교판 활용방안 연구. **한국초등수학교육학회지**, 19(4), 589-608.
- Zoltan Dienes' six-stage theory of learning mathematics . (2020).  
[https://www.zoltandienes.com/academic-articles/zoltan-dienes-six-stage-theory-of-learning-mathematics/\(2020.02.14 인출\)](https://www.zoltandienes.com/academic-articles/zoltan-dienes-six-stage-theory-of-learning-mathematics/(2020.02.14%20인출))

<Abstract>

Discovery of Materials Using Rotatable Tangram to Develop Teaching and Learning Materials for the Gifted Class

Kang, Min Jung<sup>4)</sup>; & Song, Sang Hun<sup>5)</sup>

The purpose of this study is to find new material for developing teaching and learning materials for the gifted class of elementary school students by using the rotatable tangram made by modifying the traditional tangram. Rotatable tangram can be justified by gifted students through mathematical communication. However, even gifted class students have some limitations in finding and justifying triangles and rectangles of all sizes unless they go through the 'symbolization' stage at the elementary school level. Therefore, students who need an inquiry process for letters and symbols need to provide supplementary learning materials and additional questions. It is expected that the material of rotatable tangram for the development of teaching and learning materials for elementary school gifted students will contribute to the development of mathematical reasoning and mathematical communication ability.

Key words: rotatable tangram, justification, teaching and learning materials for gifted students, symbolization

논문접수: 2020. 01. 16

논문심사: 2020. 02. 05

게재확정: 2020. 02. 07

---

4) pongnang84@hanmail.net

5) shsong@ginue.ac.kr