Journal for History of Mathematics
Vol. 33 No. 3 (Jun. 2020), 155–165
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2020.33.3.155

Pythagorean Theorem III : From the perspective of equiangular quadrilaterals

피타고라스의 정리 III : 등각사각형의 관점에서

Jo Kyeonghee 조경희

Pythagorean theorem is a proposition on the relationship between the lengths of three sides of a right triangle. It is well known that Pythagorean theorem for Euclidean geometry deforms into an interesting form in non-Euclidean geometry. In this paper, we investigate a new perspective that replaces right triangles with 'proper triangles' so that Pythagorean theorem extends to non-Euclidean geometries without any modification. This is seen from the perspective that a rectangle is an equiangular quadrilateral, and a right triangle is a half of a rectangle. Surprisingly, a proper triangle (defined by Paolo Maraner), which is a half of an equiangular quadrilateral, satisfies Pythagorean theorem in many geometries, including hyperbolic geometry and spherical geometry.

Keywords: Rectangle, Equiangular Quadrilateral, Right triangle, Proper triangle, Pythagorean theorem; 직사각형, 등각사각형, 직각삼각형, 반각삼각형, 피타고라스의 정리.

MSC: 52A01, 52A55

1 서론

비-유클리드 기하로의 '피타고라스의 정리'에 대한 일반화 연구는 오랜 역사를 가지고 있다. 기존의 연구는 주로 해당 기하에서의 직각삼각형에 대하여 '피타고라스의 정리'의 결과가 어떻게 변형되는지 보는 것들이었다. (§2에서 간략하게 내용을 소개하였다.)

그런데 최근 Paolo Maraner는 [6]에서 직각삼각형의 개념을 다른 방식으로 확장하여 피타고라스의 정리가 변형되지 않고 그대로 성립함을 구면기하와 쌍곡기하에서 증명하였다. 피타고라스의 정리를 훼손하지 않는다는 의미에서 매우 아름답고 자연스러운 것으로 보여지는 이 방향의 일반화에서는 직사각형을 등각사각형으로 대체하였다. 즉, 직각삼각형

Jo Kyeonghee: Division of Liberal Arts and Sciences, Mokpo National Maritime Univ.
E-mail: khjo@mmu.ac.kr

Received on Mar. 26, 2020, revised on Jun. 17, 2020, accepted on Jun. 23, 2020.

이 직사각형의 반이라는 점에 착안하여 비-유클리드 기하에서도 등각사각형의 반에 해당하는 삼각형을 반각삼각형(proper triangle)이라는 개념으로 확장하였다. 이러한 확장에 의하여 빗변의 개념이 보다 더 잘 정의되며[1)] 직각삼각형에 대한 유클리드 기하의 여러 성질들이 그대로 성립한다. 더군다나 일반적으로 비-유클리드 기하에서는 직사각형이 존재하지 않지만 등각사각형은 존재하는 경우가 많다. 구면기하와 쌍곡기하가 그러한 예이다.

이 논문에서는 직사각형을 일반화하는 개념으로서 등각사각형을 택함으로써 얻어지는 성질들을 분석하고, 특히 피타고라스의 정리의 여러 동치 명제 중의 하나가 많은 비-유클리드 기하에서 그대로 성립함을 살펴본다.

2 비-유클리드 기하에서의 피타고라스의 정리

유클리드 기하에서는 다음 피타고라스의 정리가 성립한다.

정리 2.1: *(Pythagorean theorem)* 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a, b이고 빗변의 길이가 c일때 $a^2 + b^2 = c^2$이 성립한다.

비-유클리드 기하에서는 대부분 이 정리가 성립하지 않는다.[2)] 이 절에서는 피타고라스의 정리가 비-유클리드 기하에서 어떻게 일반화되는지 살펴본다.

2.1 쌍곡기하에서의 피타고라스의 정리

비-유클리드 기하의 대표적인 예인 쌍곡기하에서의 피타고라스의 정리의 일반화는 잘 알려져 있으며 다음과 같다.

정리 2.2: *(The hyperbolic Pythagorean theorem)* 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a와 b이고 빗변의 길이가 c인 쌍곡기하의 임의의 직각삼각형에 대하여 다음이 성립한다.

$$\cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b)$$

Figure 1은 쌍곡평면의 직각삼각형을 보여준다. 왼쪽 그림은 포앵카레 원 모델에서 그린 것이고, 오른 쪽 그림은 상반평면 모델에서 그린 것이다.

2.2 구면기하에서의 피타고라스의 정리

구면기하는 쌍곡기하와 함께 비-유클리드 기하 중에서 가장 잘 알려진 기하이다. 이 기하의 직각삼각형들은 쌍곡기하의 직각삼각형과 매우 유사한 다음 정리를 만족시키는데, 유클리드 기하의 성질을 이용하면 어렵지 않게 증명된다.

1) 비-유클리드 기하의 직각삼각형에서는 빗변이 유일하게 정의되지 않는 경우가 많다. 두 개의 빗변을 가지거나 세 변 모두 빗변일 수도 있다. 예를 들어, 구면기하에서 세 각이 모두 직각인 삼각형이 존재한다.

2) 비-아르키메데스 기하 중에는 피타고라스의 정리가 성립하는 비-유클리드 기하가 존재한다.([4] 참조)

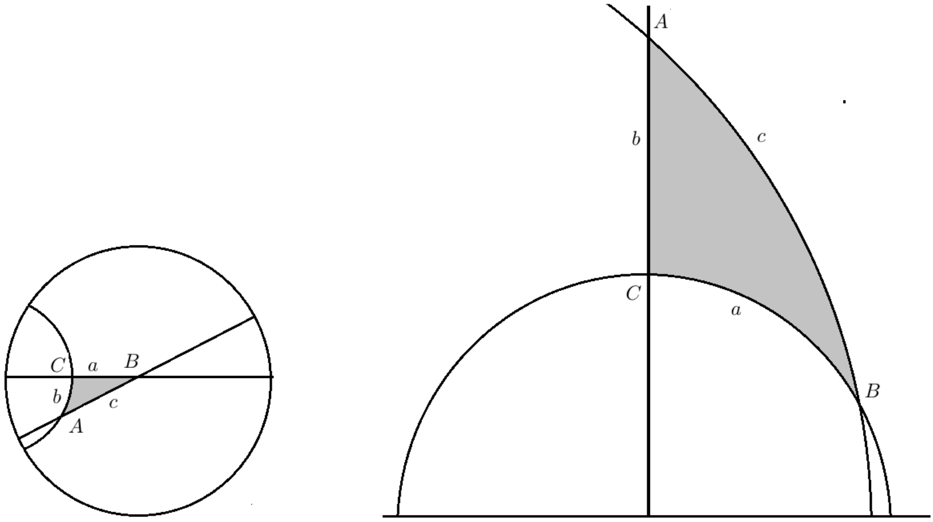


Figure 1. A right triangle in hyperbolic geometry; 쌍곡기하의 직각삼각형

정리 2.3: *(The spherical Pythagorean theorem)* 반지름이 R인 구면 위의 직각삼각형 ΔABC의 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a와 b이고 빗변의 길이가 c일 때, 다음이 성립한다.

$$\cos(c/R) = \cos(a/R)\cos(b/R)$$

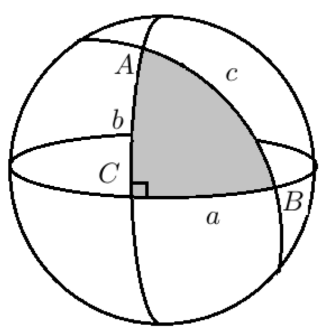


Figure 2. A right triangle in spherical geometry; 구면기하의 직각삼각형

2.3 택시 기하에서의 피타고라스의 정리

비-유클리드 기하의 또 다른 예로 택시 기하가 있다. 택시 기하의 점과 선분, 그리고 각은, 실수 위에서 정의된 좌표기하, 즉 유클리드 기하와 동일하다. 그러나 두 점 $A = (a_1, a_2)$와 $B = (b_1, b_2)$ 사이의 거리가

$$\mathrm{d}_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

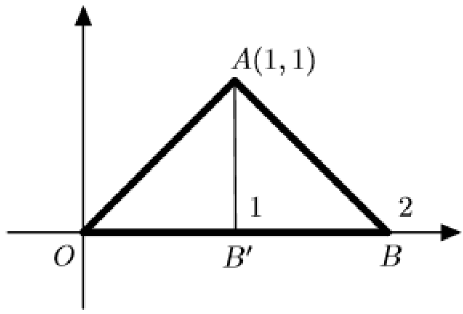


Figure 3. A right triangle in taxicab geometry; 택시 기하의 직각삼각형

로 정의되어 있다.

택시 기하의 각이 유클리드 평면기하의 각과 같기 때문에 유클리드 직각삼각형은 택시 기하에서도 직각삼각형이다. 예를 들어, Figure 3의 삼각형은 유클리드 기하에서와 마찬가지로 택시기하에서도 직각삼각형이다. 그런데 택시 기하에서의 변의 길이를 살펴보면, 빗변 OB의 길이와 나머지 두 변 OA와 AB의 길이가 모두 2이다. 즉, 삼각형 ΔOAB는 택시 기하에서 직각삼각형이자 정삼각형이다. 그러므로 당연히 피타고라스의 정리가 성립하지 않는다.

[3]에서 살펴본 바 있듯이 택시 기하에서는 직각삼각형에 대하여 다음이 성립한다.

정리 2.4: *(Kaya-Colakoglu [5])* 택시 기하에서 각 $\angle A$가 직각인 삼각형 ΔABC의 빗변의 길이가 a이고 나머지 두 변의 길이가 각각 b, c일 때 다음이 성립한다.

(i) 꼭지점 A를 지나 좌표축에 평행인 두 개의 직선이 모두 삼각형 ΔABC와 만날 때 $a = b + c$이다.

(ii) 꼭지점 A를 지나 좌표축에 평행인 두 개의 직선 중 하나만 삼각형 ΔABC와 만날 때 $a = b + c - 2\gamma$이다.

여기에서 γ는 꼭지점 B 또는 C에서 A를 지나 좌표축에 평행이고 삼각형 ΔABC를 만나는 직선에 내린 수선의 점을 H라고 할 때 선분 $\overline{AH}$의 길이이다.

3 등각사각형과 반각삼각형

쌍곡기하나 구면기하와 같은 비-유클리드 기하에는 직사각형이 존재하지 않는다. (준-유클리드(semi-Euclidean) 기하[3])에는 직사각형이 존재한다.) 직사각형은 네 각이 모두 직각이므

3) 임의의 삼각형의 내각의 합이 두 직각인 기하를 준-유클리드 기하(semi-Euclidean geometry)라고 한다.

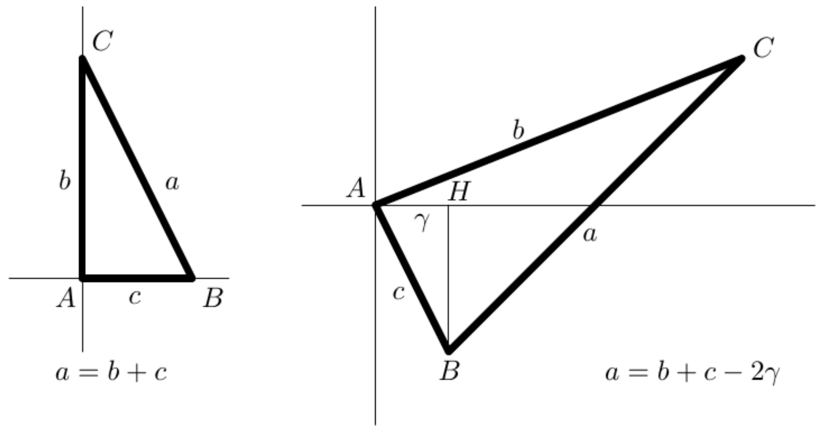


Figure 4. Taxicab version of Pythagorean theorem; 택시 기하에서의 피타고라스의 정리

로 등각사각형(equiangular quadrilateral)이다. 이러한 의미에서 등각사각형은 유클리드 기하에서의 직사각형을 포함하는 더 일반적인 개념이라고 생각할 수 있다. Paolo Maraner는 이 부분에 주목하여 직사각형과 직각삼각형을 등각사각형과 반각삼각형(proper triangle)으로 비-유클리드 기하에 확장하였다.

이 절에서는 2010년 Paolo Maraner가 [6]에서 처음으로 도입한 반각삼각형에 대하여 알아본다.

3.1 등각사각형 (Equiangular Quadrilaterals)

유클리드 기하에서 모든 등각사각형은 직사각형이다. 그렇지만 평행공리가 성립하지 않는 힐베르트 기하에서의 등각사각형의 내각은 직각 보다 작거나 클 수 있다. 쌍곡기하에서는 등각사각형의 내각의 크기는 직각보다 작지만, 등각사각형의 내각의 크기가 직각이거나 직각보다 큰 비-유클리드 힐베르트 기하도 존재한다. (아르키메데스 공리가 성립하는 힐베르트 기하에서의 등각사각형의 내각은 직각보다 작거나 같으며, 비-힐베르트 기하인 구면기하에서의 등각사각형의 내각은 항상 직각보다 크다.)

유클리드 기하에서 임의의 등각사각형, 즉 직사각형은 두 대각선의 교점을 중심으로 하는 원에 내접한다. 이 성질은 다음과 같이 모든 힐베르트 기하(중립 기하)로 확장된다.[4)]

정리 3.1: 힐베르트 기하의 등각사각형은 원에 내접한다.

4) 힐베르트는 그의 저서 '기하학의 기초' 에서 유클리드 기하를 구성하는 5개의 공리군을 제시하였는데, 그중 세 공리군, 결합공리군(incidence axioms), 순서공리군(betweenness axioms), 합동공리군(congruence axioms)을 모두 만족시키는 평면기하를 힐베르트 평면기하라 부른다. 힐베르트 평면기하가 평행공리를 긍정도 부정도 하지 않음을 강조하여 중립 기하라는 용어를 사용하기도 한다. (힐베르트 공리군은 [2] 또는 [1] 참조.)

Proof. Figure 5에서 각 OAB와 각 ABD가 같아지도록 O를 대각선분 BD에서 선택하면, 선분 OA, OB, OD가 합동임을 알 수 있다. 마찬가지 방법에 의하여 우리는 선분 OB와OD

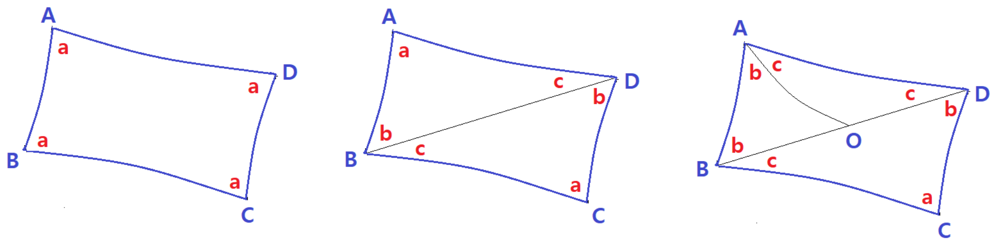


Figure 5. Equiangular Quadrilaterals; 등각사각형

가 OC와 합동임을 알 수 있으므로 네 꼭지점 A, B, C, D가 한 원 위에 있다. □

정리 3.1의 증명은 구면기하[5)]에서도 그대로 적용된다. 그 이유는 구면기하에서도 유클리드 명제 I.6 '두 각이 같은 삼각형은 이등변 삼각형이다' 가 성립하기 때문이다. 자세한 증명은 [6]에 있다.

정리 3.2: *(Paolo Maraner [6])* 구면기하의 등각사각형은 원에 내접한다.

3.2 반각삼각형 (Proper trangles)

직사각형을 대각선으로 나누면 두 개의 직각삼각형이 생긴다. 비-유클리드 기하에서 직사각형을 대체하는 개념인 등각사각형을 대각선을 따라서 나누면 마찬가지로 두 개의 삼각형을 얻을 수 있는데, 이 삼각형들은 직각삼각형과 비슷한 성질을 갖는다.

정리 3.3: 힐베르트 기하의 임의의 삼각형 $\triangle$에 대하여 다음 세 명제는 동치이다.

1. $\triangle$의 한 변을 지름으로 하는 원에 내접한다.
2. $\triangle$의 세 내각 중 하나는 내각의 합의 반이다.
3. $\triangle$은 등각사각형을 대각선으로 잘라서 만들어진 삼각형이다.

Proof. $3 \Rightarrow 1$과 $3 \Rightarrow 2$는 정리 3.1에서 바로 알 수 있으며, $2 \Rightarrow 1$도 비슷한 방법으로 증명된다. 그런데 임의의 힐베르트 평면에서 이등변 삼각형의 밑각이 합동이라는 사실로부터 $1 \Rightarrow 2$가 성립함을 알 수 있으므로(Figure 6 참조) 1,2,3은 모두 동치인 명제임이 증명된다. □

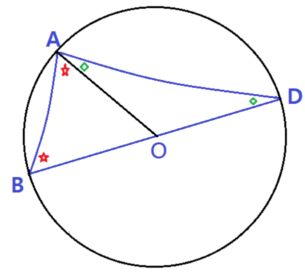


Figure 6. An inscribed triangle having a diameter as a side; 지름을 한 변으로 하는 내접 삼각형

Paolo Maraner는 [6]에서 위 정리를 구면기하에 대하여 증명하였고, 그러한 등각사각형의 반에 해당하는 삼각형을 다음과 같이 이름하였다.

정의 3.1: 삼각형 ABC의 세 내각 중 한 각 A의 크기가 내각의 합의 반과 같을 때, 삼각형 ABC는 **반각삼각형 *(proper triangle)***이라 하고 각 A는 삼각형 ABC의 **반각 *(proper angle)***이라 한다.

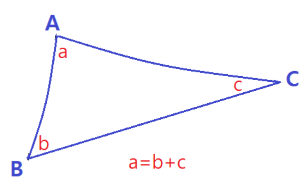


Figure 7. A proper triangle; 반각삼각형

정리 3.3으로부터 우리는 유클리드 평면의 직각삼각형을 반각삼각형으로 비-유클리드 기하에 확장할 수 있음을 알 수 있다. 일반적으로 유클리드 평면에서 성립하는 직각삼각형에 대한 여러 성질들이 비-유클리드 기하에서는 전혀 성립하지 않지만, 반각삼각형은 유클리드 평면의 직각삼각형이 가지고 있는 많은 성질들을 가지고 있으며, 다음과 같이 빗변이 잘(uniquely) 정의된다.

정의 3.2: 임의의 반각삼각형에서 반각을 갖는 꼭지점의 대변을 그 삼각형의 **빗변 *(hypotenuse)***이라 한다.

5) 구면기하는 힐베르트 공리를 만족시키지 못하므로 비-힐베르트 기하이다. 앞에서 소개한 택시기하도 비-힐베르트 기하이다.

4 반각삼각형과 피타고라스의 정리

일반적으로 비-유클리드 기하에서는 피타고라스의 정리가 성립하지 않음을 앞에서 보았다. 유클리드 기하에서 한 변의 길이의 제곱은 그 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같으므로, 피타고라스의 정리는 다음과 같이 표현된다.

> 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합은 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같다.

위 피타고라스의 정리는 정사각형을 원 또는 임의의 정다각형으로 바꾸더라도 유클리드 기하에서는 모두 동치인 명제가 된다.[6] 예를 들어 원으로 바꾸면 다음과 같다.

> 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변을 각각 (반)지름으로 하는 두 원의 넓이의 합은 빗변을 (반)지름으로 하는 원의 넓이와 같다.

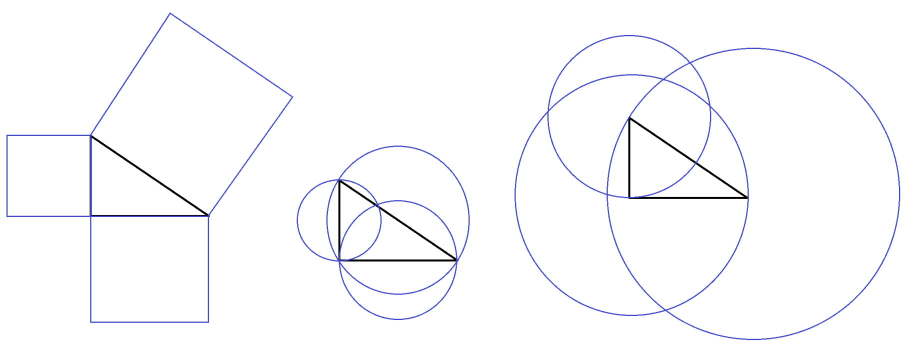


Figure 8. Pythagorean Theorem; 피타고라스의 정리

유클리드 기하에서 반각삼각형은 직각삼각형이므로 위의 명제에서 직각삼각형 대신 반각삼각형으로 바꾸어도 여전히 성립한다. 그렇다면 비-유클리드 기하에서는 어떠할까? Paolo Maraner는 [6]에서 구면기하와 쌍곡기하가 다음을 만족시킴을 증명하였다.

> (**피타고라스의 정리***) 임의의 반각삼각형에 대하여 반각을 낀 두 변을 각각 반지름으로 하는 두 원의 넓이의 합은 빗변을 반지름으로 하는 원의 넓이와 같다.

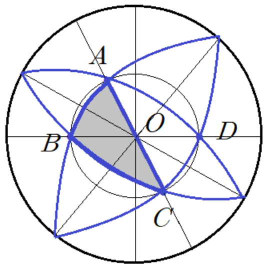
정리 4.1: *(Paolo Maraner [6])* 구면기하와 쌍곡기하에서는 피타고라스 정리*가 성립한다.

Proof. [7] 먼저 구면기하에서 증명하여 보자. Figure 9의 삼각형 ABC는 반지름이 R인 구면

6) 유클리드의 원론 제6권 명제31에 정사각형 대신 임의의 닮은 다각형으로 대체해도 여전히 피타고라스의 정리가 성립함이 증명되어 있다.

7) Paolo Maraner의 증명을 그대로 소개하였다.

위에 있는 반각삼각형을 나타낸다.(사각형 $ABCD$는 등각사각형이다.) 임의의 반각삼각형은 구면기하의 자기동형사상에 의하여 이러한 삼각형으로 보낼 수 있으므로 이 삼각형에 대하여 피타고라스의 정리*가 성립함을 보이면 충분하다. 간단한 계산에 의하여 우리는 다음을 알 수



$A(R,0,\phi)$
$B(R,\theta,\phi)$
$C(R,\pi,\phi)$
$D(R,\theta+\pi,\phi)$
$O(R,0,0)$

$0<\theta,\phi<\frac{\pi}{2}$

Figure 9. spherical proper trangle; 구면 반각삼각형

있다.

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=R\cos^{-1}(\cos^2\phi+\sin^2\phi\cos\theta)\\ \overline{BC}&=R\cos^{-1}(\cos^2\phi-\sin^2\phi\cos\theta)\\ \overline{AC}&=R\cos^{-1}(\cos^2\phi-\sin^2\phi)\end{aligned}\tag{1}$$

각 식에 모두 $1/R$을 곱하고 cos을 취하면

$$\begin{aligned}\cos(\overline{AB}/R)&=\cos^2\phi+\sin^2\phi\cos\theta\\ \cos(\overline{BC}/R)&=\cos^2\phi-\sin^2\phi\cos\theta\\ \cos(\overline{AC}/R)&=\cos^2\phi-\sin^2\phi\end{aligned}$$

이므로 다음을 얻는다.

$$2\pi R^2(1-\cos(\overline{AC}/R))=2\pi R^2(1-\cos(\overline{AB}/R))+2\pi R^2(1-\cos(\overline{BC}/R))$$

그런데 반지름이 r인 임의의 R-구면원의 면적은 $2\pi R^2(1-\cos(r/R))$이므로, 위 식의 왼쪽 항은 삼각형 ABC의 빗변 AC를 반지름으로 하는 원의 면적이고 오른쪽 항은 반각을 낀 두 변 AB와 BC를 반지름으로 하는 두 원의 면적의 합이다. 그러므로 구면기하에서 피타고라스 정리*가 성립함이 증명된다.

쌍곡평면을 $\mathbb{R}^{2,1}$의 $x^2+y^2-z^2=-R^2$으로 보고 쌍곡극좌표

$$P(\theta,\phi)=(R\sinh\phi\cos\theta, R\sinh\phi\sin\theta, R\cosh\phi)$$

를 사용하면 쌍곡기하에서도 피타고라스 정리*가 구면기하와 비슷하게 증명된다. 예를 들어, (1)은 다음과 같이 변형되며,

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=R\cosh^{-1}(\cos^2\phi-\sinh^2\phi\cos\theta)\\ \overline{BC}&=R\cosh^{-1}(\cos^2\phi+\sinh^2\phi\cos\theta)\\ \overline{AC}&=R\cosh^{-1}(\cos^2\phi+\sinh^2\phi)\end{aligned}$$

반지름이 r 인 임의의 쌍곡원의 면적은 $2\pi R^2(\cosh(r/R) - 1)$ 이므로, 삼각형 ABC 의 빗변 AC 를 반지름으로 하는 원의 면적이 반각을 낀 두 변 AB 와 BC 를 반지름으로 하는 두 원의 면적의 합임이 증명된다. □

즉, Paolo Maraner는 유클리드 기하에서 직각삼각형에 대해서 성립하던 피타고라스의 정리*가 그대로 구면기하와 쌍곡기하에 확장될 수 있음을 보였다. 그런데 아르키메데스 공리와 원의 연속원리[8)]가 성립하는 임의의 힐베르트 평면기하는 아르키메데스 유클리드 수체 위에서 정의된 좌표평면기하(Cartesian plane geometry) 또는 포앵카레 모델(Poincaré model)이므로($\mathbb{R}^2$ 와 $\mathbb{H}^2$ 뿐만 아니라 $\mathbb{R}$ 보다 더 작은 유클리드 수체 위에서 정의된 좌표평면기하와 포앵카레 모델도 존재한다),[9)] 즉, 유클리드 평면기하이거나 쌍곡 평면기하이므로(Pejas의 결과 [7] 또는 [1] 참조), 다음을 바로 알 수 있다.

정리 4.2: 아르키메데스 공리와 원의 연속원리가 성립하는 임의의 힐베르트 기하에서 피타고라스의 정리*가 성립한다.

5 맺는말

우리는 피타고라스의 정리의 여러 동치 명제 중의 하나인 피타고라스의 정리*가 많은 비-유클리드 기하에서 그대로 성립함을 보았다. 이는 직각삼각형을 반각삼각형으로 일반적인 평면기하에 확장함으로써 가능한 것이었으며, 또한 피타고라스의 정리의 여러 동치 명제 중 특별히 원에 대한 경우에 대해서만 잘 확장됨을 알 수 있었다. 정리 3.3에서 보았듯이 유클리드 기하에서 직각삼각형이 가지고 있었던 성질들을 많은 비-유클리드 기하의 반각삼각형이 가지고 있으며, 직사각형의 성질 또한 등각사각형이 가지고 있음을 관찰할 수 있었다. 그런 의미에서 직사각형의 자연스러운 확장은 어쩌면 등각사각형이 아닐까 하는 생각을 해 볼 수 있으며, 그러므로 직사각형 또는 직각삼각형과 관련된 유클리드 기하에서의 성질들을 등각사각형과 반각삼각형에 적용하여 생각해 보는 것은 매우 흥미로운 작업이라 생각된다.

특히, 정리 4.2에서 우리는 아르키메데스 공리와 원의 연속원리가 성립하는 임의의 힐베르트 평면기하에서 피타고라스의 정리*가 성립함을 보았다. 그렇지만 그 증명은 힐베르트 기하의 분류에 관한 Pejas의 결과로부터 추론된 것이었다. Pejas의 거대한 결과를 사용하지 않는 힐베르트 공리만을 이용한 증명을 찾는 것도 또한 의미있는 작업이 될 것이다.

---

8) 원의 연속원리는 다음과 같다.

한 원이 다른 원의 내부점과 외부점을 각각 포함하면 두 원은 (두 개의) 교점을 갖는다.

9) 여기에서 유클리드 수체는 실수뿐만 아니라 아르키메데스 공리가 성립하는 임의의 유클리드 수체일 수 있다. 예를 들어, 작도가능수체(constructible field)가 그러한 예이다.

References

1. Robin Hartshorne , *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
2. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 2nd English Edition, Authorized translated by Leo Unger from the 10th German Edition, Revised and Enlarged by Dr. Paul Bernays, The open court publishing company, 1971.
3. K. Jo and S.-D. Yang, Pythagorean Theorem I : In non-Hilbert Geometry, *Journal for History of Mathematics* 31(6) (2018), 315–337.
4. K. Jo and S.-D. Yang, Pythagorean Theorem II : Relationship to the Parallel Axiom, *Journal for History of Mathematics* 32(5) (2019), 241–255.
5. R. Kaya and H. B. Colakoglu, Taxicab versions of some Euclidean theorems, *Int. J. Pure Appl. Math.* 26(1) (2006), 69–81
6. Paolo Maraner, A spherical pythagorean theorem, *The Mathematical Intelligencer* 32 (2010), 46–50.
7. W. Pejas, Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie, *Math. Annalen* 143 (1961), 212–235.