

# 스텝 하중을 받는 3-자유절점 공간 트러스 모델의 동적 좌굴 특성

## Dynamic Buckling Characteristics of 3-Free-Nodes Spatial Truss Model Under the Step Load

손수덕\*  
Shon, Sudeok

황경주\*\*  
Hwang, Kyung-Ju

### Abstract

In this paper, the dynamic snapping of the 3-free-nodes spatial truss model was studied. A governing equation was derived considering geometric nonlinearity, and a model with various conditions was analyzed using the fourth order Runge-Kutta method. The dynamic buckling phenomenon was observed in consideration of sensitive changes to the force mode and the initial condition. In addition, the critical load level was analyzed. According to the results of the study, the level of critical buckling load elevated when the shape parameter was high. Parallely, the same result was caused by the damping term. The sensitive asymmetrical changes showed complex orbits in the phase space, and the critical load level was also becoming lowly. In addition, as the value of damping constant was high, the level of critical load also increases. In particular, the larger the damping constant, the faster it converges to the equilibrium point, and the occurrence of snapping was suppressed.

**Keywords :** 3-free-nodes space truss, Dynamic buckling load, Initial condition, Stability, Damping constant, Equilibrium, Initial imperfection

### 1. 서론

아치나 셸 구조 시스템과 같이 공간 트러스 구조 시스템은 장 스패의 지붕 구조 시스템으로 적합하다. 이는 불연속 부재로 구성된 시스템으로 연속체 시스템과 달리 가볍고, 전체 구조물의 역학적 거동이 장 스패에 유리하게 나타나기 때문이다. 특히 각 부재에서의 힘의 흐름은 인장과 압축으로 단순하게 나타나므로 부재의 구조 설계가 쉽다. 그러나 아치나 셸에서 나타나는 역학적 문제점<sup>1),2)</sup>들도 함께 나타나므로 스냅핑(Snapping) 현상과 같은 구조 불안정 문제를 설계에 반영해야 한다. 이러한 문제들은 주로 기하학적 비선형성에 근거한 것이므로 외력 또는 초기 조건에 대한 민감한 특성을 파악하고 원인을 규명하는 것이 필요하다<sup>3-5)</sup>.

불안정 현상의 특성은 주로 시스템의 비선형 운동방

정식을 통해서 알 수 있다. 비교적 단순한 모델을 이용해 방정식을 유도하고 정해를 구하거나 다양한 조건에 대한 특수한 해를 분석하여 현상을 설명하는 경우가 많다. 이러한 불안정 현상을 연구한 결과는 주어진 외부환경에 대해 구조물의 한계를 예측할 수 있게 하므로 외력에 대한 안전한 설계 범위를 제공할 수 있다. 이 경우 방정식의 해를 구하는 방법의 영향이 크므로 비선형 편미분방정식을 해석하는 기법에 대해서 다양한 접근이 시도되었다<sup>6),7)</sup>. 주로 수치 해석 방법에 대해 많이 연구되었으나 최근에는 해석적 정해<sup>8),9)</sup>를 구하기 위한 여러 가지 시도들도 있었다. 그러나 많은 부재로 이루어졌을 때 정해를 구하는 것이 어려우므로 수치 해석 기법에 의존하여 불안정한 현상을 규명하는 경우가 많다.

구조물의 불안정성은 본질상 시스템의 다양한 비선형성에 그 원인이 있다. 이러한 까닭에 비선형 해석 기법의 정밀도와 유효성에 많은 영향을 받는다. 또한 많은 부재로 이루어진 구조물의 경우 불안정 현상을 명확한 형태로 분류하기가 어렵다. 그래서 주로 단순한 부재들로 형성된 모델을 일반화하여 상태방정식을 유도하고 불안정성에 대하여 분석한다. 이러한 연구 대상 모델로

\* 한국기술교육대학교 건축공학과 연구교수, 공학박사  
Dept. of Architectural Eng., Koreatech University  
\*\* 교신저자, 서울시립대학교 건축학부 부교수, 공학박사  
School of Architecture, University of Seoul  
Tel: 02-6490-2785 Fax: 02-6490-2749  
E-mail: kj.hwang@uos.ac.kr

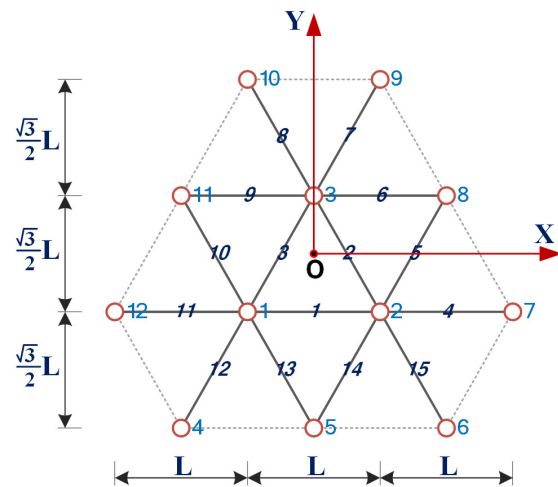
토글 트러스(Toggle truss)와 같은 1-자유절점 모델이 대표적이며, 자유 절점의 수를 늘려서 조금씩 복잡하게 연구용 모델을 만들었다<sup>10,11)</sup>. 2-자유절점 공간 트러스나 스타돔 트러스도 이러한 모델 중 하나이며<sup>11,12)</sup>, 초기 조건이나 경계 조건에 따라 다양한 상태를 연구하였다. 모델들의 불안정한 현상에 관해서는 시스템의 평형 경로에서 나타나는 특이점<sup>3)</sup>을 찾거나 아주 작은 파라미터의 변화에 큰 변화가 발생하는지를 조사한다<sup>1)</sup>. 또한 시스템의 특성방정식을 분석하여 평형점 근방의 안정성을 예측하며, 유도된 지배방정식의 해를 이용해 정성적인 정보를 얻는다<sup>10)</sup>. 여기서, 1-자유도 모델은 주로 더핑(Duffing) 방정식의 형태로 유도되며, 위상 공간과 끌개(Attractor)로 불안정한 현상을 설명한다. 2-자유절점 공간 트러스 모델의 경우는 직접 좌굴(Direct snapping)과 간접 좌굴(Indirect snapping)로 설명되는 동적 스프링 현상을 관찰하는데 많이 활용되었다. 이 시스템의 수직 진동에 대한 지배방정식은 이중 더핑 구조로 유도되며, 단 자유도와는 달리 차수가 높아질수록 시스템의 분석이 어렵다<sup>11,12)</sup>.

이처럼 절점의 수가 늘어날수록 시스템의 구조는 복잡하다. 그러나 최소한의 단순한 거동을 기대할 수 있는 모델로 연구 범위를 확장해 가는 것은 공간 트러스 시스템의 불안정한 현상에 대한 분석에서 필요하다. 따라서 본 연구에서는 1- 및 2-자유절점 모델의 연속된 연구의 하나로 3-자유절점 공간 트러스 모델을 대상으로 동적 불안정 현상에 대하여 연구를 수행하고자 한다. 이를 위해서 기하학적 비선형성을 고려한 기초방정식을 이용하여 지배방정식을 유도하고, 스텝 하중(Step load)을 받는 비감쇠 시스템의 변위 응답과 동적 좌굴 하중을 살펴보고자 한다. 또한 하중 조건과 초기 조건의 작은 변화에 구조물이 민감하게 변하는 영향과 감쇠로 인한 동적 좌굴 하중의 변화를 분석한다. 본 논문의 구성은 2장에서 3-자유절점 모델의 상태방정식 유도 과정을 다루고, 3장에서 대상 모델에 대한 동적 불안정 현상을 분석하고 임계 하중 레벨을 구하였으며, 이러한 결과를 바탕으로 4장에서 결론을 도출하였다.

## 2. 3-자유절점 모델의 지배방정식

본 연구에서 다루어질 3-자유절점 공간 트러스의 평

면은 <Fig. 1>과 같이 3개의 자유 절점(절점 1~3)과 9개의 고정 절점(절점 4~12), 그리고 15개의 부재로 이루어져 있다. 또한 절점의 z좌표는 <Table 1>과 같이 1~3번 절점은 H, 4~12번 절점은 0이다. 대상 모델의 형상 파라미터는  $\mu = H/2L$ 이며, 형상 높이 H와 수평 부재(부재 1~3) 길이  $L = 5m$ 을 이용해 나타낸 값이다. 경사 부재(부재 4~15)의 길이는  $L_s = \alpha L$ 이며, 부재 각도  $\theta$  ( $\tan \theta = H/L$ )는  $\mu$ 값이 클수록 증가한다. 여기서,  $\alpha$ 는 수평 부재에 대한 경사 부재의 길이 비율이다. 각 부재의 밀도는  $\rho = 7.85 \times 10^{-3} \text{kg/m}^3$ , 단면적은  $A = 11.2 \text{cm}^2$ , 탄성계수는  $E = 2.06 \times 10^5 \text{MPa}$ 로 일정하다.



<Fig. 1> Triple-free-nodes spatial truss

<Table 1> Nodal conditions of Z-Dir.

Node	1~3	4~12
Z-Coordinate	H	0
Boundary condition	Free	Clamped

공간 트러스 모델의 상태방정식을 유도하기 위해 각 부재의 기하학적 비선형성을 고려한 요소 행렬을 먼저 설명하면 다음과 같다<sup>11,12)</sup>. 공간 좌표계에서 절점 자유도를 3개의 성분으로 정의하고, 절점 변위  $D$ 와 이에 상응하는 외력  $F$ 로 가정한다. 이때, 부재의 변위 함수  $u$ 는 다음과 같고, 여기서  $N_i$ 와  $N_j$ 는 형상 함수이다.

$$u = [N_i I_3 : N_j I_3] T^T D \tag{1}$$

여기서,  $\mathbf{I}_3$ 은  $3 \times 3$  단위행렬,  $\mathbf{T}$ 는 요소좌표계에 대한 좌표변환행렬이다. 변형도-변위 관계식에서 기하학적 비선형 항을 고려하여 변분을 구하면 다음과 같다.

$$\epsilon = \mathbf{U}\mathbf{T}^T\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{D}^T\mathbf{K}_s\mathbf{D} \quad (2)$$

$$\delta\epsilon = \mathbf{U}\mathbf{T}^T\delta\mathbf{D} + \mathbf{D}^T\mathbf{K}_s\delta\mathbf{D} \quad (3)$$

여기서,  $\mathbf{U} = \{N_{j,x} \ 0 \ 0 : N_{i,x} \ 0 \ 0\}$ ,  $\mathbf{K}_s = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$ 이며,  $N_{j,x}$ ,  $N_{i,x}$ 는  $N_j$ ,  $N_i$ 의  $x$ 에 관한 미분이다. 선형 탄성 범위에서 가상 일의 원리를 이용하여 관계식을 정리하면 다음과 같다.

$$\delta\mathbf{D}^T\mathbf{F} = AEI(\delta\epsilon^T\epsilon) \quad (4)$$

식 (4)의 각 항을 대입하고 절점의 변위  $\mathbf{D}$ 와 외력  $\mathbf{F}$ 의 관계로 나타내면 식 (5)와 같으며 기하학적 비선형성을 고려하여 유도된 기초방정식이 된다.

$$\mathbf{F} = EA I \left\{ \mathbf{T}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{T}^T + (\mathbf{K}_s\mathbf{D}\mathbf{U}\mathbf{T}^T + \frac{1}{2}\mathbf{U}\mathbf{T}^T\mathbf{D}^T\mathbf{K}_s) + \frac{1}{2}\mathbf{K}_s\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{K}_s \right\} \mathbf{D} \quad (5)$$

해석 대상 모델의 스텝 현상은 상하 진동 때문에 발생하므로 수직 방향의 변위 성분  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )만 고려하며, 수평 변위는 발생하지 않는 것으로 가정한다. 또한 기호의 단순화를 위해 다음과 같이 변수를 치환한다.

$$y_i \leftarrow D_i, \quad f_i \leftarrow F_i, \quad k = EA \quad (6)$$

식 (5)의 기초방정식과 식 (6)의 관계로 지배방정식을 유도하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2\omega_0 h \dot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 + \frac{k_2}{m} y_1^2 + \frac{k_3}{m} y_1^3 + \frac{k_4}{m} (y_2^3 + y_3^3) + \frac{k_5}{m} \{ (y_1 y_2^2 + y_1 y_3^2) - (y_2 y_1^2 + y_3 y_1^2) \} = A_1 \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + 2\omega_0 h \dot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 + \frac{k_2}{m} y_2^2 + \frac{k_3}{m} y_2^3 + \frac{k_4}{m} (y_1^3 + y_3^3) + \frac{k_5}{m} \{ (y_2 y_1^2 + y_2 y_3^2) - (y_1 y_2^2 + y_3 y_2^2) \} = A_2 \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_3 + 2\omega_0 h \dot{y}_3 + \omega_0^2 y_3 + \frac{k_2}{m} y_3^2 + \frac{k_3}{m} y_3^3 + \frac{k_4}{m} (y_1^3 + y_2^3) + \frac{k_5}{m} \{ (y_3 y_1^2 + y_3 y_2^2) - (y_1 y_3^2 + y_2 y_3^2) \} = A_3 \end{aligned} \quad (7c)$$

여기서,  $\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}$ ,  $h = \frac{c}{2m\omega_0}$ ,  $A_i = \frac{f_i}{m}$ ,  
 $k_1 = \frac{4kH^2}{\alpha^3 L^3}$ ,  $k_2 = \frac{6kH}{\alpha^3 L^3}$ ,  $k_3 = \frac{2k}{\alpha^3 L^3} + \frac{k}{L^3}$ ,  
 $k_4 = -\frac{k}{2L^3}$ ,  $k_5 = \frac{3k}{2L^3}$ ,  $m = \rho AL(2\alpha + 1)$

식 (7)에 적용되는 하중은 다음과 같이  $t \in [0, T]$ 에 서 일정한 상수  $c_i$ 로 정의한다. 정의된 하중은 구간 내에서 일정하며, 단계별로 레벨  $c_i$ 를 증가시켜 적용하는 스텝 하중이다.

$$A_i(t) = c_i, \quad t \in [0, T] \quad (8)$$

$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}^T$ 의 상수  $c_i$ 의 계산은 각 절점에 대한 대칭성과 비대칭성을 정의하기 위해 다음과 같이 하중 모드  $\mathbf{A}_s$ ,  $\mathbf{A}_p$ 를 도입하여 정의한다.

$$\mathbf{A} = m^{-1} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = -m^{-1} \{ \mathbf{A} \mathbf{A}_s + \kappa \mathbf{A}_p \} \quad (9)$$

식 (9)에서 부호 -의 추가는 하중 방향을 정의한 것이고,  $\mathbf{A}_s$ 과  $\mathbf{A}_p$ 는 각각 대칭 및 비대칭 하중을 위한 모드이다. 대칭 모드는  $\mathbf{A}_s = \{1, 1, 1\}^T$ 로 설정하도록 한다. 따라서  $\mathbf{A}$ 의 증가는 모든 절점에 하중이 대칭으로 작용하며,  $\kappa$ 의 값에 의해서 비대칭 성분이 추가된다. 즉,  $\kappa = 0$  또는  $\mathbf{A}_p = \mathbf{0}$ 은 대칭 하중이 작용하는 경우이고,  $\kappa \neq 0$ 이며  $\mathbf{A}_p \neq \mathbf{0}$ 인 경우는 비대칭 하중이다. 비대칭의 경우는  $\mathbf{A}_p$ 의 성분 중 최소한 하나의 성분이 다른 성분과 같지 않은 값으로 벡터를 설정하여야 한다.

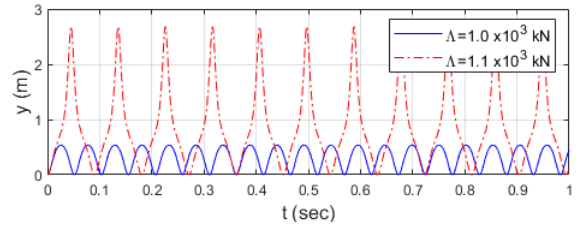
이상과 같이 지배방정식 식 (7)과 하중 식 (9)를 이용하여 해석을 수행하도록 하며, 감쇠 항에 대해서는 감쇠비  $h$ 의 값을 고려한 예제와 고려하지 않은 예제로 나누어서 거동을 분석하도록 한다. 아울러 본 연구에서는 방정식의 수치 해석 방법으로 4차 룽게-쿠타법 (4-th-order Runge-Kutta Method; RK4)을 이용하도록 한다.

### 3. 동적 좌굴과 임계 하중 레벨

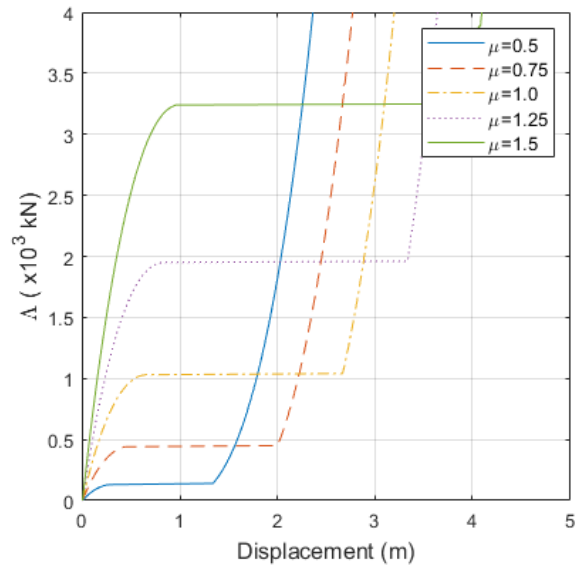
본 장에서는 스텝 하중을 받는 3-자유절점 공간 트러스 모델의 동적 해석과 불안정 거동 및 임계 하중 레벨에 대해서 다루도록 한다. 이를 위해서 비감쇠 모델의 좌굴 특성을 살펴본 뒤 외력과 초기 조건에 대한 변위 응답의 민감한 정도를 분석하도록 한다. 마지막으로 감쇠비에 따른 임계 하중 레벨의 변화를 다루도록 한다.

#### 3.1 형상 파라미터에 따른 좌굴 하중 레벨

본 절에서는 대칭 하중인  $\kappa = 0$ 의 경우에 대해서 다루도록 하며, 초기 조건은  $y_i(0) = \dot{y}_i(0) = 0$ 이다. 대칭인 스텝 하중을 받는 해석 모델에서 감쇠를 고려하지 않은 2가지 진동 패턴은 <Fig. 2>에서 보는 바와 같다. <Fig. 2>의 결과는 모델의 형상 파라미터가  $\mu = 0.1$  ( $H = 1m$ )에 대한 것이며, (a)와 (b)의 2가지 패턴을 볼 수 있다. <Fig. 2 (a)>는 하중 레벨  $\Lambda = 1.0 \times 10^3 \text{ kN}$ 인 경우로 변위 응답의 최대가  $H$ 를 넘지 않는 진동을 보인다. 그러나 <Fig. 2 (b)>는  $\Lambda = 1.1 \times 10^3 \text{ kN}$ 인 경우로 최대 변위가  $2H$ 를 넘어서는 패턴으로 진동한다. 여기서, 2가지 경우의 패턴은 두 하중 레벨 사이의 한 레벨에서 갑자기 변한다. 이는 하중이 작은 변화에 급격하게 변위가 증가하는 스냅 현상으로 설명할 수 있다. 이러한 임계점 즉, 좌굴 하중에 대해서  $\mu$ 의 변화와 함께 살펴본 결과가 <Fig. 3>이다. 이 경우의 임계 하중 레벨  $\Lambda_{cr,0}$ 과 임계 변위  $Y_{cr,0}$ 는 <Table 2>에서 보는 바와 같고,  $\mu$ 는 각각 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5이다. 그림에서 나타난 바와 같이  $\mu$ 의 값이 증가할수록  $\Lambda_{cr,0}$ 의 값도 증가하는 것을 알 수 있다. 즉, 형상 파라미터가 높을수록 임계 하중 레벨도 높아진다.



<Fig. 2> Displacement responses ( $\mu = 0.1$ )



<Fig. 3> Buckling load  $\Lambda_{cr,0}$  ( $h = 0$ )

<Table 2> Buckling load  $\Lambda_{cr,0}$  ( $h = 0$ )

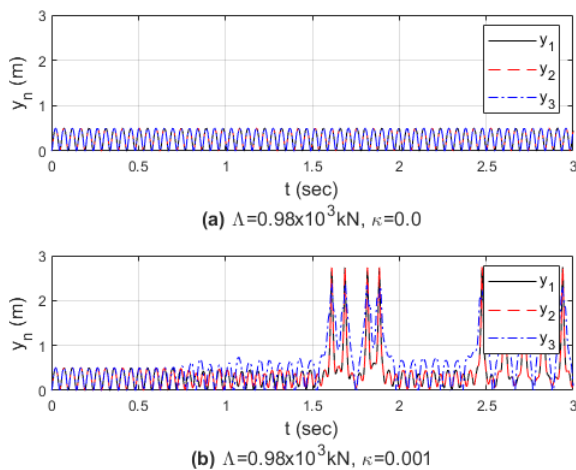
$\mu$	0.05	0.75	0.1	0.125	0.15
$\Lambda_{cr}$ (kN)	134.7	446.3	1031.3	1950.6	3243.9
$Y_{cr,0}$ (m)	1.33	2.0	2.67	3.33	3.99

#### 3.2 비대칭 하중에 대한 동적 좌굴 특성

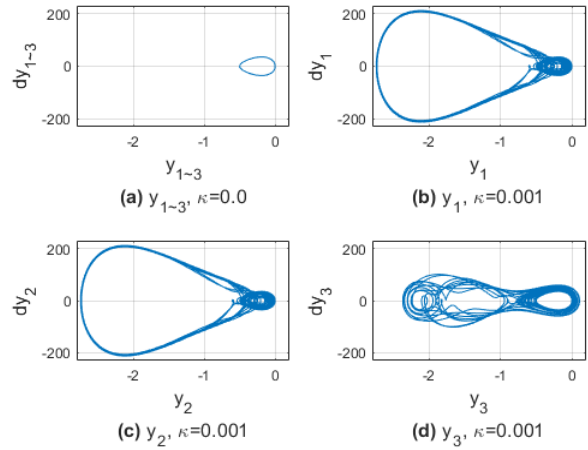
식 (9)의  $\kappa \neq 0$ 인 경우  $\Lambda_p (\neq 0)$ 에 의해 하중이 결정된다. 앞서 설명한 바와 같이  $\Lambda_p$ 의 성분 중 최소한 하나의 성분이 다르다면 비대칭이다. 우선  $\Lambda_p$ 가 하나의 절점 값이 추가되는 경우( $\Lambda_p = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ )와 두 절점의 값이 추가되는 경우( $\Lambda_p = \{0 \ 1 \ 1\}^T$ )를 생각해 볼 수 있다. 이는 추가되는 하중의 크기가 모두  $\kappa$ 에 의해 결정되므로 두 경우는 유사한 경우가 된다. 즉 한 절점의 하중이  $\kappa$ 의 크기만큼 추가되거나 한 절점에 값이  $\kappa$ 의 크기만큼 감소하는 비대칭 하중 벡터로 결정된다. 따라서

본 절에서는  $\mathbf{A}_p = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ 와 더불어 두 절점의 값이 추가되는 경우에 대해서  $\mathbf{A}_p = \{0 \ 0.03 \ 1\}^T$ 를 채택하도록 한다. 즉 한 절점에  $\kappa$ 의 크기만큼 추가되는 하중 벡터가 주는 영향을 관찰하고, 여기에서 다른 한 절점에 3%만큼의 작은 변화를 더 추가하였을 때 어떠한 차이가 있는지도 살펴보기로 한다.

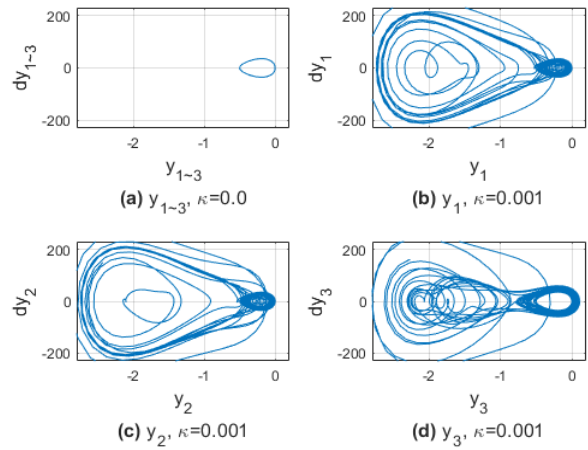
첫 번째 해석으로  $\kappa = 0.001$ ,  $\mathbf{A}_p = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ 의 경우에 대해서 대칭 하중의 경우인  $\kappa = 0$ 의 모델을 해석하여 <Fig. 4>에 나타내었다. 형상 파라미터는  $\mu = 0.1$ , 하중 레벨은  $\Lambda = 980kN$ 이며, 초기 조건은 이전과 같이  $y_i(0) = \dot{y}_i(0) = 0$ 이다. 여기서, 대칭 하중의 경우는  $\Lambda$ 가 임계 하중  $\Lambda_{cr,0}$  이전의 값이므로 좌굴 현상이 나타나지 않는 모델이다. 진동은 <Fig. 4 (a)>에서 보는 바와 같이 <Fig. 2>의 첫 번째 패턴과 유사하다. 그러나 미소한 비대칭 하중의 영향은 <Fig. 4 (b)>와 같이  $t = 1.5\text{sec}$  이후부터 동적으로 불안정한 현상이 나타난다. 각 절점의 변위가 서로 영향을 주어 진동이 증가하기 시작하며, 이러한 과정이 반복된다. 이 현상은 <Fig. 5>의 위상 공간에서도 관찰할 수 있다. <Fig. 5 (a)>는 대칭 하중의 경우로 모든 절점의 궤적이 일정하고 안정적인 궤적을 보인다. 그러나 <Fig. 5 (b)~(d)>의  $y_1, y_2$ 와  $y_3$ 는 매우 다른 형태의 궤적이 나타난다. 특히  $\mathbf{A}_p$ 가 하나의 절점에만 추가된 경우이므로  $y_1$ 과  $y_2$ 의 궤적은 같지만  $y_3$ 는 그림에서 보는 바와 같이 매우 다르다. 하중의 미소한 불균형에도 좌굴 임계점은 더 낮아질 수 있다.



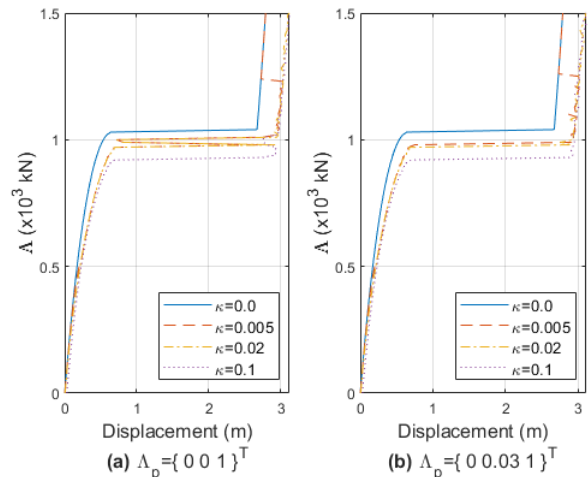
<Fig. 4> Displacement responses of asymmetric load ( $\mu = 0.1, h = 0, \mathbf{A}_p = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ )



<Fig. 5> Phase space of asymmetric load ( $\mu = 0.1, h = 0, \Lambda = 980kN, \mathbf{A}_p = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ )



<Fig. 6> Phase space of asymmetric load ( $\mu = 0.1, h = 0, \Lambda = 980kN, \mathbf{A}_p = \{0 \ 0.03 \ 1\}^T$ )



<Fig. 7> Buckling load  $\Lambda_{cr,a}$  of asymmetric load cases ( $\mu = 0.1, h = 0$ )

비대칭 하중 벡터  $\mathbf{A}_p = \{0 \ 0.03 \ 1\}^T$ 의 경우도 관찰하도록 하자. 이전 모델과 같은 조건에서  $\mathbf{A}_p$ 만 달라지는 모델이며, 앞서 설명한 바와 같이 한 절점에 추가된 하중의 3%가 다른 절점에 더 추가된 모델이다. 대상 모델의 해석 결과를 <Fig. 6>의 위상 공간을 통해 나타내었다. <Fig. 5>와 비교해 볼 때 더욱 복잡한 궤적을 쉽게 관찰할 수 있다. 또한 3%의 추가된 양에도 <Fig. 5>의 (b), (c)와는 달리  $y_1$ 과  $y_2$ 의 궤적이 같지 않게 나타나며, <Fig. 5 (d)>와 <Fig. 6 (d)>의 위상 공간 궤적은 다른 형태를 보인다. 즉, <Fig. 5>의 결과와는 달리 각 절점의 변위  $y_1, y_2, y_3$ 는 다르게 움직이며 서로에게 영향을 준다.

이러한 패턴에 대해서 각각의  $\mathbf{A}_p$ 가 주는 좌굴 하중의 임계점에 대한 변화를 살펴보고자 한다. 고려되는 비대칭 하중의 크기 파라미터  $\kappa$ 는 각각 0.005, 0.02, 0.1의 경우로 채택하였으며, 하중 레벨  $\Lambda$ 를 증가시켜 해석을 수행한 결과를 <Fig. 7>에 나타내었다. 여기서, <Fig. 7 (a)>는  $\mathbf{A}_p = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ 의 해석 결과이고, <Fig. 7 (b)>는  $\mathbf{A}_p = \{0 \ 0.03 \ 1\}^T$ 의 해석 결과이다. 그림에서 볼 때  $\kappa$ 가 증가할수록 급격한 변위 응답을 나타내는 하중 레벨인 임계점  $\Lambda_{cr,a}$ 는 비록  $\kappa$ 가 0.005와 0.02일 때 차이가 거의 없어 보이지만  $\kappa$ 가 0.1에서는 낮아지는 것을 확실히 알 수 있다. 그러나 2가지  $\mathbf{A}_p$ 에 대한 차이점은 크지 않은 것으로 판단된다.

하중의 비대칭성은 작은 차이만으로도 그 영향이 커서 변위 응답은 복잡하게 나타난다. 그러나 좌굴이 발생하는 하중 레벨은 본 논문에서 다룬 2가지 비대칭 모드의 결과에서 볼 때 큰 차이가 나지 않았고, 비대칭 하중의 크기가 더 큰 영향이 있는 것으로 나타났다.

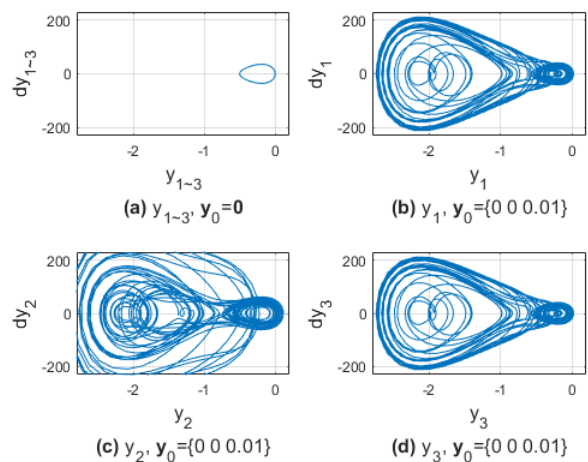
### 3.3 초기 조건에 따른 동적 좌굴 특성

하중 조건에 대한 민감한 동적 특성과 마찬가지로 초기 조건의 미세한 변화도 좌굴 특성에 영향을 미친다. 본 절에서는 초기 조건의 작은 변화가 대칭 하중에 미치는 영향을 살펴보고자 하며, 초기의 불안정성에 의해서  $y_i(0) \neq 0, \dot{y}_i(0) = 0$ 인 것으로 가정하여 해석을 수행한다. 여기서,  $y_i(0) \neq 0$ 에 대한 표기를 간단하게 하기 위하여  $\tau = 0$ 에서의 변위를

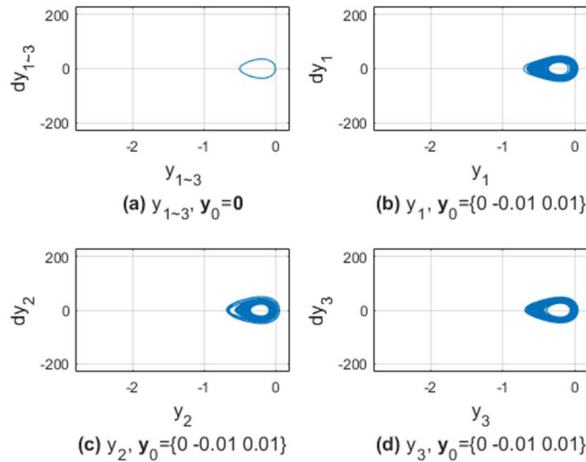
$\mathbf{y}_0 = \{y_1(0) \ y_2(0) \ y_3(0)\}$ 라 한다.

초기 조건에 대한 차이를 살펴보기 위해서  $\mathbf{y}_0$ 를  $\mathbf{y}_0 = \{0 \ 0 \ 0.01\}^T$ 와  $\mathbf{y}_0 = \{0 \ -0.01 \ 0.01\}^T$ 로 각각 가정하여 해석을 수행한다. 이 값은 높이의 1%에 대한 형상 불안정한 값을 적용한 것이고, 한 절점에만 불안정한 값을 적용한 것과 두 절점에 모두 적용된 상황을 나타낸 것이다. 형상은  $\mu = 0.1$ 이고, 감쇠비는  $h = 0$ 을 채택하였다. 따라서 대상 모델의  $\mathbf{y}_0$ 는  $\mathbf{y}_0 = \{0 \ 0 \ 0.01\}^T$ 와  $\mathbf{y}_0 = \{0 \ -0.01 \ 0.01\}^T$ 이 된다. 비대칭 하중의 예제에서 사용된 하중 레벨인  $\Lambda = 980kN$ 을 대상으로 해석을 수행하며, 채택된 하중 레벨은 좌굴 임계점보다 낮다.

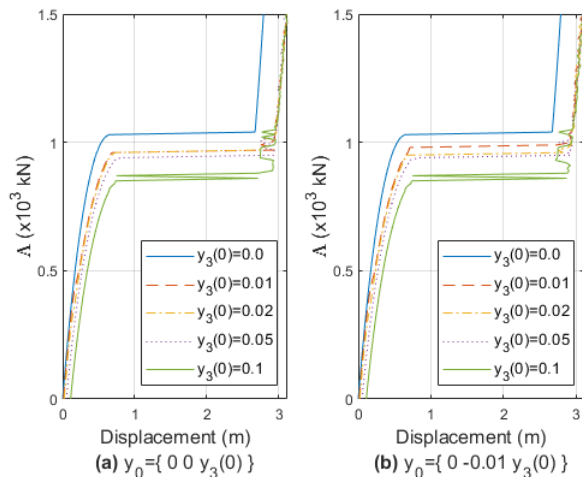
해석 결과는 각각 <Fig. 8> 및 <Fig. 9>와 같고, 두 그림은 위상 공간에서 살펴본 것이다. <Fig. 8>의 (b)~(d) 위상 평면에서 나타난 대상 모델의 거동은 <Fig. 8 (a)>의  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ 일 때와는 다르게 매우 민감하게 변화한다. 이 결과는 비대칭 하중 조건의 경우와 같이 민감하게 거동한다. 그러나 <Fig. 9>의 (b)~(d) 경우는 <Fig. 9 (a)>의  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ 일 때와는 다르다 하더라도 궤적이 높이  $H$ 를 벗어나지 않는다. 즉, 동적 좌굴 현상은 나타나지 않는다. 미세한 초기 조건의 변화는 변위의 위상에 따라 다른 거동으로 응답 곡선이 나올 수 있다.



<Fig. 8> Phase space of symmetric load ( $\mu = 0.1, h = 0, \Lambda = 980kN, \mathbf{y}_0 = \{0 \ 0 \ 0.01\}^T$ )



〈Fig. 9〉 Phase space of symmetric load ( $\mu = 0.1, h = 0, \Lambda = 980kN, y_0 = \{0 - 0.01 0.01\}$ )



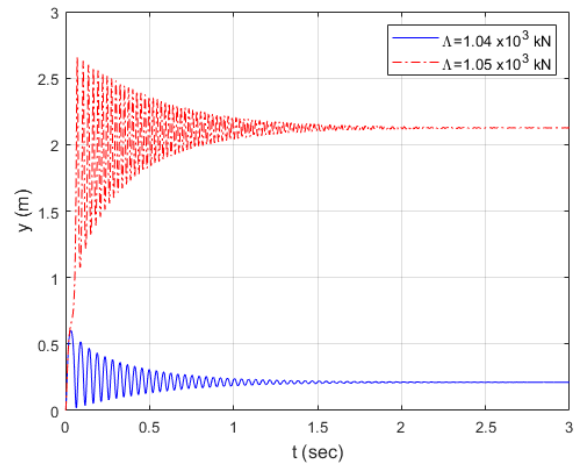
〈Fig. 10〉 Buckling load  $\Lambda_{cr,i}$  of asymmetric load cases ( $\mu = 0.1, h = 0$ )

이러한 결과는 초기 조건에 따라서 변위가 증가할 수도 있고, 때때로 감소할 수 있음을 의미한다. 따라서  $y_3(0)$ 의 값을 0.01, 0.02, 0.05, 0.1로 조금씩 늘려서 임계 레벨  $\Lambda_{cr,i}$ 를 구하여 어떠한 변화가 있는지 알아보았다. 해석 결과는 〈Fig. 10〉에 나타난 것과 같다. 그림에서 보는 바와 같이  $y_3(0)$ 의 증가에 따라  $\Lambda_{cr,i}$ 는 감소한다. 이것은 비대칭 하중의 결과와 유사하다. 또한 초기 조건의 상황마다 감소하는 폭은 다르지만  $y_3(0)$ 가 높이의 10%에 해당하는 값의 경우는 〈Fig. 10〉의 (a)와 (b)에서 보는 바와 같이  $\Lambda_{cr,i}$ 의 크기가 유사하다.

### 3.4 감쇠비에 대한 좌굴 하중 레벨

감쇠 항을 고려한 해석 대상 모델의 동적 좌굴 특성과 임계 하중을 알아보기 위해서 감쇠비  $h$ 의 값을 0.01, 0.03, 0.05, 0.07로 적용하여 해석을 수행한다. 또한 대칭 하중과 3.2절의 비대칭 하중인  $\Lambda_p = \{0 0 1\}^T$ 와  $\Lambda_p = \{0 0.03 1\}^T$ 의 2가지 벡터를 이용한 모델을 함께 관찰한다.

우선  $\kappa = 0$ 인 대칭 하중의 응답은 〈Fig. 11〉에서 보는 바와 같다. 형상 파라미터는  $\mu = 0.1$ , 하중 레벨  $\Lambda$ 는  $1.04 \times 10^3 kN$ 와  $1.05 \times 10^3 kN$ 의 값을 적용하였다. 그림에서 하중의 미소한 차이에도 평형점이 달라지는 것을 확인할 수 있다. 즉, 전자의 하중 레벨은 동적 좌굴 현상이 나타나지 않고, 후자의 레벨은 좌굴 현상이 발생함을 의미한다.

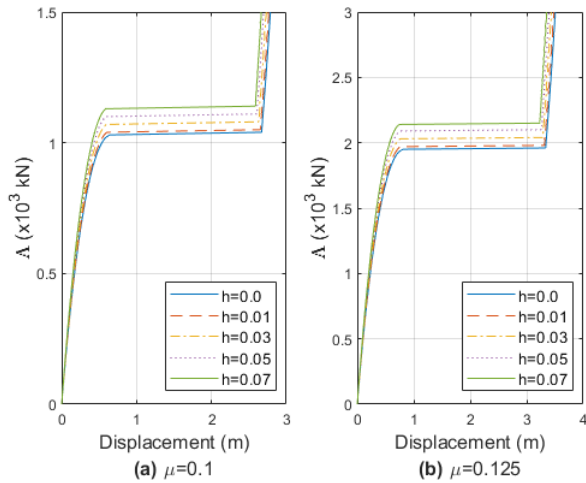


〈Fig. 11〉 Displacement responses of damping model ( $\mu = 0.1, h = 0.01, \kappa = 0$ )

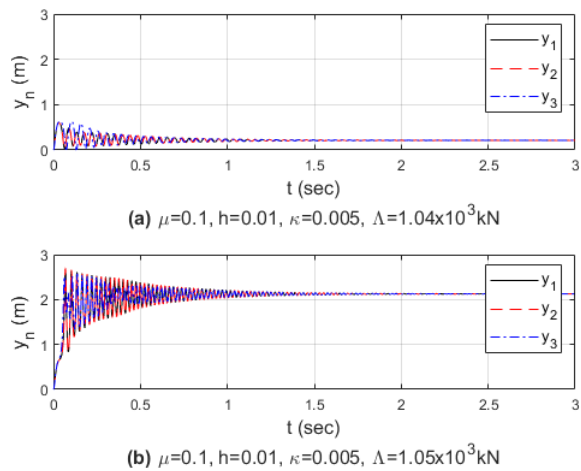
대칭 하중에 관한 좌굴 임계점  $\Lambda_{cr,d}$ 의 변화를  $h$ 의 증가에 따라 계산하여 〈Fig. 12〉에 그 결과를 나타내었다. 그림에서 (a)와 (b)는 각각  $\mu$ 가 0.1 및 0.125일 때의 결과이다. 두 그림에서  $\mu$ 가 클수록  $\Lambda_{cr,d}$ 은 높게 나타나고, 각각의  $\mu$ 에서  $h$ 가 증가할수록  $\Lambda_{cr,d}$ 도 증가하는 경향을 보인다.

다음으로 비대칭 하중에 관한 모델의 해석 결과를 〈Fig. 13〉과 〈Fig. 14〉에 나타내었다. 형상 파라미터는  $\mu = 0.1$ , 감쇠비는  $h = 0.01$ , 비대칭 하중 파라미터는  $\kappa = 0.005$ 를 적용하였다. 하중 레벨  $\Lambda$ 는

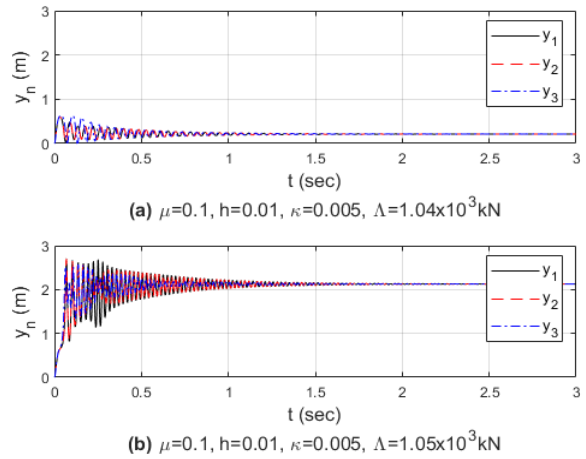
$1.04 \times 10^3 kN$ 와  $1.05 \times 10^3 kN$ 의 값으로 앞의 예제와 같다. <Fig. 13>의 결과는  $\Lambda_p = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ 의 하중 벡터를 적용한 것이고, <Fig. 14>의 결과는  $\Lambda_p = \{0 \ 0.03 \ 1\}^T$ 의 하중 벡터를 이용한 결과이다. <Fig. 13>과 <Fig. 14> 모두 (a)에서는 동적 좌굴 현상이 나타나지 않고 (b)에서는 동적 좌굴 현상이 발생한다. 비대칭 하중의 조건으로 일부 구간에서 변위가 서로 영향을 주는 구간도 발생하지만, 전반적으로 평형점에 점근적으로 수렴한다. 이 결과를 <Fig. 15>의 위상 공간에서 살펴보았으며, 그림에서 (a)와 (b)에서 나타난  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ 의 궤적들은 다소 차이는 있지만 서로 유사한 패턴으로 나타난다.



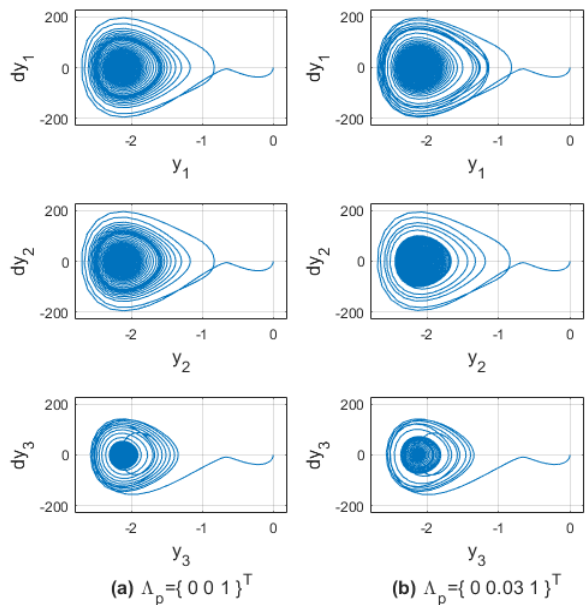
<Fig. 12> Buckling load  $\Lambda_{cr,d}$  of damping model ( $\kappa = 0, y_0 = 0$ )



<Fig. 13> Displacement responses of damping model ( $\Lambda_p = \{0 \ 0 \ 1\}$ )



<Fig. 14> Displacement responses of damping model ( $\Lambda_p = \{0 \ 0.03 \ 1\}$ )



<Fig. 15> Phase space of asymmetric load ( $\mu = 0.1, h = 0.01, \kappa = 0.005, \Lambda = 1.5 \times 10^3 kN$ )

감쇠를 고려한 비대칭 하중 모델에 관한 동적 좌굴 임계점  $\Lambda_{cr,a,d}$ 을 <Fig. 16>에 나타내었다.  $h$ 에 따른  $\Lambda_{cr,a,d}$ 의 변화를 살펴본 것으로 (a)는 비대칭 하중 벡터가  $\Lambda_p = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ 인 결과이고, (b)는 벡터가  $\Lambda_p = \{0 \ 0.03 \ 1\}^T$ 인 결과를 나타낸 것이다. 그림에서 나타난 바와 같이  $h$ 의 증가는 변위의 급격한 변화 레벨인  $\Lambda_{cr,a,d}$ 가 점점 높게 나타난다. 그러나 두  $\Lambda_p$ 에 대한 양상은 유사한 결과를 보인다. 또한  $h$ 가 낮은 경우 그 변화가 복잡하고,  $h$ 가 클수록 복잡한 변화가 나타나지 않는다.

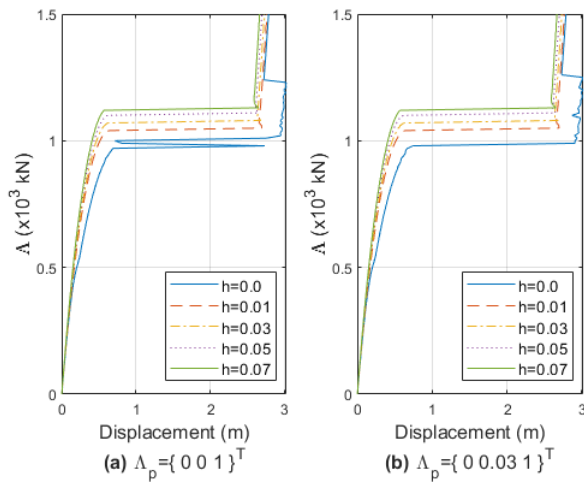


<Table 3> Comparison results of the buckling load levels

$\kappa$	$\Lambda_{cr,a}/\Lambda_{cr,0}$		$y_3(0)$	$\Lambda_{cr,i}/\Lambda_{cr,0}$		$h$	$\Lambda_{cr,a}/\Lambda_{cr,0}$		$\Lambda_{cr,a,d}/\Lambda_{cr,0}$	
	$\Lambda_p$			$y_0$			$\mu$		$\Lambda_p$	
	(a)	(b)	(a)	(b)	0.1	0.125	(a)	(b)		
0.0	100.0%	100.0%	0.0	100.0%	100.0%	0.0	100.0%	100.0%	97.1%	97.1%
0.005	94.2%	95.2%	0.01	93.3%	95.2%	0.01	101.0%	101.0%	101.0%	101.0%
0.02	94.2%	94.2%	0.02	93.3%	92.3%	0.03	103.8%	104.1%	103.8%	103.8%
0.1	89.4%	89.4%	0.05	91.3%	91.3%	0.05	106.7%	107.1%	106.7%	106.7%
			0.10	82.7%	82.7%	0.07	109.6%	109.7%	108.7%	108.7%

$\Lambda_p$  : (a) and (b) are  $\Lambda_p = \{0 \ 0 \ 1\}^T$  and  $\Lambda_p = \{0 \ 0.03 \ 1\}^T$ , respectively.

$y_0$  : (a) and (b) are  $y_0 = \{0 \ 0 \ y_3(0)\}$  and  $y_0 = \{0 \ -0.01 \ y_3(0)\}$ , respectively.



<Fig. 16> Buckling load  $\Lambda_{cr,a,d}$  of asymmetric load ( $\mu = 0.1, \kappa = 0.005$ )

### 3.5 고찰

본 절에서는 3.2~3.4절에서 다루었던 동적 좌굴에 대한 임계점을 3.1절의  $\Lambda_{cr,0}$ 의 값으로 비교하여 <Table 3>에 나타내었다. 표에서 보는 바와 같이  $\kappa$ 의 증가에 따라 임계 하중은 최대 89.4%까지 감소하였다. 또한 초기 조건의 미세한 변화에 대한 해석에도 최대 82.7%까지 감소하였다. 두 경우 모두  $\Lambda_p$ 와  $y_0$  값이 좌굴 하중에 영향을 주는 것임을 알 수 있다. 미세한 비대칭적인 파라미터의 영향과는 달리 감쇠 정수  $h$ 는 그 값이 클수록 좌굴 하중이 증가하며 보다 안정적임을 알 수 있다.

## 4. 결론

본 논문은 3-자유절점 공간 트러스의 동적 좌굴에 관하여 연구하였다. 기하학적 비선형성을 고려하여 지배방

정식을 유도하고, 4차 룽게-쿠타 법을 이용하여 해석하였다. 하중 조건과 초기 조건에서 미세한 비대칭적 변화를 추가하여 불안정한 현상을 관찰하였고, 좌굴 하중의 변화를 분석하였다. 이를 통해서 다음과 같은 결론을 도출하였다.

1) 형상 파라미터가 높을수록 임계 좌굴 하중 레벨은 높게 나타난다. 감쇠 항을 고려했을 때에도 형상 파라미터가 높은 모델에서 임계 레벨이 높게 나타났다.

2) 하중 조건과 초기 조건의 미세한 비대칭적 변화는 변위 응답에서 복잡한 양상을 보였으나 임계 하중은 두 경우 모두 낮아지는 결과를 얻었다.

3) 감쇠비가 증가할수록 임계 하중 레벨도 증가한다. 또한 하중 조건의 미세한 비대칭적 변화를 고려하여도 여전히 임계 하중 레벨은 증가한다. 해석 결과에서 볼 때,  $h$  값이 클수록 평형점에 빨리 수렴하며, 동적 좌굴 현상이 억제된다.

이상과 같이 3-자유절점 공간 트러스 모델의 동적 좌굴 특성을 분석하였으며, 추후 지배방정식의 정성적인 연구가 더 필요하다고 판단된다. 본 연구는 전체 거동에 초점을 맞춘 것이므로 부재 좌굴을 고려할 때는 또 다른 결과를 예상할 수 있다.

## 감사의 글

이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (NRF-2017R1D1A1B03031451).

## References

1. Budiansky, B., & Roth, R., "Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells", NASA TN D-1510, pp.597~606, 1962
  2. Humphreys, J. S., "On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches", AIAA Journal, Vol.4, No.5, pp.878~886, 1966, doi: 10.2514/3.3561
  3. Choong, K. K., & Hangai, Y., "Review on Methods of Bifurcation Analysis for Geometrically Nonlinear Structures", Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol.34, No.112, pp.133~149, 1993
  4. Virgin, L. N., Wiebe, R., Spottswood, S. M., & Eason, T. G., "Sensitivity in the structural behavior of shallow arches", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.58, pp.212~221, 2014, doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2013.10.003
  5. Shon, S., Hwang, K. J., & Lee, S., "Numerical evaluation of buckling behavior in space structure considering geometrical parameters with joint rigidity", Journal of Central South University, Vol.21, pp.1115~1124, 2014
  6. Shon, S., Lee, S., Ha, J., & Cho, C. G., "Semi-analytic solution and stability of a space truss using a high-order Taylor series method", Materials, Vol.8, No.5, pp.2400~2414, 2015, doi: 10.3390/ma8052400
  7. Shon, S., Ha, J., Lee, S., & Kim, J. J., "Application of Multistage Homotopy Perturbation Method to the Nonlinear Space Truss Model", International Journal of Steel Structures, Vol.15, No.2, pp.335~346, 2015, doi: 10.1007/s13296-015-6006-5
  8. Adomian, G., & Rach, R., "Modified adomian polynomials", Mathematical and Computer Modelling, Vol.24, No.11, pp.39~46, 1996, doi: 10.1016/S0895-7177(96)00171-9
  9. Barrio, R., "Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs", Applied Mathematics and Computation, Vol.163, No.2, pp.525~545, 2005, doi: 10.1016/j.amc.2004.02.015
  10. Ario, I., "Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.39, No.4, pp.605~617, 2004, doi: 10.1016/S0020-7462(03)00002-7
  11. Ha, J., Shon, S., & Lee, S., "The Dynamic Buckling and Critical Load of the Spatial Truss under the Beating-wave Load", Journal of the Architectural Institute of Korea Structure & Construction, Vol.32, No.7, pp.23~31, 2016, doi: 10.5659/JAIK\_SC.2016.32.7.23
  12. Ha, J., Shon, S., Lee, S., & Hwang, K. J., "Equilibrium Point and Stability of Double-Free-Nodes Space Truss Under Symmetric Condition", Journal of Korean Association for Spatial Structures, Vol.19, No.4, pp.69~76, 2019, doi: 10.9712/KASS.2019.19.4.69
- Received : March 28, 2020
  - Revised : April 16, 2020
  - Accepted : April 17, 2020