

수학교육에서 인문학적 상상력에 대한 소고

박만구(서울교육대학교, 교수)

An overview on humanistic imagination in mathematics education

Park, Mangoo(Seoul National University of Education, mpark29@snue.ac.kr)

초록

이 연구의 목적은 수학에 인문학적 상상력을 접목하는 것이 수학교육에 주는 의미를 논의하고, 수학교육에 시사점을 제안하는 것이다. 전통적으로 수학은 추상적 사고를 대상으로 하기 때문에 우리의 삶의 문제와는 거리가 있다고 인식되었다. TIMSS나 PISA와 같은 국제 연구에 따르면, 우리나라 학생들의 수학교육성취도는 다른 선진 국가들의 학생들에 비하여 상대적으로 높으나, 수학에 대한 태도는 매우 부정적이고 삶에 대한 만족도도 낮은 편이다. 수학과 인문학적 상상력을 연계하여 학습하도록 하는 것은 학생들에게 인간의 삶의 문제에 대하여 인문학적인 관점으로 보도록 한다. 이 연구에서는 수학교육을 위한 수학과 인문학적 상상력을 접목의 의미를 생각해 보고, 학교의 수학교육에서 적용해 볼 수 있는 몇 가지 사례를 소개한다. 연구자는 수학을 배우는 궁극적인 이유는 학습자로 하여금 깨달음을 얻도록 하는 것이고, 모두가 보다 행복한 삶을 살아가기 위한 것이어야 한다고 주장한다.

Abstract

The purpose of this study is to discuss what the incorporation of humanistic imagination into mathematics means to mathematics education and to suggest implications for mathematics education in school mathematics. Traditionally, mathematics has been perceived to be far from our life problems because it targets logical and pure abstract thinking. According to international mathematics and science studies such as TIMSS and PISA, Korean students have relatively high mathematics achievement in the international research, but their attitude toward mathematics is very negative and their awareness of why they are learning mathematics and their satisfaction with life is low. In mathematics education, linking mathematics with humanities imagination allows students to view problems of human life from a humanities perspective, and to have an understanding of others and reflect on themselves from a new perspective. The researcher introduces several examples of whether mathematics and humanistic imagination can be combined for mathematics education. In this study, the ultimate reason for learning mathematics is to achieve learners to realize the principles of life or Dharma, and to live a happier life. However, in order to expand its rich meaning by making these new attempts in mathematics education, the researcher argued that tolerance and patience are needed for many challenges and difficulties in improving the quality of mathematics content itself including applying humanistic imagination to mathematics properly.

* 주요어 : 인문학, 상상력, 수학교육

* **Key words** : humanity, imagination, mathematics education

* 본 논문은 2017년 대한민국 교육부와 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2017S1A5A2A01026549).

* This work was supported by the National Research Foundation of Korea Grant funded by the Korean Government (NRF-2017S1A5A2A01026549).

* **Address**: Department of Mathematics Education, Seoul National University of Education, Seoul, Korea

* **ZDM Classification** : D30

* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97D40

* **Received**: May 1, 2020 **Revised**: May 22, 2020 **Accepted**: May 27, 2020

I. 서론

수학은 ‘만물은 수’라고 역설한 고대의 피타고라스학파로부터, 수학으로 세상을 이해하려 한 Freudenthal(1991)에 이르기까지 수학은 인간의 삶 속의 저변에 흐르는 현상을 설명하기 위한 도구로서의 역할을 해 왔다. 그리고 고대로부터 현재까지 많은 사람들은 수학을 가장 논리적이고 이성적인 학문으로 인식해 오고 있다(Aristotle, 1952; Dossey, 1992). 수학은 가장 합리적이고 이성적인 학문인 반면 상상은 비이성적이고 감성적인 것으로 수학과는 거리가 있는 것으로 여겨지기도 했다(Lakoff & Nunez, 2000). 따라서 학생들에게 수학은 어느 학문보다도 어렵게 인식되기도 한다(Fritz, Haase, & Rasanen, 2019). 이런 전통적인 생각은 학교 수학에도 남아있어서 많은 사람들은 아직도 수학은 인간의 감성이나 상상력과 거리가 있는 것으로 생각한다.

그러나 de Morgan(1866)과 같은 수학자는 수학적 발명을 이끈 힘은 합리성보다는 상상력이라고 주장한다(p.132). 사실 수학사에서 보면 상상력은 직관력과 함께 많은 수학자들에게 비유클리드와 같은 새로운 수학을 개척해 가는 역할을 해 왔다. 또한 인문학은 그 바탕이 철학으로 고대 소크라테스나 플라톤으로부터 현대의 칸트나 폰티와 같은 철학자에 이르기까지 관심의 중심은 인간이고 인문학이었다(Kang, 2012). 수학과 인문학은 인간의 삶과 밀접한 관련이 있는 학문이라는 것을 부인할 수는 없을 것이다. Einstein(1999)은 “상상력이 지식보다 중요하다”(p.25)고 주장하면서 상상력의 중요성을 강조하였다. 문학이나 예술에서는 작품의 아이디어를 내는 핵심은 상상력이라고 해도 무리가 아닐 것이다. 대부분 작가들은 그들의 경험에 상상력을 덧입혀 우리의 공감을 이끌어 내고 있다. 따라서 문학과 수학의 연계는 새로운 가능성을 제공할 수 있을 것이다.

우리나라에서도 학교교육에서 인문학의 중요성을 인식하고 대통령령으로 ‘인문학 및 인문정신문화의 진흥에 관한 법률 시행령’(2017년 제28211호)을 공포하여 인문학교육을 위한 정책을 수립하였다(Ministry of Education, 2019). 학생들도 의외로 인문학에 대한 필요성이나 관련 교과목의 개설을 원하고 있으나, 학교 현장에서는 교사들의 역량 부족으로 제대로 된 인문학 교육을 하지 못하고 있

는 실정이다(Kim, 2019, p.319).

2015 개정 교육과정에서는 추구하는 인간상으로 바른 인성을 갖춘 창의융합형 인재로 규정하고 있다(Ministry of Education, 2015). 구체적으로 보면, “바른 인성을 가지고 인문학적 상상력과 과학기술 창조력으로 새로운 지식을 창조하고 다양한 지식을 융합하여 새로운 가치를 창출할 수 있는 사람”(Ministry of Education, 2016, p.42)으로 인간상을 규정하여 바른 인성, 인문학적 상상력, 창조력, 융합, 가치 창출 등을 강조하고 있다. 가장 먼저 ‘바른 인성’을 내세워 여타의 능력이 바른 인성을 기본으로 해야 함을 전제로 하고 있다. 또한 개정의 주안점을 “인문·사회·과학기술 기초 소양을 균형 있게 함양하기 위한 교육과정”(p.26)으로 하고 있고, “배움을 즐기는 행복교육”(p.27)과 “학습의 즐거움을 경험”(p.146)하도록 하고 있다. 교육과정 총론에서 강조하는 것은 당연히 수학과에서도 강조되어야 한다. 그러나 수학과 학문적인 성격상 교사들에게 이런 교육과정의 정신을 실현하기 가장 어려운 교과 중의 하나일 수 있다.

우리나라 학생들은 TIMSS나 PISA와 같은 국제 수학 학업성취도에서는 일관되게 다른 선진국의 학생들에 비하여 상대적으로 높으나, 수학에 대한 태도는 매우 부정적이며, 왜 공부를 해야 하는지에 대한 이유에 대한 확고한 인식이 부족한 것이 현실이다(Mullis, Martin, Foy, & Hooper, 2015, p.48, p.191; OECD, 2018, pp.250-251). 현재 우리나라의 현실은 자신이 더 이상 수학 공부하는 것을 포기한 사람으로 생각하는 소위 ‘수포자’ 학생의 비율이 학년이 올라가면서 증가하고, 수업에 흥미를 나타내는 학생의 비율이 지속적으로 낮아지는 것이 문제다(Korea Institute of Curriculum & Evaluation, 2017, p.4). 학생들의 수학에 대한 태도가 부정적인 이유는 여러 가지가 있을 수 있겠지만, 수학 시간에서 교사가 학생들의 호기심이나 흥미를 충분히 자극하지 못하고 있기 때문일 것이다. 수학 시간에 학생들에게 자유로운 상상력과 지적인 자극을 줄 수 있어야 한다.

지금의 학생들이 사회에서 중추적인 역할을 하면서 살아갈 시대는 지금보다도 더 많이 현재 인간이 하는 일들을 인공지능을 기반으로 한 첨단 기술이 대체하게 될 것이다(Japan Economic Daily, 2019; Ministry of Education, 2016; OECD, 2019). 따라서 적어도 당분간은

기계가 대체할 수 없는 공감이나 감정과 같은 인간적인 측면이 중요해 질 것이다(Lee, J. S., 2019; OECD, 2019). 인간성이 매말라가는 첨단 시대가 될수록 인간에 성찰과 인성 함양 그리고 공감 능력에 대한 중요성이 더 강조된다(Kim, J. H., 2018, p.123; Kim, 2020, p.54; Kwon, 2018). 인공지능 기반 사회에서 인공지능적 상상력, 인문학적 상상력 또는 인문학적 성찰이 필요하다(Park, C., 2019, p.182, p.205).

2015 개정 교육과정에서도 강조하였듯이, 앞으로 '창의 융합'적인 역량이 필요하다. 지금까지의 STEAM 교육을 중심으로 한 융복합교육에 대한 연구나 자료는 비교적 많다(e.g., Guyotte, Sochacka, Costantino, Walther, & Kellam, 2014; Li & Schoenfeld, 2019; Lee et al., 2012; Lee & Kim, 2013; Park et al., 2016). 그러나 수학과 인문학적 상상력을 융합한 프로그램이나 자료는 매우 미흡한 실정이다. 국내에서 2000년부터 2017년까지 인문학적 상상력에 대한 논문은 44편(Kim, Oh, & Park, 2019)으로, 다른 주제에 비하여 많지 않은 편이며, 수학교육 분야에서는 Lee(2016)의 상상력에 대한 연구가 유일하다. 수학교육분야에서도 여러 가지 소재와 상황 속에서 인문학적 상상력을 연계하여 생각해 보도록 하는 시도가 필요하다.

미래 사회에서는 대부분 인간이 하는 일을 인공지능이 대체하게 될 것이다. 이런 시대에 인간에게 요구되는 것은 인간만이 가질 수 있는 공감과 감성이다. 본 연구에서는 수학과 인문학적 상상력의 접목이 교사와 학생들로 하여금 수학에 대하여 새롭게 인식을 하도록 하고, 수학 시간에 보다 활력을 불러일으킬 수 있는 방법으로 보고 있다. 이런 접근은 아리스토텔레스가 말한 '전체는 부분의 합보다 크다'는 계슈탈트 심리학의 핵심적인 사고로, 수학 시간에 각 학문적인 요소를 개별적으로 배우는 것보다 동시에 통합적이고 융합적으로 접근하려는 시도로 학생들에게 보다 의미 있는 학습을 하도록 하는 접근이다.

본 연구의 목적은 수학과 인문학적 상상력의 연계의 의미를 살펴보고, 수학교육에 적용할 수 있는 몇 가지 사례 및 수학교육에 시사점을 제시하는 것이다.

II. 이론적 배경

1. 수학과 상상력

수학의 본질은 순수한 사고의 과정과 산출물이라고 할

수 있다. 플라톤은 수학은 인간의 외부로부터 오는 정신적인 추론을 돕는 것으로 철학자들에게 수학이 필요하다고 주장하였다(Aristotle, 1952, p.510). 그런데 칸트어는 수학의 본질은 자유에 있다고 주장하는데 이는 자유로운 상상력이 수학적 사고에 중요하다는 생각이라고 할 수 있다. 현대에 들어오면서 학습자 내부에서의 구성활동을 강조하면서 학습자들에게 스스로 수학을 발명하는 경험을 할 수 있도록 돕는 것을 강조하게 되었다(Dossey, 1992, p.42).

상상력은 미래의 일을 가정하는 사전가정(prefactuals) 또는 역사적으로 있었던 과거의 일을 재조직화하는 사후가정(counterfactuals)에 대한 정신적 시뮬레이션으로 볼 수 있다(Lee, Jung, & Park, 2014, p.91). 이런 면에서 시간적으로 생각해 보면 상상력은 정신적 시간여행이라고 할 수 있다. 상상력은 인간의 인지, 정서, 행동에 있어서 자기조절 및 반성 등에 영향을 주고, 사고방식이나 학습 성취에도 영향을 주게 된다(Rose, Sanna, & Galinsky, 2005; Taylor, Pham, Rivkin, & Armor, 1998).

상상력은 고대 희랍의 판타지아(phantasia) 또는 라틴어 나타나다(imaginato)에서 유래한다(Schofield, 1978, p.99). 따라서 상상력의 이면에는 다른 사람의 생각이나 행동을 표현하고 모방하는 의미를 내포하고 있다. 교육에 있어서 상상력은 중요한 역할을 하지만, Egan과 Nadane(1988)와 같은 근대의 철학이나 심리학의 연구 이전에는 한낱 '환상' 또는 '공상' 등으로 여겨졌다. 따라서 엄격한 논리를 강조하는 수학을 배우는데 상상력은 방해의 요인으로 생각되기도 하였다.

상상력은 철학자들에게도 논의의 중심에 있어 왔다. Lee(2015)는 칸트는 상상력을 순수 감각적인 것과 순수 사유 사이의 제 3의 역할을 하는 중재자 또는 매개(medium) 역할을 하는 것으로 해석하였다. 칸트는 상상력을 '부여된 현실적인 자연으로부터 다른 자연을 창조해 낼 수 있는 힘'인 동시에 '연상의 법칙(경험법칙)에서 해방된 자유를 느끼게 하는 힘'으로 묘사하고 있다(Kang & Kim, 2006, p.20). 이런 해석에 의하면 상상력은 지적 자유를 의미한다고 할 수 있다. 칸트는 사고하는 능력으로 사유는 감각적인 직관에 의하여 받아들인 정보를 기반으로 세계와 간접적으로 관계하게 된다고 보았다. 또한 상상력은 각 감각을 통하여 들어 온 정보를 종합하는 능력

으로 보았다(Kim, H., 2015, p.92) 그런데 사르트르와 하이데거는 칸트의 상상력에 대한 이런 생각에 비판을 한다. 이들은 칸트의 '순수이성비판'에서 말하는 상상력이 의식의 본성적 힘이라는 것을 지적하지 못하고, 상상력을 단지 사물과 같은 것으로 보고 있다고 비판을 하였다.

Kim(2007)은 '상상력'과 '상상계'를 이미지를 매개로 하여 비교하여 설명하면서 20세기 이후에는 인문학에서 '상상계'에 대한 관심이 많아졌다고 주장한다. 그는 상상력(想像力, L'imagination)은 "이미지를 낳고 사용하는 능력"(p.309)으로, 상상계(像想界, L'imaginaire)는 "작품들 속, 가시적 이미지들(그림, 대생, 사진) 혹은 언어적 이미지들(메타포, 상징, 이야기)의 밑바닥에 물질화된 생산물들 혹은 심적 생산물들의 총체"(p.309)로 구분하여 설명하고 있다.

Seo(2013)는 사르트르와 들뢰즈의 사상을 분석하여 인식의 획득에서 상상력의 역할에 대하여 논의하였다. 그는 상상력에 대응하는 대상이 현실에 존재하지 않는다는 사실 때문에 비진리를 생산하게 된다고 주장하였다. 우리는 인식의 과정에서 상상이라는 비진리의 영역에 있을 수밖에 없지만, 우리는 스스로 이런 예측의 상태에서 자유롭고자 노력한다고 보았다. 그는 상상력이 인식의 출발점이며, 상상력의 부력을 이용하지 않고는 우리는 이성의 순수한 이해에 도달할 수 없다고 주장하였다.

Kang과 Kim(2003)은 초기 르네상스 철학에서 상상력에 대한 분석을 하였다. 그들은 고대 그리스 철학에서는 상상력을 모방의 하위 개념으로 파악하였지만, 현재는 상상력이 창조력의 원천으로 여긴다고 보았다(p.2). 이들은 상상력은 이미지를 만드는(image-making) 능력으로부터 실제하지 않는 가상을 만들어 내는 능력으로 보았다. 사실 상상력은 모방뿐만 아니라 창조의 속성을 포함한다고 할 수 있다. Bachelard(2001)도 상상력은 이미지를 재생하는 능력보다는 이미지를 변형하는 능력으로 보았다(p.116). 즉 상상력은 받아들인 정보를 재구성하고 창조하는 능력이라고 할 수 있다. 또한 Kang과 Kim(2006)은 Hume은 상상력을 영혼 속의 마법적 재능으로 표현하면서 신념을 발생시키는 정신의 능력으로 본다고 분석하였다(p.17).

Descartes의 생각에 의하면 상상력과 오성은 서로 영향을 주게 된다고 믿었다. 오성은 상상력에 의해서 움직

여질 수 있고, 또 반대로 오성은 상상력에 작용을 가할 수 있다. 마찬가지로 상상력은 운동신경의 힘을 통해 대상으로 향하도록 감각에 작용을 가할 수 있고, 또 반대로 감각은 상상력에 작용을 가하여 그 안에 이른바 물체의 상을 그려낼 수 있다(Descartes, 1979, Kang & Kim, 2003, p.6 Requotation).

Descartes의 논리에 의하면, 상상력은 수학의 논리적인 인식과 밀접한 관련이 있고 서로 상보적이고 변증법적인 관계를 가지고 있다. Klein(1979)은 수학을 이해의 문제보다는 상상력의 문제로 보았다(p.207). 그리고 수학은 직관과 논리의 상호 작용으로 발달해 왔다고 보았다. 직관은 새로운 사고를 가능케 하고, 형식적인 논리는 그 사고를 정교해가면서 논리를 보다 엄격한 논리로 발전시키면서 새로운 수학을 만들어 왔다고 할 수 있다(McLarty, 1997, p.97 Requotation; Pointcaré, 1899, p.129). 수학사에서도 0, 음수, 복소수 등의 발견도 새로운 수학에 대한 필요성과 기존 수학에 대한 의심과 도전으로부터 나온 것이다. 수학사에서 비유클리드 기하학은 '한 선분과 서로 다른 두 직선이 교차할 때 두 내각의 합이 직각의 두 배보다 작으면, 이 직선을 무한히 연장했을 때 두 내각의 합이 직각의 두 배보다 작은 쪽에서 직선이 교차한다'라는 Euclid의 제5공준에 대한 의심에서부터 시작했다. 즉 이렇게 생각하면 안 될까 하는 상상으로부터 새로운 수학이 시작했다고 할 수 있다.

초등학교 수학에서도 사용하는 무정의 용어인 점(point, 點), 선(line, 線), 면(surface, 面)은 명시적이지는 않지만 Euclid의 원론에서 정의를 따른다. 점은 '위치가 있으나 부분이 없는' 것으로, 선은 '폭이 없는 길이'로, 면은 '길이와 폭만 가진 것'으로 정의(Fitzpatrick, 2007, p.6) 하는데, 이 용어들을 이해하기 위해서는 상상력이 필요하다. 수학은 본질적으로 정신의 작용을 대상으로 하는 추상적 사고를 대상으로 하고 있다. 가장 초보적인 $1+1=2$ 라고 하는 연산 식의 의미도 외부에 있는 것이 아니고 오직 '머릿속에 있는 생각'(von Glasersfeld, 1995, p.1)이라고 할 수 있다. 초등학교에서 배우는 분수 $\frac{3}{5}$ 에 대하여 말해보라고 요구하면, 학생들은 자신들의 머릿속에는 이 분수에 대한 다양한 이미지나 생각을 떠올리게 될 것이다. 초등학교에서 원주율을 도출할 때 '무한히 잘라서 붙인다'는 말이나, 고등학교에서 다루는 극한의 개념인

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) = \infty$ 이나 변곡점에서 미분값이 0이 된다는 것 등을 이해하기 위해서는 상상력이 필요하다.

수학에서 상상력은 창의성과도 관련이 있는데, 수학적 창의성에 대한 연구를 활발하게 해 온 Mann(2006)은 수학의 핵심으로 상상력과 창의성을 강조한다(p.236). 수학의 본질은 단순히 답을 찾아가는 것이 아니라 창의적으로 생각하는 것이라고 주장한다. 기호로 나타내는 수학적 표현은 그 자체로 압축적이고 상징적이기 때문에 보다 활발한 상상을 불러일으킬 수 있는 여지를 가지고 있다. 그런데 이런 수학 자체의 잠재적인 상상력에 인문학적 측면에서 생각해 볼 수 있는 상상력을 접목하면 그 다양성은 커지게 되고 세상과 인간을 이해하는 깊이는 더 깊어 질 수 있다.

2. 인문학적 상상력

인문학(人文學, Humanity)란 “인간의 진정한 가치와 삶의 궁극적 의미를 탐구하는 학문”(National Institute of Korean Language, 2020)으로 정의할 수 있다. 서양에서 인문학의 어원은 ‘후마니타스(Humanitas)’에서 인간에게 필요한 지식의 습득 또는 삶의 수준을 높이려는 일체의 인간 지성을 총칭하는 의미라고 할 수 있다. 간단히 인문학이라고 하면 대부분 문(文), 사(史), 철(哲)을 떠올릴 것이다. 그런데 Do(2008)는 “상상의 능력을 최대화하려는 것이 문학을 포함한 예술이며, 이성의 능력을 최대화하려는 것이 철학”(p.186)이라고 언급하였는데, 그에 따르면 철학은 이성의 능력에 더 가깝다.

인문학은 인간과 세상을 이해하는 것이고, 타인과 나를 성찰하는 학문이라고 할 수 있다. 인문학은 인간이 살아가면서 경험하거나 상상할 있는 생로병사나 희로애락을 포함한다고 할 수 있다. 다시 말하면, 인간의 모든 면을 다루는 학문이다. 인간은 빈 몸으로 태어나서 다양한 삶을 살다가 빈 몸으로 되돌아간다. 빈 몸으로 태어나기 때문에 기독교에서 말하는 ‘원죄’ 의식 안에는 결핍이 있을 수밖에 없고 종교와 인문학을 통해 끊임없이 완성해 가려고 노력한다는 것이다. Jidam(2019)은 성경에서는 ‘진리가 너희를 자유케 하리라’(요한복음 8장 32절)라고 말하지만, 인문학에서는 ‘상상력이 너희를 자유케 하리라’라고 믿는 것이라고 주장한다. 인문학적 상상력은 우리를 아집과 몰이해로부터 자유케 할 수 있는 방법이 될 수 있다.

인문학적 상상력(人文學的 想像力, Humanistic Imagination)은 간단히 말해서 인문학과 관련한 상상력이라고 할 수 있다. 인문학적 상상력은 인문학과 상상력의 조합어로 이를 정의하는 것은 두 단어의 정의 이상으로 모호하고 복잡하다. 본 연구에서는 포괄적으로 인간의 삶과 관련한 언어, 이미지, 상징을 포함한 사고의 능력으로 정의한다. Park(2016)은 인문학적인 상상력은 “인간과 세계에 대한 이해와 해석, 비판과 대안 모색”(p.130)을 위해 필요하다고 보았다. Lee(2010)는 문학적 상상력에서 감성의 중요성을 설명하면서 감성은 이성의 한계를 극복할 수 있는 것으로 보았다. 그는 인문학적 상상력이 기업 등에서 글로벌 경쟁력과 결부하여 왜곡되고 있다고 주장하였다. 그는 없는 세계를 마치 있는 것 같이 그려낼 수 있는 능력을 상상력으로 보고, 인문학적 상상력은 인류가 나아갈 방향을 제시한다고 주장하였다(p.340).

대상을 간략하게 표현하면 상상력의 가능성은 더 증가한다. 인문학적 상상력을 적용할 수 있는 것은 피카소의 ‘황소’ 작품처럼 최대한 간략화한 그림으로 표현한 미술도 있지만, 가장 쉽게는 문학 작품에서 찾아 볼 수 있다. 하나의 예로, 헤밍웨이가 쓴 가장 짧은 소설로 알려진 여섯 단어로 된 아래의 작품이다.

For sale : Baby shoes. Never worn.

판매 : 아기 신발. 한 번도 안 신었음.

이 소설은 짧지만 많은 상상을 불러일으킨다. 우리나라에도 짧은 시들이 있는데, 다음은 정현중(1978) 시인의 ‘섬’이라는 시이다.

사람들 사이에 섬이 있다.

그 섬에 가고 싶다.

‘섬’에 대하여 여러 가지 해석이 가능하지만 단절된 인간관계 속에서 자유롭게 소통할 수 있는 통로로 생각할 수 있다. 또는 섬이라는 공간으로 도피하여 자유롭고 싶은 마음으로도 생각할 수 있다. 이는 Kim(1952)은 “내가 그의 이름을 불러주었을 때 그는 나에게로 와서 꽃이 되었다”와 같이 본질에 대한 회귀를 나타내는 것으로도 해석할 수 있다. 또한 Saint-Exupéry(1943)의 어린왕자에서의 어린왕자와 여우의 대화에서 사뭇 또는 길들임에 대

한 것으로, 데리다나 들뢰즈의 다른 섬과는 구별되는 ‘차이 자체’ 또는 ‘차연(差延)’(Park, 2009, pp.48-51)을 만들어 내는 것으로, 또는 섬을 사랑하는 사람 사이에 있는 고독이나 기다림으로 해석할 수도 있다. 이와 같이 짧게 압축하면 할수록 상상력의 가능성은 더 커진다. 수학은 본질적으로 수나 기호를 사용하여 표현하므로 늘 압축적이다.

Vygotsky(2004)도 상상력에 중요성에 대하여 언급하였는데, 인간의 손으로 하는 모든 문화는 인간의 상상력과 창의력의 산물이기 때문에 자연계와 구별된다고 하였다(pp.9-10). 그는 인간이 하는 모든 일에 상상력이 개입한다고 보았다. Pope(2005)는 생산적 창의력과 마음의 힘인 정신적 이미지인 상상력 사이에 밀접한 관련이 있다고 주장한다(p.39). 그런데 에디톨로지(Editology)라는 말을 사용하면서 우리가 생각하는 모든 상상력과 창의적인 아이디어는 우리가 이미 가지고 있는 아이디어를 편집하는 것이 불과하다고 주장한 Kim, J. H.(2015, p.24)의 생각도 어느 면에서는 창의성을 설명할 수 있는 적절한 생각이다. 하늘 아래 새로운 것은 없다라는 말이다. 아는 없는 것에서 ‘전혀 새로운’ 것을 만들어 낼 수 없다는 페러독스를 설명할 수 있는 아이디어이기도 하다. 상상력은 창의성과 관련이 있다고 생각되기도 하지만 창의성은 상상력이 없어도 발현된다고 생각되기도 한다. 또한 상상력을 기르고 삶에 적용해야 그 위력을 발휘할 수 있다(pp.11-12). 상상력과 창의성의 조합은 새로운 제품을 만들어내도록 할 수 있다.

생물생태학자 Choi(2012)는 여러 유명 뇌 과학자들의 말을 인용하여 뇌 자체로 의식을 이룰 수는 없고 뇌와 외부 환경의 작용의 상호 작용 안에서 의식이 형성된다고 주장한다(pp.280-282). 이 외부 작용이란 환경적인 요인도 될 수 있지만, 학습의 과정에서 어떤 자료를 제시하는가도 중요하다고 할 수 있다. Jeon(2005)은 그의 논문의 말미에 빨아자르(Paul Hazard)의 말을 인용하여 “상상력은 영혼과 마찬가지로 저절로 길러지는 것이 아니라 양식을 원한다. 어린이들은 최초의 이미지를 부수고 변형하여 다시금 새롭고 아름다운 것으로 만들어 낼, 술한 이미지를 들려 달라고 졸라댄다”(pp.217-218)고 진술하면서 아이들에게 책을 통해 날개를 달아 주라고 말한다. 이런 주장에 따르면 수학과 문학을 연계한 인문학적 상상력의

함양은 의미가 있는 접근이고 할 수 있다. 이는 인문학적 상상력의 함양을 위해서 학교 현장에서 지속적인 적용과 보완 작업이 필요함을 말해 준다.

3. 수학교육에서 인문학적 상상력

인문학적 상상력은 어떤 면에서는 모험이다. 어떤 모험도 열어 놓는 것이 상상력이다. 아무 것도 없는 빈 원고지에 글을 쓰거나 빈 캔버스에 그림을 그리거나 빈 악보에 음표를 그려서 작곡을 하는 것은 당연히 상상력이 요구된다. 인문학적 상상력은 이런 활동을 포함하여 보다 있는 사실을 다른 관점으로 생각해 보는 것을 포함하여 보다 광범위하게 생각해 볼 수 있다.

Whitehead(1929)는 교육의 목적을 모든 정신적인 것 중에서 가장 간결한 스타일에 관한 센스를 얻도록 하는 것이라고 주장하였다(p.8) 이런 면에서 수학은 모든 교과 중에서 가장 이런 면에 충실한 교과라 할 수 있다. 수학은 가장 간결한 형식으로 표현하는 언어이다. 물론 수학 자체가 가지고 있는 상징성이나 추상성 또는 상상력도 고려할 수 있겠으나, 본 연구에서는 수학에 인문학적 상상력의 접목으로 보다 다양한 관점에서 상상력을 확장해 갈 수 있다고 본다.

Oh(2018)는 0과 1을 인문학적인 관점에서 논의하였다. 그는 양자역학에서는 0은 zero이면서 무한대를 의미하는 것으로, 이는 곧 영점에서 시작하여 우주 시공간의 존재로 확장해 가는 것으로 생각할 수 있다고 말한다(p.28). 0은 변곡점으로 끝이자 시작이 될 수 있다. Freudenthal(1991)은 수평적 수확화란 인간이 살고 행동하고 고통 받는 현실 세계를 기호의 세계로 인도하는 것이고, 수직적 수확화란 기계적으로 뿐만 아니라 이해와 반성에 의하여 기호를 형상화하고 재형상화하거나 조작하는 세계라고 말한다. 삶의 세계는 실제로 경험하는 것이라면 기호의 세계는 추상화와 관련이 된다(pp.41-42). 이 수확화의 과정에서 인간의 삶의 문제를 수학의 문제로 치환하며 다시 수학의 문제를 인간의 삶의 문제로 치환하게 된다. 이 과정에서 자연스럽게 인문학적 상상력을 접목할 수 있는데, 이는 거의 대부분의 인간사의 문제해결은 인문학적 상상력을 필요로 하기 때문이다.

Polya(1945)는 문제해결의 4단계를 제시하여 문제를 처음 접하는 사람들에게 어떻게 문제를 해결할 수 있는

지에 대한 일반적인 접근 방법을 제시하였다. 본문에서는 전형적인 수학문제들을 예로 들어서 문제해결을 설명하고 있다. 그런데 뒷부분에 제시한 첫 번째 문제로 “곰 한 마리가 남쪽으로 1마일을 간 후, 동쪽 방향으로 1마일을 가고, 다시 왼쪽으로 돌아 북쪽으로 1마일을 갔더니 출발한 지점에 도착하였다. 거기에서 만난 곰의 색깔은 무슨 색인가?”(p.234)라는 비정형적인 수학 문제를 제시하였다. Polya가 첫 번째로 이런 문제를 제시한 것은 아마도 문제를 해결할 때 선입견에 사로잡히면 안 된다는 것을 말하고 싶었을 것이다. 교과롭게도 이 문제는 비유클리드 기하의 핵심인 곡면에서의 두 평행선이 만나는 예이다.

인문학적 상상력은 어린 학생들의 삶 속에서 일어나는 현상에 대하여 보다 세밀하게 볼 수 있는 눈을 갖도록 한다. 예를 들면, 학급에서 볼 수 있는 왕따의 문제, 언어 폭력의 문제, 다문화 학생들과의 갈등 문제, 남녀 학생 간의 갈등 문제, 비싼 옷을 입는 친구와 그렇지 못한 친구의 심리적 갈등 문제 등에 대한 원인과 문제해결은 인간에 대한 이해와 인문학적 상상력을 생각해야만 한다. 더 나아가 국제 기아, 환경오염, 미세먼지, 인권, 빈부 격차, 공정무역, 전염병 등의 문제도 인문학적 상상력을 함께 고려해야 하는 문제들이다.

Choi(2012)가 다윈지능은 생물학뿐만 아니라 사회학, 경제학, 윤리학, 심리학, 의학, 게임 이론, 음악, 미술 등 모든 영역에 걸쳐서 영향을 줄 수 있다고 주장하는 것과 같이, 인문학적 상상력은 모든 학습이나 인간의 삶과 연계할 수 있다. 인문학적 상상력은 삶에 대한 질문을 하는 것이고, 삶에 대한 반성이고 깨달음을 얻기 위한 것이다. 따라서 인문학적 상상력은 수학에 더 많은 생동감과 활력을 줄 수 있는 방법이 될 것이다.

III. 수학교육에서 인문학적 상상력의 적용

인문학적 상상력을 각 수준별 수학교육에서 활용할 수 있다. 그러나 제시할 수 있는 사례는 한정적이고 학생들의 수준에 따라서 다양한 응용은 수학교육을 담당하는 교사가 확장해 갈 필요가 있다.

상상력은 고대 희랍의 판타지아(phantasia) 또는 라틴어 나타나다(imaginato)에서 유래한다(Schofield, 1978, p.99). 따라서 상상력의 이면에는 다른 사람의 생각이나

행동을 모방하는 의미를 내포하고 있다. 상상력도 다른 사람의 생각이나 행동을 따라서 연습할 필요가 있음을 말하고 있다.

상상력은 예술이나 음악에 국한 하는 것으로 여겨졌던 것을 본격적으로 교육 전반에 끌어드린 이는 스토리텔링에 대한 많은 저서를 낸 Kieren Egan 교수라고 할 수 있다. 그는 특히 수업에서 스토리텔링을 통하여 학생들의 상상력과 청자의 감정에 집중하도록 하고, 추상적인 개념의 이해하도록 하는데도 도움이 된다고 보았다. Egan은 상상력도 자신이 알고 있는 범위 내에서 가능하다고 보았으므로, 그리고 학습의 과정에서 학습의 어려움과 새로운 것을 알아가는 기쁨을 가지도록 해야 한다고 주장한다(Egan, 2014, p.55). 그의 이론에 의하면 인문학적 상상력을 교육에 활용하는 것은 학습자 자신에게 의미를 갖도록 하는 학습이 가능하도록 할 수 있다.

인문학적 상상력과 과학기술의 창조력 그리고 인성은 2015 개정 교육과정에서 총론에서 강조하고 있는 핵심어이다(Ministry of Education, 2015). 사실 도덕, 국어, 사회과 등에서는 교과목 자체의 성격상 자연스럽게 사회 현상 등과 연계하여 인문학적 상상력을 수업에서 적용할 수 있다. 그러나 수학에서 본격적으로 인문학적 상상력을 적용하는 예를 많지 않은 실정이다(e.g., Lee, 2016; Park, M., 2019).

[Table 1] Examples of topics of mathematics education for social justice (Osler, 2007, p.3)

Categories	Topic Examples
Political, Economic, and Social Issues	prisons, racial profiling, the death penalty, poverty, minimum vs. living wage, sweatshops, housing, gentrification, homeownership, war, defense budgets, military recruiting, public health, AIDS, asthma, health insurance, educational funding and equity, high stakes testing, class size, environmental racism, pollution, resource availability
Financial Education	credit cards, managing debt, paying for college, saving/budgeting money, opening bank accounts, high-cost loans, remittance rates

수학교육에서 인문학적 상상력과 연계하여 생각해 볼

수 있는 것 중의 하나가 '사회정의'(Gutstein, 2006)라고 할 수 있다.

예를 들면, 최저임금제 등의 문제를 수학으로 해결하면서 자연스럽게 부의 분배 문제도 다루고, 인간에 대하여 생각하면서 인문학적인 상상력과 연계할 수 있다.

Sandel(2010)의 말처럼 사회정의는 인간이 사회 속에서 살아가는 한 끊임없이 부딪치는 문제이다. 사회정의를 위한 부의 분배 문제 등은 단순한 수학 문제를 해결하는 것 이상을 요구한다. 다음은 수학교육에서 사회정의를 위한 소재의 예들이다(Osler, 2007).

교육을 미적인 측면에서 논의를 하면서 교육적 상상력을 강조한 Eisner(2009)는 교사의 입장에서 보면 가르치는 일을 예술이라고 주장한다(p.215). 예술은 본디 종합과 학이다. 이런 의미에서 수학 수업도 가능한 다양한 측면을 고려해 볼 필요가 있다. Dienes(1960)의 주장처럼 같은 수학적 의미라도 다양한 수학적 표현(Mathematical Variability Principle)이나 다양한 지각적 표현(Perceptual Variability 또는 Multiple Embodiment Principle)을 통하여 수학 개념의 이해를 더 깊게 할 수 있다.

그리고 상상력은 Watson과 Mason(2005)이 말하는 예 공간(Example Spaces)을 넓혀 주기 때문에 의미가 있다. 이들은 예 공간의 예로, 학생들에게 차가 2가 되는 두 수를 써 보라고 하고 이에 대하여 초등학교 저학년 수준에서 고등학교 수준까지 가능한 다양한 답을 보면 다음과 같이 다양하게 반응함을 보여준다(pp.34-37).

- (3, 5) (9, 11) (210, 212), (14.7, 16.7), $(1\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3})$
- (11, 13): 연속하는 소수의 예
- (11, 1): 아날로그시계에서 차가 2인 수의 예
- (100₂, 10₂): 이진수로 차가 2인 수의 예
- (2×5, 2×6) 곱셈식의 표현에서 차가 2인 예
- (-1, 1), (999, 1001): 0 또는 1000을 중심으로 반대 예 있는 수의 예

이를 일반화하여 나타내면,

- 어떤 수와 어떤 수보다 2 큰 수
- 어떤 수와 어떤 수보다 2 작은 수
- $[x, x+2]$
- $[a, b]$, $a-b=2$ 인 경우
- $[x-1, x+1]$

이다.

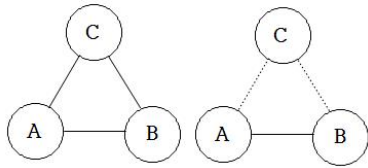
이와 같이 수학에서 상상력을 자연스럽게 유도할 수 있는 방법으로 일반적인 방법과는 반대로, 답을 제시하고 문제를 생각해 보도록 할 수 있다. 그리고 이 과정에서 인문학적인 상상력을 접목할 수 있다.

초등 수학에서 인문학적인 상상력을 더할 수 있는 방법은 다음과 같다. 예를 들면, 유치원이나 초등학교 저학년에서 1에서 5까지의 수를 배우는 시간이 있다. 이 때 대부분의 교사들은 각 수의 의미와 쓰는 것에만 집중할 것이다. 그런데 '3'이라는 수에 대하여 생활 속에서 쓰이는 예를 미리 조사를 하여 오도록 하면 수업 시간에 다양한 사례를 가지고 논의할 수 있다. 예를 들면, 우리의 삶 속에서 '3'이 쓰이는 예는 다음과 같은 것들이 있을 수 있다.

- 하루에 보통 3끼의 식사를 합니다.
- 가위바위보는 보통 3번 합니다.
- 신호등의 색은 3가지입니다.
- 재판에는 3심제도가 있습니다.
- 보통 등급을 상, 중, 하의 3가지로 표시합니다.
- 정부 기관은 입법, 사법, 행정의 3부가 있습니다.
- 책상의 다리는 최소 3개가 있어야 안정적으로 서 있을 수 있습니다.

이런 쓰임은 자연스럽게 3이라고 하는 수는 우리의 삶 속에서 마술과 같은 수임을 이해할 수 있을 것이다. 어린 학생들은 3은 안정적인 수이고 인간이 충분하다고 느낄 수 있는 횃수가 됨도 알 수 있게 된다. 이와 같이 삶 속에서 3의 쓰임의 의미를 생각해 보도록 하면서 인문학적 상상력을 접목하도록 할 수 있을 것이다.

중학교에서 배우는 $-1 \times -1 = 1$ 라는 수학적 사실도 처음 접하는 학생들에게는 이해하기 쉽지 않을 수 있다. 이를 학생들이 이해할 수 있도록 돕기 위해서 규칙성 등을 활용할 수도 있지만, 실생활의 문제와 연계하여 생각해 보도록 하기는 쉽지 않다. Strogatz(2012)는 이를 '내 적의 적은 친구'라는 것으로 생각해 볼 수 있는 예로, 1차 세계대전에서 각 국가들의 관계에 적용하기도 하였다. 그는 아래 그림은 안정성을 제공하는 경우라고 주장하였다(pp.18-21).



[Fig. 1] Relationship of $-1 \times -1 = 1$

위 그림에서 꼭짓점은 사람이고 연결하는 변은 관계를 나타낸다. 실선은 긍정적인 관계를, 점선은 부정적인 관계를 나타낸다. 위 두 관계는 각각 모두 친밀하거나 한 관계만 친밀하고 두 관계는 적대적이라도 안정적인 균형을 이룬다. 이와 반대로 모두 적대적이거나, 하나의 관계만 적대적인 경우는 모두에게 심리적인 스트레스를 주게 된다고 주장하였다. 이 관계는 곱셈의 논리와 유사하다. 즉, $-1 \times -1 = 1$ 의 논리를 삶 속에서 설명할 수 있다.

고등학교에서 배우는 되는 ($\sqrt{-1} = i$)은 상상력의 산물이라고 할 수 있다. 이런 수를 영어로는 imaginary number(상상의 수, 虛數)라고 한다. 실제 세상에는 존재하지 않는 수이기 때문에 이렇게 명명하는 것일 것이다. 그러나 이것도 첨단 양자과학의 핵심이고, 항공기 날개나 현수교 설계에서 필수적이다(Fardon, 2015, p.266). ‘제공하여 -1이 되는 수’를 일반적인 삶 속에서 생각하는 것은 불가능한 생각이다. 사실 수학사에서 보면 허수의 문제를 해결하기 위한 노력이 지속되어 오다 오일러에 의하여 정리가 되었다. 그런데 이런 생각을 가능하기도 하고 불가능하기도 하다! 그런데 $\sqrt{-1} \rightarrow i$ 로 생각하면서 이를 가능하도록 하였다. 즉, 허수 i 를 도입함으로써 상상을 현실화한 것이다.

인문학적 상상력과 수학교육을 연계하는 방법 중에서 수학과 문학을 연계하는 방법이 있을 수 있다. 수학과 문학의 연계는 교사들의 신념이나 흥미를 보다 긍정적인 방향으로 바꿀 수 있다(Wilburne & Napoli, 2008, p.1).

인문학적 상상력을 수학에 접목하기 위한 방법으로 문학과 수학을 연계하는 것은 학생들에게 재미와 인문학적 상상력을 자연스럽게 연계하도록 한다. 우리가 잘 알고 있는 이상한 나라의 앨리스(Alice in Wonderland)는 문학 작품 속에 수학의 내용을 자연스럽게 녹여 넣은 작품 중의 하나이다. 이 작품 속에서 여러 장소를 이동하면서 이 책을 읽는 이들의 상상력을 자극한다. 이런 책 중에는 조너던 스위프트가 쓴 걸리버여행기(Gulliver’s Travels)도

있다. 이 작품은 수학적으로 비례 관계와 인문학적 상상력은 인간에 대한 관심과 보살핌을 연계하여 활용이 가능할 것이다.

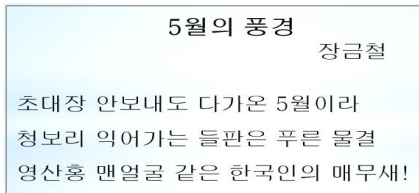
러시아의 대문호 Tolstoy(1886/2001)가 쓴 ‘인간은 얼마나 많은 땅이 필요하냐?’라는 짧은 글을 수학과 인문학적 상상력을 연계할 수 있다. 이 이야기의 줄거리를 약간 각색하면 다음과 같다. 바흠이라는 소작농이 자기의 땅을 가지고 싶어 하였는데, 어느 날 대 지주가 놀라운 제안을 한다. 그것은 다음날 해가 뜰 때부터 질 때까지 갈 수 있는 만큼 땅을 주겠다는 것이다. 바흠은 너무 기뻐서 다음날 새벽에 해가 뜨기 전부터 기다리다 해가 뜨자마자 출발을 한다. 그런데 정신없이 가다보니 너무 멀리 갔고, 해가 지기 전에는 돌아와야 한다는 말이 생각이나서 되돌아 뛰기 시작한다. 해가 질 때, 겨우 출발 장소에 도착했는데 바흠을 기진맥진하여 그 자리에 스러져 죽었다. 대지주는 하인들에게 “이 친구가 주었으니 키만큼 파서 묻어 주어라”라고 말하면서 이 이야기는 끝이 난다. 이 이야기에서 수학적 요소로, “바흠은 얼마나 멀리 갔을까요?” “바흠은 한 시간에 어느 정도의 속력으로 갔을까요?” 등의 수학적 내용을 가지고 이야기를 해 볼 수 있을 것이다. 그리고 인문학적인 질문으로 “바흠은 왜 죽었을까요?”라는 질문을 할 수 있을 것이다. 학생들은 여러 논의를 하겠지만 결국 바흠을 죽게 만든 것은 지나친 욕심이었다는 것을 생각해 보고, 자신들을 되돌아보면서 인간의 욕심이나 욕망에 대한 논의를 해 볼 수 있다. 이런 활동을 통하여 학생들은 인문학적 상상력을 발휘하게 될 것이고 인간을 이해하는데 도움을 줄 것이다.

초등학교 3학년에서는 분수의 크기를 처음으로 배우게 된다. 이 때, 분모와 분자의 상대적인 크기에 의하여 분수의 크기가 결정됨을 이해하여야 한다. 이를 ‘행복의 크기’와 연계하여 인문학적 상상력을 연계하여 아래와 같이 생각해 보도록 할 수 있다.

$$\text{행복의 크기} = \frac{\text{이미 가지고 있는 것}}{\text{가지고자 원하는 것}}$$

아무리 많은 것을 가진 부자라고 하더라도 더 많은 것을 가지려고 한다면 행복의 크기는 작아진다. 이런 관계를 가지고 우리의 삶을 되돌아보고, 어떻게 살아야 하는지에 대하여 논의해 볼 수 있을 것이다.

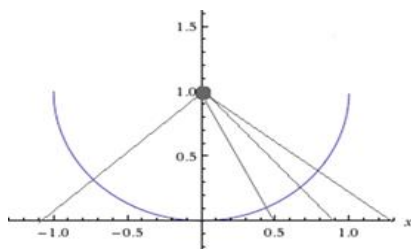
수학과 인문학적 상상력을 활용한 수업에서는 소재의 제한을 둘 필요는 없다. 특히, 문학과 수학은 인문학적 상상력을 함양을 위해 가장 잘 어울릴 수 있는 소재가 될 것이다. 장금철 시인의 시를 보고 발견할 수 있는 사실을 말해 보게 할 수 있다. 여러 답변 중 “글자의 개수가, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 4, 3입니다”라고 할 수 있다. 종장이 3, 5, 4, 3으로 끝나지 않고, 3, 4, 3, 4로 끝난다면 어떤 느낌인지 물으면, 아마도 ‘종결의 느낌’이 나지 않을 것 같다는 답변을 들을 수 있을 것이다.



[Fig. 2] A poem as a source

사실 양사언의 ‘태산이 높다하되~’, 남구만의 ‘동창이 밝았느냐~’, 정몽주의 단심가 ‘이 몸이 죽고 죽어~’ 등은 모두 정형시로 이런 패턴을 따른다. 시가 이런 리듬을 따라야 그 맛이 살아나기 때문일 것이다. 수학은 패턴의 과학이다. 우리의 삶에 다양한 패턴을 수학을 통하여 해석할 수 있다. 또한 이런 패턴들이 학생들의 수준에서 우리의 삶에는 어떤 의미를 주는지 생각해 보게 함으로써 인문학적 상상력과 연계할 수 있다.

0과 1 사이와 실수 사이의 원소의 개수, 즉 농도(cardinality)는 \aleph_1 로 같다. 이는 아래 그림과 같이 반원에 일대일대응을 시킬 수 있다. 아무튼 부분과 전체가 같을 수 있다는 것은 생활 속에서는 상상력을 발휘해야 하는 것이다.



[Fig. 3] Bijection of numbers between two intervals

이는 작은 것이 큰 것이고, 큰 것이 작은 것이라고 말할 수 있는 의미이다. 즉, 이는 칸토어가 말한 수학의 자유함이나 부분이 전체와 같을 수 있다는 상상력으로 가능한 사고라 할 수 있다. 이에 대해 인문학적 상상력을 발휘하면 반야심경의 ‘색즉시공, 공즉시색(色卽是空, 空卽是色)’의 의미와 연계하여 생각할 수 있다. 수학에서 말하는 관계성은 좀 더 포괄적으로 생각해 보면, 모든 것이 연결되어 있고 서로 관계하여 영향을 준다고 하는 불교의 연기론(緣起論)으로도 확장할 수 있다.

학년의 수준을 막론하고 학생들이 “선생님, 수학은 왜 배우나요?”와 같은 물어 보는 경우가 있다. 교사의 답변은 다양하겠지만, 사실 아이들에게 납득할만한 답을 주기가 쉽지 않다. 좀 더 구체적으로 초등학교 학생이 전개도를 왜 배워야 하는지 물을 수 있다. 수학에서 전개도를 배우는 이유가 여러 가지가 있겠지만, 건축물을 만들기 위해서는 존재하지 않은 입체인 건물을 머릿속에 상상하여 설계도면 또는 전개도를 그려야 한다. 건축가는 평면에 그려 준 그림인 설계도를 보고 입체로 만들 수 있어야 한다. 따라서 전개도를 배워야하고 전개도를 접어서 입체를 만들어 보면서 상상력을 길러야 한다. 상상력을 현실로 만드는 일은 Lee, J. C.(2019)의 말처럼 건설현장에서 자연스럽게 일어나고 있다. 공학의 발달로, 현재는 가상현실(VR)과 증강현실(AR), 그리고 이 두 가지를 혼합한 혼합현실(MR)을 활용하여 건축물을 완성하기 전에 미리 건물의 구조, 인테리어, 온도, 습도 등을 확인할 수 있다. 이는 수학 교수학습 과정에서 적절하게 활용할 수 있는 것이다.

Choi(2016)는 세상을 좀 더 세밀한 눈과 의식으로 보면 보이지 않던 것들이 끈으로 연결되어 있음을 알 수 있게 된다고 주장한다. 수학에 인문학적 상상력을 접목하는 것은 학생들로 하여금 관심을 보이지 않았던 또는 볼 수 없었던 연결을 보도록 한다. 실제로 인문학적 상상력을 함양을 위한 수업 적용(Park, M, 2019)을 한 수학 수업 후, 학생들의 반응을 보면 이를 확인할 수 있다.

수학을 재미있게 할 수 있구나 하는 마음과 여러 교과서에 소개되어 있지 않은 문제점들을 흥미롭게 풀어냈다는 느낌을 받았다. 수학을 지루하고 따분하지 않게 사건, 지식, 교훈, 가난 등 여러 가지 일들과 연관시켜 수업을 하니 굉장히 재미있다. 수업에 변화가 많았기에 힘들기도

하고 신기하기도 하였지만 수업이 변화한 것처럼 내 태도도 변화가 있었다. 나는 집중을 좀 더 하게 되고 우리 세계의 사회에 문제도 알게 되어서 좋은 배움의 기회라고 생각한다. 우리가 살고 있는 사회의 문제점 등을 알게 되어서 더 의미 있던 것 같고 더 행복하고 공정한 세상을 만들고 싶다는 생각이 들었다. 이전 수업은 교과서를 펴고 문제를 풀고 설명을 듣는 식의 수학 수업이었는데 이 수업을 통해 우리가 살고 있는 사회에 대한 눈이 넓어졌다.

학생들은 문학과 수학을 연계한 수업을 진행한 후에 소감에서 수학 수업이 흥미가 있었다는 것과 학생들에게 수학과 세상을 보는 눈을 새롭게 했다고 말하고 있다. 이와 같이 수학에 인문학적 상상력을 접목한 수학 수업이 학생들의 수학에 대한 흥미를 높인다는 사실은 Park, M. (2019)의 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 한 예비연구에서도 확인할 수 있었다. Badiou(2017)의 말대로 이상한 나라의 엘리스는 작품의 스토리를 수학적 조건에 결부시키고, 수학을 통하여 문학 작품 속의 다양한 구조 속으로 들어가도록 할 수 있다. 이런 수업에서는 수학의 논리적 정밀함과 문학에서 끌어낼 수 있는 인문학적 상상력을 적절하게 연계할 필요가 있다.

수학과 인문학적 상상력을 접목하는 시도는 다양한 매체를 연계하여 모든 요소들을 종합한 에듀테인먼트(edutainment)(Kang, Kim, & Jang, 2005) 형식도 고려해볼 필요가 있다. 즉, MIT Media Lab의 표방대로 교육(education)이 놀이(entertainment)이고 놀이가 학습이 되도록 할 필요가 있다. 앞으로 디지털이나 AI 기반 사회에서 보다 다양한 형식의 매체를 통한 흥미를 높일 수 있는 방안에 대한 지속적인 노력이 필요하다. 중요한 것은 놀이가 단순한 놀이로 끝나서는 안 된다. 이를 위하여 좀 더 장기간의 체계적인 연구로 수학과 인문학적 상상력을 접목한 활동이 수학 자체의 학습을 약화시키지 않도록 하는 섬세한 프로그램 개발을 위한 연구를 지속해 갈 필요가 있다.

수학은 $p \rightarrow q$ 의 관계를 수없이 연습하는 교과이다. 인과관계에 대한 논리적인 연습을 어린 시기부터 성인이 될 때까지 지속적으로 연습하게 된다. Bupryun(2012)의 주장처럼 인과관계를 깨달으면 괴로움에서부터 벗어날 수 있다는 의미에서 수학은 ‘깨달음’을 얻는데 가장 도움을 줄 수 있는 교과이다. 여기에 더하여 인문학적 상상력을 접목하는 것은 세상과 인간에 대한 이해를 할 수 있

도록 하고, 수학 수업에서 ‘어떻게(How)’뿐만 아니라 ‘왜(Why)’에 집중하도록 한다. 이는 마치 Skemp(1976)의 도구적 이해뿐만 아니라 관계적 이해를 강조해야 한다는 생각과도 상통한다.

수학에 인문학적 상상력을 접목하는 것은 학생들로 하여금 자연스럽게 인간의 속성에 대하여 이해하도록 하고 자신들의 행동과 마음을 되돌아보면서 반성하도록 하게 함으로써 인성교육도 할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

IV. 논의

본 연구는 수학과 인문학적 상상력의 연계가 수학교육에 주는 의미를 알아보는 연구로, 직접적인 실험에 의한 근거 자료를 제시하는 대신 선행의 연구에 인문학적인 상상력의 관점으로 설명을 했다는 한계점이 있다. 그럼에도 불구하고 수학교육에서 인문학적 상상력을 접목하는 연구는 거의 이루어지지 않았다는 점에서 의미가 있다고 할 수 있다.

한국의 학생들은 OECD 국가들 중에서 공부를 왜 해야 하는지의 이유를 인식하거나 살면서 행복감을 느끼는 비율이 다른 선진국의 학생들에 비하여 매우 낮게 나타난다(OECD, 2019). 이는 한국의 교육자나 교사 그리고 모든 사람들이 보다 관심을 가지고 이를 진지하게 해결해 갈 문제이다.

제4차 산업혁명시대는 다른 사람들과 협력하고 더불어 살아갈 수 있는 인문학적 역량을 갖춘 인체가 필요하다(Baek, 2017; Ministry of Education, 2019; OECD, 2019). 수학과 인문학적 상상력을 접목하는 것은 Kim, H.(2018)이 말한 “학생들이 배움의 의미와 가치를 발견하고 핵심 역량을 체득하도록 개개인의 특성에 맞게 맞춤형으로 접근함으로써 배움의 즐거움을 느끼는”(pp.14-15) 모두가 행복한 수학 교실을 만들기 위한 한 가지 방법이라고 할 수 있다. 더 나아가 우리가 수학을 공부하는 이유는 세상과 인간을 더 잘 이해하기 위한 것이자 각 개인이 세상의 이치에 대한 깨달음을 얻기 위한 것이라고 할 수 있다.

수학은 세상을 읽고 이해하기 위한 도구이다. 철학자 Kang(2012)의 말처럼, 많은 사람들은 철학이 인문학의 도구인 것처럼 수학은 자연과학을 이해하는데 도구 교과이다. 수학과 인문학적 상상력을 연계하는 것은 학생들로

하여금 불교의 연기론(緣起論)에서 말하는 것처럼 온 세상은 보이지 않는 끈으로 연결되어 있음(Choi, 2016)을 깨닫게 하고, 하나의 현상을 보다 세밀하게 보고 알아가도록 한다. 그리고 때로는 후설, 하이데거, 사르트르, 메를로퐁티 등 많은 철학자들이 고민하던 것과 같이 우리의 삶의 문제를 수학의 눈으로 보도록 하고, 철학적으로 사유하고 현상학적 사유를 타인과 논의하며 실제적으로 실천(Thévenaz, 2014)해 가는 힘을 기르도록 할 수 있다. 이런 접근법은 우리가 별 생각 없이 사용하던 일회용 종이컵 하나가 세상과 우리의 삶에 어떤 의미와 영향을 주게 되는지를 다시 생각해 보도록 한다. 이는 분명히 전통적인 수학교육과는 다른 접근 방법이다.

건축물의 원재료는 예나 지금이나 변함이 없지만 사람들의 생각이 점차 더 정교해지면서 만들어 놓은 건축물이 다양해지는 것처럼(Sfard, 2012, p.416), 수학에 인문학을 연계하는 것은 이미 있는 소재이고 이야기일 수 있지만 이들을 인문학적 상상력과 연계하여 수학 학습자들에게 보다 풍부하고 세련된 삶의 과정을 제공하게 될 것이다. 다만 수학 지식 자체에 대한 학습을 어떻게 보다 심화하도록 할 것인가에 대한 후속적인 연구는 지속되어야 할 것이다

대표적인 염세철학자 Schopenhauer(2012)는 인생론이라는 그의 책 첫 시작에서 ‘인간 존재의 직접적인 목적은 고뇌(苦惱)이다’(p.5)라고 고백한다. 그러나 많은 사람들은 살아가는 최고의 목적이 행복이라고 말한다. 인간이 무엇을 배우는 이유는 간단히 말해서 행복하기 위해서이다. 즉문즉설로 유명한 Bupryun(2012)은 행복은 깨달음으로부터 얻을 수 있고, 깨달음이란 간단히 말해 인과관계를 깨치는 것이라고 주장한다. 이는 장자가 말하는 사람 사이의 진정한 소통이 가능하게 하고 유(遊)하게 하고, 삶의 과정에서 어떤 상황에 처하더라도 여여하고 유유자적한 삶을 살 수 있도록 한다(Kim, J. T, 2015). 수학이 논리적인 사고를 하도록 돕는다면, 인문학적 상상력은 감성적인 면에서 인간을 보다 인간답도록 하는데 도움을 준다고 할 수 있다. 인문학적 상상력은 타인의 입장에서 보려는 노력이고, 내 자신을 돌아보게 하는 것이다. 더 나아가 Emerson(1871)의 말대로 인문학적 상상력은 ‘남이 나를 속이지 않나 신경쓰기보다는 내가 다른 사람을 속이지 않는지 점검’(p.90)하도록 한다.

교사가 수학과 수학교육을 어떻게 인식하느냐가 학생들의 지도에 있어서 많은 영향을 준다(Dossey, 1992). 교사는 수학교육을 보는 눈을 보다 넓고 깊게 할 필요가 있다. 이를 위한 한 가지 방법은 수학과 인문학적 상상력을 적절하게 접목하는 것이 될 것이다. 수학에 인문학적 상상력을 접목하는 것은 Whitehead(1929)가 말한 것처럼 수학 시간을 ‘죽어 있는 사고’가 아닌 ‘살아 있는 생각’을 하도록 한다. 수학을 배우는 학생이나 수학을 지도하는 교사 모두에게 살아있는 수학 시간이 되도록 할 필요가 있다. 인문학적 상상력을 수학교육에 성공적으로 접목하기 위해서는 현장 교사들의 인식과 인문학적 상상력에 대한 이해와 역량이 중요하다. 인문학적 상상력은 어떤 주제나 소재와도 접목을 할 수 있음을 인식하고 교사의 유연한 상상력이 필요하다.

인문학적 상상력을 수학에 접목하는 것은 인간을 보다 인간답게 만들고 더불어 살아가면서 모두가 행복한 삶을 살도록 하는데 관심을 가지도록 할 것이다. 많은 사람들이 가장 흥미 없고 매마른 교과라고 생각하는 수학에 가장 감성적인 인문학적 상상력을 접목하는 것은 수학 자체의 의미 있는 학습은 물론 인간을 보다 인간적이 되게 하는 두 마리 토끼를 잡을 수 있게 하는 접근이 될 수 있을 것이다. 물론 이를 현장에 접목하는 것은 개인적인 지식을 강조했던 Polayi와 Prosch(1975)가 엔진의 시끄러움을 참고 견뎌야 목적지에 다다를 수 있다고 말했던 것처럼, 초창기에는 현장 적용에 있어서 많은 도전과 어려움이 있을 것이다. 그러나 이런 비판을 적극 수용하면서 수학교육 선도자로서의 관용과 인내가 필요하다.

참 고 문 헌

- Aristotle. (1952). *Metaphysics*. In R. M. Hutchins (Ed.), *Great books of the western world: Vol. 8 Aristotle I* (pp. 495-626). Chicago: Encyclopaedia Britannica.
- Bachelard, G. (2001). *L'Air et Les Songes*. Jang, Y. R. Trans. *Air and dream: Imagination about exercise*. Seoul: Leebaksa.
- Badiou, A. (2017). *Conditions*. Trans. Corcoran, S. London: Bloomsbury Academic.
- Baek, J. H. (2017). Roles and tasks of humanities in the 'Fourth Industrial Revolution.' *Philosophical Thought*, 63, 117-148.

- Bupryun (2012). *Realization*. Seoul: JungTo Press.
- Coi, J. C. (2012). *Multiple intelligence*. Seoul: Science Books.
- Choi, W. H. (2016). *The world is connected by an invisible string*. Seoul: Samtersa.
- de Morgan, A. (1866). Sir W. R. Hamilton. *Gentleman's Magazine and Historical Review*, 1, 128-134.
- Descartes, R. (1979). *Rules for the direction of the mind, in the philosophical works of Descartes*. Translated by Elizabeth S. Haldane & G.R.T. Ross(pp. 1-77). London: Cambridge University Press.
- Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational Company.
- Do, J. E. (2008). *Barbarism of market holism and civilization*. Seoul: Tree of Thinking.
- Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. In D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 39-48). New York: Macmillan.
- Egan, K. (2014). *Imagination education*. Kim, H. Y. & Kwak, D. J. Trans. Seoul: Hakjisa.
- Egan, K., & Nadane D. (1988). *Imagination and education*. Teachers College Press: New York.
- Einstein, A. (1999). Imagination is more important than knowledge. *Advanced Manufacturing*, 1(4), 24-25.
- Eisner, E. (2009). *Educational imagination*. Lee, H. M. Trans. Kyunggido: Dankook University Press.
- Emerson, R. W. (1871). *The conduct of life*. Boston MA: James R. Osgood and Company.
- Fardon, J. (2015). *Oxbridge the power of thought*. Ryu, Y. H. Trans. Seoul: RH Korea.
- Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid elements of geometry*. Lulu.com.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Fritz, A., Haase, V. G., & Rasanen, P. (Eds.). (2019). *International handbook of mathematical learning difficulties*. Cham, Switzerland: Springer.
- Glaserfeld, E. V. (1995) *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: Falmer.
- Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. Routledge. NY: Taylor & Francis Group.
- Guyotte, K., Sochacka, N. W., Costantino, T., Walther, J., & Kellam, N. N. (2014). Steam as social practice: Cultivating creativity in transdisciplinary spaces. *Art Education*, 67(6), 12-19.
- Japan Economic Daily. (2019). *AI 2045, A report of the future of artificial intelligence*. Seoul: Banni.
- Jeon, S. W. (2005). The problem is imagination again. *Chanbi Children*, 3(3), 207-218.
- Jidam (2019). *What is the humanistic imagination*. Available from http://m.blog.daum.net/jidam55/16143157?np_nil_b=-
- Jung, H. J. (1978). *I am Mr. star*. Seoul: Literature and Intelligence.
- Kang, D-S, & Kim, J-C. (2003). An imagination theory of early Renaissance philosophy. *Journal of Philosophical Society*, 87, 1-28.
- Kang, D-S, & Kim, J-C. (2006). Modern theory of imagination: The uncton and root of imagination. *Journal of the New Korean Philosophical Association*, 45, 3-25.
- Kang, H. G., Kim, J. T., & Jang, E. S. (2005). Cultural contents and humanistic imagination. Seoul: Geulnurim.
- Kang, S. J. (2012). *Philosophy vs philosophy: Everything of oriental and western philosophy*. Seoul: Greenbi Publisher.
- Kim, C. S. (1952). *Flower*. Seoul: Modern Literature.
- Kim, H. Y. (2015). A study on the connections between imagination and education. *Journal of Thinking Development*, 11(1), 87-109.
- Kim, J. H. (2015). *Editoogy: Creativity is edit*. Seoul: 21 Century Book.
- Kim, J. A. (2020). Philosophical counseling and personality education program on the philosophy of life - The basic principles and practical plans of a personality education program for adolescents -. *Journal of Human Studies*, 40, 35-59.
- Kim, J. H. (2018). The conditions of a good education for the future. Kim J. H. et al.(Edit). *Future education begins*(pp. 11-35). Seoul: Techvill Education.
- Kim, J. T. (2015). *Communication thinker Jangja*. Seoul: Sungkyunkwan University Press.
- Kim, K. C., Oh, A. R., & Park, H. J. (2019). Implications of early childhood education through the current state of research on 'humanities and imagination.' *Asia-pacific Journal of Multimedia Services Convergent with Art, Humanities, and Sociology*, 9(3), 1-8.
- Kim, M. K. (2007). Imagination and society. *Korean Sociology*, 41(2), 304-338.
- Kim, S. H. (2019). High school students perceptions of humanities and suggestions for humanities program models in secondary schools-Focusing on the cases of Sogang University CORE Project and Soogmoon High

- School—*Journals of Sogang Humanities*, 56, 309–348.
- Kim, Y. R. (2018b). A philosophical reflection on human beings in the era of artificial intelligence. *Journal of the New Korean Philosophical Association*, 91, 105–128.
- Klein, F. (1979). *Development of mathematics in the 19th century*. Translated by M. Ackerman. Brookline, MA: Math Sci Press.
- Korea Institute of Curriculum & Evaluation (2017). *Analysis of the characteristics of definitive achievement in mathematics of middle and high school students*. A Report of the Korea Institute of Curriculum & Evaluation.
- Kwon, T. Y. (2018). *The trick of thought: Humanistic brain that artificial intelligence can't follow*. Seoul: Geulharnhari.
- Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where mathematics comes from? How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Lee J. B. et al. (2012). *A study on the application of STEAM in elementary and middle school gifted classes and gifted education centers*. A report of Korean Educational Development Institute RR 2012-06.
- Lee, J. C. (2019). The imaginary world to the real world. *Magazine of SAREK*, 48(11), 96–97.
- Lee, J. S. (2019). Eight: How to make me who is not replaced by artificial intelligence Seoul: Chai Jungwon.
- Lee, J. S. (2010). Sensitivity, culture, and humanities imagination. *Dae Dong Philosophy*, 53, 319–343.
- Lee, K. D. (2016). Mathematics of imagination, and education of imagining mathematics, *Journal of Educational Research in Mathematics*, 28(1), 103–119.
- Lee, K. J., & Kim, K. J. (2013). An analysis of the lesson plans designed by teachers of the elementary STEAM leader schools. *The Korea Educational Review*, 19(2), 281–306.
- Lee, S. (2015). Sartres and Heideggers criticisms on Kants concept of imagination from the clash with representation theory to the creation of the nonrepresentational concept of imagination. *Phenomenology and Contemporary Philosophy*, 64, 73–104.
- Lee, S. E., Jung, Y. J., & Park, B. K. (2014). Reconceptualization of imagination: Focused on its structure and processes. *The Korean Journal of Educational Psychology*, 28(1), 89–115.
- Li, Y., & Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as “given” in STEM education. *International Journal of STEM Education*, 44, 1–13.
- Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236–260.
- Mclarty, V. (1997). Pointcare: Mathematics & logic & intuition. *Philosophia Mathematica*, 35), 97–115.
- Ministry of Education (2015). *2015 revised curriculum*. Ministry of Education.
- Ministry of Education. (2016). *General description of revision curriculum—Elementary school*. Ministry of Education.
- Ministry of Education. (2019). *Implementation plan for the promotion of humanities and humanities and mental culture in 2019 (I)*. Ministry of Education.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2015). *TIMSS 2015 international results in mathematics*. Boston, MA: TIMSS & PERIL International Study Center.
- National Institute of Korean Language (2020). *Integrated research*. National Institute of Korean Language. Available from <https://www.korean.go.kr/>
- Oh, T. S. (2018). Humanities of 0 and 1: Mathematics, digital and quantum information, and principal Yin and Yang theory. *Korea-China Humanities Forum*, 10, 27–37.
- Organization for Economic Co-operation and Development[OECD]. (2018). PISA 2018 results. Available from https://www.oecd.org/pisa/PISA-results_ENGLISH.png
- Organization for Economic Co-operation and Development[OECD]. (2019). *Artificial intelligence in a society*. NIA Trans. National Information Society Agency. Original work published in 2019.
- Osler, J. (2007). *A guide for integrating issues of social and economic justice into mathematics curriculum*. Available from <https://www.radicalmath.org/docs/SJMathGuide.pdf>
- Park, C. S. (2019). AI is the humanities: From the perspective of constructive philosophy of information. *Philosophical Investigation*, 56, 181–212.
- Park, H. J. et al. (2016). *A study on the actual condition and effectiveness of STEAM education in 2015*. A report of the Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity.
- Park, M. G. (2019). *Model development of humanistic imagination and character education for mathematics education*. A report of National Research Foundation.
- Park, M. Y. (2016). ‘Humanistic imagination’ kills humanities. *Character and Thought*, 224, 129–143.

- Park, Y. Y (2009). *Derida & Deleuze: At the border of meaning and meaning*. Seoul: KimYoung Sa.
- Pointcaré, H. (1899). 'La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement', *L'enseignement mathématique I*, 157-163. Citation is to the reprint in *Oeuvres*, Vol. 11(pp. 129-133).
- Polanyi, M., & Prosch, H. (1975). *Meaning*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. New Jersey: Princeton University Press.
- Pope, R. (2005). *Creativity: Theory, history, practice*. New York: Routledge.
- Rose, N. J., Sanna, L. J., & Galinsky, A. D. (2005). The mechanics of imagination: Automaticity and control in the counterfactual thinking. In R. R. Hassin, J. S. Uleman, & J. A. Bargh (Eds.). *The new unconscious*(pp. 138-170). New York: Oxford University Press.
- Saint-Exupéry, A. D. (1943). *The little prince*. New York: Reynal & Hitchcock.
- Sandel, M. J. (2010). *Justice: What's the right thing to do?* London: Penguin.
- Schofield, M. (1978). Aristotle on the imagination, in Aristotle on mind and the senses. *Proceedings of the 7th Symposium Aristotelicum*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Schopenhauer, A. (2012). The wisdom of life by Arthur Schopenhauer. Choi, H. Trans. Seoul: Jipmoondang.
- Seo, D. W. (2013). The role of the imagination in the formation of knowledge: On the Case of Sartre and Deleuze. *Philosophica Studies*, 100, 219-239.
- Sfard, A. (2012). Summary: On the metaphysical sources of conceptual development. Kwon S. I. et al. Trans. L. English (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*(pp. 383-416). Seoul: Kyungmoonsa.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Strogatz, S. (2012). *The joy of x*. New York: Houghton Mifflin Harcourt.
- Taylor, S. E., Pham, I. B., Rivkin, I. D., & Armor, D. A. (1998). Harnessing the imagination: Mental simulation, self-regulation, and coping. *American Psychologist*, 53, 429-439.
- Thévenaz, P. (2014). *What is phenomenology?* Kim, D. K. Trans. Seoul: Greenbi Publisher.
- Tolstoy, L. (1886/2001). *How much land does a man need? Collected shorter fiction*. Translated by A. and L. Maude. London: Everyman.
- Vygotsky, L. S. (2004). Imagination and creativity in childhood. *Journal of Russian and East European Psychology*, 42(1), 7-97.
- Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Whitehead, A. N. (1929). *The aim of education and other essays*. New York: A Mentor Book.
- Wilburne, M., & Napoli, M. N. (2008) Connecting mathematics and literature: An analysis of pre-service elementary school teachers' changing beliefs and knowledge. *IUMPST*, 2, 1-10.