韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2020.59.2.131
2020. 5. 제 59권, 제 2호, 131-146.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2020, Vol. 59, No. 2, 131-146.

원의 넓이를 구하는 공식에서 문자 표기 순서에 대한 연구

이민정(해강중학교, 교사)

On the written order of characters in the formula for measuring the area of a circle

Lee, Min Jung(Haegang Middle School, nice1mj@nate.com)

초록

원의 넓이를 구하는 공식을 보면, 일반적으로 원주율이 반지름의 길이의 제곱의 앞에 쓰여 지지만 독일과 프랑스에서 원주율이 뒤에 쓰여 진 경우가 있었다. 본 연구에서는 두 가지를 연구 한다: 첫째, 원주율을 뒤에 쓰는 학생이 얼마나 있는가? 둘째, 학생들이 원의 넓이를 구하는 공식에서 문자 표기 순서에 대해 어떻게 인식하는가? 국내의 만 14세에서 만 21세까지의 사람들 중 임의 추출한 201명에 대한 온라인 설문 조사 결과 둘 다 가능하다 또는 뒤에만 가능하다는 인식이 86% 이상 있었다. 본 연구에는 원의 넓이에 대한 일반적인 문자 표기 순서와 학교 교육을 통해 자연스럽게 형성된 학생들의 인식에 차이가 있음이 보여 진다. 덧붙여 만 14세에서 만 16세까지의 학생들은 원주율을 뒤에만 써야한다는 인식이 더 강했으나 그 연령대 이후로 둘 다 가능하다는 인식의 변화가 있었다. 이러한 관점에서 의미의 혼동이 없다면, 두 표기 모두 가능하다는 것이 가장 공통적인 인식이 될 수 있다. 그러므로 교과서에는 원주율을 뒤에 쓴 표현이 추가된 방식으로 표현되어야 학생들의 이해가 더 자연스러울 것이다.

Abstract

Regarding the formula for measuring the area of a circle, the Archimedes' constant is generally written in front of the square of radius length, but there were a few cases where the Archimedes' constant was written after that in Germany and France. In this study, two things are studied: First, how many students are writing the Archimedes' constant after that? Second, what do the students think about the written order of characters in the formula for measuring the area of a circle? In the online survey of 201 people aged 14 to 21 in Korea, there was a perception of more than 86% that both are possible or only after that are possible. In this study, it is suggested that there is a difference between the general written order of characters and the natural perception of students formed through school education. In addition, students aged 14 to 16 thought more that the Archimedes' constant should be written after that, and after that age, there was a greater perception that both are possible without confusion of meaning. It can be seen that the change in students' perception has emerged through school education on natural mathematical written order of characters after middle school courses. From this point of view, the most common perception can be that if there is no confusion in meaning, then both expressions are possible.

* 주요어 : 중심이 같은 두 원 사이 넓이, 문자 표기 순서에 대한 인식, 원주율과 원의 넓이, 역사 속 원에 대한 공식들
* **Key words** : the area of an annulus(mathematics), recognition on the written order of characters, the Archimedes' constant and the area of a circle, formulas for a circle in history
* **Address** : Haegang Middle School, Busan, Korea
* **ZDM Classification** : D10
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97B40
* **Received**: April 29, 2020 **Revised**: May 17, 2020 **Accepted**: May 23, 2020

Ⅰ. 서론

2015 개정교육과정을 반영한 초등학교 6학년 2학기 수학 교과서에서 (원주)=(지름)×(원주율)로 제시하고 원판을 분할한 부채꼴을 교차시켜 붙이면 점점 직사각형과 비슷해지는 그림을 그려서 (원의 넓이)=(원주)×($\frac{1}{2}$)×(반지름)=(원주율)×(지름)×($\frac{1}{2}$)×(반지름)=(원주율)×(반지름)×(반지름)을 유도한 다음, (원의 넓이)=(반지름)×(반지름)×3.14로 나타내고 있다(Ministry of Education, 2019). 이처럼 3.14로 계산된 원주율은 원의 넓이 표기에서 (반지름)×(반지름)의 뒤인 마지막에 위치하고 있다.

그런데 초등학교 교과서의 (원주율) 자리에 중학교 교과서에서는 문자 π를 도입하면서 문자 π가 (반지름)×(반지름)의 앞에 쓰이고 있다. 즉, Jang 외(2019)는 중학교 수학 1 교과서에서 '곱셈 기호를 생략하여 나타낼 때, 일반적으로 π를 숫자와 문자 사이에 쓴다'고 하였기 때문에 반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 π가 문자 앞에 위치하여 πr^2으로 표기된다. 그래서 반지름의 길이가 r이고, 중심각의 크기가 $a°$인 부채꼴의 넓이 S를 $S=\pi r^2 \times \frac{a}{360}$와 같은 표현을 사용하여 나타내고 있다. Kim 외(2019)는 중학교 수학 1 교과서에서 일반적으로 π를 숫자와 문자 사이에 쓴다는 표현은 하지 않았지만 원의 넓이 S는 원의 반지름의 길이 r, 원주의 길이 l에 대하여 $l=2\pi r, S=\pi r^2$이라고 설명하였다. 중학교 1학년 과정에서는 무리수를 배우지 않지만 중학교 3학년 이후 과정에서 실수 전체를 배우므로 본 연구에서 반지름의 길이는 모두 양의 실수로 둘 것이다.

원주율의 위치에 관한 선행연구를 살펴보면, Lee, M.(2019)은 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 구할 때 원의 넓이를 πr^2이 아니라 $r^2\pi$라 두면 $r=3$일 때 원의 넓이를 9π로 쉽게 구할 수 있다고 하였다. 또한, Choi(2018)는 원의 넓이를 유도하는 과정의 연구에서, 일본과 미국 모두 정사각형 넓이 r^2과 원의 넓이 πr^2을 π배의 곱셈적 관계 속에서 파악하고자 하는 의도가 있다고 판단되는 예를 제시하였다. 여기서 Stephan(2012)은 미국 교과서에서 문자 π를 원주율로 사용하며 반지름이 6인 원의 넓이는 정사각형 넓이를 36이라 하고 이를 π배 한다고 하였다. 원의 넓이를 πr^2이라 별도로 기록하고, $\pi \times 36$을 36π로 바꾸어 답으로 표현하고 있었다(as cited in Choi, 2018). 여기서도 만약 원의 넓이를 $r^2\pi$로 두었더라면 별도의 변형 없이 36π를 답으로 바로 도출할 수 있었을 것이다.

그러나 우리나라 중학교 2학년 수학 교과서에서 Ryu 외 (2019a)는 반지름의 길이가 문자 a로 나타나는 원의 넓이를 문제에서는 교과서 본문의 공식과 다르게 표현하고 있다. 높이가 $8a$이고 부피가 $48a^3\pi$인 원뿔의 밑넓이를 구하는 문제(Ryu et al., 2019a, p.78)를 제시하였는데, 여기서 $48a^3\pi$이라는 표현은 교과서 본문의 원의 넓이를 구하는 공식 πr^2에 맞추어 쓰면 $48\pi a^3$으로 써야 하지만 원주율 π를 문자 a 뒤에 사용하고 있었다.

이처럼 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 $r^2\pi$로 표기하면 쉽게 문제해결이 이루어짐에도 불구하고 원의 넓이에 대한 표현을 πr^2이라고 규정지어 교과서에 기록하는 것은 학생들에게 πr^2이라는 표현만 항상 가능하다는 인식을 가지도록 할 수 있다.

본 연구에서는 전국의 만 14세 이상에서 만 21세 이하의 201명을 대상으로 설문 조사를 실시한다. 큰 원의 반지름의 길이를 a, 작은 원의 반지름의 길이를 b라 하고 두 원의 중심이 같은 원환의 넓이를 구하는 문제에서 교과서의 표기와 같이, 원주율 π를 수식 a^2 또는 b^2 또는 a^2-b^2의 앞에 쓰는 학생 수가 많을 것으로 보고 다음과 같은 두 가지를 연구한다.

첫째, 학생들 중 문자 π를 뒤에 쓰는 학생들이 얼마나 있는가?

둘째, 학생들은 문자 π를 뒤 또는 앞에 쓰는 두 가지 표기에 대해 어떻게 인식하는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 곱셈 기호의 생략에 관한 규칙

곱셈 기호의 생략에 대한 규칙에서 그리스 알파벳 문자와 영어 알파벳 문자 사이에 쓰는 순서에 대한 규칙은 중학교 1학년 과정에서 언급되어 있지 않다. Adams(1987)는 그리스 알파벳 문자 π가 영어 알파벳

문자 P에 해당된다고 하였다. 문자 P는 문자 r보다 알파벳 순서에서 앞에 오므로 문자 π를 문자 r 앞에 둔다고 볼 수도 있다. 중학교 1학년 과정에서 문자끼리의 곱은 알파벳 순서대로 쓰도록 하고 있다(Jang et al., 2019).

그러나 Jang 외(2019)는 중학교 1학년 과정에서 밑면의 반지름의 길이를 r, 원뿔의 높이를 h라고 할 때 원뿔의 부피를 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$라고 나타내고 있다. 즉, 알파벳 순서대로 하면 h가 r보다 먼저 오지만 알파벳 순서를 따르고 있지 않은 셈이다. 실제로 두 행렬 A, B에 대하여 행렬 집합은 일반적으로 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않기 때문에 두 행렬의 곱 AB와 BA는 일반적으로 같지 않으며 의미하는 바도 다르다. 그러므로 알파벳 순서대로 쓸 수 없다. 중학교 1학년 과정에서 곱셈 기호 생략에 대한 규칙은 대학 과정까지 볼 때, 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는 경우에는 맞지 않으므로 일반적이라 볼 수 없다.

Waddingham(2014)은 2014년에 수학 연구를 위한 안내서에서 곱셈 기호 생략으로 인해 두 가지 이상으로 의미가 열려 있는 것을 피하기 위해서만 곱셈 기호 자리에 가운데 점(medial point)인 기호 •이 사용되어져야만 한다고 하였다. 문자들 사이에서는 사용할 필요가 없다고 하였는데, 이는 혼동이 생기지 않는다면 곱셈 기호를 생략해서 사용할 수 있다는 의미로 볼 수 있다.

곱셈 기호 생략으로 문자와 숫자 사이 표기 순서에 따라 혼동이 생기는 경우를 살펴보자. 중학교 1학년 과정에는 원주율 π를 제외하고는 유리수만 배웠기 때문에 나오지 않는 표현이지만 중학교 3학년 교과서에서는 $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$의 경우에 $\sqrt{2}$를 유리수보다 뒤에 쓰고 있다. 연습 문제에서는 $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=a\sqrt{6}$ (a는 유리수)라는 표현을 쓰고 있으며, 이 경우에 문자 a는 수 $\sqrt{6}$ 앞에 위치한다(Ryu et al., 2019b, p.52). 근호의 길이에 따라 $\sqrt{6a}$와 $\sqrt{6}\,a$를 학생들이 손 글씨로 썼을 때 혼동이 생기는데 $a\sqrt{6}$이라는 표현은 이러한 혼동을 줄여준다. 이러한 표현은 허수 $i=\sqrt{-1}$에 대해서도 마찬가지이다. Lee, D.(2019)는 오일러 공식을 소개하면서 자연상수 e에 대하여 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$라는 표현에서 e^{ix} (x는 실수)의 문자 x앞에 허수 i를 쓰지만 $x^2+(yi)^2=x^2-y^2$(x, y는 실수)라는 표현에서는 문자 y를 허수 i앞에 쓰고 있다. $e^{ix}=\cos x+i\sin x$에서도 $\sin x i$라 썼을 때 $(\sin x)i$와 $\sin(xi)$의 두 가지 의미에서 혼동이 생길 수 있으므로 $i\sin x$라 쓰고 있다.

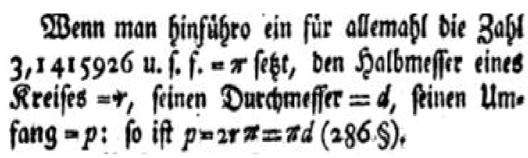
고등학교 적분 단원에서는 Go 외(2019)는 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

(단, $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\Delta x$)이라고 표기하였다. 그러므로 함수 $f(t)=2\pi t$일 때, $\int_0^a 2\pi t\,dt$는 원주율 π를 적분기호 $\int$ 앞에 써서 $2\pi\int_0^a t\,dt = 2\pi\times\frac{a^2}{2}=\pi a^2$으로 구할 수 있다. 그러나 $\int_0^a 2\pi t\,dt = 2\pi\int_0^a t\,dt$에서 원주율 π를 뒤로 보내면 $2\int_0^a t\,dt\pi$와 같은 형태가 되므로 $2\left(\int_0^a t\,dt\right)\pi$와 같이 괄호를 사용하지 않으면 의미의 혼동이 있게 된다. 여기서 문자 t가 변수를 나타낸다고 볼 수 있다. 하지만 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 나타내는 πr^2과 $r^2\pi$라는 두 표기에는 곱셈 기호를 생략하더라도 의미의 혼동이 없다.

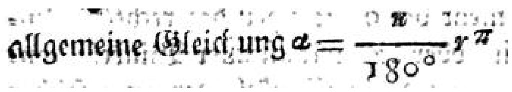
2. $2r\pi$, $r^2\pi$의 역사적 배경

독일의 수학자 Karsten(1768)은 원주의 길이에 대한 공식([Fig. 1])에서 무수한 숫자에 한 개씩 추가하는 $3.1415926\cdots$을 원주율 π라 두고, 반지름의 길이가 r, 지름의 길이가 d일 때, 원주의 길이 p에 대하여 $p=2r\pi=\pi d$라고 표현하고 있다. 이처럼 그는 원주의 길이를 표현하면서 반지름을 나타내는 문자 r은 π 앞에 써서 $2r\pi$로 표기하고 지름의 문자 d는 π 뒤에 쓰고 있다.


Wenn man hinführo ein für allemahl die Zahl 3,1415926 u. ſ. f. = π ſetzt, den Halbmeſſer eines Kreiſes = r, ſeinen Durchmeſſer = d, ſeinen Umfang = p: ſo iſt $p = 2r\pi = \pi d$ (286.§).

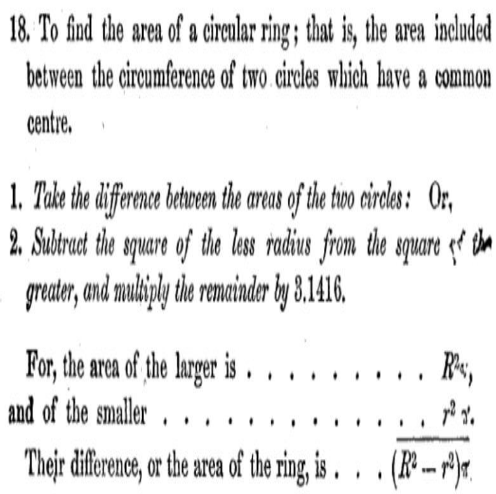
[Fig. 1] A part of the formula for the length of circumference (Karsten, 1768)

Karsten(1768)은 부채꼴의 호의 길이를 구하는 방정식의 일부([Fig. 2])에서 반지름의 길이가 r인 원의 중심각 n에 대한 호의 길이 α를 $\alpha=\frac{n}{180^\circ}r\pi$라고 표기하였고, 이를 일반적인 방정식이라고 하였다. 원의 넓이 C에 대해서는 $p=\pi d$를 이용하여 $C=\pi rr$이라는 표현을 사용하였다. 그러나 같은 저자인 Karsten(1786)은 대수학에 관한 그의 저서에서 $\alpha=\frac{n}{180^\circ}\pi r$이라고 표기하였다.


allgemeine Gleichung $\alpha = \frac{n}{180^\circ} r\pi$

[Fig. 2] A part of the equation for length of a fan-shaped arc (Karsten, 1768, p.375)

[Fig. 3]는 Legendre(1858)의 원환의 넓이를 구하는 과정이며 두 원의 그림은 주어져 있지 않았다. 작은 원의 넓이를 $r^2\pi$이라 하였으며, 원환의 넓이를 $(R^2-r^2)\pi$라고 계산하고 있다(Legendre, 1858, p.120). [Fig. 3]는 Legendre(1858)의 원환의 넓이 구하는 과정이다.


18. To find the area of a circular ring; that is, the area included between the circumference of two circles which have a common centre.

1. *Take the difference between the areas of the two circles:* Or,
2. *Subtract the square of the less radius from the square of the greater, and multiply the remainder by* 3.1416.

For, the area of the larger is . . . . $R^2\pi$,
and of the smaller . . . . $r^2\pi$.
Their difference, or the area of the ring, is . . . $(R^2-r^2)\pi$.

[Fig. 3] The process of finding the area of a ring (Legendre, 1858)

프랑스 수학자인 Legendre(1858)의 표현을 볼 때, 중학교 1학년에서 처음 문자 π를 접하는 과정에 원의 넓이를 구하는 공식에 대한 다양한 표현이 가능하다고 본다.

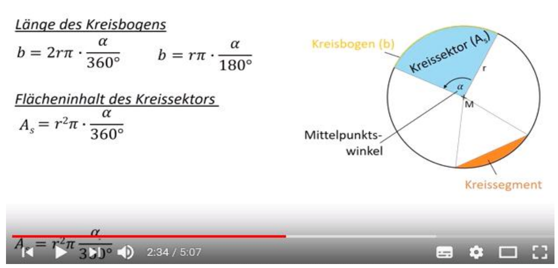
왜냐하면 반지름의 길이가 r인 원의 넓이 S를 직사각형의 넓이로 바꾸었을 때 가로의 길이 πr에 세로의 길이 r을 오른쪽에 곱하여 $S=\pi r^2$이라 둘 수도 있지만 가로의 길이 $r\pi$의 왼쪽에 세로의 길이 r을 곱하여 $S=r(r\pi)=r^2\pi$라 구할 수도 있기 때문이다.

또한, 반지름의 길이가 r이고 원주의 길이가 l일 때, 원주율의 정의 $\frac{l}{2r}=\pi$에서 양변의 왼쪽에 $2r$을 곱하면 원주의 길이 공식 $l=2r\pi$가 나오기 때문이다.

그리고 원의 반지름의 길이를 문자 r이라 두고 $r=2,3,4$ 등일 때 원의 넓이를 $4\pi, 9\pi, 16\pi$ 등으로 각각 구하는 과정을 통해 자연스럽게 귀납적 추론을 하여 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 $r^2\pi$라 쓸 수도 있다. 여기서 r과 π는 모두 실수이므로 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하여 $r^2\pi=\pi r^2$ 이 성립한다.

그러나 Katz(2009)는 현대식 기호라고 언급하며 반지름의 길이 a에 대하여 4분원의 호의 길이를 $\frac{1}{2}\pi a$라고 표현하였는데 이는 현재 교과서의 반지름의 길이 r인 원주의 길이를 $2\pi r$로 표현하는 Jang 외(2019)의 표현과 공통적이다.

2020년 우리나라 교과서에서 Jang 외(2019)는 원의 반지름의 길이 r, 원주의 길이 l 대하여 $l=2\pi r$이라고 설명하고 있었던 것과 설명하고 있는 것과는 대조적으로 2020년 독일의 로텐부르크 중등학교의 슈바이클베르크 중등학교 수학 설명 비디오 9Ⅰ에서는 원주의 길이를 $2r\pi$라 두고 원의 넓이는 $r^2\pi$라 두고 풀고 있다(Realschule Schweikberg, 2020). [Fig. 4]는 2020년 로텐부르크 중등학교의 수학 설명 비디오의 내용이다.



[Fig. 4] A video description of the mathematics of Rottenburg Middle School in 2020

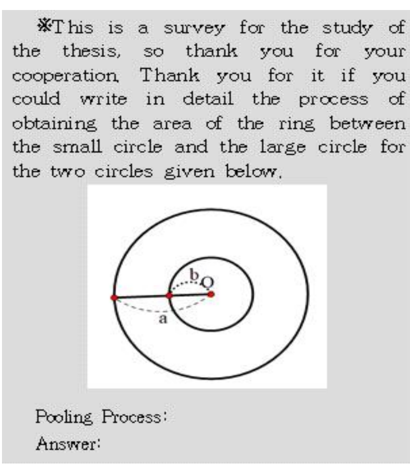
이와 같이, 우리나라는 일반적으로 원주율 π를 숫자 뒤에, 문자 앞에 쓴다는 규칙을 따르는 반면, 독일의 슈바이클베르크 중등학교의 학생들과 교사들은 우리와는 다른 공식으로 학습하고 있다.

위의 내용들을 살펴 볼 때, 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 나타내는 공식에 대해 πr^2으로만 나타내어야 한다는 규칙에 대해 보편적인 합의가 이루어졌다고 볼 수 없다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 대상 선정

본 연구에서는 원환의 넓이를 구하는 풀이과정과 답의 표현에 대한 실험을 A중학교 1학년 학생 4명을 대상으로 2019년 12월 둘째 주에 [Fig. 5]의 문제지를 사용하여 실시하였다. 2일 후 12월에 B중학교 1학년 1명의 학생들 대상으로 추가 실험을 실시하고, 2일 후 A중학교 1학년 6명의 학생을 대상으로 추가 실험을 한 번 더 실시하였다. 세 실험 모두 같은 문제지를 사용하였다. 문제지를 같은 조건으로 통제하고 교과서와 교사, 학생의 성취수준을 다양하게 두기 위해서이다. [Fig. 5]는 실험에 사용된 두 원의 중심이 같은 원환의 넓이를 구하는 문제지이다. 총 11명의 중학교 1학년을 연구 대상으로 하였으며, 문제지에 문구를 적어, 논문 연구를 위한 것으로 협조해 주시면 고맙겠다는 동의를 구한 후 실험을 실시하였다.


※This is a survey for the study of the thesis, so thank you for your cooperation. Thank you for it if you could write in detail the process of obtaining the area of the ring between the small circle and the large circle for the two circles given below.

Pooling Process:
Answer:

[Fig. 5] Problem paper used in the experiment

여기서 두 번째 실험 대상인 B중학교의 1명의 학생의 경우 성적 파악이 가능하며 접근이 용이했던 학생으로 A중학교가 아닌 다른 B중학교에서 A중학교와 다른 출판사의 교과서로 배우는 학생이었으며 실험을 위한 문제지를 푸는 데에 동의하였다. 연구의 신뢰도를 위하여 샘플사이즈 개수를 늘리기 전에, 예비 조사로 A중학교와 다른 교과서를 배우는 학생은 문자 표기 방식이 다른지 알아보기 위해 임의의 한 명만 대상으로 실험 목적을 언급하지 않고, 설문 조사하였다. 비록 1명이지만 1차 실험과 같은 표현이 나와서 더 이상 B중학교에 대해서는 실험 연구를 진행하지 않았고, 실험연구를 더 이상 진행하지 않은 또 다른 이유는 교과서들의 표현이 거의 같기 때문에 B중학교 학생들을 대상으로 더 조사하는 것은 의미가 없다고 보았다.

A중학교에도 다양한 수학교사들이 있었기 때문에 다른 수학 교사들이 담당하는 다양한 학생들을 대상으로 3차 실험을 하였다. 그 이유는 같은 교과서로도 수학교사들에 따라 약간씩 다르게 수업할 수도 있다고 보았기 때문이다.

A중학교에서 다른 3명의 교사들이 담당하는 학생들 중 6명의 학생들을 대상으로 추가 실험을 실시하였다. 1차 실험의 대상 학생들은 한 명의 수학교사가 담당하는 학생들로 상위권, 하위권 학생들 중 각 2명을 무작위 추출하였다. 3차 실험의 대상 학생들은 여러 수학 교사가 담당하는 학생들이 섞여 있는 자유학기제 수업에서 6명을 무작위 추출하였다. 본 연구에서 무작위 추출로 3차례로 나누어 층화추출법을 이용하여 단계적으로 적은 인원으로 실험한 이유는 전국의 만 14세 이상에서 만 21세 이하의 201명을 대상으로 4차 설문 조사를 하기 위한 예비조사로, 11명으로 적은 인원이지만 연구 목적을 밝히지 않고 무작위로 추출한 학생들을 대상으로 해서 신뢰성 있는 응답 반응을 조사하기 위한 것이다.

11명 중 전입으로 1학기말 성적을 알 수 없었던 학생이 한 명 있었다. 이 학생은 자유학년제 학교를 다니다가 2학기에 A중학교로 전학을 와서 학기말 성적이 없었다. 자유학년제에는 수치적인 성적을 매기지 않고, 서술형으로 활동한 내용 및 태도 등에 대하여 기록한다. A중학교 학생들은 2학기 때 자유학기제를 실시하였고 B중학교 학생은 1학기 때 자유학기제를 실시하였다.

Israel(1992)에 의하면 단순 임의 추출을 한다고 가정하고, 모집단의 크기를 알 때, 표본 오차를 e는 0.39, 관찰치를 p로 최대 0.5로, z는 1.96으로 모집단 크기 N에 대하여 표본의 크기, 샘플 수를 구하면,

$$\frac{z^2 \times \dfrac{p(1-p)}{e^2}}{1+\dfrac{z^2 \times \dfrac{p(1-p)}{e^2}-1}{N}} = \frac{1.96^2 \times \dfrac{0.5 \times 0.5}{0.39^2}}{1+\dfrac{1.96^2 \times \dfrac{0.5 \times 0.5}{0.39^2}-1}{N}}$$

이라고 하였다. 단순 임의 추출이 아니라 복잡한 과정에서는 변수들을 더 가져와야 한다고 하였다. 이 공식에 의해 3차 실험 결과 모집단 크기를 150으로 표본 오차를 0.39로 하면 표본의 크기가 약 6이 나온다. 그래서 3차 실험은 표본 오차가 0.39가 되는데 실험 이후 이 표본 오차로 통계적 추정을 할 것이다.

그런 다음 11명 중 1명에게 동의를 구하고 설문 응답에 대한 이유를 묻는 인터뷰를 실시하였다.

마지막으로 1차, 2차, 3차 실험과 인터뷰의 예비조사 결과를 바탕으로 2020년 4월 나우앤서베이(www.nownsurvey.com)를 통해 전국의 만 14세 이상에서 만 21세 이하 중 설문에 동의한 201명을 임의 추출하여 4차 설문 조사를 온라인으로 실시하였다. 국립국어원의 표준국어 대사전에 의하면, 패널이란 토론에 참여하여 의견을 말하거나, 방송프로그램 따위에 출연해 사회자의 진행을 돕는 역할을 하는 사람, 또는 그런 집단을 말한다(Standard Korean Language Dictionary, 2020). 본 연구에서는 나이를 만 14세에서 만 21세까지 제한하여 나우앤서베이를 통해 데이터스프링코리아에서 이메일 및 자체 앱으로 패널 조사를 실시하였다.

중학교 1학년은 2학기 때 원의 넓이를 이용한 부채꼴 넓이와 원주율을 배우기 때문에 중학교 2학년부터에 해당하는 만 14세 이상으로 하였으며 대학생들 정도의 나이까지 대상으로 하였다. 설문 대상자들은 원의 넓이와 원주율을 중학교 때 배웠던 학생들로 구성하였으며, 만 22세 이상의 경우에는 취업을 하는 경우가 많고, 일상의 삶 속에서 직업에서 필요하거나 자녀 교육을 하는 경우 이외에는 원의 넓이를 구하는 공식에 대해 중요하게 생각하지 않을 수 있기 때문에 설문 대상에서 제외하였다. 설문 조사지에는 만 22세 이상이라는 보기도 있었지만, 실제로 만 22세 이상은 패널에 없었기 때문에 참여자가 1명도 없었다.

2. 교수 학습 내용

A중학교 수학 1 교과서의 학습 내용은 서론에서 자세히 언급하였다(Jang et al., 2019). B중학교 수학 1 교과서에서도 원의 넓이를 구하는 표현에서 초등학교 복습과정과 중학교 과정에서 표기법이 다르게, A중학교 수학 1 교과서와 같이 나타내고 있었다(Kim 외, 2019). 즉, Kim 외(2019)는 반지름의 길이가 5인 원의 넓이를 구하는 문제에서 $\pi \times 5^2 = 25\pi$라고 하여 곱셈에 대한 교환법칙을 계산과정 중에 사용하였으나 $\pi \times 5^2 = 5^2 \times \pi$이라는 표현을 생략하고 표기하고 있었고, 초등 과정을 복습하는 준비학습에서는 지름의 길이가 14인 원의 넓이를 구하는 문제에서 원주율을 $\frac{22}{7}$로 두고 $7 \times 7 \times \frac{22}{7} = 154$로 구하고 있었다. 원주율을 마지막에 두고 곱하고 있었다.

전국에서 임의 추출한 4차 설문 대상자들은 모두 여러 다른 교과서로 원의 넓이를 구하는 공식을 중학교 1학년 때 배웠다고 볼 수 있다.

3. 연구 대상의 성취수준 분석

본 연구에서는 A중학교와 B중학교의 평균과 표준편차를 반영하여 평균점수를 m, 표준편차를 σ라 할 때, 표준점수 $Y = 20 \times \frac{X-m}{\sigma} + 100$을 계산하여 A중학교 총 인원수 324명을 3등분하며 108등까지 상위권, 216등까지 중위권으로 하기로 한다. A중학교의 1학기말 수학 성적의 평균은 84.3점, 표준편차는 15.0점이었다. 그리고 B중학교의 2학기말 수학 성적의 평균은 71.6점이고 표준편차는 16.8점이었다.

연구 대상의 성취수준을 분석한 이유는 4차 설문 조사인 정량연구를 위한 예비조사로 그 결과 성취수준에 따른 표기 방식 차이가 드러나면 4차 설문 대상자를 성취수준도 고려하여 정하기 위해서이다.

표준점수가 111.2점 이상이면 상위권, 99.7점 이상이면 중위권, 99.7점 미만이면 하위권으로 나누기로 하였다. B중학교 80점 받은 학생은 표준점수가 110점이라 중위권이다. B중학교는 A중학교보다 평균이 낮으므로 성취수준을 같은 기준으로 맞추기 위한 것이다. 이 기준으로는

총 11명 중에서 상위권은 5명, 중위권이 3명, 하위권이 2명, 성적을 알 수 없는 학생이 1명이었다.

상, 중상, 중, 중하, 하위권으로 분류하면 점수 기준이 상위권은 표준점수 117점 이상, 중상위권은 109점 이상, 중위권은 103점 이상, 중하위권은 82점 이상, 하위권은 82점 미만으로 A중학교 총인원 324명을 5로 나누어 65등까지 상위권, 130등까지 중상위권, 195등까지 중위권, 260등까지 중하위권, 나머지는 하위권으로 하였다. 본 연구에서는 점수를 정할 때 반올림한 점수를 기준으로 하였다. 여기서 상위권을 ㉠, 중상위권을 ㉡, 중위권을 ㉢, 중하위권을 ㉣, 하위권을 ㉤이라고 실험 결과에 나타내도록 하겠다.

이 기준으로 하면 ㉠이 1명, ㉡이 4명, ㉢, ㉣, ㉤이 각 1명으로 각 성취수준에 골고루 분포되어 있으며 ㉡인 학생이 상대적으로 많다고 볼 수 있다. 3차 실험에서 무작위 추출 결과 ㉡이 3명, ㉠이 1명, ㉢이 1명, 전입으로 성적을 알 수 없었던 학생이 1명 추출되어서 이러한 결과가 나왔다.

4차 설문 조사 대상자들의 성취수준은 대상자들을 임의 추출하였기 때문에 ㉠~㉤이 섞여 있다고 볼 수 있다. 하지만 대상자들을 임의 추출하여서 어느 특정한 성취수준의 학생들이 많이 분포했을 가능성도 있다.

4. 실험 및 인터뷰 방법

1차, 2차, 3차 등으로 진행하다가 1차와 답의 표현이 다른 경우가 나오면 실험을 중단하고, 전체 결과의 원인을 분석해 보도록 한다.

교과서의 표기에 대하여 Lee, M.(2019)은 외국 사례로 Legendre(1858)의 원환의 넓이 구하는 그 당시의 풀이를 조사하여 제시하였다. 본 연구에서는 $2r\pi$, $r^2\pi$라는 표현에 착안하여, 이러한 표현에 대한 인식이 어떠한지에 대해 구체적인 설문 조사를 통해 알아보기 위하여 먼저 반지름의 길이가 r인 원주의 길이를 $2r\pi$라는 표현을 사용한 1700년대 자료(Karsten, 1768)를 더 조사해 보고, 중학교 교과서의 표현을 정교하게 살펴보며, 2020년까지 이어진 역사적 표현의 변화를 분석하였다. 다음으로 Lee, M.(2019)이 조사하여 제시한 Legendre(1858)가 풀었던 두 원의 중심이 같은 원환의 넓이 구하는 풀이를 문제지로 구성하여 설문 조사지를 제작하여 중학교 1학년을 대상으로 실험하였다. Legendre(1858)의 풀이에는 두 원의 그림이 나오지 않지만 본 연구의 설문 조사지에는 학생들이 문제의 의미를 잘 이해할 수 있도록 그림을 추가하였다.

Lee, J.(2007)은 실험연구는 인공적으로 통제된 상황이 대부분이라고 하였으며, 양적 연구에서는 연구의 대상으로부터 초연하게 객관적으로 접근하기 때문에 연구 환경이 친숙하지 않는 환경이라고 하였다. 본 연구에서는 실험을 할 때 다음과 같이 인공적으로 통제된 상황을 조성하고자 연구 문제에 대해 언급하지 않고 문제지만을 통해 결과를 도출하고자 하였다. 실험 결과를 분석할 때에는 실험에 사용된 문제에 대한 답안지를 연구 대상의 관점에 가까이 다가가서 상세히 관찰하여 분석하려고 하였다.

전체적으로 성취수준이 골고루 분포되도록 학생들을 선정하였는데, 추출 결과 ㉡학생들이 상대적으로 많았다. 심층적인 연구 대상의 관점을 알기 위하여 연구 대상 중 성취수준이 ㉡인 학생들 중 한 명에게 논문 연구를 위해 설문 조사하는 것이니 협조해 주면 고맙겠다고 녹음을 통해 동의를 구하고 문자 π를 수식 a^2, b^2 뒤에 쓴 이유가 무엇인지 인터뷰하였다. 좀 더 많은 학생들을 대상으로 4차 설문 조사를 할 때 최대한 객관적인 결과를 얻기 위해서 연구자 개인의 반응은 통제하였다.

그래서 1차, 2차, 3차의 실험 결과와 그 후의 인터뷰 결과를 바탕으로 4차 설문 조사를 더 많은 학생들을 대상으로 실시하였다. 예비조사에서는 한 문항이지만 연구 문제를 숨김을 통해 신뢰도를 유지하고자 하였으며, 그 결과를 본 조사에 반영하였다.

5. 4차 설문 조사 실시

1, 2, 3차 실험의 예비조사 결과를 바탕으로 2020년 4월 중 이틀간 나우앤서베이를 통해 전국의 만 14세 이상에서 만 21세 이하 중 설문에 동의한 201명을 임의 추출하여 4차 설문 조사를 온라인으로 실시하였다.

미적분을 고등학교 때 배우면서 교육과정 위계에 따른 전반적인 수학 문자표기 인식의 변화가 나타나는지를 알아보기 위해 연령대를 물어 보는 문항을 설문지에 넣어 연령대별로 반응을 구분해 보고자 하였다.

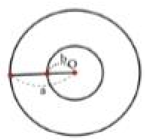
수학문자 표기순서에 대한 인식 조사

귀하의 연령대는 어떻게 되십니까?

- ◯ 만 14세 이상 ~ 만 16세 이하
- ◯ 만 17세 이상 ~ 만 19세 이하
- ◯ 만 20세 이상 ~ 만 21세 이하
- ◯ 만 22세 이상

안녕하세요.
논문 연구를 위한 설문 조사이오니 협조해 주시면 감사하겠습니다. 아래에 주어진 두 원에 대하여 작은 원과 큰 원으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 과정입니다. 자세히 응답해 주시면 고맙겠습니다.

반지름의 길이가 a인 큰 원의 넓이는 A이고 반지름의 길이가 b인 작은 원의 넓이는 B이므로 두 원의 넓이의 차이는 A-B입니다. 보기 중 A-B의 값을 표현한 것으로 옳은 것은 무엇일까요?



- ◯ 1번. $\pi a^2 - \pi b^2$
- ◯ 2번. $a^2\pi - b^2\pi$
- ◯ 1번과 2번 모두 가능함.

위의 문제에서 원주율 π도 상수이고, 반지름의 길이도 상수이므로 원주율 π는 수식 a^2 또는 b^2 뒤에 써도 되고, 앞에 써도 된다고 생각하나요?
(상수란 여러가지 값을 가질 수 있는 변수와 달리, 값이 변하지 않고 고정된 수 또는 이를 지칭하는 문자를 뜻함.)

- ◯ 예. 의미의 혼동이 없기 때문에 둘 다 써도 된다고 생각합니다.
- ◯ 아니오. 원의 넓이는 반지름의 길이의 값이 변함에 따라 달라지므로 원주율 π는 수식 a^2 또는 b^2의 뒤에 오면 안 되고, 항상 앞에 와야 한다고 생각합니다.
- ◯ 아니오. 4π, 9π, 16π 등과 같이 원주율 π는 수식 a^2 또는 b^2의 앞에 오면 안 되고, 항상 뒤에 와야 한다고 생각합니다.
- ◯ 아니오. 문자의 표기방식은 시대에 따르므로 현대 우리나라에서는 원주율 π는 수식 a^2 또는 b^2의 뒤에 오면 안 되고, 항상 앞에 와야 한다고 생각합니다.
- ◯ 기타

Powered by nownsurvey

[Fig. 6] Quadratic survey paper: Survey title : A Study on the recognition of math characterization order

예비조사 및 본 조사에서 이 문항을 선정한 이유는 앞 선 수학자 Legendre(1858)가 남긴 문제이고, 그 때 풀이에서 문자 표기 순서가 교과서의 표기 순서와 달랐기 때문에 이러한 부분에 대한 학생 인식을 이 문제로 조사해 보기로 하였다.

예비조사에서는 문항을 서술형으로 구성하였지만, 본 조사에서는 객관식으로 구성하되 세 번째 문항에 기타를 보기 항목으로 넣어 예비조사 결과와 생각이 다른 응답을 걸러 내고자 하였다. 기타에 대한 응답이 많이 나온다는 것은 예비조사에서 구한 수학 문자표기 인식에 대한 이유에 부족했던 점이 있을 수 있다고 보았다. 4차 설문 조사 결과 세 번째 문항에서 두 번째 문항에 어떤 보기를 택하든 세 번째 문항에서 주어진 1번에서 4번 보기 중에 자신의 의견이 없을 경우 기타 보기에 대해 응답할 수 있도록 하였다. 세 번째 문항에서 기타 응답이 5% 이상으로 나올 경우 응답자의 의견을 서술형으로 받는 추가 조사를 실시하고자 하였다.

[Fig. 6]는 4차 설문 조사지로 설문 제목은 수학문자 표기순서에 대한 인식 조사이다. 4차 설문 조사지는 온라인 설문지로 두 번째, 세 번째 문항이 연결되는 문항으로 구성하여 세 번째 문항에 대한 응답 후 다시 두 번째 문항으로 돌아가 답을 수정할 수 있도록, 응답자가 한 번 더 생각하고 답을 할 수 있도록 한 페이지에 구성을 하였다. 일치가 되지 않는 응답을 걸러내기 위한 것이었다. 첫 번째 문항만 따로 두어 다음을 눌러야 넘어가고 두 번째 문항으로 넘어간 이후에는, 이전으로 다시 돌아올 수 없도록 하였다. 그리고 두 번째 문항에서 논문 연구를 위한 설문 조사로 협조해 주시면 감사하겠다고 다시 한 번 동의를 구했다.

예비조사 결과 다양한 성취수준, 학습한 교과서 및 다양한 수학 교사들에 대해서 설문 조사를 하여도 문자 표기 순서에 차이가 드러나지 않았기 때문에 4차 설문 조사에서 성취수준에 대한 문항은 구성하지 않았다.

즉, 첫 번째 문항에서는 설문 조사 결과 분석을 위해 연령대를 조사하였다. 두 번째 문항에서는 예비조사의 설문 조사지와 동일한 내용으로 객관식으로 조사하였으며 문자 표기 순서에 대하여 직접적으로 보기를 주었다. 세 번째 문항에서는 예비조사의 인터뷰 결과를 반영하여 상수의 정의를 제시하고, 원주율 π도 상수이고, 반지름의 길이도 상수이므로 원주율 π를 수식 a^2, b^2의 뒤에 써도 되고 앞에 써도 된다고 생각하는가에 대해 문자 표기 순서에 대한 인식을 묻는 설문 조사를 5개의 보기를 통해 객관식으로 실시하였다. 수학백과사전은 상수란 여러 가지 값을 가질 수 있는 변수와 달리, 값이 변하지 않고 고정된 수 또는 이를 지칭하는 문자를 뜻한다고 하였다 (Encyclopedia of mathematics, 2015).

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 1, 2, 3차 실험 결과

1, 2, 3차 실험을 실시한 결과를 표로 나타내면 [Table 1]과 같다. [Table 1]은 본 연구의 실험 결과이다. A중학교 1번 학생은 원주율 π를 답에서 a^2, b^2의 뒤에 쓰고 있었는데, 이 학생은 풀이과정의 좌변에서는 곱셈 기호를 생략하지 않고 원주율 π를 마지막에 곱하고 있었다. 2번 학생의 경우에는 중학교 3학년 과정의 인수분해 공식을 사용하여 $a^2\pi-b^2\pi=(a+b)(a-b)\pi$라고 쓰고 있었다. 3번 학생의 경우에도 $a^2\pi-b^2\pi$와 같은 답을 구했으나 a^2-b^2이라 썼다가 줄을 그어 지우고, $a\pi^2$으로 썼다가 줄을 그어 지우고 $a\times a\times\pi=a^2\pi-b^2\pi$이라고 썼다가 $a\times a\times\pi$를 줄을 그어 지우고 답을 구했다.

4번 학생의 경우 풀이과정에 $a\times a\times\pi=a^2\pi$, $a^2\times\pi=a^2\pi, b^2\times\pi=b^2\pi$라 구하고 나서 $a^2\pi-b^2\pi$으로 답을 구했다. B중학교 5번 학생은 풀이과정에 $(a-b)^2\pi$로 시도했다가 두 줄 긋고 다시 구하는 모습을 보였다. 인수분해 공식을 기억해서 쓰려고 하다가 혼동이 온 것으로 보인다.

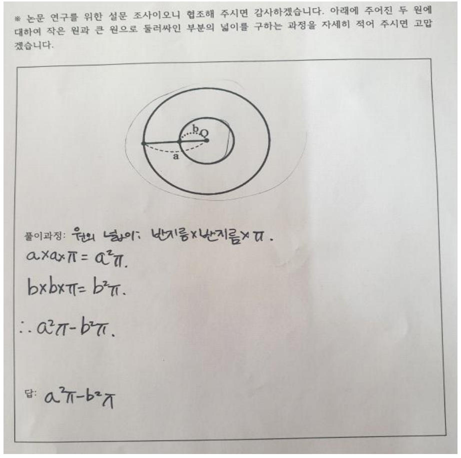
5명 학생 모두 원주율 π를 Legendre(1858)와 같이 표현하고 있었다.

[Fig. 7]은 $a^2\pi-b^2\pi$로 답한 학생들 중 한 명의 실험에 사용된 문제에 대한 답안이다. [Fig. 7]을 볼 때, (원주)는 (지름)×(원주율)이라 하고 (원의 넓이)는 (반지름)×(반지름)×(원주율)으로 하는 초등학교 과정과 연결해서 문제를 푼 것으로 볼 수 있다.

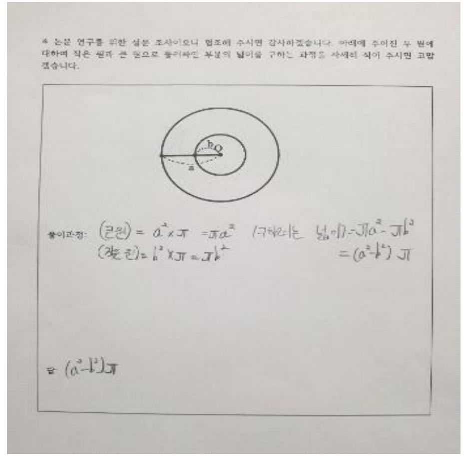
추가로 실시된 실험 결과를 살펴보면, 6명 중 4명의 학생은 Legendre(1858)와 같이 원주율 π를 답에서

[Table 1] The results of this study's experiment

Student number	The singularity of the pooling process	A student's answer	Achievement level	A textbook publisher	An position of the Archimedes' constant in the answer
1	She started the pooling process from (The area of a circle)=(Radius)×(Radius)×π.	$a^2\pi - b^2\pi$	Upper ㉡	Jihaksa	after the square of radius length
2	·	$(a+b)(a-b)\pi$	Upper ㉠	Jihaksa	after the square of radius length
3	He wrote a^2-b^2, $a\pi^2$ in the process of pooling and erased them.	He wrote $a^2\pi - b^2\pi$ in the process of pooling.	Lower ㉣	Jihaksa	after the square of radius length
4	$a\times a\times\pi = a^2\pi$, $a^2\times\pi = a^2\pi, b^2\times\pi = b^2\pi$	$a^2\pi - b^2\pi$	Lower ㉤	Jihaksa	after the square of radius length
5	She tried $(a-b)^2$ and drew two lines and wrote $a^2\pi - b^2\pi$.	$a^2\pi - b^2\pi$	Mid-Level ㉡	Visang Education	after the square of radius length
6	He wrote $a^2\pi - b^2\pi$ in the process of pooling and he wrote $(a-b)^2\pi$ in the answer and tried to erase it.	He wrote $a^2\pi - b^2\pi$ in the process of pooling and he wrote $(a-b)^2\pi$ in the answer and tried to erase it.	Mid-Level ㉡	Jihaksa	after the square of radius length
7	·	$a^2\pi - b^2\pi$	Upper ㉡	Jihaksa	after the square of radius length
8	·	$\pi a^2 - \pi b^2$	Mid-Level ㉢	Jihaksa	in front of the square of radius length.
9	He started with formula πr^2.	$a^2\pi - b^2\pi$	Unknown due to transfer	Jihaksa	after the square of radius length
10	·	$(a^2-b^2)\pi$	Upper ㉡	Jihaksa	after the square of radius length
11	Because the area of the large circle is $a^2\times\pi = \pi a^2$ and the small circle is $b^2\times\pi = \pi b^2$, the area to get is $\pi a^2 - \pi b^2 = (a^2-b^2)\pi$.	$(a^2-b^2)\pi$	Upper ㉠	Jihaksa	after the square of radius length



[Fig. 7] Answers to the questions used in the experiment of one of the students who answered with $a^2\pi - b^2\pi$



[Fig. 8] Answers to questions used in a student's experiment using the expression $\pi a^2, \pi b^2$ in the pooling process and $(a^2 - b^2)\pi$ in the answer

a^2, b^2의 뒤에 쓰고 있었다. 9번 학생은 원의 넓이를 구하는 공식을 πr^2이라고 써 놓고 풀이과정과 정답에는 Legendre(1858)와 같이 원주율 π를 답에서 a^2, b^2의 뒤에 쓰고 있었다.

6번, 7번, 10번 학생도 a^2, b^2을 원주율 π의 앞에 쓰고 있었고 8번 학생은 π를 답에서 a^2, b^2의 앞에 쓰고 있었다. 그리고 11번 학생은, 100점을 받았던 학생으로 풀이과정에 큰 원은 $a^2 \times \pi = \pi a^2$이고 작은 원은 $b^2 \times \pi = \pi b^2$이므로 구하려는 넓이는 $\pi a^2 - \pi b^2 = (a^2 - b^2)\pi$라고 쓰고 있었다. 여기서 자세히 살펴보면 각각의 원의 넓이를 구하는 풀이과정에서는 원주율 π를 a^2, b^2 앞에 쓰다가 정답을 구할 때에는 공통인수 π로 묶으면서 $a^2 - b^2$ 뒤에 원주율 π를 쓰고 있었다. 즉 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 구하는 공식 πr^2과 본 연구에서 조사하는 $r^2\pi$이라는 표현을 혼용하여 사용하고 있었다.

즉, 한 수학교사가 담당하는 학생들 사이에도 원주율 π를 a^2, b^2 앞에 쓰기도 하고 원주율 π를 a^2, b^2의 뒤에 쓰기도 하며 두 가지 표현을 혼용하고 있었으며, 한 교사가 담당하는 한 학생 안에서도 혼용 표현이 있었다.

[Fig. 8]은 풀이과정 중에 $\pi a^2, \pi b^2$라고 쓰고 답에는 $(a^2 - b^2)\pi$라는 표현을 사용한 학생의 실험에 사용된 문제에 대한 답안이다.

1차의 실험 결과를 분석해 보면 같은 교과서와 같은 교사 내에 학생 성취수준에 따라 문자 쓰는 순서에 차이는 없었다. 1차의 ㉡과 2차의 ㉡ 학생을 비교하여 같은 성취수준에서 교과서간 차이도 없었다.

3차 실험 결과 같은 교과서로 수업을 들은 학생들 사이에 교과서와 같이 답에 원주율 π를 a^2, b^2 앞에 쓰고 있는 학생이 1명 있었다. 1차, 2차와 다른 표현이 나타나서 실험을 중단하였다. 1차, 2차, 3차 실험 결과를 종합해 보면 실험에 응시한 전체 11명의 학생 중 9명의 학생이 원주율 π를 a^2, b^2의 뒤에 쓰고 있었고, 1명의 학생은 원주율 π를 a^2, b^2 앞에 쓰기도 하고 원주율 π를 a^2, b^2의 뒤에 쓰기도 하며 두 가지 표현을 혼용하고 있었다. 나머지 1명의 학생만 원주율 π를 a^2, b^2 앞에 쓰고 있었다.

세 번째 실험 결과를 볼 때 교과서에 π 뒤에 수식 a^2, b^2을 쓰는 표현이 나오므로, 교사에 따른 차이 없이 혼용 표현을 쓰고 있다고 볼 수 있다.

Legendre(1858)와 같이 답에 π앞에 수식 a^2, b^2을 써서 나타낸 학생들이 11명 중 10명으로 답에 π를 마지막으로 두고 있었다. 본 연구에서는 그러한 이유로 Schwartzman(1994)은 계수(coefficient)란 다항식(polynomial)에서 계수가 변수가 될 수 있다는 이론에도 불구하고 초보적으로 변수 표현에 곱해지는 상수를 의미한다고 하였는

데, 반지름의 길이가 a인 원의 넓이를 구할 때, 반지름의 길이가 a인 원은 하나이므로, 문자 a를 변수를 나타내는 문자라고 보지 않고 상수를 나타내는 문자라고 볼 수 있으므로, $4\pi, 9\pi, 16\pi$ 등을 쓰듯이 π를 마지막에 쓴 것으로 볼 수 있다. 즉, π를 문자 a와 문자 a의 곱인 a^2의 계수로 보는 것이 아니라 문자 π와 문자 a를 모두 상수를 나타내는 문자로 본 것이다.

그리고 문자들끼리 알파벳 순서대로 쓰는 것이 대학 과정까지 볼 때 일반적이지 않으므로 결과적으로 전체적인 학생들이 답에 $\pi a^2, \pi b^2$ 또는 $a^2\pi, b^2\pi$와 같은 표현을 사용하였는데, $a^2\pi, b^2\pi$라는 표현을 사용한 학생들이 11명 중 10명으로 더 많았다. 특히 A중학교 324명 중 10명에 대하여 9명이 교과서의 공식과 다른 표현을 쓰고 있었다.

2. 실험 결과에 대한 통계적 추정 및 인터뷰 결과 분석

Israel(1992)에 의하면 A중학교 E, F, G수학교사가 담당하는 학생들 약 150명에 대하여 똑같은 추출 과정을 거쳐 동일한 질문지로 실험 대상이 바뀌었을 때 6명 중 5명이 교과서 공식과 다른 표현을 정답에 썼으므로, 83%가 나온다. 교과서 공식과 다른 표현을 (83-39)%인 44% 이상 100%이하가 사용할 것이라고 95% 신뢰도로 말할 수 있다. 본 연구에서는 성취수준이 ㉡에 해당하는 중상위권 학생들이 상대적으로 많았다. ㉠~㉤을 각 1명 이상 두되, ㉡으로 구성하는 비율이 많을 때 본 연구와 같은 결과가 나올 가능성이 높다고 본다.

서술형평가에 같은 문제가 출제되었다면 교과서에 주어진 일반적인 규칙에 의하면 이 학생들은 모두 일반적이지 못한 것이다. 초기 수학자들을 보면 처음 공식을 유도하고 생각해 낼 때 표현이 다양했었다. 수학사의 흐름을 볼 때 중학교 1학년 학생들이 다양한 표현을 쓰는 것은 자연스럽다.

공식을 스스로 유도 과정을 생각해서 풀 때, 일률 화된 표현법이 나오지 않는다. 1, 2, 3차 실험 결과를 볼 때 학생들이 교과서에 나오는 공식처럼 표현한 수식 $\pi(a^2-b^2)$ 이외에도 수식 $a^2\pi - b^2\pi$와 같은 표현을 쓰고 있었다는 점에서 학생들이 문자의 쓰는 순서에 대한 표기에 있어 유연성 있는 사고를 하고 있다고 볼 수 있다.

연구 대상 학생들 중 한 명의 학생과 인터뷰를 한 결과 녹음한 내용을 기록하면 다음과 같다.

연구자: 녹음합니다. 논문 연구를 위해 설문 조사하는 거니까 협조해 주면 고맙겠습니다.

학생: 네.

연구자: 학생은 큰 원과 작은 원으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 과정에서 문자 π를 수식 a^2, b^2 뒤에 썼는데 왜 그렇게 썼는지 말해줄 수 있을까요?

학생: π도 숫자이고, a와 b도 길이니까 숫자니까 앞에 썼던 뒤에 썼던 상관없다고 여겨져서 뒤에 썼어요.

인터뷰한 내용을 보면 본 연구에서 분석한 대로, 문자 a와 b를 상수를 나타내는 문자라 보고 $a^2\pi, b^2\pi$와 같은 표현을 썼다는 것을 알 수 있다. 그리고 a, b, π는 모두 실수이므로 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하여 $a^2\pi = \pi a^2$이고 $b^2\pi = \pi b^2$이다. 이 인터뷰는 질적 연구 방법의 하나로 이를 통해 전국의 모든 학생들이 이와 같은 대답을 할 것이라고 추정을 할 수는 없다. 문자 a와 b, 그리고 π를 머릿속으로 숫자로 인식하는 것을 볼 수 있다.

3. 4차 설문 조사 통계적 추정 및 결과 분석

KOSIS National Statistical Portal(2020)의 주민등록인구현황의 행정구역별 5세별 주민등록인구를 2020년 4월 2일 자료갱신일 기준으로 전국의 만 14세~만 21세를 2,598,505명과 3,301,028명의 80%인 3,921,607명으로 보면 Israel(1992)이 제시한 공식에 의해 샘플 사이즈가 201일 때 표본오차가 6.91%가 나온다.

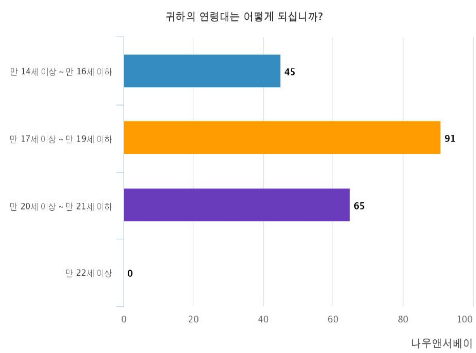
그러므로 4차 설문 조사 결과를 볼 때, 두 번째 문항에서 교과서와 다른 표기만 가능하거나 다른 표현과 교과서 표현 둘 다 쓸 수 있다는 의견이 201명 중 173명으로 86%가 나왔다. 95% 신뢰도로 다른 실험 집단에 대해서도 본 연구와 같은 추출과정을 반복할 때 만 14세~만 21세의 사람들 중 (86-6.91)%=79.09%에서 (86+6.91)%=92.91%가 교과서와 다른 표기만 쓰거나 다른 표기도 쓴다고 볼 수 있다. 다시 말하면, 79.09% 이상에서 92.91% 이하가 원주율 π를 뒤에 쓰는 표현이 가능하다고 보는 것이다.

세 번째 문항에 대해 통계적 추정을 하면, 95% 신뢰도로 다른 실험 집단에 대해서도 본 연구와 같은 추출과

정을 반복할 때 만 14세~만 21세의 사람들 중 (78.6-6.91)%=71.69%에서 (78.6+6.91)%=85.51%가 교과서와 다른 표기에 대해 의미의 혼동이 없기 때문에 두 가지 표현이 모두 가능하다고 생각하거나 $4\pi, 9\pi, 16\pi$ 등과 같이 원주율 π는 문자 a^2 또는 b^2 앞에 쓰면 안 되고 항상 뒤에 써야 한다고 생각한다고 볼 수 있다.

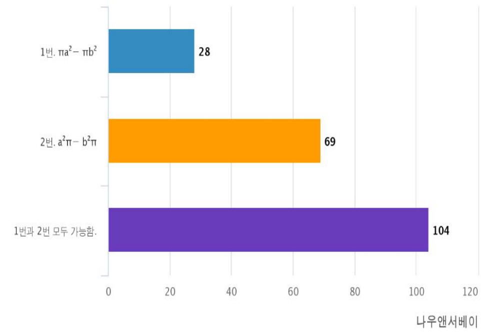
즉, 예비조사의 인터뷰 대상이 1명뿐이었지만, 인터뷰한 학생과 같은 의견이 201명 중 97명으로 약 48.3%로 가장 많이 나왔으므로 그 결과가 일반화가 가능하다고 볼 수 있다. 두 번째 문항의 결과에서도 예비조사의 실험 참가 대상 수가 총 11명뿐이었지만 일반화를 4차 설문 조사가 가능하게 하였다. 4차 설문 조사 결과 신뢰구간의 길이가 3차 실험 때마다 훨씬 짧아졌고, 연구 결과를 좀 더 일반화시킬 수 있었다.

[Fig. 9]~[Fig. 11]은 4차 설문 조사 결과 분석표 1, 2, 3이다. [Fig. 9]는 위에서부터 차례대로 ①만 14세 이상~만 16세 이하, ②만 17세 이상~만19세 이하, ③만 20세 이상~만 21세 이하, ④만 22세 이상의 순서이다.

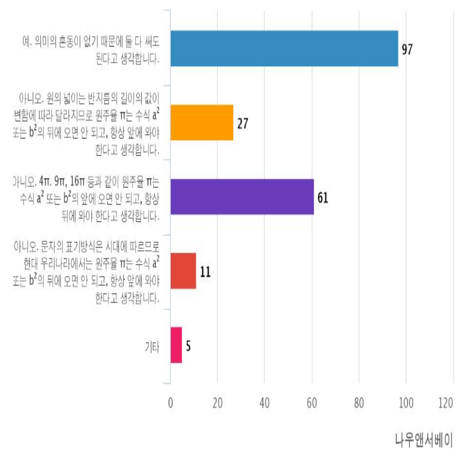


[Fig. 9] Quadratic survey results analysis table1

[Fig. 10]은 위에서부터 차례대로 ①1번 $\pi a^2 - \pi b^2$, ②2번 $a^2\pi - b^2\pi$, ③1번, 2번 둘 다 가능의 순서이다. [Fig. 11]은 위에서부터 차례대로 ①의미의 혼동이 없기 때문에 두 가지 표기 모두 가능하다, ②원의 넓이는 반지름의 길이가 변함에 따라 달라지므로 원주율 π는 문자 a^2 또는 b^2 뒤에 쓰면 안 되고 항상 앞에 써야 한다고 생각한다, ③$4\pi, 9\pi, 16\pi$ 등과 같이 원주율 π는 문자 a^2 또는 b^2 앞에 쓰면 안 되고 항상 뒤에 써야 한다고 생각한다, ④문자의 표기 방식은 시대를 따르므로 현대 우리나라에서는 원주율 π는 문자 a^2 또는 b^2 뒤에 쓰면 안 되고 항상 앞에 써야 한다고 생각한다, ⑤기타의 순서이다.



[Fig. 10] Quadratic survey results analysis table2

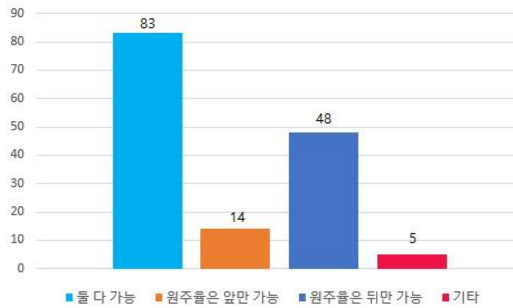


[Fig. 11] Quadratic survey results analysis table3

학생들이 개념을 혼돈스러워 해서 두 번째, 세 번째 문항에 대하여 두 번째는 1번 보기를 택하고 세 번째는 1, 3번 보기를 택하거나 두 번째는 2번 보기를 택하고 세 번째는 1, 2, 4번 보기를 택하거나 두 번째는 3번, 세 번째는 2, 3, 4번 보기를 택하는 등 일치하지 않는 모습을 보이는 경우도 있었다.

일치하는 경우만 분리할 때, 응답자 201명 중 150명이 두 번째, 세 번째 보기에서 일치하는 응답을 보였으며,

나머지 51명은 두 번째, 세 번째 응답을 하면서 스스로 개념이 명확하지 않아 혼돈스러웠던 것으로 보인다. 150명 중 131명인 약 87.3%가 교과서와 다른 표기만 가능하거나 다른 표기도 가능하다고 생각한다고 볼 수 있으며, 교과서 표기로 인해 150명 중 14명인 약 9.3%가 교과서 표기만 가능하다고 하였다. 나머지 5명은 기타를 택했다. [Fig. 12]는 4차 설문 조사 결과 분석표 4이다. 두 번째, 세 번째 응답이 일치하는 150명을 기준으로 조사한 것으로 왼쪽부터 차례대로 ①둘 다 가능, ②원주율은 앞만 가능, ③원주율은 뒤만 가능, ④기타의 순서이다.



[Fig. 12] Quadratic survey results analysis table4

세 번째 문항에서 기타 보기를 택한 응답자 수가 150명 중 5명으로 약 3.3%로 의견을 묻는 추가 설문 조사는 하지 않았다.

Israel(1992)이 제시한 공식에 의해 샘플 사이즈가 150일 때 표본오차가 8%가 나온다. 이 자료로 통계적 추정을 하면, 95% 신뢰도로 다른 실험 집단에 대해서도 본 연구와 같은 추출과정을 반복할 때 만 14세~만 21세의 사람들 중 (87.3-8)%=79.3%에서 (87.3+8)%=95.3%가 두 번째 문항에서 2번과 3번 보기를 택한다고 볼 수 있다. 201명을 기준으로 두 번째 문항에 대해 추정했을 때인 (86-6.91)%=79.09%에서 (86+6.91)%=92.91%와 비슷한 수치가 나오는 것을 알 수 있다.

만 14세~만 16세 학생들이 중학교 2학년에서 고등학교 2학년 사이에 들어가는데, 이 연령대만 두 번째 문항에 2번 보기에 답하고 세 번째 문항에서 3번 보기에 응답한 학생 수가 17명으로 두 번째 문항에서 3번 보기에 응답하고 세 번째 문항에서 1번 보기에 답한 학생 수 12명보다 많았다. 다른 나이 대에서는 같은 경우 각각 14명, 43명이고 17명, 28명으로 두 번째, 세 번째 문항에서 대하여 둘 다 가능하다는 응답수가 제일 많았다.

이 결과에 의하면 교육과정 위계상 인식의 변화가 일어나 만 17세 이상부터는 둘 다 가능하다는 인식이 많아졌다고 볼 수 있다.

V. 결론 및 제언

Jang 외(2019)는 중학교 수학 1 지학사 교과서에서 곱셈 기호를 생략하여 나타낼 때, 일반적으로 π를 숫자와 문자 사이에 쓴다고 한다. 즉 반지름의 길이 r에 대하여 원의 넓이는 πr^2이 된다. 반지름의 길이가 r인 원의 넓이에 대하여 국내 교과서뿐만 아니라 Stephan(2012)에 의하면 미국 교과서에서도 πr^2이라는 표기를 사용하고 있었다(as cited in Choi, 2018).

그러나 독일, 프랑스를 보면 1768년~1858년에 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 πr^2이 아니라 $r^2\pi$라 두거나 원주의 길이를 $2\pi r$이 아니라 $2r\pi$이라 둔 사례들이 남겨져 있다(Karsten, 1768; Legendre, 1858). 독일에는 2020년 현재에도 이러한 표현을 사용한 사례가 있다(Realschule Schweikberg, 2020). 일반적으로 π를 숫자와 문자 사이에 쓴다는 것은 π를 숫자와 문자 사이에 쓰지 않을 수도 있다는 것과 동치이다.

일반적으로 원의 넓이에 π를 처음 도입하는 과정에서 반지름의 길이 r인 원의 넓이에 대하여 $r^2\pi$라는 표현을 사용하지 않는 이유가 무엇인지 조사해 볼 필요성이 생긴다. 그러나 본 연구의 결과를 살펴보면 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 $r^2\pi$라고 표현하면 안 된다는 이유나 근거를 찾을 수 없다. 그래서 보편적인 수학자들의 동의가 아니더라도 학생들 사이의 표기순서에 대한 공통적인 인식을 살펴보기 위해, 큰 원의 반지름의 길이가 a, 작은 원의 반지름의 길이가 b인 중심이 같은 두 원 사이의 넓이를 구하는 문제로 1, 2, 3차 예비조사를 실시하고, 문제를 풀고 그 이유를 선택하는 4차 본 조사를 실시하였다.

4차 설문 조사 결과를 보면, Israel(1992)의 표본 오차에 관한 공식에 의해 국내의 만 14세~만 21세 중 임의 추출한 설문에 동의한 201명에서 두 번째, 세 번째 응답 내용이 일치하는 150명을 기준으로 통계적 추정을 했을

때, 79.3%~95.3%가 교과서의 규칙을 따르지 않고 있다고 95% 신뢰도로 말할 수 있다.

이러한 학생들의 인식을 볼 때, '일반적으로 반지름의 길이 r인 원의 넓이는 πr^2이다'라는 명제가 참인지 거짓인지 해석이 되지 않는다. 보통 일반적이라는 것은 명확한 기준이 없어도 πr^2과 $r^2\pi$ 중 적어도 50% 이상은 이러한 인식이 나와야 하는데, 1, 2, 3차 설문결과들을 보면 πr^2과 같은 형태로 나타내지 않은 응답이 90% 정도가 나온다.

4차 설문 조사 결과를 볼 때에도 [Fig. 12]를 보면 모두 가능하다를 제외하고, 교과서의 표현과 같이 150명 중 14명이 원주율 π는 문자 a^2 또는 b^2 뒤에 쓰면 안되고 항상 앞에 써야 한다고 하였고, 마찬가지로 150명 중 48명이 원주율 π는 문자 a^2 또는 b^2 앞에 쓰면 안되고 항상 뒤에 써야 한다고 하였으므로 $14:48=7:24$라고 볼 수 있다. 일반적이지 않은 것에 대해 맞다는 인식이 더 많이 나왔다.

그러므로 원의 넓이를 나타내는 표현에 대한 일반적인 교과서의 문자 표기 순서와 학교 교육에서 자연스럽게 형성된, 반지름의 길이가 문자인 원의 넓이의 학생들의 문자 표기 순서에 대한 인식이 일치하지 않는다.

이 설문 결과의 또 다른 주요점은 여러 다른 교과서로 원의 넓이에 대한 표현을 배운 전국에서 만 14세~만 21세 중, 만 14세~만 16세는 $4\pi, 9\pi, 16\pi$ 등과 같이 원주율 π는 문자 a^2 또는 b^2 앞에 쓰면 안 되고 항상 뒤에 써야 한다는 응답이 둘 다 가능하다는 응답보다 많이 나왔다는 것이다. 반지름의 길이 a, b를 숫자로 인식한 인터뷰 결과에 의하면 문자 a, b을 보고 머릿속으로는 숫자로 인식, 인지하고 있다고 볼 수 있다. 그런데 만 17세 이상에서는 의미의 혼동이 없기 때문에 두 가지 표기가 모두 가능하다는 인식이 더 많이 나왔다. 즉 중학교 과정 이후의 교육과정 위계에 따라 학교에서 자연스럽게 다양한 수학 문자 표기 순서에 대한 교육이 이루어지고 있어 학생들의 인식에 변화가 나타난 것으로 볼 수 있다.

학생들은 반지름의 길이가 문자인 원의 넓이 표기에 대해 1700~1800년대 수학자가 인식했던 것과 같이 인식하고 있다. 교과서에 제시된 일반적인 규칙보다 항상 성립하는 어떤 규칙이 필요하다.

결론적으로 의미의 혼동이 없다면 둘 다 가능하다는 것이 가장 공통적인 인식이 될 수 있다. 그러므로 원의 넓이 구하는 공식에서 문자 표기 순서를 서로 바꾸어 쓸 수도 있도록 유연하게 지도할 필요가 있다. 국내의 교과서에서는 '원의 넓이는 S, 원의 반지름의 길이는 r에 대하여 $S=\pi r^2$이다' 대신에 '원의 넓이는 S, 원의 반지름의 길이는 r에 대하여 $S=r^2\pi=\pi r^2$이다'와 같은 방식으로 표현되어야 자연스러울 것이다.

참 고 문 헌

Adams, D. Q. (1987). *Essential Modern Greek Grammar*. New York City, New York: Dover Publications.

Choi, E. A. (2018). A comparative Analysis of Pi and Area of a Circle in Mathematics Textbooks of Korea, Japan, Singapore and The US. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 21(4),* 445-467. http://doi.org/10.30807/ksms.2018.21.4.007

Encyclopedia of mathematics (2015). *constant*, Seoul: Korean Mathematical Society.

Go, S. E., Lee, J. H., Lee, S. W., Cha, S. G., Kim, Y. H., Oh, T. G., Jo, S. C. (2019). *High school calculus.* Seoul: Sinsago.

Israel, D. Glenn (1992). *Determining Sample Size. Florida Cooperative Execution Service FEOD-6.* Gainesville: University of Florida.

Jang, G. W., Gang, H. Y., Kim, D. W., An, J. M., Lee, D. H., Park, J. H., ⋯, Gu, N. Y. (2019). *Middle School Math 1.* Seoul: Jihak.

Karsten, W. J. G. (1768). *Lehrbegrif der gesamten Mathematik: Weitere Ausführung der Rechenkunst : Die Buchstabenrechnung. Die ebene und sphaerische Trigonometrie, nebst weiterer Ausfuehrung der Geometrie*. Greifswald: Röse

Karsten, W. J. G. (1786). *Lehrbegriff der gesamten Mathematik: Weitere Ausführung der Rechenkunst : Die Algebra mit den vornehmsten Anwendungen auf Zahlenrechnungen, Die ebene und sphärische Trigonometrie nebst weiterer Ausführ. der Geometrie. 2,1.* Greifswald: Röse.

Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics / An Introduction (3rd ed.).* Boston: Addison Wesley Longman.

Kim, W. G., Jo, M. S., Bang, G. S., Im, S. H., Kim, D. H., Gang, S. J., ⋯, Kim, Y. H. (2019). *Middle School Math 1.* Seoul: Visang Education.

KOSIS National Statistical Portal (2020). *The resident* *registration population on administrative districts (eupmyeon-dong)/5 years old.* Seoul: Ministry of Public Administration and Security. Retrieved April 27, 2020, from http://kosis.kr

Lee, D. J. (2019). *Two new mathematics @3: The Heart of Time*. Seoul: Owl Press.

Lee, J. G. (2007). *Qualitative research methodology*. Seoul: Kyoyookbook.

Lee, M. J. (2019). A study on the formula for seeking the width of a circle- Focusing on the first grade of middle school-. *2019 Contemporary Perspectives on Learning and Teaching in Mathematics Education, Vol2*, 261-264. Seoul: The Korean Society of Mathematical Education and the Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Legendre, A. M. (1858). *Elements of Geometry and Trigonmometry (Chales Davies, ed.)* NY: A. S. Barnes & Co.

Ministry of Education (2019). *Elementary school mathematics 6-2*. Sejong: Ministry of Education.

National Korean Language Institute Standard Korean Language Dictionary (2020). *Panel*. Seoul: National Korean Language Institute.

Realschule Schweiklberg (2020). *Erklärvideos der Realschule Schweiklberg: Mathematik 9 I* , Rottenburg: 2020 RS-Rottenburg. Retrieved April 27, 2020, from https://www.rs-rottenburg.de/faecher/mathematik

Ryu, H. C., Ryu, S. R., Lee, K. H., Sin, B. M., Kang, S. M., Yun, O. G., …, Kim, C. H. (2019a). *Middle School Math 2*. Seoul: Chunjae.

Ryu, H. C., Ryu, S. R., Lee, K. H., Sin, B. M., Kang, S. M., Yun, O. G., …, Kim, C. H. (2019b). *Middle School Math 3*. Seoul: Chunjae.

Schwartzman, S. (1994). *The Words of Mathematics: An Etymological Dictionary of Mathematical Terms Used in English*. Washington: Mathematical Association of America.

Stephan, H. (2012). *Saxon Math course 1*. Orlando: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Waddingham, A. (2014). *New Hart's Rules: THE Oxford Guide to Style*. N.Y.: Oxford University Press.