

# 상대 가속도를 이용한 기초 가진을 받는 다자유도 기계 시스템의 동적 해석

이태원\*.#

\*금오공과대학교 기계설계공학과

## Dynamic Analysis for Mechanical Systems with Multi-Degree of Freedom under Base Excitation Using Relative Acceleration

Tae Won Lee\*.#

\*Dept. of Mechanical Design Engineering, Kumoh National Institute of Technology

(Received 11 December 2019; received in revised form 31 December 2019; accepted 18 February 2020)

### ABSTRACT

Mechanical systems installed in transport devices, such as vehicles, airplanes, and ships, are mostly subject to translational accelerations at the joints during operations. This base acceleration excitation has a large influence on the performance of the system, therefore, its response must be well analyzed. However, the existing methods for dynamic analysis of structures have some limitations in use. This study presents a new numerical method using relative acceleration to solve these limitations. If the governing equation of motion is linear and the mass matrix, the damping matrix, and the stiffness matrix are constant over time in the finite element analysis, the proposed method can be applied to the transient behavior analysis and the harmonic response analysis of the structure. Because it is not necessary to introduce a virtual mass and the rigid body motions are removed from the analysis, it is possible to use not only the direct integration method in the time domain but also the mode superposition method to obtain the dynamic responses. This paper demonstrates with three examples how the present method is suitable for the dynamic analysis of a structure with multi-degree of freedom.

**Key Words** : Relative Acceleration(상대 가속도), Dynamic Analysis(동적 해석), Mode Superposition(모드 중첩)

### 1. 서 론

일반적인 구조물의 선형 동적 문제에 대한 유한 요소 방정식은 초기조건과 경계조건에서 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬 및 하중벡터와 변위벡터의 시간에 대한 2차 미분방정식으로 표현되며 하중의

형태에 따라 조화응답해석, 충격해석, 진동해석 등으로 분류한다. 그런데, 동적 해석이 필요한 기계 시스템들 중 자동차 및 항공기에 탑재되어 운행되는 기계 장치들은 지진을 받는 구조물<sup>[1,2]</sup>과 마찬가지로 병진운동에 해당하는 기초 가진(base excitation)으로 진동이 일어난다<sup>[3-7]</sup>. 이러한 기초 가진 현상은 경계조건이 기초부의 가속도항만으로 정의되어 변위 경계조건으로 정의된 일반적인 구조해석과 달리 수치적인 동적 해석이 상당히 어렵다.

# Corresponding Author : [twlee@kumoh.ac.kr](mailto:twlee@kumoh.ac.kr)

Tel: +82-54-478-7375, Fax: +82-54-478-7319

가속도 경계조건을 갖는 기계 구조물의 동적 해석은 수치해법으로 거대질량법(large mass method)<sup>[8-10]</sup>이 많이 사용된다. 이 방법은 가속도 가진이 일어나는 기초부를 임의의 거대 질량으로 대체하고 이 질량에 가속도를 부여하여 동적해를 구하는 방법이다. 그러므로 임의의 유한한 값으로 가정된 질량의 크기에 따라 동적 거동의 계산 결과에 오차가 있을 수 있다. 더구나 경계조건으로 변위나 속도조건이 부족하여 해석 과정에서 강제 운동 효과가 발생되므로 동적 해석 방법 중 계산 시간 관점에서 상당히 효율적인 모드중첩법(mode superposition method)<sup>[11]</sup>를 적용하기 어렵다. 이러한 이유로 거대질량법은 기초 가속도 가진을 받는 구조물은 운동방정식으로부터 직접 응답을 구하는 것이 유일한 방법이다. 다른 수치적 방법으로 강제운동법(enforced motion method)<sup>[12]</sup>도 존재하나 이는 모드 중첩을 적용한 해석만 가능하다. 모드 중첩법은 감쇠행렬이 질량행렬과 강성행렬의 특별한 조합인 경우만 사용할 수 있어 특수한 경우를 제외하고 일반적인 감쇠를 포함하는 구조물의 동적 거동은 계산할 수 없다.

이상과 같이 경계조건이 가속도항만으로 정의된 구조물의 동적 해석에서 기존의 수치해법들은 각각 단점들이 있기 때문에 이를 보완할 새로운 방법이 필요하다. 그런데, 기초 가진을 받는 1 자유도 동적 문제는 기초부의 변위와 구조물의 절대 변위의 차인 상대 변위로부터 상대 속도와 상대 가속도를 정의하여 해를 구한다. 이 개념을 다자유도인 구조물에도 확장 적용할 수 있다. 이에 대한 연구로 Sinapius<sup>[13]</sup>는 구조물이 x, y, z 축방향 병진운동과 이 축들에 대한 회전운동을 하는 기초 가속도 가진이 작다는 가정을 하고 상대 변위, 상대 속도, 상대 가속도로 표현된 운동방정식을 유도하였다. 비록 이 연구는 정규모드 실험의 타당성을 증명하고자 사용하였으나 기초 가진을 받는 다자유도의 동적 해석에도 확장할 수 있다.

본 연구는 상대 가속도를 이용한 기초 가속도 가진 하의 다자유도 시스템의 동적 해석 방법을 제안하고자 한다. 대부분의 기계 시스템은 기초 가속도 가진이 병진운동만 존재하고 회전운동이 없기 때문에 이 경우로 한정한다면 운동방정식의

유도는 어렵지 않다. 유도된 식에 의한 수치 방법은 기초 가진을 받는 충격해석 및 조화응답해석등에도 별 어려움없이 적용할 수 있다. 이 방법의 유용성을 입증하기 위하여 3개의 예제에서 기존의 방법들에 의한 구조물의 동적 해석과 새로운 방법의 수치적 결과들을 비교하였다.

## 2. 이론적 배경

유한요소법을 적용한 구조물의 동적 문제는 수치적으로 아래의 미분방정식을 푸는 것이다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (1)$$

위 식에서  $[M]$ 은 질량행렬,  $[C]$ 는 감쇠행렬,  $[K]$ 는 강성행렬을 나타낸다. 그리고  $\{f\}$ 는 하중벡터,  $\{u\}$ 는 절대 변위벡터이고 시간에 대한 1차 미분인  $\{\dot{u}\}$ 는 절대 속도벡터, 시간에 대한 2차 미분인  $\{\ddot{u}\}$ 는 절대 가속도벡터를 의미한다. 기본 형태는 시간 0에서 구조물 전체의 변위와 속도가 초기 조건으로 주어지며 운동이 구속된 부분이 경계조건으로 기술되는데 주로 변위 구속조건이다.

현재 관심사인 운송용 장치에 장착된 기계 시스템의 운동방정식은 식(1)과 동일하나 경계조건으로 기초 가속도 가진이 발생된다. 그리고 이 가진은 x, y, z축 방향의 병진운동만 존재하므로 본 연구는 이 조건에 대한 식을 유도하기로 한다. 설명의 편의를 위하여 Fig. 1에 한 방향으로 다자유도 시스템을 도시하였으나 x, y, z축 모두로 확장할 수 있다.

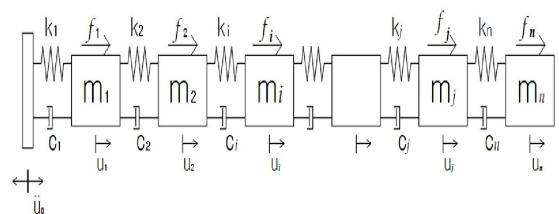


Fig. 1  $n$  degree of freedom system subjected to base acceleration

기초가  $\ddot{u}_0$ 의 절대 가속도로 가진되는  $n$ 자유도 시스템에서 기초의 절대 속도는  $\dot{u}_0$ , 절대 변위는  $u_0$ 로 정의하고 각 질량의 절대 변위를  $u_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ )라 하면 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_i \ddot{u}_i &= -c_i(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) \\ &\quad - k_i(u_i - u_{i-1}) + k_{i+1}(u_{i+1} - u_i) + f_i \\ m_n \ddot{u}_n &= -c_n(\dot{u}_n - \dot{u}_{n-1}) - k_n(u_n - u_{n-1}) + f_n \end{aligned} \quad (2)$$

절대 변위  $u_i$  대신 상대 변위  $v_i$ 와 이의 시간 미분인 상대 속도  $\dot{v}_i$ 를 아래와 같이 정의하자.

$$v_i = u_i - u_0, \quad \dot{v}_i = \dot{u}_i - \dot{u}_0 \quad (3)$$

이를 행렬식으로 정리하기 위해 하중벡터  $\{f\}$ , 절대 변위벡터  $\{u\}$ , 기초부의 변위벡터  $\{u_0\}$  와 상대 변위벡터  $\{v\}$  및 질량행렬  $[M]$ , 감쇠행렬  $[C]$ , 강성행렬  $[K]$ 를 이용하여 식 (2)를 다음의 행렬식으로 표현할 수 있다(질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬의 정의는 잘 알려져 있으므로 생략한다).

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K]\{v\} = \{f\} \quad (4)$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}, \quad \{u_0\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_0 \\ \vdots \\ u_0 \end{Bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} u_1 - u_0 \\ u_2 - u_0 \\ \vdots \\ u_n - u_0 \end{Bmatrix}$$

식 (4)는 비록 Fig. 1의 다자유도에서 유도하였으나 회전운동 없이 x, y, z축의 병진 가속도만 존재한다면 실제로 기초 가진을 받는 일반적인 기계 시스템의 운동방정식으로 확장 적용될 수 있다.

한편 변위벡터와 속도벡터 및 가속도벡터는

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{v\} + \{u_0\} \\ \{\dot{u}\} &= \{\dot{v}\} + \{\dot{u}_0\} \\ \{\ddot{u}\} &= \{\ddot{v}\} + \{\ddot{u}_0\} \end{aligned} \quad (5)$$

이므로 이 관계를 이용하면 식 (4)는 결국 다음

식이 된다.

$$[M]\{\ddot{v}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K]\{v\} = -[M]\{\ddot{u}_0\} + \{f\} \quad (6)$$

결론적으로 식(4)로 정의된 x, y, z 축 병진 방향으로 기초 가속도 가진을 받는 구조물의 운동방정식은 상대 가속도 식 (6)으로 변환된다.

### 3. 적용 예제

#### 3.1 평판의 진동 특성

두께 0.01m, 길이 0.5m, 폭 0.05m인 평판이 y 방향으로 0-2000 Hz 범위의 가속도 가진을 받을 때 반대편 끝단에서의 가속도 전달율을 계산하고자 한다. 평판의 재질은 스텐레스 강으로 밀도 8000 kg/m<sup>3</sup>, 탄성계수 193 GPa, 포아손 비 0.25이다. 해석을 위한 유한요소 모델링은 Fig. 2 와 같고 재료의 감쇠비는 0.02 로 선정하였다.

이 예제는 감쇠행렬이 강성행렬과 질량행렬의 조합으로 구성된 특수한 형태이다. 그러므로, 동적 해석에 모드중첩법을 적용할 수 있어 제안된 상대 가속도를 이용한 방법은 이를 사용하였다. 수치 계산에 사용된 모드는 20개로 한정하였다. Fig. 2의 A점에서 가속도 전달율을 기존의 직접변위법(direct displacement method)<sup>[8]</sup>의 결과와 비교하였다. 직접변위법은 조화응답해석에만 적용가능하고 기초부에 가진된 가속도 대신 구속조건으로 변위를 사용하여 해를 구한다. 이 과정은 ANSYS 16.1의 APDL로 프로그래밍 하였으며 수치해를 위한 진동수 간격은 10 Hz로 설정하였다.

해석 결과를 도시한 Fig. 3에서 보듯이 두 방법으로 구한 수치 결과는 거의 일치한다. 정량적으로 두 값들은 약간의 오차가 있으나 상대 오차가 최대 0.2% 미만이다. 결론적으로 제안된 방법은 20개의 모드만 이용한 모드 중첩을 적용하여 계산

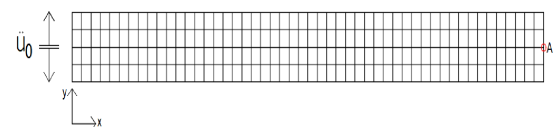


Fig. 2 Finite element model of plate

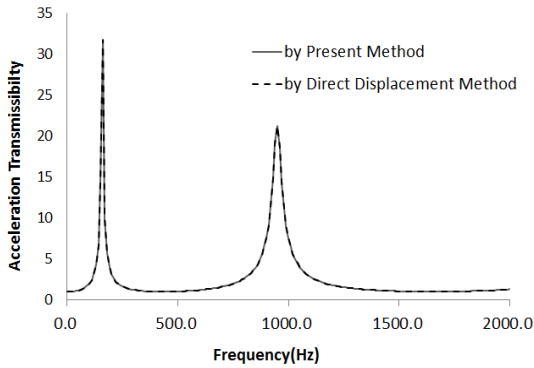


Fig. 3 Absolute acceleration transmissibility in the y direction at A of plate

시간에 효율적임에도 불구하고 정확하게 해를 구함을 알 수 있다.

### 3.2 감시정찰용 짐발 시스템의 진동 특성

복잡한 구조물의 진동 특성에도 제안된 방법이 잘 적용됨을 증명하기 위하여 Fig. 4에 도시된 짐발 시스템<sup>[4-6]</sup>의 가속도 전달율을 비교하였다.

이 시스템은 상부 4군데와 하부 4군데에 방진 고무와 결합하여 항공기에 장착되는데 운항 중인

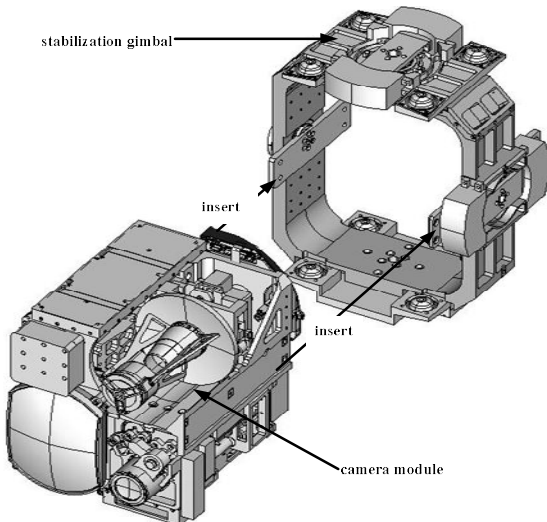


Fig. 4 Assembly structure of camera module and stabilization

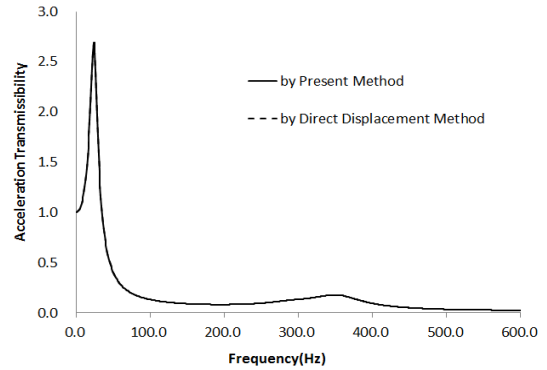


Fig. 5 Absolute acceleration transmissibility of camera module in the y direction

항공기의 진동으로 연결된 부위에서 가속도가 전달된다. 가진의 주파수 영역은 0-600 Hz라 하고 이 진동수 범위에 대한 카메라 모듈의 가속도 전달율을 계산하였다. 유한요소 모델링을 포함하여 해석을 위한 재료의 물성치, 카메라 모듈부 및 짐발 시스템을 구성하는 베어링 등에 관한 모든 자료는 Lee 등<sup>[5]</sup>을 참고하였다.

예제 3-1과 마찬가지로 상대 가속도를 이용하여 계산된 카메라 모듈부의 가속도 전달율을 직접변위법<sup>[8]</sup>으로 구한 결과와 비교하였다. 이 구조물은 방진고무라는 감쇠 장치가 있어 앞 예제와 달리 감쇠 행렬이 강성행렬과 질량행렬의 조합으로 표현되지 않는 형태이므로 모드 중첩을 이용한 해석이 불가능하여 조화함수를 이용하여 운동방정식을 직접 푸는 방식을 선택하였다. 해석 코드는 역시 ANSYS 16.1를 사용하였고 자동으로 모든 과정이 수행되도록 APDL로 작성되었으며 조화응답 해는 1 Hz 간격으로 구하였다. 그리고 단지 본 예제는 제안된 방법의 타당성을 보는 것이 주 목적이므로 y 방향 가속도 전달율에 대한 수치 결과만 비교하였다. 해석 결과인 Fig. 5을 보면 두 방법에 의한 수치해는 잘 일치함을 볼 수 있다. 정량적으로 기술하여도 최대 상대 오차가 0.0003%로 완전히 동일함을 알 수 있다.

### 3.3 감시정찰용 짐발 시스템의 충격 해석

제안된 방법이 조화응답해석에는 잘 적용됨을

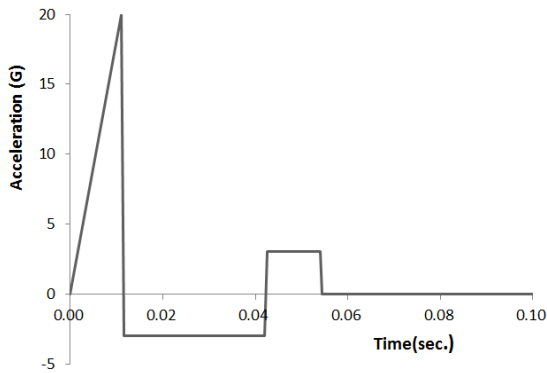


Fig. 6 Base acceleration of gimbal system

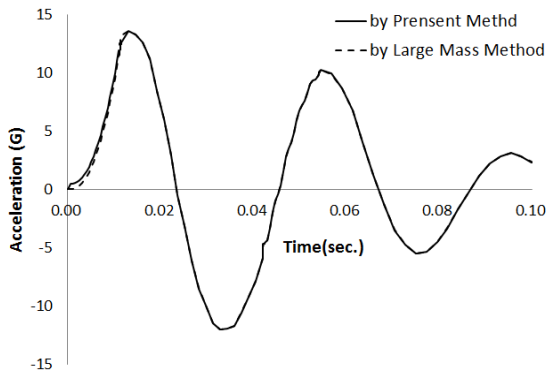


Fig. 7 Absolute acceleration of camera module in the z direction

두 개의 예제를 통하여 입증되었으므로 여기서는 시간에 따른 동적 해석에 대하여 검토하기로 하자. 이를 위하여 Lee 등<sup>[5]</sup>의 충격해석을 예제로 선정하였다. 그들은 항공기에 장착된 8부위에서 MIL-STD-810G<sup>[14]</sup>의 “Method 516.6 Shock”에서 규정하고 있는 Fig. 6과 같은 파형의 기초 가속도를 가진하여 거대질량법으로 카메라 모듈부의 가속도 응답을 구하였다. 여기서 G는 중력 가속도를 의미한다.

유한 요소 모델링을 포함한 모든 내용은 Lee 등<sup>[5]</sup>과 동일하다.  $10^7$  kg의 거대질량을 가정한 거대질량법과 제안된 방법에 의하여 계산된 z 방향의 절대 가속도 응답을 100 msec. 동안 Fig. 7에 도시하였다. 두 방법 다 시간증분은 0.025 msec로 시간에 대한 수치적분은 Newmark 방법을 적용하였

다. Fig. 7을 보면 최대 절대 가속도 응답은 13.025 msec에서 13.532G와 13.537G로 거의 차이가 없을 정도로 전체적인 가속도 응답이 거의 동일하다. 다만 기초 가속도 가진이 급격히 크게 변하는 11.5 msec까지 각각의 방법으로 구한 카메라 모듈부의 가속도 응답은 약간의 오차가 있다. 이와 같이 초기 부근에서 두 결과가 오차를 보이는 것은 가상 질량의 도입으로 인한 것으로 보인다.

#### 4. 결론

기초부에 가속도 가진을 받는 기계 시스템의 동적 해석을 위한 새로운 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 가속도를 상대 가속도와 기초 가진 가속도로 분리하여 원래의 운동방정식 (4) 대신 운동 방정식 (6)으로부터 상대 가속도를 얻은 다음 식 (5)의 상관관계로 구조물의 절대 변위, 속도, 가속도를 구한다. 이 방법은 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬의 형태에 따라 모드중첩법으로 구조물의 동적 거동을 계산할 수도 있고 식(6)을 직접 풀 수도 있다. 중요한 것은 거대 질량법과 같이 가상 질량을 설정할 필요가 없다.

조화응답해석을 다룬 두 예제에서 기존의 방법으로 구한 결과와 제안된 방법의 해는 완전히 일치한다. 특히 모드 중첩에서 사용된 모드가 20개로 계산 시간이 상당한 우위에 있음에도 불구하고 제안된 방법에 의한 해석 결과는 기존의 방법에서 구한 가속도 전달율과 오차가 거의 없다. 또한, 충격 파형의 기초 가속도 가진으로 인한 충격 해석 역시 거대질량법에 의한 응답과 제안된 방법에 의한 결과는 기초 가진 가속도가 급격히 변동되는 초기 구간에서 작은 오차가 있을지라도 전체적인 동적 거동은 잘 일치한다.

본 연구에서 제안한 상대 가속도를 이용하는 동적 해석 방법은 기존의 방법보다 확실히 장점이 있지만 운동방정식 (4)가 선형이며 기초 가속도 가진이 병진운동인 경우만 가능하다는 제약이 있다. 그러므로 문헌들<sup>[6,7]</sup>의 연구와 같이 감쇠 장치의 비선형성을 고려한 문제까지 확장을 위한 추후 연구가 필요하다.

## 후 기

“이 연구는 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 지원된 논문입니다.”

## REFERENCES

1. Moon, B. Y., Kang, G. J., Kang, B. S. and Kim, K. S., “Dynamic Stability Analysis of Base-Isolated Low-level Nonlinear Structure under Earthquake Excitation,” Transactions of the Korean Society of Automotive Engineers, Vol. 25, No. 11, pp. 1743-1750, 2001.
2. Shin, T. M., “Response Characteristics of Two Block System under Sismic Base Excitation,” Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers A, Vol. 33, No. 11, pp. 1288-1293, 2009.
3. Lee, S. E. and Lee, T. W., “A Study on the Vibration Characteristics of Camera Module for Aerial Reconnaissance Camera Module Considering Vibration Isolator,” Journal of the Korean Society for Precision Engineering, Vol. 29, No. 5, pp. 545-553, 2012.
4. Lee, S. E. and Lee, T. W., “Vibration Characteristic Analysis of Gimbal Structure System in Collection Equipment of Image Information,” Journal of the Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 9, No. 2, pp. 20-25, 2010.
5. Lee, S. E., Lee, T. W. and Kang, Y. G., “Shock Analysis of Gimbal Structure System Including Rubber Vibration Isolator in a Observation Reconnaissance Aircraft,” Journal of the Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 13, No. 2, pp. 73-80, 2014.
6. Lee, S. E. and Lee, T. W., “Dynamic Analysis of Gimbal Structure System Including Nonlinear Elastic Rubber Vibration Isolator with Shock Acceleration,” Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers A, Vol. 40, No. 4, pp. 415-422, 2016.
7. Lee, S. E., Park, H. G. and Lee, T. W., “A Study on the Shock Response of an Image Sensor Unit in an Electro-Optical Targeting System Mounted on a Military Vehicle,” TRANSACTIONS OF THE KOREAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS A, Vol. 42, No. 4, pp. 391-398, 2018.
8. Haberman, D., “Sine-sweep test simulation in ANSYS using the large-mass and direct-displacement methods,” Collaborative Solutions, Inc., 2000.
9. Kim, Y. W., Kim H. N. and Jung, M. J., “Mathematical Analysis on Large Mass Method for the Dynamic Responses of a Two-d.o.f Spring-Mass System Excited by Ground Acceleration,” Fall Conference of the KSME, pp. 933-938, 2010.
10. Kim, Y. W., “A study on large mass method for dynamic problem of multiple degree-of-freedom system excited by ground acceleration time history,” Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 28. No. 1, pp. 25-41, 2014.
11. Bathe, K. J., Finite Element Procedures, Prentice Hall, London, pp. 763-837, 1996.
12. ANSYS, ANSYS Documentation for Revision 16.1, ANSYS Inc., 2015.
13. Sinapius, J. M., “Tuning of the Normal Modes by Multi Axial Base Excitation,” Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 13, No. 6, pp.911-924, 1999.
14. MIL-STD-810G., “Department of Defense Test Method Standard for Environmental Engineering Considerations and Laboratory Tests, Method 516.6 Shock”, 2008.