수학 문제 만들기 유형에 따른 가추 유형과 가추에 동원된 사고 전략 분석

이명화(강원대학교 대학원, 학생) · 김선희(강원대학교, 교수)†
†교신저자

Analysis of abduction and thinking strategies by type of mathematical problem posing

Lee, Myoung Hwa(Graduate School of Kangwon National University, hahahoho98@nate.com)
Kim, Sun Hee(Kangwon National University, mathsun@kangwon.ac.kr)†
†Corresponding Author

초록

본 연구는 학생이 만든 수학 문제에 따른 가추 유형과 가추에 동원된 사고 전략에 대해 알아보았다. 중학교 2학년 4명의 학생이 네 개의 과제에 대해 문제 만들기 활동을 하여, 동치문제, 동형문제, 유사문제를 만들었다. 동치문제의 경우 조작적 가추가 주로 발현되었다. 동형문제와 유사문제는 조작적 가추, 이론적 가추, 창의적 가추가 모두 발현되다. 가추에 동원된 사고 전략으로, 조작적 가추는 대상으로 인식하기, 패턴 찾기, 숫자나 그림으로 변환하기, 유추하기, 반대로 생각하기, 결합하기, 제거하기의 사고전략이 나타났다. 이론적 가추에서는 수학적, 경험적, 확산적 지식을 활용하는 사고전략이 나타났다. 창의적 가추에서는 상승화 전략, 형식화 전략, 창조적 전략이 나타났다. 결합하기, 제거하기, 수학적, 경험적, 타교과 지식의 활용, 문제와 직접적 관련이 없는 규칙을 접목시켜 만드는 창조적 전략은 본 연구에서 새롭게 도출된 사고 전략이다.

Abstract

This study examined the types of abduction and the thinking strategies by the mathematics problems posed by students. Four students who were 2nd graders in middle school participated in problem posing on four tasks that were given, and the problems that they posed were classified into equivalence problem, isomorphic problem, and similar problem. The type of abduction appeared were different depending on the type of problems that students posed. In case of equivalence problem, the given condition of the problems was recognized as object for posing problems and it was the manipulative abduction. In isomorphic problem and similar problem, manipulative abduction, theoretical abduction, and creative abduction were all manifested, and creative abduction was manifested more in similar problem than in isomorphic problem. Thinking strategies employed at abduction were examined in order to find out what rules were presumed by students across problem posing activity. Seven types of thinking strategies were identified as having been used on rule inference by manipulative selective abduction. Three types of knowledge were used on rule inference by theoretical selective abduction. Three types of thinking strategies were used on rule inference by creative abduction.

* 주요어 : 문제 만들기, 가추 유형, 사고 전략
* **Key words** : problem posing, abduction type, thinking strategy
* 이 논문은 이명화의 박사학위논문 내용의 일부를 요약, 정리한 것임.
* This paper summarizes some of the content of the doctoral dissertation.
* **Address**: Department of Mathematics Education, Kangwon National University, Chun Cheon, Korea
* **ZDM Classification** : C33
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97C30
* **Received**: February 3, 2020 **Revised**: February 20, 2020 **Accepted**: February 24, 2020

Ⅰ. 서론

정보가 넘쳐나는 현재 사회에서는 몇몇 지식을 알고 주어진 문제의 정답을 찾는 것보다 상황에 적절한 질문을 하고 의문을 제기하며 떠오른 질문에 의미 있는 문제를 만들어내는 능력이 중요하다. 구성주의 교수·학습 이론에서는 학습자에 의한 문제 제기 활동의 중요성이 강조되고 있으며(Paik, 2016; Silver, Mamona-Dows, Leung, & Kenney, 1996; NCTM, 1989), 학생이 전문가를 통해 전달된 교수의 결과를 수동적으로 받아들여 지식을 구성하지 않고 학생들이 수업의 적극적 주체가 되어야 함이 강조되면서 문제 만들기에 대한 연구가 확장되고 있다. 문제 만들기는 Problem posing을 번역한 것으로 문제 제기로 번역되기도 한다. Silver(1996)는 문제 만들기를 정보, 상황, 경험 등 주어진 조건에 기초하여 새로운 문제를 생성(generate)하거나 주어진 문제에 기초하여 문제를 재구성(re-formulate)하는 것이라고 하였다. Kim(2005)은 문제를 만드는 것은 새로운 지식을 창출하는 데 많은 공헌을 하므로 수학적 창의성을 신장시키기 위한 수업에서 활용하기에 적합한 기법이라고 하였고, Na(2017)는 문제 만들기 활동이 창의·융합 역량을 함양하는 데 토대가 될 수 있고, 주어진 정보를 통해 스스로 문제를 만들어보는 경험을 통해서 수학 내적·외적 연결과 융합을 경험할 수 있다고 하였다.

2015 개정 수학과 교육과정에서도 문제해결 역량을 키우기 위한 교수·학습 방법으로서 문제 만들기를 제시하고 있다. 이에 따라 교과서 문제 만들기 활동이 있는데, 대부분 주어진 문제의 숫자를 바꾸어 똑같은 유형인 문제를 만들어 해결하게 하는 형태이다(Kim et al., 2015). 이러한 문제 만들기는 기존에 제시된 문제의 조건에서 무엇을 바꿔야 하는지도 정해주는 형식으로, 주어진 문제를 재진술하고 이를 해결하게 하여 문제해결 역량을 향상시킬 수는 있으나 어떠한 상황에 대해 학습자가 스스로 상황에 의문을 품고 문제를 제기하며 새로운 문제를 생성해보는 부분은 고려되지 않은 것이라 볼 수 있다. 따라서 문제 해결을 위한 문제 만들기 활동이 아닌 학습자의 창의적 문제 생성을 위한 문제 만들기 활동에 대한 연구가 필요하다.

또한, 학생들이 어떤 의문을 품고 질문을 제기하여 문제를 만드는지의 문제 생성 과정을 살피려면 학생이 문제를 만들면서 어떠한 사고 과정을 거치는지 살펴볼 필요가 있다. 이를 설명할 수 있는 사고로서 본 연구는 가추를 활용하고자 한다. 가추는 주어진 현상이나 문제에 대한 가장 그럴듯한 설명을 할 수 있는 가설을 발견하여 제시하는 추론법이다(CP 5171). 수학적 추론은 대부분 연역과 귀납으로 인지되고 Pólya는 수학 교과에서 추론 지도의 필요성을 언급하면서 개연적 추론으로 귀납을 생각하였으나(Kim, 2004), 귀납만으로 개연적 추론을 모두 설명하기 어렵다. 새로운 문제를 만들 때 떠오르는 짐작이나 아이디어와 같은 것은 연역이나 귀납으로는 설명이 되지 않는다. 가추는 결과로부터 사례에 대한 가설을 세워 새로운 지식이나 정보를 알아내는 방법이고(Kim, Lee, 2002), 문제 만들기는 주어진 문제나 상황을 바탕으로 적절한 근거에 의해 새로운 문제 즉, 가설을 만드는 것이므로 가추와 문제 만들기는 일맥상통한 부분이 있다.

똑같은 문제를 제시하여도 학생에 따라 문제를 해결하기도 하고 해결하지 못하기도 하며, 제시된 상황에 대한 창의적인 문제를 만들기도 하고, 또 다른 문제 자체를 만들지 못하기도 한다. 이것은 문제 만들기 활동에서 학생들의 가추에서 학생들이 어떤 규칙을 떠올려 새로운 아이디어를 제시하는지를 분석함으로써 해석할 수 있다. 본 연구에서는 문제 만들기를 하는 중 활용한 가추에서 학생들이 상정한 규칙을 범주화하여 각 가추에 동원된 규칙 추리 사고 전략을 귀납적으로 살펴봄으로써 이를 조사하고자 한다.

본 연구는 다음의 연구문제를 탐구한다.

첫째, 학생이 만든 문제 유형별로 어떤 가추가 나타나는가?

둘째, 학생들이 가추에서 규칙을 추리하는 사고 전략은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

본 연구는 학생들이 만든 문제 유형에 따른 가추 유형과 가추에 동원되는 규칙 추리를 위한 사고전략에 대해 분석하고자 한다. 이 장에서는 문제 만들기 유형, 가추 유

형, Toulmin 모델, 사고전략에 대하여 살펴본다.

1. 문제 만들기 유형

Stickles(2006)는 문제 만들기가 수학적 문제 해결력을 향상시키고 수업과 평가에 활용될 수 있는 능력이라 하였다. 그는 문제 만들기 유형을 5가지로 분류하였는데, 문맥 변경, 단순화, 문제 확장, 주어진 정보나 조건 변경, 위의 4가지를 조합한 형태이다. 문맥 변경은 문제의 수학적 구조는 동일하지만 문맥을 변경한 경우이고, 단순화는 주어진 문제보다 풀이 과정이 단순해지도록 문제의 난이도를 낮춰 문제를 변경한 경우이다. 문제 확장은 주어진 문제에 가정이나 조건을 추가하여 난이도를 높여 문제를 변경한 경우이다. 주어진 정보나 조건을 변경한 경우는 원래 문제의 정보나 조건을 수정하여 문제를 만든 경우이다. 마지막 경우는 위의 네 경우를 조합하여 새로운 문제를 만든 경우이다.

Reed(1989)는 제시된 과제와 만든 문제는 문제의 구조인 '해결방법'과 문제의 물리적인 내용인 '이야기 맥락 및 소재'의 차이에 따라 분류할 수 있다고 하였다. 그는 제시된 문제와 만든 과제의 동형성에 따라 만든 문제를 동치문제, 동형문제, 유사문제, 무관한 문제로 나누었다. 동치(equivalent) 문제는 물리적인 세부 내용과 문제 구조가 모두 같은 문제를 만든 경우고, 동형(isomorphic) 문제는 물리적인 세부 내용은 다르지만 문제 구조가 같은 문제를 만든 경우이다. 유사(similar) 문제는 물리적인 세부 내용은 같지만 문제 구조는 수정이 요구되는 문제를 만든 경우이고, 무관한(unrelated) 문제는 물리적인 세부 내용과 문제 구조가 모두 상이한 문제를 만든 경우이다.

위에서 제시된 Stickles(2006)는 주어진 과제에 대해 과제의 문맥을 변경하거나 난이도를 조정하는 등 기존 과제와 학생이 만든 문제 사이의 동형성에 따라 유형을 분류하였고, Reed(1989)는 두 문제의 유사성을 이야기 맥락과 해결 방법의 차이에 따라 분류하였다. 두 선행연구의 분석 대상은 제시된 문제와 학생이 만든 문제로 동일하지만 분석하는 방법은 다르다. 본 연구도 선행연구와 동일하게 교사가 제시한 문제와 학생이 만든 문제를 대상으로 한다. 두 문제를 비교할 때 Stickles(2006)의 난이도를 조정하는 것의 기준이 명확하지 않고, Reed(1989)의 이야기 맥락과 해결 절차가 모두 변화되게 하는 것은 학생이 문제를 만들 때 어떤 기준으로 문제를 만들지 우왕좌왕 할 수 있다고 하였으므로 본 연구는 '제시된 문제의 해결 방법과 비슷한 문제를 만드시오.'라고 과제를 제시하여 문제해결 방법이 동일한 새로운 문제를 제시하도록 하였다. 이는 Reed(1989)의 분류에서 문장의 구조인 해결과정은 동일한 상황에서 물리적인 세부내용인 이야기 맥락이나 소재를 어떻게 바꾸느냐에 따라 만든 문제의 유형을 구분하고자 한 것이다. 따라서 학생이 제시된 문제와 해결방법이 비슷한 문제를 만들 때, 제시된 문제의 세부내용을 바꾸는 정도에 따라 문제의 유형을 분류한다. 학생들이 만든 문제는 제시된 문제의 형태를 그대로 사용하는 경우와 새롭게 만든 경우로 크게 분류할 수 있다. 제시된 문제의 형태를 그대로 사용하는 경우는 다시 제시된 문제와 완전히 동일한 형태에서 단순히 숫자나 식만 바꾼 경우와 전체적인 문제의 형태는 비슷하지만 여러 요소를 바꾸어 제시한 경우로 분류할 수 있다(Lee, 2020).

[Table 1] Problem posing type (Lee, 2020, p11)

type	standard
Equivalence problem	The story context is same as the presented and there is no change in the problem-solving process. In other words, a case that students change a number to different number
Isomorphic problem	Problem solving process is the same as the presented but the story context is different from the presented.
Similar problem	The problem context is same as the presented but the problem solving process is different.

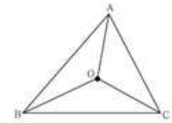
이에 본 연구는 [Table 1]과 같이 문제 만들기를 분류한다. 동치문제는 제시된 문제의 형태를 그대로 사용하여 이야기 맥락은 똑같으면서 단순히 숫자나 식 정도만 바꾸어 만든 문제로 과제의 물리적인 내용도 동일하고 문제 해결 과정 절차에 전혀 변화가 없는 경우이다. 동형문제는 문제 해결 과정이 동일하면서 제시된 문제의 형태에 변화는 주지만 주어진 문제의 이야기 맥락과 비슷하게 닮은 문제를 제시한 경우이다. 유사문제는 제시된 문제의 형태를 탈피하여 새로운 이야기 맥락을 구성하여 제시된 문제와 문제의 형태인 이야기 맥락은 다르지만 문제 해결 과정은 유사한 경우이다.

2. 가추 유형

가추는 Peirce(1980)에 의해 연역, 귀납과 함께 추론의 한 형태로 제시되고 그 의미가 구체화되었다. 연역법은 일반적인 규칙을 특정한 사례에 적용하여 결과를 도출하는 분석추리(analytic inference)이고(CP 2.620), 귀납법은 특정한 사례와 결과로부터 일반적인 규칙을 도출하는 종합추리(synthetic inference)이다(CP 2.622). 반면 가추법은 일반적 규칙과 결과로부터 특정한 사례를 도출하는 종합추리로(CP 2.623), 엄격한 논리적 형식을 갖추었다고 보기 어렵다. 전제들이 결론을 부분적으로 지지하는 상황에서 결과적으로 전제들이 논리적으로 보장할 수 있는 내용을 넘어서는 결론을 도출하게 한다는 점에서 확장적인(ampliative) 추론 방법이라고 할 수 있다(Magnani, 2001; Psillos, 2000).

Eco(1983)는 규칙의 특성에 따라 지나치게 규범화된(over-coded) 가추, 덜 규범화된(under-coded) 가추, 창조적(creative) 가추, 메타(meta)-가추 4가지로 분류하였다. Pedemonte & Reid(2011)도 Eco(1983)의 연구를 기초로 증명 과정에서 발생하는 가추를 확정적(over-coded) 가추, 가변적(under-coded) 가추, 선택적(selective) 가추, 창조적(creative) 가추 4가지로 분류하였다. Lee & Kahng(2013)은 Eco(1983)와 Pedemonte & Reid(2011)이 제안한 가추의 유형을 5가지로 분류하여 수학 교과서의 문제들이 가추의 활용을 어떻게 강조하고 있는지 살펴보았다. 선행연구들은 규칙의 수에 초점을 맞추어 가추를 분류하였다. 예를 들어 Eco(1983)와 Pedemonte & Reid(2011)의 지나치게 규범화된(over-coded) 가추는 어떠한 상황에서 이전에 알고 있던 규칙 하나를 자동적으로 이용하는 추론이다. 그러나 규칙의 수는 교사가 문항을 분석하거나 과제를 제시할 때 문항의 형태를 분류하기에 적합하지만 상황 속에서 규칙을 찾아야 하는 학생에겐 규칙의 수보다 '어떤 종류의 규칙'을 떠올리거나 만들어야 하는지의 전략을 아는 것이 더 필요하다.

가추가 특정한 사례를 도출하는 창의적 활동이라면, '가추'라는 추론을 하기 위해서는 도출해낸 사례의 근거가 될 수 있는 '규칙'을 발견하거나 생각해내는 것이 필수적 조건이다. 예를 들어 다음 가추 상황을 살펴보자.



결과 : $\triangle OBC$는 이등변삼각형이다.
규칙 : 이등변삼각형은 두 변의 길이가 같은 삼각형이고, 삼각형의 외심은 세 꼭짓점까지 거리가 같다.
사례 : 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이다.

위 예시에서 $\triangle OBC$가 이등변삼각형이라는 조건을 교사가 제시하거나 교과서에서 전제로 제시하였다면 모든 학생이 $\triangle OBC$가 이등변삼각형이라는 사실을 안다. 그러나 $\triangle OBC$가 이등변삼각형이라는 것을 안 모든 학생이 점 O가 $\triangle ABC$의 외심이라는 것을 아는 것은 아니다. 왜냐하면 이등변삼각형의 성질인 '이등변삼각형의 두 변의 길이는 같다.'와 외심의 성질인 '삼각형의 외심은 세 꼭짓점까지 거리가 같다.'는 규칙(rule)을 알고 있어야 이러한 추론을 할 수 있기 때문이다. 만약 학생이 이등변삼각형은 두 밑각의 크기가 같다는 규칙을 떠올려 사용한다면 $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 90^\circ$라는 다른 사례를 도출했을 수도 있다. 이는 학생이 어떠한 규칙을 찾고 발견하느냐에 따라 제시하는 사례가 달라지는 것을 보이는 예시가 된다. 따라서 학생이 떠올린 사례가 수학적 추론이 되려면 문제 상황을 적절히 관찰하고 자신이 떠올린 사례가 옳다는 적절한 근거인 규칙을 생각해내야만 한다. 그러므로 학생들이 가추를 하면서 생각해야 할 규칙을 어떻게 알아내는지 알아볼 필요가 있다.

이에 본 연구는 학생이 가추에서 규칙을 상정하는 기준을 크게 2가지로 구분하였다. 기존에 알고 있던 것에서 규칙을 선택하여 가추하는 경우를 선택적 가추(Selective abduction), 알지 못하는 지식을 규칙으로 창조하여 가추하는 경우를 창의적 가추(Creative abduction)로 상정한다(Lee, 2020). 선택적 가추는 다시 조작적 가추(Manipulative selective abduction; MSA)와 이론적 가추(Theoretical selective abduction; TSA)로 분류한다. 조작적 가추는 가추의 사례의 근거가 지식이 아니라 직관적이거나 비언어적으로 표현되는 것이나 조작적으로 혹은 자동적, 반자동적으로 행하는 행동을 규칙으로 상정한 경

우이고, 이론적 가추는 가추를 형성하는 규칙이 지식인 경우의 추론을 의미한다. 창의적 가추도 두 가지로 세분화 할 수 있다. 창의적 가추는 세상에 존재하지만 아직 학생의 수준에서 알지 못하는 규칙을 사용한 경우를 '학교수학 수준에서의 창의적 가추(Little creative abduction; LCA)'로, 전혀 관련이 없는 것을 생각하거나 실제 세상에 존재하지 않는 규칙을 사용한 경우를 '학문적 수학 수준에서의 창의적 가추(Big creative abduction; BCA)'로 본다(Lee, 2020).

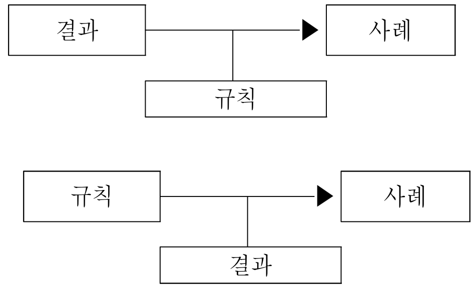
3. Toulmin 모델

논증에 관한 Toulmin의 모델은 수학적 논증을 분류하는 데 사용된다(Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007; Pedemonte, 2007; Weber & Alcock, 2005). Toulmin의 모델은 Peirce의 추론 유형을 시각적으로 나타내는 데도 적합하다(Pease & Aberdein, 2011). 이에 본 연구에서는 Toulmin의 모델을 분석 도구로 삼아 문제 만들기 활동에서 나타나는 가추를 분석하고자 한다. Toulmin의 논증 모델에 따른 가추 표현은 [Fig. 1]과 같다. 수학적 추론에서 연역, 귀납, 가추를 설명할 때 추론의 요소로 사용하는 결과, 규칙, 사례의 기본 정의에 Pedemonte & Reid(2011)와 Rivera & Becker(2007)의 연구를 근거로 가추를 나타내기에 필요한 요소를 넣어 본 연구에서 결과, 규칙, 사례를 다음과 같이 정의하여 사용한다(Lee, 2020).

결과 : 자료에서 제시하는 정보와 같은 사실, 관찰로 얻어진 사실이다. 가추를 통해 새롭게 알게 된 사실인 사례가 그 다음 가추에서 결과가 되기도 한다.

규칙 : 수학의 정리와 같이 'p이면 q이다'와 같은 일반적 진리나 명제뿐만이 아닌, 관찰된 자료를 보고 새롭게 떠올린 아이디어를 설명할 수 있는 근거라면, 경험, 설명, 영감, 행동도 포함한다.

사례 : 관찰로 얻어진 정보나 사실로, 가추에서는 학생들의 새로운 아이디어, 가정, 주장을 포함한다.



[Fig. 1] Abduction according to the argument model of Toulmin (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014, p.186)

4. 사고 전략

선행연구에서 가추의 필요성과 장점을 논의하면서 가추에서 어떻게 새로운 아이디어의 근거가 되는 규칙에 이르게 되는가에 대해서는 구체적으로 설명하지 못하고 있다는 비판도 제기되고 있다. 가추가 실질적인 발견의 지침으로 사용되기 위해서는 가추를 수행하는 전체적인 전략, 혹은 방법적 원리가 반드시 필요하다(Lee, 1989). 가추와 같은 확장적인 추론이 탐구의 논리로서 의미를 얻기 위해서는 발견법적 요소나 전략적인 요소가 중요하다(Jung, 1993). 이에 본 연구는 학생들의 문제 만들기 활동에서 가추의 특정한 사례를 만드는 근거가 되는 규칙을 추리하는 사고 전략을 알아내고자 한다. 즉 학생들이 어떤 지식을 규칙으로 추리하는지 혹은 상황을 보고 직관이나 통찰로 어떠한 조작을 선택하는지, 아니면 전혀 새로운 것을 만들어 추론하는지 실질적인 발견의 지침을 제공하고자 한다(Lee, 2020).

규칙을 추리하는 사고 전략을 살펴보기 위해 먼저 수학교육에서 문제 해결 전략을 조사하였다. Pólya(1957)는 문제 해결 전략으로 규칙·패턴 찾기, 표 만들기, 예상하고 확인하기, 그림 그리기, 식 세우기, 문제 해결 전략의 복합적 활용을 제시하였다. Krulik & Rudnick(1992)는 문제 해결 전략으로 패턴 인식, 거꾸로 풀기, 추측과 검토, 시뮬레이션이나 실험, 축소/단순화, 조직화된 정렬/전체 정렬, 논리적 연역, 나누어 정복하기 등을 제시하였다(Paik, 2016). Reys et al.(2012)은 문제 해결 전략 사용에 대한 지도가 유연하게 이루어져야 함을 강조하면서 전략으로 11개를 제시하였다. 실제로 해보기, 그림이나 도표 그리기, 규칙성 찾기, 표 만들기, 가능한 모든 경우의 조직화,

추측과 확인, 거꾸로 풀기, 원하는 정보·주어진 정보·필요한 정보를 분명히 하기, 식 세우기, 더 간단한 문제 풀기 또는 유사한 문제 풀기, 관점 바꾸기 등이다. 학자들마다 수학 문제 해결 전략이 조금씩 차이가 있지만, 추측과 예상하기, 규칙성이나 패턴 찾기, 그림 그리기, 표 만들기, 식 세우기, 거꾸로 풀기 등은 학자들마다 동일하게 제시한 전략들이다.

위의 전략들은 문제 해결을 위한 전략으로 문제를 만들기 위한 전략은 아니며 특히 가추에서 규칙을 추리할 때의 필요한 전략으로 제시된 것도 아니다. 하지만 세 학자의 전략에 공통적으로 나타나는 전략들이 존재하고 문제 해결과 문제 만들기의 연결성을 생각할 때 이 전략들이 문제 만들기 활동에서도 전략으로 사용되는지 확인할 필요가 있다. 또한 문제 해결에서는 나타나지 않은 전략이 문제 만들기에서 나타나는지의 여부를 살펴볼 필요가 있다. 문제 만들기의 전략으로 Brown & Walter(2005)는 주어진 것을 수용하기(accepting)와 주어진 것에 도전하기(What if not)를 제시하였다. 문제를 탐구할 때 주어진 것을 당연하게 받아들이는 것을 ‘주어진 것을 수용하기’라고 하였고, 주어진 것을 당연하게 받아들이지 않고 도전하여 새로운 문제를 만드는 것을 ‘주어진 것에 도전하기’라고 제시하였다. 이 전략은 도전하라는 기본 방향을 제시할 뿐 어떻게 도전해야 할지 구체적인 사고 전략을 제시하였다고 보기는 어렵다. 문제 만들기에서 새롭게 나타난 전략은 구체적으로 어떤 전략인지를 살펴 문제 만들기 활동의 교수에서 학생들에게 제시할 전략으로 활용될 수 있을 것이다.

과학교육에서는 가추에서 규칙 추리 전략들을 발견한 선행연구들이 존재한다. Oh & Kim(2005)은 가추에 필요한 사고 전략으로 6가지를 제시하였다. 첫째는, 자료의 재구성(reconstruction) 전략으로 문제의 자료들이 제공하는 정보들을 재배열하거나 추론가에 따라 주어진 자료에 내재된 증거를 선별하는 등 자료들을 재구성하는 것이다. 둘째, 발견법적 일반화(heuristic generalization) 전략으로 경험적으로 얻은 자료들 속에서 규칙성을 찾아 일반화하는 것이다. 셋째, 유추(analogy) 전략으로 비슷한 상황에서 성공적으로 사용했던 규칙들을 이용하여 현재 주어진 현상에 대한 설명을 새롭게 제시하는 전략이다. 넷째, 존재(existential)에 관한 전략으로 놀라운 현상을 접했을 때 기존의 것으로 설명되지 않으면 새로운 대상의 존재를 가정하여 주어진 현상을 설명하려는 전략이다. 다섯째, 개념적 결합(conceptual combination) 전략은 현상의 설명하기 위해 새로운 규칙을 형성해야 할 때 이미 알려진 개념들을 서로 결합하여 규칙을 형성하는 전략이다. 여섯째, 사전 평가(prior assessment)를 통한 제거(elimination) 전략으로 현상을 설명하기 위해 여러 가지 유형의 규칙을 탐색하여 필요 없는 규칙은 제거하고 가장 설득력 있는 설명을 선택하는 과정이다. 이후 Oh(2006)는 선행연구 문헌들에 제시된 규칙 추리 전략을 하나의 목록으로 정리하고 수정·보완하여 가추적 추론 과정에서 활용되는 규칙 추리 전략들의 목록을 자료의 재구성 전략, 연쇄적 가추 전략, 발견법적 일반화 전략, 유추 전략(이미지 기반 유추, 사례 기반 유추), 존재에 관한 전략, 결합 전략(개념적 결합, 인과적 결합), 모델 구성 및 조작 전략, 특이 정보의 채택 전략, 제거 전략 9개로 확장하였다.

Kwon, Jeong, Kang, & Kim(2003)은 학생들의 가설 생성 능력 향상을 위한 교수·학습에서 가설 생성 과정에 대한 보다 체계적이고 기술적인 연구가 필요하다고 보고, 학생들이 표상한 지식과 사고 유형을 분류하여 과학적 가설 지식의 생성 과정을 설명하였다. 가설 지식의 생성 중 생기는 중간 지식(intermediate knowledge)은 의심하게 한 상황, 의문 상황의 원인을 설명하는 내용, 의문 상황과 관련된 경험이나 지식이 표현된 내용, 경험상황의 원인을 설명하는 내용, 피험자가 과제 해결의 결과로 제시한 가설로 5가지이다. 또한, 가설 지식 생성 과정에서 지식을 찾거나 표상된 지식을 조작하는 사고 유형을 6가지로 제시하였다. 의도적으로 지식을 생각해내려는 사고 유형, 의문상황과 경험상황의 유사성과 차이점을 비교했음을 확인할 수 있는 프로토콜 유형, 원인적 설명자를 차용하여 가설적 설명자에 적용하는 사고 유형, 의문상황의 일부분들을 각각 설명하는 가설적 설명자들을 조합해서 의문상황 전체를 설명할 수 있는 가설을 생성하는 사고 유형, 여러 개의 서로 다른 가설적 설명자가 생성되었을 때 그 중 하나를 선택하는 사고 유형, 가설 생성 과정에서 생성된 설명이나 최종적인 가설을 검증하기 위해 의문상황이나 경험상황에서 증거를 찾는 사고 유형이다 (Lee, 2020).

본 연구에서 사고 전략은 문제 해결을 위한 전략으로 Pólya(1957), Krulik, Rudnick(1992), Reys et al.(2012)의 연구 결과와 Oh(2006)과 Kwon et al.(2003)의 가추에 동원되는 사고 전략을 바탕으로 학생들의 문제 만들기 활동에서 발현되는 가추 규칙을 추리하기 위해 사용된 사고전략을 귀납적으로 분석한다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 참여자

본 연구의 대상은 연구자 중 한 명이 지도하고 있는 중학교 2학년 남학생 2명, 여학생 2명이다. 이들은 문제 만들기 활동을 경험해보지 않은 학생들로 연구자와 래포 형성이 잘 되어 있는 학생이다.

학생 K는 2019학년도 1학기 수학 점수가 98점으로 수학 학업성취도가 높고 과제 집중력이 높으며 수업 시간에 여러 각도로 다양한 질문을 하는 남학생이다. 수학을 잘하고 싶은 마음이 큰 학생 L은 2019학년도 1학기 수학 점수가 100점으로 수학에 대한 흥미가 높고 궁금증이 많아 수업 중 질문이 많은 남학생이다. 학생 H는 2019학년도 1학기 수학 점수가 99점으로 학업성취도가 높고, 문제 해결 과정을 친구에게 잘 설명하고, 수업시간에 학습한 내용을 노트에 정리하는 능력이 뛰어난 여학생이다. 학생 C는 2019학년도 1학기 수학 점수가 85점이다. 나머지 세 명의 학생에 비해 학업성취도가 높지 않지만 꾸준히 노력하여 학업성취도의 향상과 수학을 대하는 태도가 성장하는 모습을 보이는 여학생이다.

2. 과제

Brown, & Walter(2005)는 일단 문제를 풀어봐야만 풀기 전에 깨닫지 못했던 새로운 질문을 하거나 문제를 제기할 수 있다고 하였고, 새로운 아이디어를 제안할 수 있을지 의심이 생길 정도로 아주 간단한 예를 살펴보라고 하였다. 이에 과제1과 과제2는 교과서에서 많이 제시되고 있는 정형 문제와 학생들이 생소하게 여기는 비정형 문제를 제시하여 제시된 문제와 해결방법이 비슷한 문제를 만들어보도록 과제를 제시하였다. 또한, 수학 문제인지 알 수 없는 상황만 제시하는 과제로 과제3과 과제4를 실생활 과제와 수학적 패턴 과제를 구성하여 제시하였다. 학생들에게 제시한 과제는 [Fig. 2]와 같다.

본 연구의 문제 만들기 유형의 분류는 교사가 제시한 문제와 학생이 만든 문제를 대상으로 하므로 제시된 4개의 과제 중에서 과제1과 과제2를 대상으로 하였다. 그리고 문제 만들기의 가추에 동원된 규칙 추리 사고 전략의 분석은 4개의 과제 전체에 대해 학생이 만든 문제를 대상으로 한다.

[과제1- 비정형화된 과제]

1. 길이와 모양이 같은 성냥개비로 다음 그림과 같이 정삼각형을 한 방향으로 연결하여 만들 때, 정삼각형의 개수와 필요한 성냥개비의 개수 사이의 관계식을 구하고, 정삼각형 10개를 만들려면 몇 개의 성냥개비가 필요한지 구하시오.

2. 1번 문제와 같은 방법을 사용하여 해결할 수 있는 문제를 만드시오.

[과제2 – 정형화된 과제]

1. 직선 $y=ax+b$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a<0$)

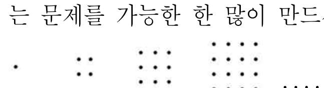
(가) 점 $(3, 0)$을 지난다.
(나) 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 6이다.

2. 1번 문제와 같은 방법을 사용하여 해결할 수 있는 문제를 만드시오.

[과제3 – 상황만 제시한 과제] 다음 상황이 주어졌을 때 이 상황에서 만들 수 있는 문제는 어떤 것이 있을까? 가능한 한 많이 만드시오.

전체 용량이 $100L$인 물탱크에 현재 $40L$의 물이 들어 있다.

[과제4 – 수학적 패턴 과제] 다음을 보고 만들 수 있는 문제를 가능한 한 많이 만드시오.



[Fig. 2] Tasks given to students (Lee, 2020, p60)

3. 자료 수집 및 분석 방법

자료 수집은 자료의 출처를 다양화하기 위해 관찰, 학생의 활동 문서, 실험 후 인터뷰 등의 자료 수집 방법을 사용하였다. 먼저, 학생 활동의 과정을 주의 깊게 관찰하고 활동하는 모습은 녹화하고 활동 중 하는 모든 말을 녹음한 뒤 전사하였다. 연구자는 관찰자로서 학생의 문제 만들기 및 문제 해결 과정을 관찰하였다. 연구자는 학생들에게 생각나는 모든 것을 말로 표현하도록 권하였으며 활동지에도 자신의 생각을 최대한 자세히 표현하도록 지도하였다. 학생들의 활동지는 스캔하였고, 활동 중 일어난 교사와 학생의 질문과 답변의 이야기 전체도 전사하였으며 활동이 끝난 후 이루어진 인터뷰 내용도 전사하였다.

본 연구의 자료 분석은 반복적 비교 분석법을 활용하여 질적인 방식으로 분석하였다. 즉, 수집된 전사본과 활동지로부터 학생이 문제를 만들면서 제시하는 아이디어와 아이디어의 근거나 아이디어를 정교화하는 방식들을 귀납적으로 파악하였다(Merriam, 1988). 전사된 내용을 추론의 형식에 맞게 결과-규칙-사례로 분류하였고, Toulmin 모델을 활용하여 추론 과정을 분석하였다. 또, 학생의 활동지, 전사, 메모, Toulmin 모델을 반복적으로 비교 분석하여 결과를 확정하였다. Toulmin 모델에 결과, 규칙, 사례로 제시된 가추를 확인하고 학생들의 가추 발현에 규칙 상정의 유형에 따라 가추별로 범주화하였다. 학생이 만든 문제 유형은 이론적 배경에서 제시한 문제 만들기 유형의 정의에 따라 동치문제, 동형문제, 유사문제로 분류하였다.

사고 전략에 대한 분석 방법은 이론적 배경에서 제시한 문제 해결을 위한 전략과 과학교육의 가추에 동원되는 사고 전략을 발견법적 도구로 활용하여 분석하였다. 먼저 학생의 문제 만들기 활동을 전사하고 전사된 텍스트를 결과-규칙-사례로 구분하였다. 이후 가추의 삼단논법적 형식을 Toulmin 모델에 정리하였다. Toulmin 모델에 정리한 자료에서 학생의 가추 추론이 함의하고 있는 규칙은 어떤 종류가 있는지 사용한 전략을 귀납적으로 분석하였다.

1차 분석 단계에서는 선행연구에서 제시하고 있는 사고 전략들을 학생의 추론 과정을 나타낸 Toulmin 모델에서 확인하고, 선행연구에 없는 새로운 전략들이 발견될 경우 해당되는 가추는 따로 분류하였다. 이렇게 따로 분류된 가추의 규칙 추리에 포함된 사고 전략의 특성을 파악한 후, 규칙의 특성을 가장 잘 표현할 수 있는 이름을 선정하였다. 이렇게 추가된 전략을 추가하여 확정된 사고 전략 목록을 토대로 2, 3차 분석을 수행하여 목록을 완성하였다. 완성된 규칙 추리 사고 전략들이 각 가추 유형 중 어디에 포함되는지 분석하여, 사고 전략의 목록을 수정·보완해 나가는 반복적이고 상호 작용적인 과정을 거쳐 최종 사고 전략 목록을 완성하였다.

연구의 내적 타당도와 신뢰도를 높이고자, 자료 분석 시 풍부하고 밀도 높게 서술하였다. 또한, 서술의 정확성을 높이기 위해 수학교육과 박사 1명, 박사과정 수료자 1명에게 검토를 받아 동료 점검(Creswell, 2009)을 수행하였다. 해석 결과에 대해 동료들의 의견이 일치하지 않은 경우는 논의를 통해 해석 결과에 대한 조정을 거쳐 합의를 끌어냈다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

학생 4명은 과제1과 과제2에 대하여 23개의 문제를 만들었다. 학생들이 만든 문제 유형은 [Table 2]와 같다.

[Table 2] Problem types posed by students (Lee, 2020, p89)

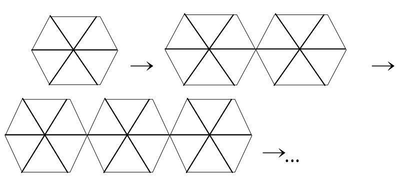
problem / type	task 1 (Not routine)		task 2 (routine)	
	frequency	%	frequency	%
Equivalence problem	4	36.3	3	25.0
Isomorphic problem	2	18.2	1	8.3
Similar problem	5	45.5	8	66.7
Total	11	100	12	100

학생들은 비정형 문제인 과제 1에 대해서는 동치문제 36.3%, 동형문제 18.2%, 유사문제 45.5%의 문제를 만들었고, 정형 문제인 과제 2에 대해서는 동치문제 25.0%, 동형문제 8.3%, 유사문제 66.7%의 문제를 만들었다. 학생들이 만든 전체 문제 23개 중 유사문제가 13개로 다른 유형에 비해 가장 많았다.

비정형화된 과제에 대해 네 명의 학생은 모두 동치 문

제를 만들었다. 모든 학생이 제시된 과제의 유형은 그대로 유지하면서 과제의 조건들을 수정하여 문제를 만들었다. 그리고 동형 문제는 [Table 3]에서처럼 한 변을 공유하면서 옆으로 성냥개비를 연결하는 기존 과제에서 한 점을 공유하면서 옆으로 성냥개비를 연결하는 문제로 만들었다. 학생K는 제시된 정삼각형 문제와 자신이 만든 정사각형 동치문제를 통해 정n각형으로 일반화시켜 공식을 만드는 유사문제를 제시하였다.

[Table 3] Example of students' problem posing type for not-routine problems (Lee, 2020, p87)

Equivalence problem	(Student L) When you make a matchstick with the same length and shape as connecting the squares in one direction as shown in the following figure, find the relation between the number of squares and the number of matchsticks required, and how many matchsticks are needed to make 60 squares.
Isomorphic problem	(Student H) A matchstick of the same length and shape is used to make the regular triangles so that they do not overlap and form a regular hexagon and connect them in one direction. Find the relationship between the number of regular hexagons and matchsticks, and how many matchsticks are needed to make a regular hexagon with 18 regular triangles. 
similar problem	(Student K) When you want to connect n-shaped figures in a single direction using matchsticks, find the number of matchsticks with a n-squares.

정형 문제에 대해서는 3명이 제시된 과제의 수치만 바꾸어 동치문제를 제시하였다. 학생L은 주어진 문제에 조건을 추가하여 동형문제를 제시하였다. 학생K는 정형화된 과제에서 많은 유사문제를 제시하였는데 [Table 4]는 그 중 일부를 제시한 것이다. 학생K는 제시된 과제에 일차함수를 추가하고 이등변삼각형을 만들어 새로운 유형의 문제를 만들어 유사문제를 제시하였다.

[Table 4] Example of student's problem posing type for routine problems (Lee, 2020, p88)

Equivalence problem	(Student H) When the straight line $y=ax+b$ satisfies all of the following conditions, find the value of $a\times2+b\div2$ for the constant a, b. $(a>0)$ (가) Pass point $(0, 4)$ (나) The width of a shape enclosed by the straight line and the x and y axes is 10.
Isomorphic problem	(Student L) When the straight line $y=ax+b$ satisfies all of the following conditions, find the value of $a-b$ for the constant a, b. $(a<0)$ (가) Pass point $(4, 0)$, $(0, 2)$ (나) The width of a shape enclosed by the straight line and the x and y axes is 4.
similar problem	(Student K) $y=x$, $y=ax+b$, (단, $a<0$, x intercept : 6), Find the value of a, b when the two functions make the x-axis and the area of the isosceles triangle equal to 9.

1. 문제 만들기 유형에 따른 가추 유형

각각의 문제 만들기 유형에서 학생들은 어떤 가추를 하였는지 알아본다.

1) 동치문제의 가추

동치문제는 주어진 문제의 숫자나 식만 단순히 바꾸어 문제를 제시하는 경우이다. 비정형 문제에 대해 4명의 학생 모두 동치문제를 제시하였고, 정형 문제에 대해서는 3명이 동치문제를 제시하였다. 제시된 문제의 해결방법과 비슷한 문제를 만들라는 과제의 요구에 따라 학생들은 제시된 과제와 동일한 유형의 문제를 만들어야겠다고 생각하고 제시된 문제의 조건을 문제를 만들기 위한 대상으로 인식하여 다른 조건으로 바꾸었다. 제시된 조건 중 일부를 선택하여 자신이 만들 문제의 조건으로 선택하여 사용하는 것은 선택적 가추이다. 이때 어떤 지식을 선택하여 사용하는 것이 아닌 단순히 제시된 문제의 숫자를 선택하여 다른 숫자로만 바꾸어 제시하는 경우이므로 선택적 가추 중 조작적 가추로 볼 수 있다. 성냥개비 문제에서 학생C가 만든 동치문제의 예시를 살펴보면 [Fig. 3]과 같다. 학생C는 다른 친구들에 비해 더 단순히 정삼각형의 숫자만 바꾸어 문제를 만들었다. 학생K도 만들어지는 도형을 정삼각형에서 정사각형으로 바꾸어 제시하고,

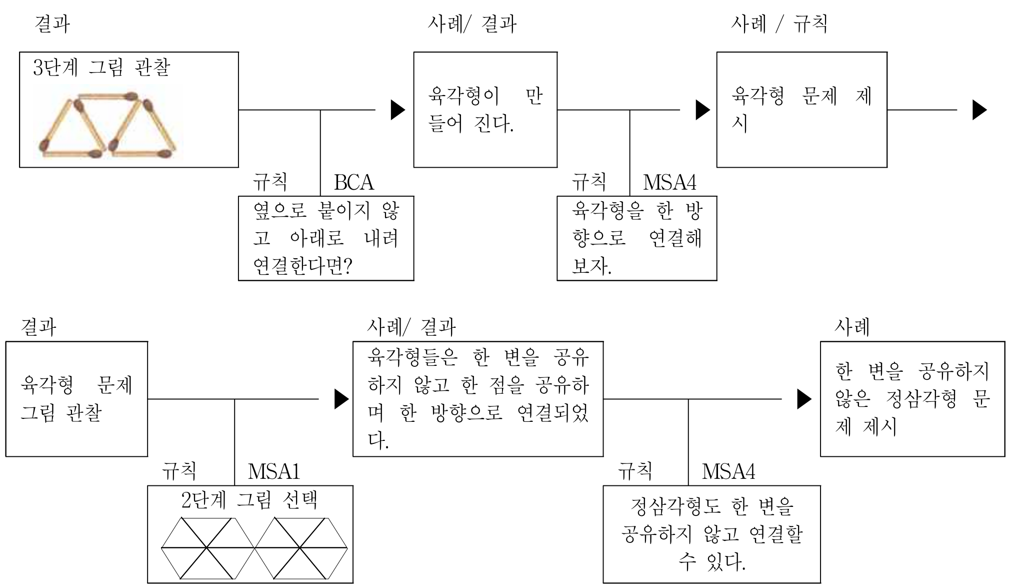
[Fig. 3] Student C's reasoning process (Lee, 2020, p.90)

도형의 개수를 10개에서 4개로 바꾸어 문제를 만들었다. 학생L도 학생K와 동일하게 정삼각형을 정사각형으로 바꾸고, 정삼각형의 개수 10개를 정사각형 60개로 바꾸어 제시하였다. 학생H도 다른 학생과 동일하게 도형을 정삼각형에서 정사각형으로 바꾸고, 정삼각형 10개를 정사각형 33개로 바꾸어 문제를 만들었다.

정형 문제에서 학생L, 학생H, 학생C는 제시된 문제의 숫자와 식만 바꾸고, 문제의 구조는 동일한 문제를 만들었다. 이때 제시된 문제의 (가), (나)조건에서 좌표의 숫자와 도형의 넓이, 식 $a+b$의 사칙연산을 바꾸어 만들었다. 이때도 제시된 문제의 조건을 자신이 만들고자 하는 문제의 조건으로 인식하여 변형하는 조작적 가추만이 사용되었다.

2) 동형문제의 가추

동형문제는 주어진 문제의 구조나 형태는 동일하지만 숫자나 이야기의 맥락을 변형한 문제를 만든 경우이다. [Table 2]에서 학생H가 만든 동형문제는 한 방향으로 정삼각형을 연결하는 문제를 한 방향으로 정육각형을 연결하는 문제로 제시하였다. 이 문제는 위에서 제시한 동치문제에서 단순히 도형을 정삼각형에서 정사각형으로 바꾼 것과는 차이가 있다.



[Fig. 4] Student H's reasoning process (Lee, 2020, p.91)

학생H는 정육각형을 만들 때 성냥개비 6개로 정육각형을 만든 것이 아닌 제시된 삼각형 문제의 3단계에서 정삼각형을 아래로 붙이면서 정육각형을 만든 문제이다. 따라서 한 방향으로 성냥개비를 연결하는 문제에서 아래로 성냥개비를 붙여 제시된 이야기 맥락을 수정하였다. 또한 주어진 문제는 정삼각형의 개수와 성냥개비 수 사이의 관계식과 개수를 묻고 있으나, 학생이 만든 문제는 정삼각형의 개수를 알려주고 정육각형 개수와 성냥개비 수 사이의 관계식을 묻는 문제로 바꾸어 만들었다. 따라서 해결방법은 동일하지만, 숫자와 이야기 맥락을 변형한 문제로 동형문제를 만든 것으로 분석할 수 있다.

또한 학생H가 추가하여 만든 두 번째 문제는 주어진 문제가 한 변을 공유하면서 성냥개비를 연결한 것을 한 점을 공유하면서 성냥개비를 연결하여 성냥개비와 삼각형 사이의 관계식을 묻는 문제이다. 이 경우도 주어진 문제와 해결방법은 비슷하지만 이야기 맥락을 변경한 문제로 동형문제를 만든 것으로 분석할 수 있다. 각 단계별 규칙을 살펴보면, 첫 번째 규칙인 “옆으로 붙이지 않고 아래로 내려 연결한다면?”은 제시된 문제의 패턴을 그대로 따라서 그림을 한 방향으로 붙이지 않고 아래로 연결하는 것을 생각한 것이다. 이는 학생H가 제시된 문제와 상관이 없는 상황을 창의적으로 생각해낸 것이다. 학생이 두 번째 규칙으로 제시한 “육각형을 한 방향으로 연결해보자.”는 주어진 문제가 정삼각형을 한 방향으로 연결하는 문제이므로 이를 바탕으로 유추하여 정육각형을 한 방향으로 연결하는 문제로 제시한 것이다. 세 번째 규칙은 자신이 만든 육각형 문제의 그림 중 2단계 그림을 관찰하고 수학적 대상으로 인식하여, 주어진 문제와 패턴이 다름을 발견한다. 주어진 문제에서 정삼각형은 한 변을 공유하고 한 방향으로 연결된 것에 반해 자신이 그린 육각형 그림은 한 점을 공유하며 한 방향으로 연결된 것이다. 이 사실에 착안하여 네 번째 규칙인 “정삼각형도 한 변을 공유하지 않고 연결할 수 있다.” 것을 유추하여 정삼각형이 한 점을 공유하여 연결되는 문제를 추가로 더 만들었다. 따라서 위 사례의 동형문제에서는 조작적 가추와 창의적 가추가 사용된 것으로 볼 수 있다.

3) 유사문제의 가추

유사문제는 해결과정만 유사할 뿐 주어진 문제의 구조나 형태는 전혀 다른 새로운 문제를 만든 경우이다. 비정형 문제에서 학생K는 제시된 삼각형 패턴 문제를 보고 성냥개비로 사각형을 만들어 연결하는 패턴 문제를 하나 만들더니 삼각형과 사각형 문제를 일반화시켜 정n각형을 생각하고 성냥개비와 정n각형 사이의 관계를 공식으로 만드는 문제를 만들었다. 학생이 만든 공식은 고등학교 2학년 때 배우는 등차수열의 일반항을 구하는 공식이었다. 따라서 학생K가 구체적인 도형인 정삼각형이나 정사각형의 패턴을 보고 일반화시켜 형식화된 공식을 만드는 문제를 제시한 것은 이미 알고 있던 지식을 선택한 것이 아닌 자신의 수준보다 높은 학년의 지식을 창의적으로 만들어 낸 것으로 창의적 가추가 일어났다고 볼 수 있다.

정형문제에서 학생K는 7개의 문제를 만들었는데 학생K가 만든 문제는 모두 유사문제였다. 학생K의 추론 과정은 [Fig. 5]와 같다. 학생 K는 문제를 만들기 전 제시된 문제를 관찰하고 자신이 문제를 해결하면서 사용하였던 조건들을 나열하여 써 내려갔다. 이는 자신이 문제를 만들기 위해 필요한 조건들을 제시된 문제에서 선택하는 행동으로 조작적 가추이다. 이후 제시된 문제의 조건을 따라 좌표평면에 그림을 그리면서 일차함수와 x축, y축으로 이루어진 직각삼각형을 떠올렸다. 직각삼각형의 빗변을 이루는 함수식을 구하는 제시된 문제에서 직각삼각형이 아닌 ‘이등변삼각형 문제를 만들고 싶다.’는 생각을 떠올리고 이등변삼각형을 그리기 위해 함수 $y=x$를 추가한 후에 문제를 만들었다. 이때 주어진 일차함수 문제와는 상관이 없는 이등변삼각형을 떠올린 것은 창의적 가추이다. 이등변삼각형을 그리기 위해 추가시킨 함수 $y=x$는 제시된 문제가 일차함수 단원으로 함수 단원의 문제에서 또 다른 함수식을 선택한 것이다. 이는 수학적 지식을 사용한 이론적 가추로 분류할 수 있다. 따라서 학생 K는 유사문제를 제시하면서 조작적 가추, 이론적 가추, 창의적 가추를 모두 발현하였다.

2. 문제 만들기 가추에 동원된 규칙 추리 사고 전략

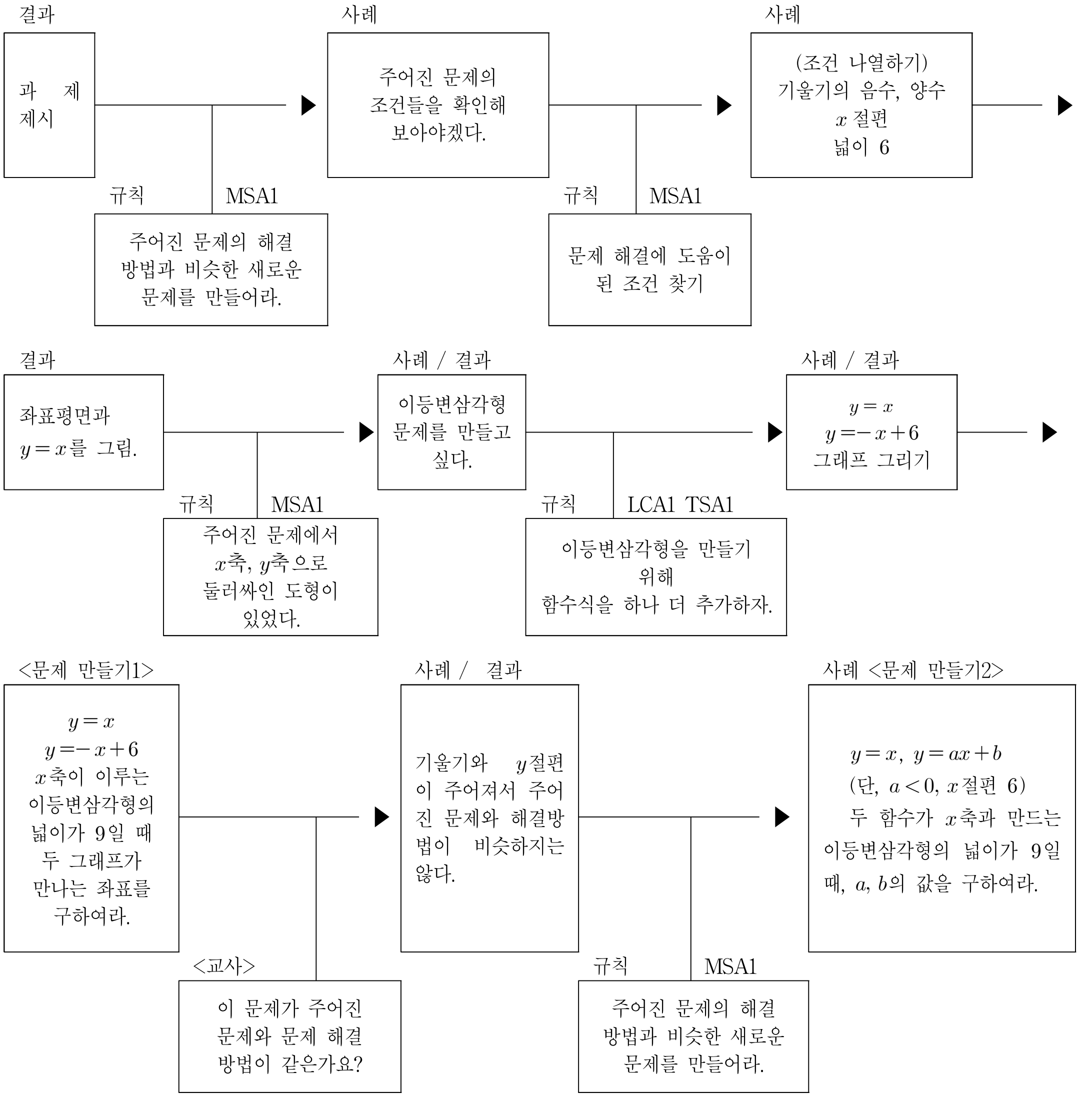
학생들은 같은 과제에도 다른 규칙들을 상정하여 각기 다른 문제를 만들었다. 학생이 제시된 과제에 대해 문제를 만들 때 다양한 가추가 진행되어야 여러 유형의 문제를 만들 수 있고, 교사는 학생들이 다양한 가추를 할 수 있도록 도울 필요가 있다. 이에 문제 만들기 과정에서 학

생들의 가추 분석에서 학생들이 상정한 규칙을 유형별로 분류하여 각 가추의 규칙을 상정하기 위한 사고 전략들을 살펴본다.

1) 조작적 가추에 동원된 사고 전략

학생은 과제의 상황을 관찰하는 과정에서 직관적이고 비언어적인 표상을 나타낸다. 이런 비언어적인 표상이 문제를 만드는 데 꼭 필요한 규칙으로 사용되었다. 학생이 조작적 가추를 발현할 때 떠올린 규칙 추리 사고 전략들은 다음과 같이 총 7가지가 분석되었다.

첫째, 대상으로 인식하기 전략은 제시된 문제의 정보를 관찰하고 관찰된 정보 중 일부를 자신이 만들 문제의 대상으로 인식하고 사용하여 문제를 만드는 것이다. 정형 문제에서 학생 K는 제시된 문제의 조건인 한 점 $(3, 0)$, 식 $a+b$, 도형의 넓이 6을 관찰한 후 이를 새로운 문제를 만들기 위한 대상으로 인식하였고, 이 정보들을 새로



[Fig. 5] Student K’s reasoning process (Lee, 2020, pp. 93-94)

운 문제를 만들기 위한 규칙들로 선정하여 각 조건의 수식을 변경하여 문제를 만들었다. 관찰 자체는 추론이 아니지만 제시된 상황을 관찰하고 관찰한 정보 중 일부를 선택하여 자신이 만들 문제의 대상으로 인식하고 사용하는 행동을 통해 이전에 알지 못한 무언가를 발견하거나 아이디어를 제시하는 데 사용하는 것은 새로운 문제를 만들기 위한 가추에 도움이 된다. 즉, 제시된 정보들을 자신이 만들 문제를 위한 대상으로 인식하는 것은 직관적이고 비이론적인 조작으로 조작적 가추에 사용할 수 있는 사고 전략이 된다.

둘째, 변환하기는 제시된 상황을 표나 그림 등 구체물로 변환시키는 것, 자신이 떠올린 사례의 근거로 필요한 그림을 그리거나 표를 그리는 행동, 제시된 그림을 숫자로 변환하는 행동을 포함한다. 새로운 문제를 만들기 위해 그림을 그리는 경우와 그림을 숫자로 표현하는 경우의 예를 살펴보기로 한다.

먼저, 문제를 표나 그림 등 구체물로 표현한 예를 볼 수 있다. 비정형 문제에서 성냥개비로 삼각형을 늘려가는 과제를 보고 학생K가 정사각형 문제를 만들고 이를 일반화시켜 정n각형일 때 문제를 만들면서, 학생K는 “오각형일 때도 성립하는가?”라는 자신의 의문에 스스로 오각형을 그려 보며 확인하였다. 오각형을 그리는 이 행동 자체가 새로운 문제를 만드는 데 결정적인 요인이 되지는 않았지만 이 행동은 학생의 연쇄적인 추론 과정의 일부분으로 자신의 새로운 문제를 만들기 위한 추론을 확립하는 데 구체적인 조작물이 되어 주었다. 또한 학생H는 성냥개비로 정삼각형을 만들고 이를 연결하여 정육각형을 만들어야겠다고 생각하고 문제를 만들었는데, 연구자가 오류를 발견하고 생각을 표현해볼 것을 요청하였더니 학생 H는 그림을 그렸다. 그린 그림이 가능한지에 관해 연구자가 의문을 보였더니, 학생H는 자신이 그린 그림을 관찰하다가 마지막 테두리 변이 그 전에 그은 변보다 더 길어졌다는 것을 그림을 통해 발견하였다. 그는 ‘아.. 안 그려봤더니..’라며 자신의 문제에 오류가 있음을 그림을 통해 파악하였다. 만약 학생H가 정육각형 문제를 만들면서 스스로 그려보는 행동을 했다면 마지막 변이 길어진다는 것을 파악하고 문제를 스스로 수정하였을 것이다. 이렇게 문제 만들기에서 직관적이고 비언어적인 표현으로 그림을 그리는 행동은 자신의 아이디어를 구체화 하는 조작이므로 조작적 가추에서 사용할 수 있는 사고 전략이 된다.

변환하기의 두 번째 예는 숫자로 표현하는 것이다. 비정형 문제에서 학생들은 제시된 그림을 관찰하였고 각 단계의 그림 밑에 성냥개비의 수를 쓰기 시작했다. 모든 학생은 문제가 제시되면 문제에 제시된 글을 읽고 그림을 본다. 그러나 눈으로 본 그림을 수학적 대상으로 선택하여 숫자로 표현하지 못한다면 문제를 만들 수도 해결할 수도 없다. 이 사례에서 학생들은 성냥개비 그림을 보고 성냥개비로 만든 정삼각형을 단지 정삼각형으로만 인식하면 숫자의 규칙성을 찾을 수 없을 것이다. 제시된 그림의 성냥개비를 수학적 대상으로 인식하여 단계마다 성냥개비의 수를 숫자로 쓰는 행동은 비언어적이고 직관적인 행동으로 조작적 가추를 돕는 사고 전략이 된다. 즉, 수학 문제를 접할 때 제시된 그림을 해석하여 수치화시켜야겠다는 추론이 문제를 이해하고 아이디어를 도출하는데 긍정적인 영향을 줄 수 있다.

셋째, 조작적 가추에 사용된 사고 전략은 패턴 찾기이다. 과제1과 과제4는 성냥개비와 점이 일정한 규칙으로 증가하는 상황을 제시한 것이다. 학생들은 제시된 그림 밑에 성냥개비의 수를 단계별로 3, 5, 7, … 숫자로 표현한 후에 숫자가 일정하게 2씩 늘어났다는 패턴을 찾았다. 자신이 찾은 패턴을 규칙으로 상정하여 학생들이 새로운 문제를 만들 때도 정사각형 모양의 성냥개비가 일정하게 증가하는 패턴 상황을 제시하여 문제를 만들었다. 따라서 일반적인 패턴을 찾는 행동은 문제를 만드는 데 결정적 역할을 하므로 조작적 가추를 돕는 사고 전략이 된다.

넷째, 유추하기이다. 본 연구에서 제시한 과제1과 과제2는 문제를 제시하고 이 문제의 해결 방법과 비슷한 새로운 문제를 만들도록 한 것이다. ‘문제의 해결 방법과 비슷한’이라는 말로부터 이미 학생들은 제시된 문제와 비슷하게 문제를 만들 것을 결정하였다. 동치문제를 만든 경우처럼 문제 유형은 동일하지만 삼각형을 사각형으로만 바꾸어 문제를 제시할 때 사용된 사고 전략이 유추하기이다. 교사에 의해 제시된 정삼각형의 연결 문제는 학생들의 입장에서 완전한 문제로, 완벽한 문제로 인정할 수 있는 문제이다. 이 문제와 해결 방법이 비슷한 문제를 만들라는 제시어에서 이미 완벽한 문제, 성공적인 문제로 인식된 제시된 과제를 바탕으로 새로운 문제를 만들겠다

고 유추한 것이다. 유추는 새로운 아이디어를 제시하는 가추의 한 사고 전략이 된다.

다섯째, 반대로 생각하기이다. 비정형 문제에서 학생C는 성냥개비의 연결 2단계 그림에서 정삼각형 2개를 만들기 위해 성냥개비 5개가 사용되었다는 것을 파악하였다. 이후 주어진 문제는 정삼각형의 개수를 알 때 성냥개비의 수를 묻는 문제지만 학생은 역의 상황을 생각하여 성냥개비의 수를 알려주고 정삼각형의 개수를 구하는 문제를 만들었다. 또한, 상황만 제시한 과제에서 '100L 물탱크에 현재 40L의 물이 들어있다.'는 상황을 제시한 경우 대부분의 학생이 물탱크를 가득 채우기 위해 필요한 물의 양을 묻는 문제를 만들었다. 이후 자신이 만든 문제의 역의 상황인 물탱크를 비우는 상황을 떠올려 물탱크를 비우기 위해 빼야 하는 물의 양을 묻는 문제도 만들었다. 이 두 가지 사례를 통해 학생들이 새로운 문제를 만들 때 현재 상황의 반대의 상황을 떠올리는 행동으로 또 다른 문제를 만들 수 있었다. 제시된 상황을 반대로 생각하여 역의 문제를 만드는 것은 문제 만들기 상황에서 가추를 돕는 규칙 추리의 사고 전략이 된다.

여섯째, 결합하기이다. 상황을 제시한 과제에서 '100L의 물탱크에 40L의 물이 담겨있다.'라는 상황에 대해 학생K는 물탱크에 물을 채우는 상황의 문제와 물을 모두 빼는 상황의 문제를 만들었다. 이후 한참을 문제를 만들지 못하고 고민하다가 주어진 상황만으로는 절대 문제를 만들 수 없다며 '다른 조건을 추가해도 되나요?'라며 문제를 만들기 위한 조건 세 개를 추가하였다. 이후 자신이 만든 조건을 하나씩 사용하여 두 개의 문제를 만들고 문제 만들기를 잠시 멈추었다. 이후 조건 1과 조건 3을 결합하여 새로운 문제를 만들고, 조건 2와 조건 3을 결합하여 또 다른 문제를 만들었다. 이와 같이 문제의 조건들을 결합하는 행동은 새로운 문제를 만들도록 하는 전략이 되므로, 가추를 돕는 규칙 추리의 사고 전략이 된다.

일곱째, 제거하기이다. 정형 문제는 미지수 a, b를 구하여 일차함수 식을 구하는 문제이다. 이를 이해한 학생 C는 일차함수 식을 구하는 문제를 만들면서 제시된 문제의 $a-b$를 구하라는 부분을 삭제하고 일차함수 식을 구하는 문제를 만들었다. 이 사례는 학생이 자신의 문제를 만들면서 주어진 조건 중에서 불필요하다고 생각되는 부분을 삭제하여 새로운 문제를 만든 경우이다. 따라서 관찰된 조건에서 필요 없는 조건을 찾아 제거하는 것도 가추를 돕는 규칙 추리의 사고 전략으로 분석 할 수 있다.

이상에서 학생들의 문제 만들기 활동 중 발현된 조작적 가추에서 규칙을 추리하는 사고 전략에 대해 알아보았다. 대상으로 인식하기, 패턴 찾기, 변환하기, 유추하기, 반대로 생각하기, 결합하기, 제거하기로 총 7가지이다. 이 사고 전략들을 지식이거나 새로운 것을 창조한 것이 아니므로 이론적 가추나 창의적 가추로 분류할 수 없다. 조작적 가추에 동원된 사고 전략들은 상황을 관찰하고 문제를 만들기 위한 기초를 세울 때 많이 사용된 전략들이다.

2) 이론적 가추에 동원되는 사고 전략

이론적 가추는 가추를 형성하는 규칙이 '지식'인 경우이다. 이론적 가추의 정의에 따라 학생들의 가추 발현을 위한 규칙을 상정할 때 어떤 종류의 지식을 선택하는지 그 사고 전략을 살펴본다.

첫째, 수학적 지식의 활용이다. 과제2의 문제 만들기에서는 각각의 사례를 만들기 위한 대부분의 규칙이 수학적 지식이었다. 학생 K는 제시된 일차함수 문제를 해결할 때 제일 먼저 주어진 조건을 좌표평면에 그리기 시작했다. 제시된 $a<0$, 도형의 넓이는 6이라는 조건을 통해 그래프를 그리고자 필요한 수학적 지식을 규칙으로 선택하였다. $a<0$조건으로 일차함수 그래프를 추측하고, 넓이 조건으로 가로, 세로의 길이를 생각하며, y절편을 찾기 등을 해결하기 위해 필요한 내용을 만들기 시작했다. 이는 수학적 지식을 사용하여 새로운 문제를 만든 사례이다. 학생 K는 주어진 문제를 해결할 때뿐만 아니라 문제를 만들 때도 주어진 조건에서 그래프를 그렸고 이 그래프 그린 것은 이론적 가추의 발현으로 수학적 지식을 활용한 전략의 예이다. 이것은 조작적 가추에서 제시된 상황을 표나 그림 등 구체물로 변환한 것의 예로 분류할 수 없다. 왜냐하면 좌표평면을 그리고 그 위에 점을 찍고 일차함수 그래프를 그리는 모든 행동은 수학적 지식 없이는 그릴 수 없는 것이기 때문이다. 즉 행동이 아닌 수학적 지식을 그림으로 표현한 것이다. 제시된 문제의 조건 (가)에서 점 $(3, 0)$을 보고 x절편인 것을 알아야 하고, 이를 좌표평면에 찍을 수 있는 지식이 있어야 찍을 수 있기 때문이다. 또한, $a<0$이라는 조건을 보고 기울

기가 음수여서 오른쪽 아래로 내려간다는 수학적 지식을 알아야 그래프로 표현 할 수 있기 때문이다. 즉 문제 만들기에서 규칙으로 수학적 지식을 상정하는 것은 이론적 가추에 동원되는 사고 전략이 된다.

둘째, 경험적 지식의 활용이다. 상황을 제시한 과제에서 '100L의 물탱크에 40L의 물이 담겨있다.'라는 과제에서 네 명의 학생은 축적된 경험이 다르므로 문제를 만들기 위해 추가하는 조건들도 동일하지 않았다. 학생K는 구멍이 뚫려 1분에 1L씩 빠진다거나 8L짜리 바구니와 3L짜리 바구니로 물을 뜨는 조건을 만들었고, 학생L은 40L의 물과 함께 갇혔다는 조건을 만들었다. 학생H는 40L의 물을 친구들에게 나누어 준다는 조건을 만들었고, 학생 C는 물탱크의 모양이 원기둥이나 직육면체라는 조건을 만들어 문제를 제시하였다. 즉 학생이 가진 배경지식이나 맥락이 새로운 문제를 만드는 활동에 직접적인 영향을 준 것이다. 이에 학생들이 가진 경험적 지식은 학생들의 문제 만들기를 위한 가추에 영향을 주는 것으로 분석할 수 있다. 자신의 경험적 지식에 기반한 어떠한 지식을 가추를 위한 규칙으로 상정한 것은 가추에 동원되는 사고 전략으로 사용할 수 있다.

셋째, 확산적 지식의 활용이다. 과제3의 상황만 제시한 경우의 문제 만들기 활동 중 학생 L은 물을 채우고 빼는 것에 관한 문제를 만든 후에, 물이 증발하는 것을 생각한다. 또한, 학생L은 단위를 조정하여 mL로 증발하는 양에 대한 조건을 제시하였다. 이는 과학 시간에 배운 '물은 증발한다.'는 지식이 문제의 조건을 만드는 데 영향을 준 것으로 볼 수 있다. 학생L은 40L의 물과 함께 갇혔다는 조건을 만들었는데 이 조건은 수학적으로 흥미롭지 않거나 수학적 문제로 탐구하기에 별로 생산적이지 않을 수 있다. 그러나 이 조건을 자신의 경험을 떠올려 적은 물과 함께 갇힌 상황을 만들고, 과학적 사실(탈수증상)을 반영하여 새로운 문제를 제시하였다. 두 사례 모두 과학교과의 증발이나 탈수 개념을 수학 문제 만들기 규칙으로 사용하여 가추하였다. 이로써 타교과 지식의 활용은 가추를 돕는 사고 전략이 된다. 본 연구에서는 과학 교과 지식이 규칙으로 사용되었지만, 다른 영역의 지식도 사용될 수 있으므로 타교과 지식을 사용한 경우를 확산적 지식으로 명명한다(Lee, 2020).

3) 학교 수학 수준에서의 창의적 가추에 동원되는 사고 전략

본 연구에서 학생이 알지 못하는 규칙을 만들어서 가추의 규칙으로 사용하는 경우를 창의적 가추라 하였다. 먼저 살펴볼 학교수학 수준에서의 창의적 가추는 전문가들에 의해 만들어지고 밝혀져 이미 세상에 알려진 지식일지라도 학생의 수준에서는 알지 못하는 상위 지식을 규칙으로 떠올리는 가추이다. 이러한 창의적 가추를 위해서 규칙을 추리하는 사고 전략을 살펴본다.

첫째, 상승화 전략이다. 상황을 제시한 과제에서 학생K는 8L바구니와 3L바구니로 물 41L를 채울 때 각 바구니를 사용한 횟수를 묻는 문제를 만들었다. 이 문제를 해결하기 위해 일차방정식 $41=8\times\triangle+3\times\ominus$를 만들고 일차방정식을 일차부등식으로 바꾸어서 $41\geq 8\times\triangle+3\times\ominus$을 생각하여 물탱크에 41L이상 채우는 문제를 추가로 만들었다. 이 문제를 해결하려 할 때 학생 K는 중학교 2학년 학생으로 미지수가 하나인 부등식만 풀 줄 알지만, 당황하지 않고 미지수가 2개이므로 식이 하나 더 필요하겠다고 말하며, 8L짜리 바구니를 더 많이 사용하는 조건을 추가하여 미지수가 두 개인 연립부등식 문제 '물탱크에 41L 이상을 채우려고 한다. 8L 바구니로 x번 채우고 3L 바구니로 y번 채운다. 각 바구니 사용 수는? (단, $x>y$)'을 만들었다. 학생K는 중학교 2학년으로 미지수가 1개인 일차부등식밖에 배우지 않았지만 일차부등식과 연립방정식을 연결하여, 고등학교 과정인 연립부등식 문제를 만든 것이다. 이는 미지수가 2개인 연립일차부등식은 세상에 존재하는 지식이지만 중학생인 학생K는 알 수 없는 지식이다. 따라서 학생의 입장에서는 알지 못하는 지식을 창조한 사례로 창의적 가추의 발현으로 분석 할 수 있다. 이에 제시된 문제 영역 이외의 수학 주제이면서 아직 학생의 수준에서 학습하지 않은 수학 내용을 떠올려 규칙으로 사용한 사고 전략을 상승화 전략이라 명명한다(Lee, 2020).

둘째, 형식화 전략이다. 실험에 참여한 모든 학생은 과제1의 비정형화된 과제에 제시된 정삼각형의 문제를 보고 정사각형으로 동치문제를 만들었다. 그러나 [Table 3]과 같이 학생 K는 유사 문제를 만들었다. 주어진 정삼각형 문제와 자신이 만든 정사각형 문제를 보고, 일반적인 상황에도 이러한 규칙이 성립할 것이라고 가추하면서 정

n각형으로 문제를 만들고 성냥개비와 도형 사이의 관계에 대한 공식을 만들라는 문제를 새롭게 만들었다. 이 사례를 통해 여러 구체적인 상황을 보고 일반화시켜 공식을 만드는 학생과 그렇지 않은 학생이 있다는 것을 알 수 있다. 구체적인 수치가 제시된 경우의 관계식 세우기와 일반적인 상황으로 확장시켜 공식을 만드는 것은 분명한 차이가 있다. 구체화된 내용을 일반화시켜 공식이나 정리를 만드는 추론은 이전에 알고 있던 규칙을 선택한 것으로 보기는 어렵다. 따라서 새로운 공식을 만드는 일반화 전략은 창의적 가추를 돕는 사고 전략이 된다.

4) 학문적 수학 수준에서의 창의적 가추에 동원되는 사고 전략

학문적 수학 수준에서의 창의적 가추는 제시된 상황과 전혀 관련이 없는 새로운 규칙을 추론한 가추라고 정의하였다(Lee, 2020). 여기서 새로운 규칙을 만들어낸다는 것은 수학자나 과학자 같은 전문가들이 아직 세상에 존재하지 않는 무언가를 만들어내는 새로움을 뜻하지만 이

[Table 5] Thinking strategies of rule reasoning by problem posing abduction type (Lee, 2020, p123)

Abduction type		Rules	Thinking strategies used for abduction reasoning	code
Selective abduction	Manipulative-selective abduction	awareness	Use when creating a problem by recognizing the condition presented in the problem as a mathematical object	MSA1
		representation	Expressing the problem in figures, or pictures - visual representation - display pictures numerically - numeric representation	MSA2
		finding pattern	Find patterns in materials and think figuratively	MSA3
		analogical reasoning	Explain the current given situation using rules that functioned successfully in a similar situation	MSA4
		backwards thinking	Thinking of $q \Rightarrow p$, the inverse of $p \Rightarrow q$	MSA5
		combination	Combining two or more rules to form a new rule	MSA6
		elimination	Eliminate unnecessary conditions	MSA7
	Theoretical-selective abduction	mathematical knowledge	Using mathematical knowledge in lessons related to presented problems	TSA1
		heuristic knowledge	Using life experience knowledge	TSA2
		divergent knowledge	Using other subject knowledge	TSA3
creative abduction	Little-creative abduction	rise / influences	Linking / Integrating / Reorganizing mathematical topics outside the present problem areas	LCA1
		Generalization / formula	Generalize materialized content to induce formulas or theorems	LCA2
	Big-creative abduction	original	Incorporate or create rules that seem totally irrelevant	BCA1

러한 전문가 수준의 창의적 가추를 학생들이 하기는 쉽지 않다. 이에 본 연구에서는 교사가 문제를 만들거나 해결하도록 과제를 제시할 때 예상하는 학생들의 답안의 형태가 아닌 기발한 방법, 예상하지 못한 규칙, 전혀 관련이 없어 보이는 규칙을 활용하여 새로운 것을 만들어내는 것을 포함하였다. 어찌 보면 엉뚱해 보이는 이런 규칙의 상정이 학문적 수학 수준에서의 창의적 가추의 정의에 맞는 '새로운 규칙 상정'으로 가는 첫 발걸음이 될 수도 있기 때문이다.

과제4의 수학적 패턴 문제는 점들이 규칙적으로 증가하여 단계마다 1, 4, 9, 16, ...개의 점이 찍힌 정사각형 모양을 보고 만들 수 있는 문제를 만들라는 과제였다. 그러나 학생C는 점들이 단계마다 증가하는 규칙성을 찾아 이차함수의 문제를 만들지는 못하였다. 학생C는 제시된 그림의 점들을 관찰하고 점들이 만든 도형이 사각형이라는 것에 주목하여 도형의 문제를 만들었다. 사각형 대신 별 모양을 만들고 싶었다며 점들을 찍어 별 모양을 만들고 만들어진 별 모양에서 삼각형은 몇 개인지를 묻는 문제를 만들었다. 물론 학생C가 만든 문제는 교사가 제시한 문제의 기획 의도에 꼭 맞는 획기적이고 창조적인 문제가 아닌 조금은 엉뚱한 문제이다. 그러나 이 엉뚱하다는 분석은 교사가 의도한 대로 증가되는 점의 패턴을 찾아 이차함수 문제를 만들지 않았기 때문이지, 학생이 만든 문제에 오류가 있는 것은 아니다. 이러한 엉뚱하기도 하고 제시된 문제와는 전혀 관련 없는 것으로 보이는 규칙을 사용하여 문제를 만드는 창조적 전략은 창의적 가추를 돕는 사고 전략이 된다.

위에 제시된 학생들의 문제 만들기에서 가추 추론에 동원된 규칙 추리 사고 전략을 정리해보면 [Table 5]와 같다. 본 연구의 문제 만들기에서 나타난 사고 전략은 Pólya의 문제 해결 전략 중에서 제시한 그림으로 나타내기, 유추, 결합하기는 동일했다. 하지만 수학적, 경험적, 타교과 지식을 규칙으로 활용하는 것이나 전혀 관련 없어 보이는 규칙을 접목시켜 만드는 창조적 전략은 문제 만들기 가추에서만 나타났다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 학생의 문제 만들기 유형에 따른 가추를 분석하고 각 가추에 동원된 규칙 추리 사고 전략을 분석하였다.

학생이 만든 문제 유형에 따라 사용된 가추는 차이가 있었다. 동치문제의 경우에는 제시된 문제의 조건을 자신이 만들고자 하는 문제의 대상으로 인식하고 숫자나 식을 학생이 원하는 숫자나 식으로 바꾸어 제시하는 조작적 가추가 대체로 발현되었다. 반면 동형문제와 유사문제는 조작적 가추, 이론적 가추, 창의적 가추가 모두 발현되었다. 특히 동형문제와 유사문제에서는 비이론적인 행동을 선택하는 조작적 가추의 발현이 동치 문제에서 발현된 단순 숫자를 바꾸는 '대상으로 인식하기' 이외에 패턴찾기, 조건 결합하기, 조건 제거하기 등 다양한 규칙을 상정한 조작적 가추가 발현되었다. 또한 동형문제보다 유사문제에서 창의적 가추가 더 많이 발현되었다. '공식을 만들어라.'는 유사문제를 만들면서 학생은 제시된 구체적인 상황을 형식적인 상황으로 일반화시키는 과정을 겪었다. 이 과정에서 학생의 지식보다 높은 수준의 지식을 규칙으로 사용하거나 구체적 상황을 형식화시키는 규칙을 사용하는 창의적 가추가 많이 발현되었다.

현재 교과서의 문제 만들기는 기존에 제시된 문제의 조건에서 무엇을 바꿔야 하는지도 정해주는 형식이 대부분인데, 이는 동치 문제를 만드는 유형의 과제이다. 그러나 본 연구는 동치 문제보다는 동형 문제나 유사 문제에서 더 다양한 가추가 발현되는 것을 보여주었다. 따라서 문제 만들기 과제를 단순 숫자를 바꾸는 것 이외에 다양한 가추가 일어날 수 있는 학생이 동형문제나 유사문제를 만들 수 있도록 하는 과제의 개발이 필요하다. 또한, 본 연구는 소수의 인원으로 문제 만들기 활동을 진행하여 교사가 곁에서 또 다른 문제를 만들어보도록 독려할 수 있지만, 전체 학생을 대상으로 문제 만들기 활동을 하는 경우는 교사가 개개인의 학생을 독려하기는 어렵다. 이에 동형 문제나 유사문제를 만들 수 있도록 하는 과제를 구성할 때 '가능한 한 많은 문제를 만드시오.'라는 문구를 넣어주는 것은 여러 유형의 문제를 만들면서 다양한 가추가 진행되도록 하는 하나의 방법이 될 수 있다.

학생들의 문제 만들기 과정에서 나타난 가추 발현에서 어떤 규칙들을 상정하였는지에 따라 각 가추에 동원된 사고 전략에 대해 살펴보았다. 조작적 가추에서 규칙을 추리하기 위한 사고 전략으로 대상으로 인식하기, 패턴

찾기, 숫자나 그림으로 변환하기, 유추하기, 반대로 생각하기, 결합하기, 제거하기로 총 7가지가 발현되었다. 이론적 가추에서 규칙을 추리하기 위해 떠올린 지식은 수학적 지식, 경험적 지식, 확산적 지식의 3가지이다. 창의적 가추의 규칙을 추리하기 위해 떠올린 사고 전략은 제시된 문제의 단원이 아닌 다른 단원의 수학적 지식을 사용한 상승화 전략, 공식이나 정리를 만들어내는 형식화 전략, 전혀 관련 없어 보이는 개념을 연결하는 창조적 전략으로 3가지이다(Lee, 2020).

수학적 창의성 교육의 필요성이 대두되는 현 시점에서 연역과 같은 형식적 추론 교육에 비해 개연적 추론 교육이 부족하다는 문제의식이 대두되고 있다. 이러한 문제의식과 함께 발견적이고 확장적인 추론인 가추 교육이 필요하다. 그러나 가추 교육을 구체적으로 어떻게 해야 하는지에 대한 연구는 부족한 실정이다. 가추 교육을 위한 하나의 방법으로 본 연구 결과인 문제 만들기 활동에서 나타난 가추의 규칙 추리에 동원된 사고 전략을 활용할 수 있을 것이다. 본 연구에서 학생들의 문제 만들기 과정에서 발현된 가추의 규칙 추리에 동원되는 사고 전략들 중 학생이 떠올리지 못하는 전략들을 교사가 학생들에게 간접적으로 제시하여 학생이 스스로 사고 전략을 깨우칠 수 있도록 한다면 가추를 독려 할 수 있을 것이다.

본 연구의 문제 만들기 활동 중 발현된 가추의 규칙 추리 사고 전략은 네 학생의 사례에서 등장한 것이라는 점에서 모든 가추에서 나타날 수 있는 사고전략을 다 포괄하지 못했다는 한계가 있다. 제시되는 과제에 따라, 과제를 대하는 학생들의 성향에 따라, 활동을 하는 환경 등 여러 조건에 따라, 더 다양한 전략들이 실제 학생들의 활동에서 사용될 수 있기 때문이다. 이에 본 연구에서 제시한 과제 유형 이외의 문제 만들기 과제를 지속적으로 실험하여 문제 만들기에서 나타난 가추에 동원되는 사고 전략들을 확장할 필요가 있다. 또한 본 연구에서 밝혀진 문제 만들기 활동에서 나타난 가추에 동원된 사고 전략을 학생들에게 교수한다면, 사고 전략의 학습을 통해 이전에는 생각하지 못했던 규칙들을 상정하여 다양한 가추를 진행할 수 있게 될 것이다. 이러한 활동의 반복을 통해 학생들의 다양한 가추의 발현이 수학적 창의성 교육에 한 걸음 다가가는 한 방법이 되기를 기대한다.

참 고 문 헌

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*(3rd. Ed. e-book). Lawrence Erlbaum Associates Publisher.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. Routledge, *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Eco, U. (1983). Horns, hooves, insteps: Some hypotheses on three types of abduction. In U. Eco & T. Sebeol(eds.), *The sign of three : Dupin, Holmes and Peirce* (pp. 198-220). Bloomington, IN : Indiana University Press.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3-21.

Jung, S. M. (1993). Three concepts of discovery. *The Korean Society for Cognitive Science, 4*(1), 25-49.

Kim, P. S. (2005). Analysis of thinking process and steps in problem posing of the mathematically gifted children. *The Journal of Elementary Education, 18*(2), 303-334.

Kim, S. H. & Lee, C. H. (2002). Abduction as a mathematical resoning. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 12*(2), 275-290.

Kim, S. H. (2004). *Semiotic consideration on the appropriation of the mathematical knowledge.* Doctoral dissertation. Ehwa Womans University, Korea.

Kim, W. K., Jo, M. S., Bang, G. S., Bae, S. K., Ji, E. J., Im, S. H., Kim, D. H., Kang, S. J., & Kim, Y. H. (2015). *Mathematic 1*, Seoul: visang.

Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1992). *Reasoning and problem solving: A handbook for elementary school teachers.* the United States: NCTM.

Kwon, Y. J., Jeong, J. S., Kang, M. J. & Kim, Y. S. (2003). Research article : A grounded theory on the process of generating hypothesis-knowledge about scientific episodes. *Journal of the Korean Association for Research in Science Education, 23*(5), 458-469.

Lee, H. (1989). Syllogism and dialectic. *Kyungnam Journal of Philosophy, 5*, 3-30.

Lee, M. H. (2020). *Analysis of Abduction Types and Thinking Strategies on Mathematics Problem Posing.*

Doctoral dissertation, Kangwon National University.

Lee, Y. H. & Kahng, M. J. (2013). An analysis of problems of mathematics textbooks in regards of the types of abductions to be used to solve, *The Journal of Educational Research in Mathematics, 23*(3), 335-351.

Magnani, L. (2001). *Abduction, reason, and science: Process of discovery and explanation*. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers.

Ministry of Education (2015). *Mathematical curriculum*. Seoul: Author.

Merriam, S. B. (1988). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossy-Bass.

Na, G. S. (2017). Examining the problem making by mathematically gifted students. *School Mathematics, 19*(1), 77-93.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Va.

Oh, P. S. & Kim, C. J. (2005). A theoretical study on abduction as an inquiry method in earth science. *Journal of the Korean Association for Science Education, 25*(5), 610-623.

Oh, P. S. (2006). Rule-inferring strategies for abductive reasoning in the process of solving an earth-environmental problem. *Journal of the Korean Association for Science Education, 26*(4), 546-558.

Paik, S. Y. (2016). *Teaching & learning of mathematical problem-solving*. Seoul: Kyungmoon.

Pease, A., & Aberdein, A. (2011). Five theories of reasoning: Interconnections and applications to mathematics. *Logic and Logical Philosophy, 20*(1-2), 7-57.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41.

Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 281-303.

Peirce, C. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce Vols Ⅰ-Ⅵ.* C. Hartshorne & P. Weiss (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1980). *Collect papers of Charles Sanders Peirce Vols Ⅶ-Ⅷ.* In B. Arthur (Ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Pólya, G. (1957), *How to solve it*(2nd ed.). NY.: Doubleday & Company, Inc.

Psillos, S. (2000). *Abduction: Between conceptual richness and computational complexity.* Retrieved Jan. 20, 2018, from http://users.uoa.gr/~psillos/PapersI/85-Abduction%20(Kakas%20&%20Flach)%20chapter.pdf

Reed, S. K. (1989). Constraints on the abstraction of solutions. *Journal of Educational Psychology, 81*, 532-540.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L., Rogers, A., Falle, J., Frid, S. & Bennett, S.(2012). *Helping children learn mathematics.* (1st Australian Ed.). Australia. Milton, Qld: John Wiley & Sons.

Rivera, F. D., & Rossi Becker, J. (2007). Abduction in pattern generalization. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education(vol.4, pp.* 97-104), Seoul, Korea.

Silver, E. A., Mamona-Dows, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems. *Journal for Research in Mathematical Education, 27*(3), 293-309.

Stickles, P. R. (2006). *An analysis of secondary and middle school teacher's mathematical problem posing.* Doctoral dissertation, Indiana University. the United States.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Weber, K., & Alcock, L. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(2), 125-134.