한국학교수학회논문집 제 23 권, 제 1호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 23, Number 1, 129-158, March 2020
http://doi.org/10.30807/ksms.2020.23.1.007

문제맥락에 대한 이미지가 문제해결에 미치는 영향

구대환[1] · 신재홍[2]

본 연구에서는 고등학교 2학년 학생 3명을 대상으로 기하 영역의 두 가지 과제를 제시하여 학생들이 문제 상황에서 문제해결 초기에 갖는 이미지의 특성을 파악하고 각 학생들의 이미지가 문제를 해결하는 동안 어떻게 변화하며 영향을 미치는지 밝히고자 하였다. 첫 번째 과제에서 학생 A는 문제해결 과정 초기에 정적인 이미지(유형1)를 가지고 있었지만, 후에 동적이면서도 문제 상황에서의 양들 사이의 불변의 관계를 인식한 유형3으로 발전하였고 학생 B와 학생 C는 문제해결 과정 전반에 걸쳐 유형3으로 관찰되었다. 첫 번째 과제에서 학생 B와 학생 C의 문제맥락에 대한 이미지에 차이점이 발견되지 않았지만 두 번째 과제에서는 분명한 차이를 드러내었다. 두 번째 과제에서 학생 B와 학생 C 모두 문제맥락에 대한 동적인 이미지를 가지고 있었지만 학생 B의 경우 양들 사이의 불변의 관계를 인식하지 못하였고 학생 C는 불변의 관계를 인식하는 잘 발달된 양적 구조를 가지고 있었다. 이에 따라 각 과제의 문제해결 성공 여부가 좌우되었는데, [과제1]에서는 문제 상황에서의 양들에 대한 동적인 이미지를 갖고 이론적 일반화 수준에 도달했는지의 여부에 의해서, [과제2]의 경우에는 문제 상황에서의 두 양에 대한 공변 추론 수준에 따라 학생들 간의 차이가 발생하였다.

주요용어: 문제맥락에 대한 이미지, 경험적 일반화, 이론적 일반화, 공변 추론

Ⅰ. 서론

현대수학의 두드러진 특징은 수학의 대수화, 대수적 방법에 의한 수학의 연구이지만 대수가 무엇인지는 정의하기가 쉽지 않다(우정호, 1999). 대수의 의미는 시대를 거치며 다양한 의미를 가지고 변하여 왔는데 Usiskin(1988)은 대수의 이런 다양한 측면을 종합하여 학교 대수를 산술의 일반화 학습, 문제해결 과정의 학습, 양 사이의 관계 학습, 구조의 학습으로 해석하였다. 이는 학교 수학에서 대수의 한 가지 측면만 강조할 것이 아니라 이러한 대수의 다양한 측면이 골고루 다루어져 대수적 사고를 신장시켜야 함을 시사하는 것이라 할 수 있다.

대수의 여러 다양한 의미를 하나의 측면으로 이해하는 것이 어려운 것처럼 대수적 사고(algebraic thinking) 역시 대수에서 어떤 내용을 포함하느냐에 따라 다양하게 정의된다. 다시 말해, 대수적 사고는 대수에서 강조되는 어떤 한 측면에 초점을 두면서 그 측면에서 요구하는 사고가 무엇이냐에 따라 결정될 수 있다(김성준, 2002). 김성준(2002)은 또한 대수적 사고의 다양한 정의에는 공통적으로 기호

* MSC2010분류 : 97C30, 97D70
1) 대전과학고등학교 교사 (dhkoo2011@gmail.com)
2) 한국교원대학교 교수 (jhshin@knue.ac.kr), 교신저자

체계가 전제되어 있으며 대수적 사고를 분석하는 핵심 역할을 하고 있음을 지적하고 있다.

대수적 사고의 여러 측면 중에서 양들 사이의 관계에 주목하여 양적 추론(quantitative reasoning)이 대수적 사고의 기초가 되어야 한다고 주장한 여러 연구들(Steffe & Izsak, 2002; Smith & Thompson, 2007; 마민영, 신재홍, 2016)이 있는데 이러한 연구들은 양적 추론 접근법이 대수와 함수 학습에 매우 중요한 기저 역할을 한다는 사실을 보여주고 있다. NCTM(2000)은 문제해결을 수학의 핵심으로 강조하며 학생들이 수학학습을 통해 문제 상황에서의 양들이 어떻게 서로 관련되어 있고 함께 변하는지를 표현하기 위해 수학 공식과 그래프와 같은 수학적 수단을 사용하도록 이끄는 이해와 추론 능력을 습득해야 한다고 강조하고 있다. 이는 양들 사이의 관계에 대한 추론 능력의 습득이 문제해결에 매우 중요한 역할을 하기에 학습 과정에서 이러한 역량을 함양하기 위한 교수·학습 운영과 교육환경 조성의 중요성을 강조한 것이라 할 수 있다.

한편 대수적 구조를 강조한 1960년대의 수학교육 현대화 운동의 영향으로 학교 수학의 기하 영역에 대수적 접근이 자리를 잡게 되었다. 우리나라는 수학교육 현대화 운동의 영향을 받은 3차 교육과정 이후로 고등학교 기하에서 대수와 기하의 연결성을 꾸준히 강조하고 있다. 2015 개정 수학과 교육과정에서 <기하>는 ‘이차곡선’, ‘평면벡터’, ‘공간도형과 공간좌표’의 3개 핵심 개념 영역으로 구성되어 있는데 각 영역의 성취기준을 살펴보면 기하적 대상을 대수적으로 다룰 수 있음을 인식할 것을 강조하고 있다(교육부, 2015). 이로부터 고등학교 수준의 기하 문제해결에서는 기하적 개념과 더불어 대수적 사고가 요구됨을 알 수 있다. 대수는 일반화의 언어이고 그 과정에서 추론의 방식을 제공해주며(Mason, 2002), 일반화는 기하에서 대상을 나타낼 때 필연적으로 등장하게 되는 변수에 의해 형식화된다(김남희 외, 2011). 따라서 기하 문제의 많은 부분이 일반화라는 대수적 사고와 관련되어 있다고 말할 수 있다(Herbert & Brown, 1999). 이는 문제 상황에서의 양들 사이의 일반적 관계를 추론하는 능력이 일반화 수준과 관련 있음을 말해준다.

Kieran(1996)은 함수가 학교 대수에서 중심적인 개념이므로 대수 학습에서 함수적 관계를 중심에 놓을 것을 강조하였다. 함수(function)와 관계(relation)는 대수를 구성하는 중요한 측면이므로 학생들의 대수적 추론능력을 신장시키기 위해서는 학생들이 함수적 관계를 성공적으로 이해할 수 있도록 돕는 방법을 개발할 필요성이 있다(NCTM, 2000). Thompson & Carlson(2017)은 공변적 관점에서 함수를 “한 양의 모든 값들이 다른 양의 값을 정확히 하나만 결정하는 성질을 가지면서 두 양의 값들 사이에 불변의 관계가 존재하는, 동시에 변하는 두 양에 대한 한 사람의 개념”으로 정의하고 함수 개념 발달의 역사에 대한 고찰을 통해(예, Boyer, 1946) 공변의 개념이 중심적인 역할을 해 왔음을 주장하였다. 따라서 기하 영역에서 함수적 사고의 신장을 위해 학생들이 양과 그들 사이의 관계로부터 추론하여 함수적 관계를 구성해보는 공변적 활동이 중요하게 다루어질 필요가 있다.

이상의 논의로부터 고등학교 수준의 기하 문제해결에서 대수적 사고와 함수적 사고가 중요하고 양들 사이의 관계에 대해 추론하는 능력이 이들 사고의 기저를 이룸을 알 수 있다. 그동안 학생이 두 양의 값들 사이의 관계를 추론하는 다양한 방식과 이를 분류하는 방식에 대한 많은 연구가 행해져 왔다(Carlson et al., 2002; Saldanha & Thompson, 1998; Thompson, 2016; Thompson & Carlson, 2017; 박종희, 신재홍, 이수진, 마민영, 2017). 이러한 연구들은 두 양에 관한 학생의 추론을 분류하기 위한 좋은 이론적 틀을 제시해 주었지만 학생들이 문제를 해결할 때 초기에 개념화한 양에 주목하여 연구한 결과는 아니다. Moore & Carlson(2012)은 학생들이 처음에 문제를 읽고 맥락을 이해하면서 문제 상황을 개념화한 이미지에 주목하여 그 특성을 분류하고 학생들의 문제맥락에 대한 이해가 문제 해결하는 동안 어떻게 발전하는지, 문제해결과 어떻게 연결되는지를 분석하였다. 그 결과 문제맥락과 일치하는 이미지를 가지고 양들 사이의 관계를 풍부하게 구성한 학생은 의미가 있으면서도 정확한 공식을 도출하였지만 문제맥락과 일치하는 양적 구조를 구성하지 못한 학생들은 양들이 서로 어떻게 관련되

어 있고 함께 변하는지를 정확히 표현하는 공식이나 그래프를 얻을 수 없었다. 이는 문제맥락에 대한 학생의 이미지와 공변적으로 추론할 수 있는 능력이 문제해결 능력과 밀접한 관련이 있음을 보여주고 있지만 이와 관련된 연구는 매우 드문 상황이다.

이에 본 연구는 Moore & Carlson(2012)의 연구를 토대로 학생들에게 양적 추론을 할 수 있는 기하 영역의 문제를 제시하고 이를 해결하는 학생이 초기에 문제맥락에 대해 갖는 이미지의 특성을 살피고 그 이미지가 어떻게 변화하고 문제해결에 어떤 영향을 미치는지를 분석하고자 한다. Moore & Carlson(2012)은 학생들이 문제맥락에 대해 갖는 이미지를 정적인지, 동적인지에 따라 나누고 동적 이미지를 다시 불변의 관계를 파악했는지의 여부에 따라 두 가지로 나누었다. 여기서 유의할 점은 한 학생이 주어진 문제 상황에서 동적 이미지를 가지고 불변의 관계를 파악했는지의 여부를 어떻게 판단할 것인가라는 문제이다.

본 연구에서는 고등학교 수준의 기하 영역에서 양적 추론이 어떻게 양들 사이의 일반적인 관계를 진술하는 대수적 사고를 지지하고, 변하는 두 양 사이의 관계를 정확하게 표현하는 그래프를 그리는 데 있어 어떤 영향을 미치는지를 관찰하고자 학생들에게 결과를 대수식으로 나타내는 과제와 역동적인 함수적 상황에서 공변하는 두 양의 관계를 그래프로 나타내는 두 가지 과제를 제시하였다. 이들 과제는 각각 일반화와 역동적인 함수적 상황에서의 공변 추론과 관련된 과제이다. 이에 연구자들은 각각의 문제 상황에 맞게 학생들의 사고를 세밀하게 분석하고자 Moore & Carlson(2012)이 제시한 이미지의 유형과 더불어 첫 번째 과제는 Mitchelmore & White(1999)가 제시한 일반화 수준 틀에 의해 학생이 주어진 문제 상황을 어느 정도로 일반화하였는지를 관찰하고, 두 번째 과제의 경우는 Carlson et al.(2002)가 제시한 공변 추론 수준을 관찰함으로써 불변의 관계를 파악했는지의 여부를 판별하였다.[3] 이에 본 연구에서는 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

• 연구문제 1: 학생들이 문제해결 초기에 갖는 문제 상황에서의 양들에 대한 이미지는 어떠하며, 문제해결 과정 동안 어떻게 변화하는가?
• 연구문제 2: 학생의 문제맥락에 대한 이미지와 일반화 수준, 공변 추론 수준과의 관계는 어떠하며 문제해결에 어떤 영향을 미치는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 고등학교 교육과정에서의 기하 영역과 대수적 사고

2015 개정 교육과정에서 진로 선택 과목인 <기하>의 내용은 ‘이차곡선’, ‘평면벡터’, ‘공간도형과 공간좌표’의 3개 핵심 개념 영역으로 구성되어 있다. 각 영역의 일반화된 지식과 성취기준을 대략적으로 살펴보면, ‘이차곡선’에서는 여러 이차곡선들이 좌표평면에서 방정식으로 표현됨을 알고 이를 통해 기하적 대상을 대수적으로 다룰 수 있음을 강조하고, ‘평면벡터’에서는 크기와 방향을 갖는 양을 표현하고 탐구하는 도구인 벡터를 다양한 방법으로 다루며, ‘공간도형과 공간좌표’에서는 공간좌표가 공간도형을 대수적으로 다루는 도구이므로 공간도형의 성질에 대한 탐구를 대수적으로 표현함으로써 기하와 대수의 연결성을 경험할 것을 강조하고 있다(교육부, 2015).

3) Mitchelmore & White(1999)가 제시한 일반화 수준 틀과 Carlson 외(2002)가 제시한 공변 추론 수준은 이론적 배경에서 상세히 소개하겠다.

고등학교 수준의 기하 문제를 해결할 때 상황에 맞는 대수식을 세우거나 방정식을 해결해야 하는 경우가 많은데, 이런 것은 모두 변수의 다양한 측면에 대한 이해와 깊은 관련이 있다. 변수는 여러 경우에 해당하는 것을 한 번에 취급하고자 하는 경우, 일반화된 절차의 특성을 기술하는 경우, 결과를 일반화하거나 일반적인 진술을 하는 경우에 사용된다(Schoenfeld & Arcavi, 1988). 대수적 사고의 핵심이라 할 수 있는 변수의 사용은 기하에서 도형의 꼭짓점, 변, 모서리, 각 등을 나타낸다든지, 움직이는 점을 표현할 때, 또는 문제 상황을 대수적으로 표현하거나 그래프로 나타내어 문제를 해결할 때 필연적으로 등장한다. 높은 수준의 기하일수록 어떤 형태의 대수적 지원 없이 공간의 개념과 관계를 정확하게 묘사하는 것은 매우 어려운 일이다(Hoffer, 1981). Duval(2002)은 표상이 처리의 수단을 제공하므로 표상을 통하지 않고 수학적 대상에 직접적으로 접근할 수 있는 방법은 없다고 주장하였는데, 대수는 기하에 강력한 형태의 기호적 표상을 제공하여 주므로 기하에서 대수적 사고를 사용하는 것을 포함하는 문제로 학생들의 사고를 살펴보는 것은 매우 의미 있는 일일 것이다.

최근의 기하에서의 연구들을 살펴보면 증명학습에 대한 어려움, 증명법 등 증명 활동과 관련된 연구들(김희, 김선희, 2010; 나귀수, 2009; 장혜원, 2013; 정영우, 김부윤, 2015)과 대수와 기하의 연결성에 주목(권영인, 서보억, 2007; 도정철, 손홍찬, 2015; Dindyal, 2004, 2007)하거나, 동적기하환경이 학생들의 기하에서의 사고와 추론의 수준, 대수와 기하의 연결성에 영향을 줄 수 있음을 보인 연구들(김근배, 최옥환, 박달원, 2018; 반은섭, 신재홍, 류희찬, 2016; 반은섭, 류희찬, 2017; 손홍찬, 2011; 양은경, 신재홍, 2014, 2015)이 주를 이루고 있다. 이러한 연구들로부터 기하 교수에서는 기하적 사고가 대수적 사고의 다양한 측면과 연결되어 있으므로 이를 확인하고 연결성을 경험할 수 있는 환경을 조성해주는 것이 중요하다는 것과 기하 문제를 성공적으로 해결하지 못한 학생들에 대한 올바른 이해를 위해서는 기하 개념의 습득뿐만 아니라 대수적 개념의 결여도 한 원인이 될 수 있음을 인식해야 함을 알 수 있다(나귀수, 1997; Dindyal, 2004, 2007).

2. 일반화에 관한 이론적 틀

수학의 특성인 일반화는 변수로 사용되는 문자에 의해 형식화된다(김남희 외, 2011). 앞서 언급하였듯이 고교과정에서 기하 문제를 해결하기 위해서는 변수 개념에 대한 이해가 필요하므로 기하 문제의 상당 부분이 일반화와 관련되어 있다고 할 수 있다. 그동안 수학 개념 형성 과정에서 일반화와 추상화의 역할에 대한 연구가 많은 학자들에 의해 진행되었는데 본 논문에서는 Mitchelmore & White(1999)와 Davydov(1990)의 연구를 중심으로 분석하였다. 수학적 개념은 유사성을 기반으로 경험들이 모일 때 생성된다. 일반화는 새로운 경험을 유사성을 기준으로 분류된 경험의 류(class)에 속하거나 속하지 않는 것으로 분류되게 하는 새로운 방식으로 바라볼 수 있도록 해준다(Mitchelmore & White, 1995, 1999). Mitchelmore & White(1999)는 높은 수준의 수학적 개념은 기존의 개념들로부터 추상화에 의해 생성될 수 있으며 추상화는 유사성을 인식하고 차이를 무시하는 행동, 인식된 유사성을 품고 있는 개념에 친숙해지기, 개념을 대상으로 구체화하기의 세 단계의 순환과정으로 이루어지는 구성적 과정으로 보고 있다.

Davydov(1990)는 패턴 추구와 같은 행동을 경험적 일반화라고 부른다. 이 단계에서는 일반화가 왜 성립하는지에 대한 검토 없이 사례들의 범주로부터 귀납적으로 형성된다. 일반화는 단순히 공통의 특징을 인식함으로 형성되지 않으며 외적인 특징을 기반으로 분류하는 것은 내적 연결성을 식별하는 데까지 나아갈 수 없다. 따라서 경험적 일반화는 내적 연결성을 식별할 수 있는 구조적 유사성을 고려하여 통합되거나 보충될 필요성이 있는데 Davydov(1990)는 이를 이론적 일반화라고 불렀다. 이론적

일반화에서는 추상화할 개념을 식별하기 위한 수단으로서 비교나 유사성이 아닌 분석(analysis)을 강조한다. 분석은 피상적인 모습이 아닌 내용에 작용하기에 이론적 일반화를 내용 기반 일반화라고도 한다. 또한, 어떤 범주의 원소들뿐만 아니라 일반적인 것과 특정한 것들 사이의 연결성을 강조하는데 이러한 내적 연결성을 이끌어 내는 것은 분석이다.

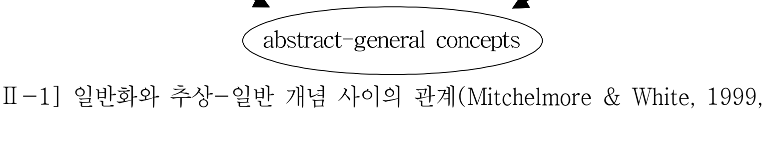
Mitchelmore(1993)는 수학에서 개념 발달에 대한 모델을 제시하며 추상-일반(abstract-general)과 추상-분리(abstract-apart)라는 추상화의 두 가지 측면을 제시했다. 추상-일반 개념은 많은 다양한 상황에 연결될 수 있는 추상화이고 추상-분리 개념은 그것이 발생한 몇몇 유사한 상황만을 참고하여 발달 되어 발생한 상황과 다른 상황에는 연결되지 못하는 추상화이다. Mitchelmore(1993)는 학교에서 일어나는 수학 교수 활동이 추상-분리 개념을 양산하는 경향이 있음을 지적하고 일반화가 용이하게 일어날 수 있도록 교사가 학생들에게 추상화가 적용될 수 있는 상황의 범위를 넓힐 수 있는 기회를 제공할 것을 제안하였다.

Mitchelmore & White(1999)는 개념 발달과 일반화를 위한 출발점으로써 구체적인 예를 통한 경험적 일반화를 강조하고 있지만, 그것만으로는 충분하지 않고 이론적 일반화가 수학 학습 과정과 추상-일반 개념을 형성하는데 매우 중요하고 형식적인 수학적 증명을 도입하는데 도움이 되는 초기 사고패턴을 제공해주므로 Davydov(1990)와 같이 이론적 일반화를 통한 보완이 필요함을 주장한다. 일반화와 추상화에 대하여 Mitchelmore & White(1999)는 일반화는 기존 개념의 의미를 확장하는 역할을 하는 반면, 추상화는 새로운 정신적 대상(개념)을 만들기 때문에 본질적인 차이가 있다고 말하며 <표 Ⅱ-1>과 같이 학습 과정에서의 일반화와 추상화에 대한 이론적 틀을 제시하였다.

<표 Ⅱ-1> 학습 과정에서의 일반화와 추상화의 특징(Mitchelmore & White, 1999, p. 9)

일반화/추상화		특징
일반화	경험적 일반화 (empirical generalization)	일반화가 왜 유지되는지에 대한 검토 없이 일반화가 다양한 예로부터 귀납적으로 형성되는 패턴 추구 행동
	이론적 일반화 (theoretical generalization)	내적 연결성을 식별할 수 있는 구조적 유사성을 고려함으로 형성됨
추상화	추상-분리 (abstract-apart)	학습이 경험 세계와 거의 분리된 채로 일어나는 산물 기반 접근
	추상-일반 (abstract-general)	유사성을 인식하고 차이를 무시하는 구성적 과정

Mitchelmore & White(1999)는 [그림 Ⅱ-1]을 통하여 학습 상황에서 세 가지 개념의 통합과정을 설명하였다. 일반화 및 추상화 학습은 예들을 관찰하는 활동으로부터 시작되며, 경험적 일반화와 이론적 일반화의 과정이 교대가 되면서 유사성을 찾아 공통 요소들을 분류하여 수학적 개념에 대한 비형식적인 모델을 구성하게 된다. 그리고 형식적인 수학적 개념을 통하여 해석할 수 있는 관점에서의 맥락을 조사하면서 추상-일반 개념을 형성하게 된다(반은섭, 류희찬, 2017).



[그림 Ⅱ-1] 일반화와 추상-일반 개념 사이의 관계(Mitchelmore & White, 1999, p. 9)

3. 양적 추론과 대수적 추론

Smith & Thompson(2007)은 양(quantity)을 측정 가능한 대상이나 현상의 속성으로 정의한다. 양은 인지적으로 구성되기에 사람들이 알고 있는 양은 자신이 개념화한 양이다. 즉, 양은 같은 대상이라 할지라도 사람에 따라 서로 다른 양을 구성할 수 있다는 것이다. Kaput(1995)은 양은 대상에 대한 개인의 인식, 대상의 특성(quality), 적절한 단위(unit), 특성에 수치적 값을 부여하는 과정으로 구성된다고 말한다. 예를 들어, 길이, 넓이, 부피, 속도 등은 양으로 측정될 수 있는 속성들이다.

양적 추론은 양과 그들 사이의 관계로 상황을 해석하는 과정으로 상황과 상황에서의 양들을 개념화하는데 관여하는 사고이다(Moore & Carlson, 2012; Thompson, 1989). 양적 추론은 대수에서 표현과 조작의 형태에 대한 강력한 개념적 내용을 제공한다(Smith & Thompson, 2007). 표현과 조작을 위한 수학적 개념과 관계가 없으면 많은 학생들은 대수학을 의미 없는 기호 연습으로 여길 것이다. Smith & Thompson(2007)은 양적 추론에 초점을 두면 학생들은 문제 상황에서 양과 관계를 개념화하고 추론하고 조작 할 수 있는 능력을 개발할 수 있다고 주장하고 실제로 대수에 대한 내용을 제공하는 구체적인 방법을 보여주었다. 학생들이 양적 추론에 관여하게 되면 양과 그들 사이의 관계를 가지고 조작하게 된다. Ellis(2011)는 양적 조작(quantitative operation)을 하나 또는 그 이상의 이미 형성된 양들로부터 새로운 양을 생각해내는 개념적 조작으로 정의하였고, Thompson(1989)은 서로 다른 두 양을 관련시킴으로서 형성되는 한 양에 대한 개념으로 정의하였다. 예를 들어, 이동 거리와 경과 시간 사이의 곱셈적 비교는 평균속력이라는 개념을 만들어낸다.

대수적 추론은 일반성과 기호적 표현이 일반적인 관계를 기술하고, 그것을 비교하고 조작하며, 많은 수치적 계산을 용이하게 하는 역할에 의해 특징 지워질 수 있다. Smith & Thompson(2007)은 다양한 대수적 표현을 정당화하고 동기를 부여할 수 있는 것은 문제 상황에서의 양들 사이의 개념적 관계라고 말하며 대수에서의 양적 추론의 역할과 특성에 대해 다음과 같이 주장하였다. 첫째, 복잡한 문제해결에서 양적 추론은 대수적 표현에 대한 내용을 제공하여 기호의 힘이 이용될 수 있도록 해준다. 둘째, 양적 추론은 기호적 표현에 의존하지 않으면서도 특성상 유연하면서도 일반적인 추론을 할 수 있도록 해준다. 셋째, 양적 추론에 초점을 맞춘 문제해결은 개인이 상황을 어떻게 생각하는지에 달려있기 때문에 보통의 대수적 해법보다도 다양한 방식으로 표현될 수 있다.

앞서 서론에서 기호가 대수적 사고의 핵심 역할을 함을 언급하였는데 대수적 기호와 방법들이 일반적 관계를 진술하고 분석하고 다루는데 있어 강력한 도구가 되기 위해서는 표현할 실질적인 일반성에 대한 아이디어 없이는 불가능한 것이다. 양적 추론은 대수의 기호적 표현에 대한 내용과 의미를 제공해주기에 양적 추론에 바탕을 둔 대수적 지식은 학생들이 점점 추상화 되어가는 대수에 당황하지 않고 추상적 구조를 이해하고 학습할 수 있는 역량을 기를 수 있도록 해준다. 이는 양적 추론이 대수적 사고의 기초가 됨을 말해준다(Steffe & Izsak, 2002; Smith & Thompson, 2007; 마민영, 신재홍, 2016).

Thompson(1989)은 양적 구조(quantitative structure)를 양적 관계의 네트워크로 정의하고 이러한 양적 구조 즉, 양과 양적 관계의 네트워크로 상황을 분석하는 것을 양적 추론이라 하였다. Moore & Carlson(2012)은 학생의 상황에 대한 개념화 구조가 양과 그들 사이의 관계의 네트워크로 발전함에 따라 학생의 양적 구조가 발현되고 이러한 양적 관계 네트워크는 학생들로 하여금 양들이 어떻게 함께 변하는지를 탐구할 수 있도록 지원해준다고 말하며 양적 구조는 문제 상황의 양의 값들이 변할지라도 그대로 유지되는 불변하는 구조를 파악하도록 해준다고 주장하였다. 그들은 글로 표현된 상황과 글을 읽는 학생에 의해 형성된 이미지를 구분하고 문제맥락에 대한 학생들의 이해를 기술하기 위해 문제맥락에 대한 이미지를 사용하여 학생이 문제에 묘사된 상황을 어떻게 상상하는지를 언급하였다.

한 학생의 문제맥락에 대한 이미지는 그 학생이 글로 표현된 상황을 상상하는 방식에 의해 형성된 양적 구조를 포함하고 있다. 예를 들어, 벽에 기대어 있는 사다리 꼭대기가 벽을 타고 미끄러져 내려갈 때, 벽에서 사다리 하단까지의 거리에 관하여 바닥으로부터 사다리 상단까지의 거리를 나타내는 공식을 구하라는 과제를 고려해보자(Moore & Carlson, 2012). 이 과제는 바닥과 사다리 하단까지의 거리와 바닥과 사다리 상단까지의 거리라는 두 변량을 포함하고 있다. 이에 대하여 학생들이 갖는 문제맥락에 대한 이미지는 두 변량의 관계를 정적으로 상상하느냐 동적으로 상상하느냐에 따라 나뉘고 동적으로 상상하는 경우, 두 변량 사이의 불변의 관계를 인식하는지의 여부에 따라 유형이 나뉜다.

Moore & Carlson(2012)은 양적 추론이라는 관점에서 학생들이 문제에 대한 해결책을 얻으려 시도하는 동안 구성하는 이미지의 특성을 구분하고 각 특성에 따라 문제맥락에서의 양들이 함께 변하는 정도를 상상함에 있어 어느 정도로 성공적인지, 문제해결에 어떤 영향을 미치는지를 밝혀내고자 하였다. 마민영, 신재홍(2016)의 연구에서는 대수 문제를 읽는 초기과정부터 문제해결을 시도하는 모든 과정에서 드러나는 공변 추론의 수준과 발달에 대한 연구가 이루어지기를 제안하였고, Moore & Carlson(2012)의 연구에서는 학생들의 문제맥락에 대한 이미지가 문제 의도와 맞추어 조정되는 과정에 대한 연구가 이루어질 것을 제안하였다. 이에 본 논문에서는 Moore & Carlson(2012)이 제시한 문제맥락에 대한 이미지 유형(<표 Ⅱ-2>)을 기초로 문제해결 과정 전반에 걸쳐 학생들의 문제맥락에 대한 이미지의 변화과정을 살피고 이러한 변화가 문제해결에 미치는 영향을 분석하고자 고등학교 기하 영역에 해당하는 두 가지 과제를 제시하였다. 첫 번째 과제의 경우 문제 상황에서 주어진 양들의 불변의 관계를 인식하여 결과를 대수식으로 나타내는 과제이다. 기하 문제의 해결에서 유클리드 기하의 맥락에서만 문제를 다룬다면 상당한 양의 대수를 통합해야 하는 학교 기하에서 학생들의 사고에 대한 제한적인 견해를 갖게 될 것이다. 또한, 이러한 대수적 요소가 결합된 기하 문제 해결에서는 변수의 사용이 필수적이고 일반화는 변수에 의해 형식화되므로 문제해결 과정에서 학생들이 불변의 구조를 파악하는지의 여부는 일반화 경향과 밀접한 관련을 가질 것으로 판단되어 본 연구에서는 불변의 구조에 대한 인식 여부를 일반화에 관한 틀로 분석하고자 한다.

<표 Ⅱ-2> 문제맥락에 대한 이미지 유형과 특징(Moore & Carlson, 2012)

이미지 유형	특징	예
유형1	문제 상황의 양들에 대한 정적인 이미지를 가지고 있음	사다리의 꼭대기가 바닥으로부터 특정 거리만큼 떨어져 있고 밑 부분이 벽으로부터 특정 거리만큼 떨어져 있는 채로 벽에 기대어 있는 사다리를 생각할 수 있음. 그러나 사다리 밑 부분이 벽으로부터 멀어짐에 따라 바닥으로부터 사다리 꼭대기까지의 거리가 변한다는 것을 인지하지 못함.
유형2	문제 상황의 양들에 대한 동적인 이미지를 가지고 있지만 양들 사이의 불변의 관계를 인식하지 못함	사다리의 맨 위가 바닥으로 미끄러지는 동안 사다리의 밑이 벽에서 미끄러져 나가는 것을 상상하고 사다리의 꼭대기로부터 바닥까지의 거리의 변화를 생각할 수 있음. 하지만 사다리의 위치 변화에 상관없이 사다리의 길이가 항상 같다는 사실은 인지하지 못함.
유형3	문제 상황의 양들에 대한 동적인 이미지를 가지고 있고 양들 사이의 불변의 관계를 명확히 인식함	사다리의 맨 위가 바닥으로 미끄러지는 동안 사다리 밑이 벽에서 미끄러져 나가는 것을 상상하고 사다리 꼭대기로부터 바닥까지의 거리의 변화를 생각할 수 있음. 또한, 사다리 꼭대기에서 바닥까지의 거리와 사다리 밑부분에서 벽까지의 거리가 아무리 변하더라도 사다리의 길이는 항상 같다는 사실을 명확하게 인지함.

Moore & Carlson(2012)은 그들의 연구에서 각 이미지에 대한 수준을 언급하지 않았지만 학생이 문제를 해결하는 동안 자신의 이미지를 계속적으로 수정하고 개선해 나가는 것이 중요하고 문제 상황에서의 양들에 대해 동적인 이미지를 가지고 그들 사이의 불변의 관계를 명확히 인식한 상태를 잘 발달된 이미지로 표현한 것으로 보아 위의 분석 틀에서 유형1보다는 유형2가, 유형2보다는 유형3이 더 발달된 이미지로 보고 이를 본 연구에 적용하였다.

4. 공변 추론에 관한 이론적 틀

공변에 관한 연구는 Confrey, Thompson, Carlson 등에 의해 주로 연구되었는데 Confrey & Smith(1994)는 공변을 “두 변수의 값이 변할 때 그 값을 조정하는 것”으로 정의하였고 Saldanha & Thompson(1998)은 “누군가가 동시에 두 양의 값에 대한 지속적인 이미지를 가지고 있는 것”으로 정의하고 공변 이미지는 발달적이라고 주장하였다. 또한, 누군가가 새로운 개념적 대상을 만들기 위해 정신적으로 동시에 하나와 다른 하나의 양의 속성을 결합할 때 곱셈적 대상(multiplicative object)이 형성되게 되는데 이것이 공변적 사고의 발달에 매우 중요한 역할을 함을 강조하였다. Thompson et al.(2017)에서는 역동적 상황에서 양들의 공변을 나타내는 그래프를 구성하는데 있어 교사들이 사용하는 개념적 조작들에 대해 탐구하였는데, 연구를 통해 좌표평면에 나타낸 순서쌍을 곱셈적 대상으로 구성하는데 실패한 교사들은 두 양의 값을 동시에 추적하는데 어려움을 겪는다는 것을 보여주었다. 이는 학생들이 그래프를 공변량의 기록으로 보는 것에 어려움을 겪는 것은 그래프상의 점을 두 양의 값을 동시에 나타내는 곱셈적 대상으로 보지 못하는데 원인이 있음을 말해준다.

Carlson et al.(2002)은 공변 추론을 두 양이 서로 관련하여 변하는 방식에 주목하면서 두 변하는 양을 조정하는 것과 관련된 인지 활동으로 정의하고 역동적인 함수적 상황에서 학생들이 연속적으로 변하는 비율에 대한 이미지를 형성하는 것과 변곡점, 증가하는 비율, 감소하는 비율 등을 이해하고 해석하는데 어려움을 겪는다는 것을 보여주었다. 그들은 연구 결과를 바탕으로 공변 추론 능력을 신장시키기 위해 커리큘럼과 교수의 초점이 동시에 변하는 두 변수의 조정된 이미지에서 독립변수의 연속적 변화에 따른 순간변화율의 조정된 이미지로 나아갈 것을 제안하였다.

Thompson & Carlson(2017)은 공변적 관점에서 함수를 “한 양의 모든 값들이 다른 양의 값을 정확히 하나만 결정하는 성질을 가지면서 두 양의 값들 사이에 불변의 관계가 존재하는, 동시에 변하는 두 양에 대한 한 사람의 개념”으로 정의하였다. 함수에 대한 Thompson & Carlson의 정의는 다음과 같은 특징을 가지고 있다. 첫째, 인과적 의미에서 관습적 용어인 독립변수와 종속변수를 사용하고 있지 않다. 만약 어떤 사람이 조금이라도 종속이라는 것을 생각한다면 독립과 종속은 주어진 상황에 대한 그 사람의 인식에 달려있게 된다. 따라서 위의 정의는 한 양의 값이 다른 양의 값에 의해 결정되는 경우뿐만 아니라 두 양이 단순히 동시에 발생하는 경우도 포함하고 있다. 그러므로 위의 정의는 오늘날 표준적인 함수의 정의를 확장한 것으로 볼 수 있다. 둘째, 함수를 한 사람의 사고에 존재하는 개념으로 정의하고 있기에 함수의 본질은 그것을 생각하는 사람과 관련되어 있다는 것이다. 따라서 누군가가 함수로서 양들 사이의 관계를 생각하고 있다고 주장하기 위해서는 그 사람이 양들의 값이 변하는 것을 생각하는 방식과 양들의 값이 공변하는 방식을 묘사해야 한다. 셋째, 불변의 관계란 함수를 생각하는 사람이 독립 양으로 취급한 양의 값으로부터 종속 양의 값을 결정하는데 동일한 관계를 사용한다는 것을 말한다.

함수는 학교 대수에서 중심적인 개념이므로 대수 학습에서 함수적 관계를 중심에 놓는 것은 양적 상황을 관계적으로 이해하기 위해 대수적 사고를 다양한 표현 양식으로 나타낼 수 있도록 해준다

(Kieran, 1996). Carlson et al.(2003)과 Thompson(1994)은 함수 개념에 대한 깊은 이해가 고등수학의 개념들을 성공적으로 이해하는데 핵심적인 역할을 한다는 것을 보여주었다. 앞서 고등학교 기하에서 대수적 사고의 중요성에 대해 논하였는데 NCTM(2000)에서 언급하였듯이 함수와 관계는 대수의 중요한 측면을 구성하므로 학생들의 대수적 추론 능력을 신장시키기 위해서는 학생들이 함수적 관계를 성공적으로 이해할 수 있도록 돕는 방법을 개발할 필요성이 있다.

Steffe & Izsak(2002)은 양적 추론이 대수적 추론의 기초가 되어야 한다고 주장하였고 Ellis(2011)는 양적 추론 접근법을 취하는 것이 대수와 함수 학습에 학생들의 의미 있는 참여를 지원해줄 수 있음을 보여주었다. 따라서 함수적 사고를 신장시키는 하나의 방법은 학생들이 양과 그들 사이의 관계로 추론할 수 있는 풍부한 학습 환경을 조성해주고 이를 통해 함수적 관계를 구성하도록 돕는 것이다. 이러한 접근은 공변적 관점에서의 함수에 대한 깊이 있는 이해를 제공해주고 이후 대응적 관점을 포함하는 함수에 대한 보다 유연한 관점을 구성하는 기초가 된다(Ellis, 2011; Confrey & Smith, 1994). 이에 본 논문에서는 기하 영역에서 양과 그들 사이의 관계로부터 추론하여 함수적 관계를 구성하는 과제를 부여하여 학생들이 함수적 관계를 구성하는 능력을 공변적 관점에서 살펴보고자 한다. 그동안 공변 추론에 관한 이론적 틀은 Carlson과 Thompson을 중심으로 연구되어왔다.

Carlson et al.(2002)은 학생들이 공변 과제에 참여할 때 나타내는 행위를 분류하는 기준으로 MA1∼MA5의 다섯 가지 정신적 행동(mental action)을 제시하고 이를 바탕으로 다섯 가지 공변 이미지의 발달 수준을 제시하였다(<표 Ⅱ-3>, <표 Ⅱ-4>). 한 학생의 공변 추론 능력이 특정 수준에 도달했다고 말하기 위해서는 그 수준에 관련된 정신적 행동과 더불어 그보다 낮은 모든 수준과 관련된 정신적 행동을 보여주어야 한다. 그들은 학생들이 양의 값을 조정하는 특징에 있어 단순히 변화를 인식하거나 변화의 방향에만 주의를 기울이는 수준에서 점차 정교화 되어가는 정도를 다섯 단계로 구체적으로 명시함으로써 공변 이미지가 발달적이라는 Saldanha & Thompson(1998)의 주장을 정교화하였다.

<표 Ⅱ-3> 공변 체계의 정신적 행동(Carlson et al., 2002, p. 357; 박종희 외, 2017, p. 26에서 재인용)

정신적 행동(MA)	정신적 행동(MA)의 설명	행위
Mental Action 1 (MA1)	한 변수의 변화에 따른 다른 변수의 값 조정하기	• 두 변수를 조정을 암시하는 언어적 표현과 함께 좌표축에 이름 붙이기 (예: x가 변함에 따라 y가 변한다)
Mental Action 2 (MA2)	한 변수의 변화에 따른 다른 변수의 변화 방향 조정하기	• 증가하는 직선 구성하기 • 입력(input)의 변화를 고려하면서 출력(output)의 변화 방향을 인식하고 있음을 언어로 표현하기
Mental Action 3 (MA3)	한 변수의 변화에 따른 다른 변수의 변화량 조정하기	• 점찍기, 할선 구성하기 • 입력의 변화를 고려하면서, 출력의 변화량을 인식하고 있음을 언어로 표현하기
Mental Action 4 (MA4)	입력 변수의 일정한 증가량 (increments)에 따른 함수의 평균변화율 조정하기	• 정의역에서 구간별 할선 구성하기 • 입력(input)의 일정한 증가량을 고려하면서 (입력에 대한) 출력(output)의 변화율을 인식함을 언어로 표현하기
Mental Action 5 (MA5)	함수 정의역 전체에서 독립변수의 연속적인 변화에 따른 함수의 순간변화율 조정하기	• 오목성 변화를 명확하게 인식함을 보여주면서 부드러운 곡선 구성하기 • 함수 정의역 전체에서 변화율의 순간적인 변화를 인식함을 언어로 표현하기(예: 오목성의 방향과 변곡점이 정확하다)

<표 Ⅱ-4> 공변 추론 수준(Carlson et al., 2002, p. 358; 박종희 외, 2017, p. 27에서 재인용)

공변 추론 수준
공변 체계는 공변의 이미지를 다섯 수준의 발달로 설명한다. 공변의 이미지는 각 이미지에 의해 뒷받침된 정신적 행동으로 제시된다.
수준 1 (L1). 조정 조정 수준에서 공변의 이미지는 한 변수 변화에 따른 다른 변수의 변화를 조정하는 정신적 행동을 뒷받침 할 수 있다(MA1).
수준 2 (L2). 방향 방향 수준에서 공변의 이미지는 한 변수 변화에 따른 다른 변수의 변화 방향을 조정하는 정신적 행동을 뒷받침할 수 있다. MA1, MA2에서 확인된 정신적 행동은 모두 L2 이미지에 의해 뒷받침된다.
수준 3 (L3). 양적 조정 양적 조정 수준에서 공변의 이미지는 한 변수 변화에 따른 다른 변수의 변화량을 조정하는 정신적 행동을 뒷받침할 수 있다. MA1, MA2, MA3에서 확인된 정신적 행동은 L3 이미지에 의해 뒷받침된다.
수준 4 (L4). 평균 비율 평균 비율 수준에서 공변의 이미지는 입력 변수의 일정한 증가량에 따른 함수의 평균변화율을 조정하는 정신적 행동을 뒷받침할 수 있다. 평균변화율은 입력변수의 변화와 출력변수의 변화량을 조정하기 위해 분석될 수 있다. MA1에서 MA4까지 확인된 정신적 행동은 L4 이미지에 의해 뒷받침된다.
수준 5 (L5). 순간 비율 순간 비율 수준에서 공변의 이미지는 입력 변수의 연속 변화에 따른 함수의 순간변화율을 조정하는 정신적 행동을 뒷받침할 수 있다. 이 수준은 순간변화율이 평균변화율의 점점 더 작은 세분으로 생긴다는 인식을 포함한다. 또한, 변곡점은 변화율이 증가에서 감소하거나, 감소에서 증가로 변하는 곳이라는 인식을 포함한다. MA1에서 MA5까지 확인된 정신적 행동은 L5 이미지에 의해 뒷받침된다.

Thompson(2016)은 변수의 값이 연속적으로 변한다는 아이디어는 공변 추론에 기본적이고 함수, 그래프, 관계를 이해하는데 필수적인 구성 요소이므로 연속적 변화를 바탕으로 연속적 공변을 설명하였다. 그는 양 사이의 관계를 중시하는 양적 추론에 기초하여 변화율, 오목성과 변곡성, 독립변수와 종속변수 개념을 없애고 변하는 양을 인식하는 방법을 포함시켜 Carlson et al.(2002)과는 다른 공변 틀을 제시하였다(박종희 외, 2017).

박종희 외(2017)는 공변 추론에 관한 Carlson et al.(2002)과 Thompson & Carlson(2017)의 연구를 비교하여 두 이론적 틀이 서로 다른 상황에서 어떻게 다르게 적용될 수 있는지를 분석하였는데, 연구에 따르면 학생들의 공변 추론 양상을 분석함에 있어 Carlson et al.(2002)은 비수치적으로 접근하는 질적 그래프 과제에서 Thompson & Carlson(2017)보다 학생의 수준을 세밀하게 파악할 수 있었고, Thompson & Carlson(2017)의 연구는 수치적으로 접근하는 양적 그래프 과제에서 학생의 수준을 세밀하게 분석할 수 있음을 보여주었다. 본 논문에서 제시한 두 번째 과제는 두 양 사이의 관계를 나타내는 그래프를 구하는 과제로서 수치적 정보가 주어지지 않은 역동적인 함수적 상황에서 학생들의 공변 추론 능력을 살펴보고자 하는 것이다. 따라서 본 논문에서는 과제2에 대해 Thompson & Carlson(2017)이 제시한 공변 틀보다는 Carlson et al.(2002)이 제시한 공변 틀이 더 적합하다고 판단되어 이를 이용하여 학생들의 공변 추론 수준을 분석하고자 한다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구방법 개관

본 연구는 학생들이 양적 추론을 할 수 있는 과제를 통해 주어진 문제 상황의 초기에 갖는 이미지의 특성을 분류하고 이러한 이미지가 문제 해결하는 동안 어떻게 발현되고 개선되는지를 관찰하고자 하였다. 또한, 이러한 이미지의 변화가 문제해결에 미치는 영향을 분석하고자 하였다. 이는 학생들의 문제해결 과정 전반에 대한 심층적인 분석이 요구되므로 본 연구에서는 정성적 연구 방법 중 사례 연구(case study) 방법을 택하였다. 사례 연구는 하나의 실례, 현상 또는 사회적 단위에 대한 집중적이고 전체적인 묘사와 분석을 하는 것으로, 상황과 그 안에 포함된 의미에 대한 심층적인 이해를 얻기 위해 설계되며 결론보다는 과정에, 특정 변수보다는 맥락에 관심을 둘 때, 또는 관련 연구가 많지 않은 분야에서 기본적인 정보를 찾고자 할 때 적합한 연구방법(우정호 외, 2006; Merriam, 1998)이기에 본 연구의 목적에 잘 부합한다고 판단하여 이를 적용하였다.

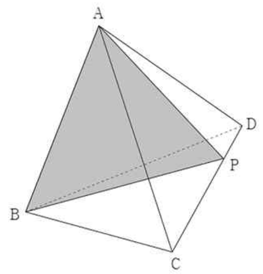
본 연구의 제1저자가 직접 기하 수업을 진행하였고 수업을 듣는 학생들 중에서 사전에 기하를 학습하지 않은 학생을 선별하고자 하였다. 이는 제시할 과제들이 학생이 사전에 경험한 과제들인 경우, 문제해결 초기에 갖는 이미지가 이미 상당히 수정되거나 개선된 이미지일 가능성이 높아 본 연구의 목적에 맞지 않게 되기 때문이다. 더불어, 학생들의 사고에 대한 세밀한 분석을 위해서는 자기의 사고 과정을 잘 드러내는 것이 중요하기 때문에 수업을 듣는 학생 중에서 자기 의견을 적극적으로 잘 표현하는 세 학생을 선별하여 사전 면담을 통해 기하 과목에 대한 선행학습 경험이 없는 것을 확인하고 이 학생들을 대상으로 연구를 진행하였다. 선별된 학생들을 대상으로 한 차시에 한 문제씩 총 2차시에 걸쳐 두 개의 과제를 제시하고 이를 토대로 학생들의 문제해결 과정을 분석하였다.

2. 연구 대상 및 과제 소개

본 연구는 D 과학고등학교 2학년 학생 3명(학생 A, 학생 B, 학생 C)을 대상으로 진행된 연구이다. 일반 고등학교와는 달리 D 과학고등학교의 수학 교육과정은 기본필수, 기본선택, 심화선택 과목으로 나뉘고 이중 기하는 기본필수 과목으로 2학년 1학기에 편성되어 있다. 본 연구에서는 기하 영역에서 학생들의 문제해결 과정 동안 문제맥락에 대한 이미지 변화와 그 영향을 분석하고자 하였기 때문에 기하 수업을 듣는 학생을 대상으로 연구를 진행하였다. 연구자는 연구 참여 학생들의 1학년 수학을 지도한 경험이 있으며 학생들과 높은 래포가 형성되어 있었다. 세 학생이 선별된 이유는 연구자가 평소 수업에서 관찰한 결과 세 학생 모두 수업 참여도가 높고 새로운 과제나 도전적인 과제가 주어졌을 경우 강한 호기심을 갖고 끝까지 문제를 해결하려는 과제집착력이 우수하였으며, 문제해결 과정에서 자신의 풀이를 설명할 때 명확성이 돋보였다는 공통적 특성을 갖고 있어 학생들의 문제해결 과정 전반에 걸친 사고 분석에 대한 많은 정보를 줄 수 있다고 판단되었기 때문이다.

학생들에게 제시된 두 개의 과제는 정사면체 문제와 정사각뿔 문제이다. 정사면체 과제([그림 Ⅲ-1])는 한 변의 길이가 주어지지 않은 정사면체에서 두 면이 이루는 각을 대수식으로 표현하는 문제이다. 여기서는 점 P의 위치가 특정되지 않았기에 두 면이 이루는 각을 측정하는 과정에서 학생들이 점 P의 위치 변화에 따른 불변의 관계를 인식하고 이를 활용하여 문제를 대수적으로 해결할 수 있는지를 보고자 하였다.

[과제1] 그림과 같은 정사면체 $ABCD$에서 점 P가 선분 DC 위에 있다. 삼각형 ABP와 삼각형 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

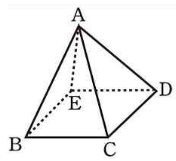


[그림 Ⅲ-1] 정사면체 과제

학생 A는 [과제1]을 정사영을 이용하여 해결을 시도하였는데 이 과정에서 삼각형 ABP의 면적을 구하는 것에 어려움을 겪었다. [과제1]을 정사영의 개념을 이용해 해결하기 위해서는 점 P의 위치, 삼각형 ABP의 정사영, 삼각형 ABP의 변의 길이 사이의 불변적 관계를 인지해야 한다. 그러나 학생 A는 점 P의 위치와 삼각형 ABP의 변의 길이에 대한 정적인 이미지를 가지고 있어 두 양 사이의 불변적 관계를 인식하지 못하였고 그것이 문제해결의 장애 요인이 되었다. 반면, 학생 B와 학생 C는 점 P의 위치, 삼각형 ABP의 정사영, 삼각형 ABP의 변의 길이에 대한 동적인 이미지를 가지고 양들 사이의 불변의 관계를 인식하였으며 과제를 성공적으로 해결하였다.

연구자들은 [과제1]의 수행에서 학생 B와 학생 C의 문제맥락에 대한 이미지와 문제해결 과정에서 일반화 수준에 대한 뚜렷한 차이점을 발견하지 못하였다. 이에 공변하는 양들 사이의 관계를 나타내는 그래프를 결정하도록 하는 과제를 제시하여 역동적인 함수적 상황에서 두 학생의 문제맥락에 대한 이미지와 문제해결 과정에 있어 차이점이 있는지를 보고자 하였다. 연구자들이 제시한 과제는 아래와 같다.

[과제2] 그림과 같은 정사각뿔에서 밑면과 옆면이 이루는 각과 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각의 관계를 나타내는 그래프를 그리시오.



[그림 Ⅲ-2] 정사각뿔 과제

[과제2]의 문제해결 과정에서 두 학생은 밑면과 옆면이 이루는 각과 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각에 대한 동적인 이미지를 가지고 추론하는 모습을 보였다. 또한, 두 학생 모두 밑면과 옆면이 이루는 각이 클수록 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각은 감소한다는 인식은 공통적이었으나 두 양 사이의 변화율의 추이에 대한 인식에 있어 분명한 차이를 보여주었다. 학생 B는 두 양 사이의 불변의 관계를 인식하지 못하여 부정확한 그래프를 그렸지만 학생 C는 두 양 사이의 불변의 관계를 인식하여 변화율의 추이를 반영한 두 양 사이의 관계를 나타내는 그래프를 잘 표현하였다.

3. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구에 참여한 학생 3명의 과제에 대한 문제해결 과정을 기록하기 위해 문제해결 전체 과정을 비디오로 녹화하고 학생들의 음성은 녹음기로 녹음되었다. 또한, 세밀한 분석을 위해 학생들이 과제를 해결하는 동안 작성한 활동지를 따로 촬영하였다. 녹음된 내용은 전사과정을 통하여 분석 작업을 진행하였고 학생들이 과제를 수행하면서 작성한 활동지와 따로 요구한 연습지도 모두 수거하여 함께 분석에 활용되었다. 학생들에게 과제를 제시하기 전에 주어진 과제를 다루어본 경험의 유무를 사전 면담을 통해 확인하였고 사전경험이 없음이 확인된 과제에 대해 먼저 학생들이 문제를 해결하도록 한 후 수행내용을 바탕으로 면담을 진행하였다. 과제수행은 총 2차시에 걸쳐 진행되었고 한 차시에 한 개의 과제가 제시되었다. 각 과제를 해결한 후 학생별로 문제 풀이 과정에 대한 개별 면담을 실시하였는데 면담 방법은 문제 풀이 과정에서 나타나는 학생들의 사고 변화에 유연하게 대처하기 위해 반구조화된 면담을 사용하였다. 각 학생에 대한 상세한 기술과 심층적 분석을 위해 연구자들은 학생들의 언어적·비언어적 표현, 교사와 학생들 간의 대화, 학생들의 활동지, 메모지 등 학생들이 과제 수행하는 동안 발생한 모든 자료를 수집하여 분석의 자료로 활용하였고 이를 통해 두꺼운 설명(thick description)을 함으로써 학생들의 문제해결 과정 전반에 걸친 이미지의 변화와 그 영향에 대한 깊이 있는 분석을 하고자 하였다.

Ⅳ. 연구결과

[과제1]에서는 정사면체의 한 변의 길이와 점 P의 위치가 구체적으로 주어지지 않았다. 이는 점 P의 위치와 두 삼각형 ABP와 BCD가 이루는 각이라는 두 양 사이의 관계를 추론할 때 학생들이 특정한 수치적 계산보다는 양적 접근을 통해 두 양 사이의 관계를 진술할 수 있는지와 양적 추론이 대수적 사고를 지지해 줄 수 있는지를 확인하기 위함이다. 또한, 이 과정에서 학생들이 문제맥락에 대해 갖는 이미지와 그들이 내린 결론 간의 관계를 분석하고자 하였다.

1. 정사면체 문제에 대한 학생들의 문제해결 과정

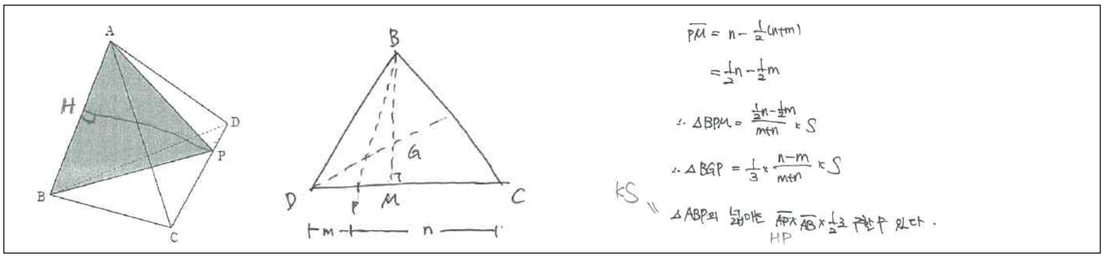
1) 정적인 이미지에서 동적인 이미지로 추론하는 학생 A

[과제1]에 대하여 학생 A는 정사면체의 한 변의 길이를 $m+n$, P의 위치를 선분 DC를 $m:n(m<n)$으로 내분하는 곳에 위치했다고 보고 삼각형 ABP의 면적과 이를 밑면에 사영시킨 삼각형의 면적을 구하고자 하였다. 다음은 학생 A가 [과제1]에 대해 수행한 풀이 과정의 일부와 이에 대해 교사와 나눈 대화 내용이다.

[대화문 1]

1교사: (학생 A의 풀이에서 $\triangle BCD$에 표시한 G를 가리키며) 여기서 G가 뭐지?
2학생 A: 무게중심이요.
3교사: 여기서 M은 뭐지?
4학생 A: 변 DC의 중점이요.

5교사: 이것은 $\triangle BPM$이고... 근데 S는 뭐지?
6학생 A; S는 정삼각형 BCD의 넓이요.
7교사: 밑면의 넓이?
8학생 A: 네. ($\triangle BPM$의 넓이를 설명하며) 그래서 이렇게 나와요. 여기서 $\triangle BCD$의 밑면이 $m+n$이고 $\overline{PM}=(n-m)/2$이니까 $\overline{PM}$만큼의 비율로 이렇게 나와요...
9교사: 그러니까 밑변의 길이의 비로 구했다 이거지?
10학생 A: 네.
11교사: 그러니까 그것($\triangle BPM$의 넓이)을 이용해서 $\triangle BGP$의 넓이를 구했네? 그건 왜 구한 거지?
12학생 A: 여기서 A를 삼각형 BCD위로 내리면... 정사영 시키면 A가 정확히 무게중심으로 오니까 그래서 $\cos\theta$를 구할려면... $\cos\theta$를 구하는 방법 중 하나가 정사영 전의 넓이 하고 후의 넓이의 비율을 통해서 구할 수 있잖아요.
13교사: 그래서 사영시킨 넓이가 $\triangle BGP$다 이거지? $\triangle BGP$를 S로 나타냈다?
14학생 A: 네.



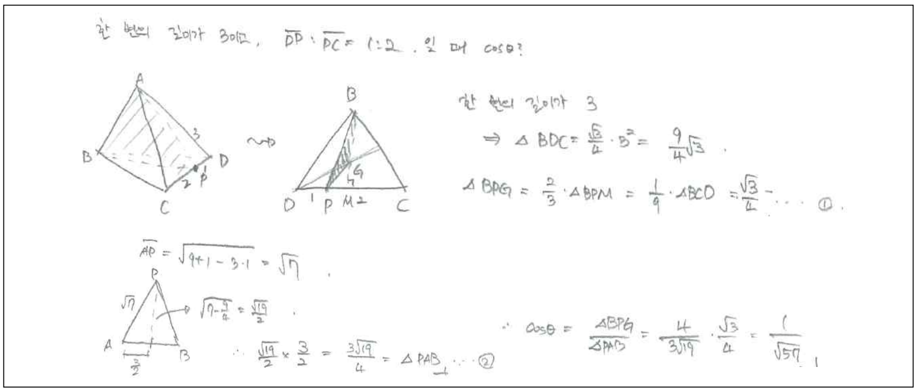
[그림 Ⅳ-1] 과제1에 대한 학생 A의 문제 풀이 과정

학생 A는 삼각형 ABP를 밑면에 정사영 시키면 꼭짓점 A가 삼각형 BCD의 무게중심임을 인식하고 이를 G로 표현하였다(2학생 A, 12학생 A). 먼저 밑면인 삼각형 BCD의 면적을 S, 선분 DC의 중점을 M으로 나타내고 삼각형의 밑변의 길이의 비를 이용하여 $\triangle BPM$과 $\triangle BGP$의 면적을 구하였다([그림 Ⅳ-1], 6학생 A, 8학생 A, 10학생 A). 학생 A는 $\triangle ABP$의 면적을 구하는 과정에서 구체적인 계산을 하지 못하고 망설이다 $kS=\triangle ABP$라고 나타냈는데 다음 대화문은 이에 대한 이유를 알고자 학생 A와 나눈 대화 내용이다.

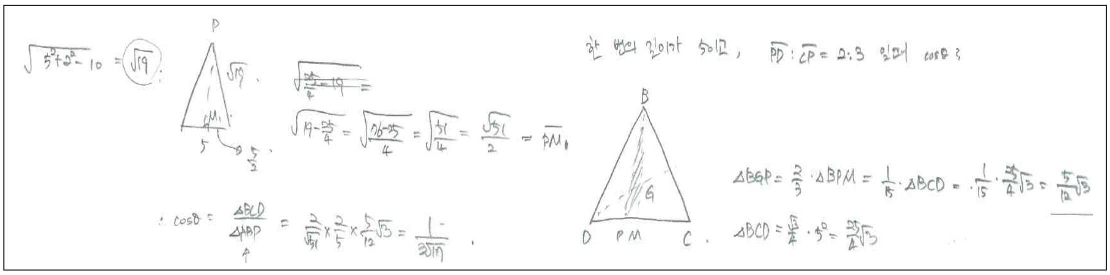
[대화문 2]

1교사: 여기서 $\triangle ABP$의 넓이가 $\overline{AP}\times\overline{AB}\times\frac{1}{2}$? 여기 $\overline{AP}$맞아? 잘못 쓴 거 아냐?
2학생 A: 그런 거 같네요... P에서 수선을 내린 거니까 H입니다. $\overline{HP}$네요.
3교사: 근데 계산을 하다가 여기서 멈췄잖아... 왜 멈춘 거야?
4학생 A: 어... $\overline{HP}$를 m, n으로 나타내기가 힘들었어요...
5교사: (학생 A가 $kS=\triangle ABP$로 쓴 부분을 가리키며) 그럼 이것도 혹시... $\triangle ABP$의 넓이를 S로 나타내다 보니 어려움이 있었다 이거야?
6학생 A: 네.

[대화문 2]에서 볼 수 있듯이 학생 A는 앞서 $\triangle BGP$를 S로 나타내었으므로 $\triangle ABP$의 면적도 S로 나타낼 수 있다고 생각하였지만 결과를 대수식으로 나타낼 수가 없었다. 이는 학생 A가 아직 점 P의 위치에 따른 $\triangle ABP$의 특징을 파악하지 못한 상태임을 보여준다. [과제1]을 정사영의 개념으로 해결하기 위해서는 P의 위치에 상관없이 꼭짓점 A의 $\triangle BCD$ 위로의 수선의 발이 $\triangle BCD$의 무게중심이라는 사실과 $\triangle ABP$가 $\overline{AP} = \overline{BP}$인 이등변삼각형이라는 두 가지 불변의 관계를 인지하고 있어야 한다. 이는 점 P의 위치와 $\triangle ABP$의 변의 길이에 대한 공변적 관점을 요구한다. 하지만 점 P의 위치 변화와 $\triangle ABP$의 변의 길이 사이의 관계에 대해서는 전혀 언급이 없는 것으로 보아 문제 상황에 대한 학생 A의 이러한 이미지가 학생 A로 하여금 $\triangle ABP$의 면적을 구체적으로 계산하는데 어려움으로 작용한 것으로 판단된다. 이에 연구자는 학생 A에게 한 가지 구체적인 예를 들어 생각해 볼 것을 권하였고 학생 A는 정사면체의 한 변의 길이를 3으로, 점 P의 위치는 선분 DC를 $1:2$로 내분하는 위치로 설정하였다([그림 Ⅳ-2]). [그림 Ⅳ-2]에서 볼 수 있듯이 학생 A는 필요한 모든 변의 길이를 능숙하게 구하였고 이를 통해 두 면이 이루는 각을 계산해내었다. 이후 학생 A는 잠시 머뭇거리더니 이번에는 한 변의 길이가 5이고 점 P가 선분 DC를 $2:3$으로 내분하는 곳에 위치하는 것으로 설정하여 두 면이 이루는 각을 정확히 계산하였다([그림 Ⅳ-3]).



[그림 Ⅳ-2] [과제1]에서 한 변의 길이가 3인 구체적 사례에 대한 학생 A의 풀이



[그림 Ⅳ-3] [과제1]에서 한 변의 길이가 5인 구체적 사례에 대한 학생 A의 풀이

연구자가 학생 A로 하여금 구체적인 경우를 고려하도록 한 것은 학생 A가 문제 상황을 다시 돌아보고 정신적으로 양의 변화를 조작해봄으로써 두 양 사이의 관계를 탐구할 기회를 주어 학생 A의 문제맥락에 대한 이미지의 변화를 보기 위함이다. [과제1]은 일반화라는 대수적 사고를 요구하는 기하

문제로서 학생의 문제맥락에 대한 이미지의 변화와 일반화 수준과의 관계를 살펴보기 위해 주어졌다. Davydov(1990)는 경험적 일반화는 사례들의 범주로부터 귀납적으로 형성되고 이것이 반드시 주어진 문제 상황의 내적 연결성으로 연결되지는 않기에 보완이 필요하다고 말하였다. 이에 연구자는 학생 A가 두 사례를 통해 인식한 것이 무엇이고 어느 수준의 일반화 사고를 하고 있는지를 파악하고자 [대화문 3]과 같이 대화를 나누었다.

[대화문 3]

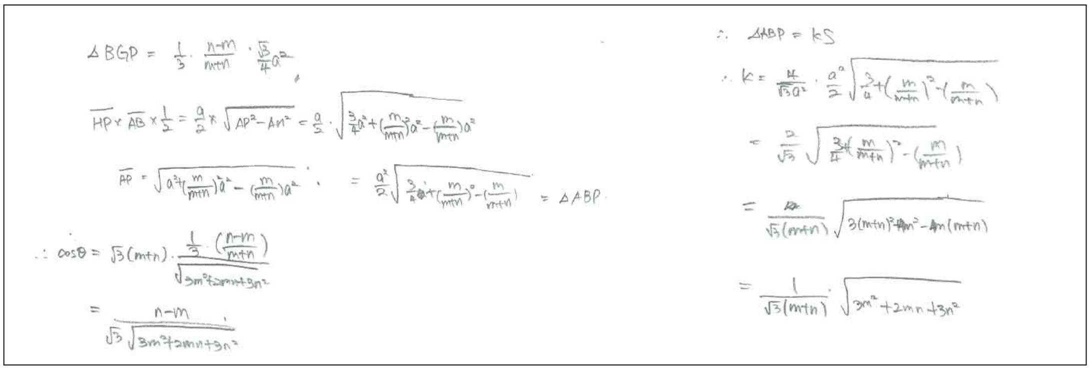
1교사: 이 두 가지는 뭐지?
2학생 A: 이건... $\overline{DP}$: $\overline{PC}$를 정해놓을 때 풀이예요.
3교사: 이건 한 변의 길이가 3, 저건 한 변의 길이가 5인 거지? 이 두 가지 경우에 대해 계산해 본 거야?
4학생 A: 네. 계산해 보았어요.
5교사: 그럼 이 두 가지를 하면서 뭘 알 수 있었어?
6학생 A: 음... 해보니까 $\triangle ABP$가 $\overline{AP}=\overline{BP}$인 이등변삼각형이에요. 그래서 굳이 S로 안 나타내어도 넓이를 쉽게 구할 수 있었어요.
7교사: $\triangle ABP$는 그럼 항상 이등변인가?
8학생 A: 네. 항상 이등변이에요. $\triangle APD$하고 $\triangle BPD$하고 SAS합동이에요.
9교사: 두 개를 해보니까 알게 됐다?
10학생 A: 네.
11교사: 그러면 아까 $\triangle ABP$의 넓이를 S로 나타내려고 했잖아. 그럼 이제 이것도 해볼 수 있을까? 아까 하다 말았는데 다시 한번 해볼까?

[대화문 3]의 6학생 A와 8학생 A로부터 학생 A가 두 사례를 통해 $\triangle ABP$가 $\overline{AP}=\overline{BP}$인 이등변삼각형이 된다는 사실을 인지하고 자신의 이미지를 수정하였음을 알 수 있다. 특수한 두 가지 상황을 고려한 것이 학생 A로 하여금 점 P의 위치와 $\triangle ABP$의 변의 길이가 서로 어떻게 관련되어 있는지에 대한 자신의 이해를 개선하도록 만든 것이다. 6학생 A로부터 학생 A는 자신이 선택한 두 사례 간의 유사성을 파악하였음을 알 수 있다. 그리고 8학생 A에서 $\triangle ABP$가 왜 항상 이등변삼각형인지를 분명히 표현하였는데 이는 문제 상황에 대한 학생 A의 이해가 구체적인 것에서 일반적인 것으로 나아갔음을 보여준다. 따라서 학생 A의 일반화 수준은 이론적 일반화 수준에 이르렀다고 말할 수 있다. 이에 연구자는 학생 A가 개선된 문제맥락에 대한 이미지와 양적 구조를 가지고 [과제1]을 끝까지 잘 해결할 수 있는지를 보기 위해 [대화문 3]의 11교사와 같이 발문하였다. 다음은 이에 대한 학생의 반응과 문제해결 과정이다([대화문 4], [그림 Ⅳ-4]).

[대화문 4]

1교사: 두 가지는 아까 풀었고... 이건 뭐지?
2학생 A: 제가 원래 $\triangle ABP$가 이등변삼각형인걸 몰라서 $\triangle ABP$의 넓이를 구하는 것이 힘들었는데 이게 이등변삼각형인걸 알고 나니까 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 구하는 것부터 넓이를 구하는 것이 쉬워졌어요... 그래서 $\triangle ABP$의 넓이를 kS로 두었으니까...
3교사: 아까 여기($\triangle BGP$)도 S로 나타내었으니까? $\triangle ABP$의 넓이도 몇 배가 될 것이다?
4학생 A: 네. 그래서 이렇게(k의 값을 계산한 부분을 가리키며) 계산했습니다.

5교사: 이등변이라는 사실을 아니까 계산에 어려움은 없었고? 6학생 A: 네. 계산에 어려움이 없었어요. 7교사: 그래서 $\cos\theta$의 값은? 8학생 A: (본인의 계산 결과를 가리키며) 이렇게 나왔습니다.



[그림 Ⅳ-4] [과제1]에 대해 학생 A가 k와 $\cos\theta$의 값을 구하는 과정

학생 A는 이제 점 P의 위치 변화와 $\triangle ABP$의 변의 길이 변화를 동시에 고려할 수 있게 되었고 두 변화량에 대한 이해를 포함하는 문제맥락에 대한 이미지를 갖게 되었다. 달리 말하면, 학생 A의 문제맥락에 대한 양적 구조는 이제 점 P의 위치에 상관없이 $\triangle ABP$의 꼭짓점 A의 밑면으로의 수선의 발이 밑면의 무게중심이라는 것과 $\triangle ABP$가 이등변삼각형이라는 문제 상황에서의 양들에 대한 정확한 이미지를 갖게 되었다고 말할 수 있다. 이는 문제해결 하는 동안 문제 상황에서의 양들이 어떻게 함께 변하는지를 이해하려고 시도하면서 문제맥락에 대한 학생 A의 이미지가 바뀌고 진보했음을 말해준다.

문제해결 과정 동안 학생 A는 점 P의 위치, $\triangle ABP$의 정사영, $\triangle ABP$의 변의 길이라는 문제 상황에서의 양들과 그들이 어떻게 함께 변하는지에 대한 자신의 발현되는 이미지와 계산을 계속해서 비교하였다. 이는 학생 A가 문제 진술의 의도와 일치하지 않는 문제맥락에 대한 이미지를 가지고 있었다는 것을 보여준다. [과제1]을 해결하기 위해 학생 A는 처음부터 점 P의 위치를 선분 DC를 $m:n$으로 내분하는 위치에, 사면체의 한 변의 길이는 $m+n$으로 설정함으로 변수를 도입하였다. 이후 변수를 사용하여 문제 상황에 대한 일반적 진술을 하려고 하였으나 문제해결 과정을 살펴보면 변화를 나타내는 변수 개념의 동적인 특성에 대한 이해가 부족했음을 알 수 있다. 이는 문제맥락에 대한 학생 A의 정적인 이미지에 기인한 것으로 판단된다. 그러나 문제해결 과정 중에 주어진 경험적 일반화의 과정([그림 Ⅳ-2], [그림 Ⅳ-3])이 학생 A로 하여금 점 P의 위치에 따른 $\triangle ABP$의 모양의 변화를 다시 분석하도록 하여 문제맥락에 대한 이미지를 개선하는 결과를 가져왔다([그림 Ⅳ-4]).

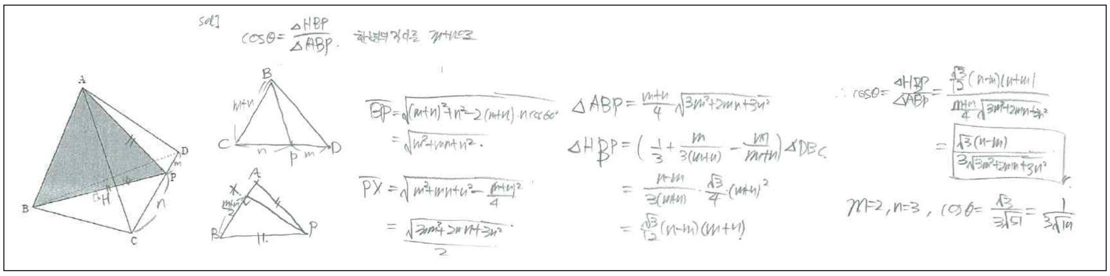
[대화문 3]의 8학생 A의 반응은 학생 A가 구체적 사례들로부터 단순히 피상적 유사성만을 인지한 것이 아니고 내적 연결성을 식별할 수 있는 구조적 유사성을 파악한 이론적 일반화 수준에 이른 것을 보여주는데 이는 학생 A가 문제 상황에서의 불변의 관계를 정확히 인식했음을 의미한다. 따라서 학생 A의 문제맥락에 대한 이미지는 문제 해결하는 동안 유형1에서 유형3으로 발달했고 이러한 이미지의 변화가 성공적인 문제해결의 바탕이 되었음을 알 수 있다.

2) 동적인 이미지로 추론하는 학생 B와 학생 C

[과제1]에 대한 두 학생 간의 풀이 과정과 사고에 있어 근본적인 차이를 발견하기가 어렵다고 판단되어 학생 C의 [과제1]에 대한 분석은 생략하도록 한다. 다음은 학생 B가 [과제1]을 해결하는 과정에 대해 교사와 나눈 대화 내용이다.

[대화문 5]

1교사: 풀이에 대해 자세히 설명해 줄 수 있어?
2학생 B: 어... 일단 문제에서 한 변의 길이가 설정이 안 되어 있어서 한 변의 길이를 $m+n$으로 잡고 P는 선분 DC 위의 임의의 점이니까 DC를 $m:n$으로 내분했다고 설정했어요. 그래서 이 문제에서 $\cos\theta$를 구하려고 하는데... 면과 면이 이루는 각을 구하는 방법 중에 정사영의 성질을 이용하는 것이 있으니까... 그래서 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 했어요. 정사면체의 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발은 밑면의 무게중심이니까 H를 잡았고요... $\cos\theta$는 사영시키기 전 삼각형 ABP와 사영시킨 후 삼각형 HBP의 넓이의 비니까 두 삼각형이 넓이를 구해서 $\cos\theta$를 구했어요.
3교사: 정사영을 이용해서 풀었다 이거지?
4학생 B: 네.
5교사: 그래서 삼각형 ABP의 넓이는?
6학생 B: (계산 결과를 가리키며) 여기요.
7교사: 그래서 삼각형 ABP의 넓이는? 최종 답은?
8학생 B: (계산 결과를 가리키며) 이렇게 나왔어요.
9교사: 여기 밑에 $m=2, n=3, \cos\theta = 1/3\sqrt{17}$라고 적은 것은 뭐지?
10학생 B: 이게 문자로 나와 있으니까 특수한 경우에 대해서 대입해 보았어요.
11교사: 어... 그렇구나. 잘 맞았어?
12학생 B: 네!



[그림 Ⅳ-5] [과제1]에 대한 학생 B의 풀이 과정

학생 B는 정사면체의 한 변의 길이를 $m+n$으로, 점 P를 선분 DC를 $m:n$으로 내분하는 곳에 위치하는 점으로, 점 P에서 선분 AB에 그은 수선의 발을 X로 나타내었다. 그리고 이를 이용하여 $\triangle ABP$의 넓이를 구하기 위해 $\overline{BP}, \overline{PX}$의 길이를 계산하였다. 또한, 2학생 B로부터 $\triangle ABP$의 꼭짓점 A의 수선의 발 H가 $\triangle BCD$의 무게중심임을 인식하고 있고 정사영을 이용하여 두 면이 이루

는 각을 측정하는 방법도 정확히 알고 있음을 알 수 있다. 이러한 인식을 바탕으로 학생 B는 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}\,(n-m)}{3\sqrt{3m^2+2mn+3n^2}}$ 임을 정확히 유도하였다([그림 Ⅳ-5]).

학생 A의 경우 대수식을 사용한 일반적 진술을 하려다 실패하여 구체적인 경우를 생각해보라는 교사의 권고에 의해 특별한 두 가지 경우를 다루게 된 것과는 달리, [대화문 5]의 9교사, 10학생 B와 [그림 Ⅳ-5]의 풀이 과정 맨 끝에 $m=2, n=3, \cos\theta = 1/3\sqrt{17}$ 라고 적은 메모에서 볼 수 있듯이 학생 B는 자신의 결과가 성립하는지를 확인하기 위하여 스스로 특수한 경우에 대해 자신의 결과를 검증하는 모습을 보였다. [과제1]의 경우, 점 P의 위치와 정사면체의 한 변의 길이가 달라짐에 따라 생기는 각각의 경우를 개별 사례(원소) 또는 개별 현상들로 볼 수 있다. 학생의 일반화 수준이 이론적 일반화 수준에 이르기 위해서는 각 원소들 사이뿐만 아니라 일반적인 것과 구체적인 것(원소)들 사이의 연결성을 파악하는 것이 중요하다. 그리고 이 과정에서 일반화가 왜 성립하는지에 대한 분명한 인식이 있어야 한다. [대화문 5]의 내용만으론 학생 B의 일반화 수준과 문제맥락에 대한 이미지의 유형을 판단하기가 어려워 연구자는 이를 파악하고자 학생 B에게 $\triangle ABP$에 대해 자세히 설명해 줄 것을 요구하였다.

[대화문 6]

1교사: 이 문제에서 $\triangle ABP$에 대해 좀 더 설명해 줄래?
2학생 B: $\triangle ACD$와 $\triangle BCD$에서 두 삼각형은 정삼각형으로 합동이고 P가 동시에 밑변을 $m:n$으로 내분하는 점이니까 $\overline{AP}$와 $\overline{BP}$는 같을 수밖에 없어요. 그래서 $\triangle ABP$가 이등변삼각형이라는 성질을 이용했어요. P에 상관없이...
3교사: P와 상관없이? P의 위치에 상관없이?
4학생 B: 네! P의 위치에 상관없이 이등변삼각형이에요.
5교사: 항상?
6학생 B: 네.
7교사: 그래서 넓이는?
8학생 B: 이등변삼각형일 때 수선의 발은 밑변을 이등분한다는 성질을 이용했어요.
9교사: 이등변이라는 것이 넓이가 더 구하기 쉬운 건가?
10학생 B: 네.
11교사: H가 뭐라고 했지?
12학생 B: 수선의 발인데요... 이것도 마찬가지로 삼각형 BCD에서 P의 위치에 상관없이 그... 밑면의 무게중심이 된다는 걸 알 수 있어요.
13교사: 항상? 사영시켜도?
14학생 B: 네. 사영시켜도...
15교사: P가 바뀌어도?
16학생 B: 네!

[대화문 6]의 2학생 B와 4학생 B에서 알 수 있듯이 학생 B는 $\triangle ABP$가 왜 $\overline{AP} = \overline{BP}$인 이등변삼각형임을 정확히 인지하였음을 알 수 있다. 또한, 2학생 B의 “P에 상관없이...”와 12학생 B의 “이것도 마찬가지로..., P의 위치에 상관없이...”에서 보듯이 $\triangle ABP$가 이등변삼각형인 것과 꼭짓점 A의 정사영이 밑면의 무게중심인 것이 점 P의 위치와 무관하다는 것을 분명히 인식하고 있다. 이는 학생 B의

문제맥락에 대한 이미지가 동적임을 말해준다. 또한, 2학생 B에서 분명한 이론적 일반화의 특징을 보여주고 있는 것으로 보아 [대화문 5]에서 보여준 일반과 구체적 상황에 대한 결과가 구조적 유사성에 대한 인식을 바탕으로 하고 있음을 알 수 있다. Mitchelmore & White(1999)는 그들이 제시한 수학 개념 발달 모델에서 경험적 일반화와 이론적 일반화가 서로 교대를 통해 추상-일반 개념이 형성됨을 주장하였는데, 학생 B는 문제해결 과정에서 이런 이론적 일반화와 경험적 일반화의 교대를 통해 주어진 문제 상황에서의 양들 사이의 불변적 관계에 대해 더욱 확신을 갖는 모습을 보였다. 결론적으로 [과제1]에 대한 학생 B의 문제해결 과정을 통해 문제맥락에 대한 학생 B의 이미지는 유형3에 해당되고, 양들 사이의 역동적 관계와 불변의 관계를 포함한 잘 발달된 양적 구조를 가지고 있는 것으로 판단된다.

2. 정사각뿔 문제에 대한 학생들의 문제해결 과정

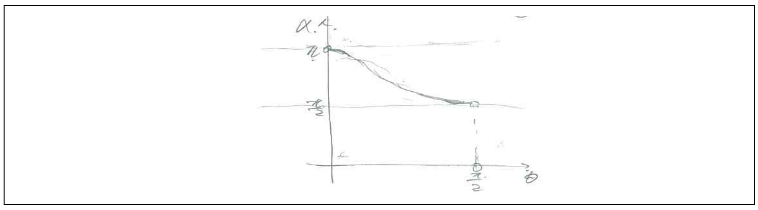
학생 B와 학생 C는 [과제1]에서 주목할 만한 차이점을 보이지 않았다. 그래서 연구자는 두 학생에게 함께 변하는 두 양의 관계를 표현하는 그래프를 그리도록 하여 그래프와 관련된 문제맥락에 대한 이미지와 함수적 관계를 구성하는 능력을 공변적 관점에서 살펴보고 두 학생 간의 차이가 생기는지 알아보고자 하였다.

1) 동적인 이미지를 가지고 있지만 변하는 양들 사이의 불변의 관계를 파악하지 못한 학생 B

[대화문 7]

1교사: 그래프를 그려 본건데... 가로축은 무엇으로 잡은 거지?
2학생 B: 밑면과 옆면이 이루는 각.
3교사: 세로축은?
4학생 B: 옆면끼리 이루는 각.
5교사: (가로축에서) 여기 $\pi/2$라고 한 근거는 뭐지?
6학생 B; 밑면과 옆면이 이루는 각이 0보다는 크고 $\pi/2$보다는 작아야 정삭각뿔이 나온다고 생각했어요. 그래서 0부터 $\pi/2$까지 개구간으로 잡았어요.
7교사: 그리고 여기 세로축... 옆면이 이루는 각도 범위를 정한 거야?
8학생 B: 네. 마찬가지로요... 연속적으로 변한다고 생각하고...

학생 B는 밑면과 옆면이 이루는 각을 x축(θ)으로 설정하고 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각은 y축(α)으로 설정하였다(MA1). [대화문 7]의 6학생 B, 8학생 B에서 보듯이 학생 B는 정사각뿔의 연속적 변형을 고려하면서 정사각뿔이 형성될 수 있는 θ, α의 범위를 생각하고 이들 각각의 범위를 $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$로 구하였음을 알 수 있다. [과제2]에 대한 학생 B의 그래프는 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-6] [과제2]에 대한 학생 B의 그래프

앞서 [과제1]에 대해 학생 B는 문제 상황에서의 양들에 대한 동적이면서도 그들 사이의 불변의 관계를 파악하고 있는 수준으로 판명이 되었는데, [과제2]에서도 8학생 B의 "연속적으로 변한다고 생각하고..."라는 말에서 알 수 있듯이 밑면과 옆면이 이루는 각, 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각이라는 두 양에 대한 동적인 이미지를 갖고 있다는 것을 알 수 있다(유형2). 이에 연구자는 학생 B가 [과제2]에 대해서 가진 문제맥락에 대한 이미지를 세밀히 분석하고자 학생 B가 나타낸 그래프를 통해 공변하는 양들 사이의 관계에 대한 인식 수준을 관찰하였다.

[대화문 8]

1교사: 그래프 모양이 이렇게 나온다고 생각한 근거는?
2학생 B: 일단 곡률 같은 건 생각 못했는데요...
3교사: 감소하는 거야? 증가하는 거야?
4학생 B: 감소하는 거요.
5교사: (곡선의 모양을 가리키며) 지금 그래프를 이렇게 그렸는데 근거가 있을까?
6학생 B: 극한으로 갈수록 변화량이 작다고 생각했어요.
7교사: 어떤 변화량?
8학생 B: α각이 변하는 정도... 밑면과 옆면이 이루는 각이 작을 때에는 옆면이 이루는 각이 작을거라고 생각했어요. 끝부분도 마찬가지고요. 그래서 연속적으로 변한다고 생각해서 이렇게 그렸어요.

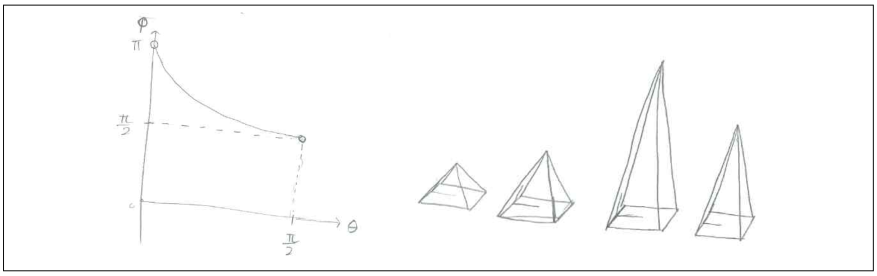
4학생 B에서 밑면과 옆면이 이루는 각이 클수록 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각이 감소한다고 말하였는데, 이것은 학생 B가 변화의 방향을 인식하고 있음을 의미한다(MA2). 또한, 6학생 B의 "극한으로 갈수록 변화량이 작다고 생각했어요."와 8학생 B의 "밑면과 옆면이 이루는 각이 작을 때에는 옆면이 이루는 각이 작을거라고 생각했어요. 끝부분도 마찬가지고요."는 학생 B가 밑면과 옆면이 이루는 각의 변화를 생각하면서 그에 따른 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각의 변화량을 조정하였다는 것을 의미한다. 이는 MA3의 행위이다. 6학생 B에서 변화량의 변화를 언급하긴 하였으나 입력값(밑면과 옆면이 이루는 각)의 일정한 증가량을 고려하지는 않았다. 따라서 학생 B가 MA4의 행위를 나타냈다고 보기는 어렵다. 그러므로 학생 B는 [과제2]에서 양적 조정(L3) 수준의 공변 추론 능력을 가진 것으로 판단된다.

학생 B의 그래프를 자세히 살펴보면 아래로 오목인 부분과 위로 오목인 부분의 두 부분으로 되어 있음을 알 수 있다. 그래프에서 주목할 한 가지 사실은 $\theta = 0$ 근처에서의 변화량에 대한 학생 B의 설명은 연구자의 입장에서는 틀린 설명이지만 [과제2]의 문제 상황에서 본인이 그린 그래프에 대한 학생 B의 설명은 옳다는 점이다. 비록 학생 B가 부정확한 그래프를 그렸지만 이것은 현재 그의 빈약한 양적 구조를 그대로 보여주고 있는 것이다. 달리 표현하면 학생 B의 [과제2]에서의 문제맥락에 대한 이미지는 한 양(θ)의 변화에 대한 다른 양(α)의 변화율이 어떻게 변하는지를 포함하는 잘 발달된 양적 구조를 포함하고 있지 않다고 말할 수 있다. 이는 학생 B가 문제맥락에 대한 동적인 이미지를 가지고 있지만 공변 추론 수준이 3수준(L3)에 머물러 있는 것과 무관하지 않다. 왜냐하면 [과제2]에서 두 양에 대한 함수적 관계를 정확히 구성하기 위해서는 두 양의 값들 사이에 존재하는 불변의 관계를 파악해야 하기 때문이다. [과제2]에서 불변의 관계를 인지했다는 것은 밑면과 옆면이 이루는 각의 변화에 따른 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각의 변화율의 변화를 정확히 파악하는 것이다. 이는 L5 수준의 공변 추론 능력을 요구하는 것이다. 따라서 학생 B의 문제맥락에 대한 이미지는 동적이지만 양들 사이의 불변의 관계를 명확히 인식하지 못한 유형2에 해당된다.

2) 동적인 이미지를 가지고 변하는 양들 사이의 불변의 관계를 파악한 학생 C

[대화문 9]

1교사: (학생이 그린 그래프를 가리키며) 어떻게 해서 이렇게 생각하게 된 거지?
2학생 C: θ는 밑면과 옆면이 이루는 각이고 두 옆면이 이루는 각은 ϕ로 잡았어요. 그래서 x축을 θ로 잡고 y축을 ϕ로 잡았어요.
3교사: 근데 여기 쓴 a는 뭐야? 밑면의 길이?
4학생 C: 네.
5교사: 그럼 밑면의 길이가 고정되었다고 보는 거야?
6학생 C; 네. 상관없어요. 그래프하고 관련은 없어요. 그래프가 어떻게 나왔냐면... $\theta = 0$ 일 때 한 평면 위에 있잖아요. A가 평면 $BCDE$ 위에 있잖아요.
7교사: 아... 그러니까 납작하다는 거야?
8학생 C: 네. 그러니까 납작할 때는 당연히 π요.
9교사: 어... (그래프상의 $\theta = \pi/2$ 지점을 가리키며) 그리고 여기는?
10학생 C: $\pi/2$일 때는 면이 삼각형을 이루지 않고 쭉 나가잖아요.
11교사: 움직인다고 생각한 거야?
12학생 C: 네. 최대와 최소를 따진 거예요. 그다음에 θ가 변함에 따라 ϕ가 어떻게 변할까 생각해보았는데 우선 감소하는 건 당연해요.
13교사: 감소하는 건 당연하다... 왜?
14학생 C: θ를 키워봤을 때 ϕ가 줄어드는 걸 상상할 수 있어요. 그다음 감소하는 정도가 θ가 작을 때 큰지, 클 때 큰지를 판단하려고 했어요.
15교사: 감소는 분명한데 그것이 고민이 되었다 이거지? 그래서 그래프가 이렇게 나오게 된 근거는 뭐지?
16학생 C: 매우 큰 걸 그려봤어요. θ가 클 때의 ϕ와 θ가 작을 때의 ϕ랑... θ가 작을 때 변화율이 좀 더 커요.
17교사: 작을 때 변화율이 크다... 변화율이 크다는 것은 여기 그래프에서는 어떤 의미지?
18학생 C: 여기서($\theta = 0$근처) 확 줄고 여기는($\theta = \pi/2$근처) 천천히 줄고... 그래서 이렇게 되요.



[그림 Ⅳ-7] [과제2]에 대한 학생 C의 그래프

학생 C는 학생 B의 경우와 마찬가지로 밑면과 옆면이 이루는 각을 x축으로, 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각을 y축으로 설정하였다(MA1). θ와 ϕ의 범위를 각각 $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$로 정한 이유

도 학생 B와 일치한다. 다만 차이점은 학생 C는 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각을 ϕ로, 정사각뿔의 밑면의 한 변의 길이를 a로 나타냈다는 점이다. 6학생 C의 “네. 상관없어요. 그래프하고 관련은 없어요.”라는 말은 밑면의 한 변의 길이가 결과에 전혀 영향을 주지 않는다는 것을 의미한다. 또한, 11교사의 “움직인다고 생각한 거야?”라는 물음에 12학생 C의 “네. 최대와 최소를 따진 거예요.”와 14학생 C의 “θ를 키워봤을 때 ϕ가 줄어드는 걸 상상할 수 있어요.”라는 대답으로 볼 때, 학생 C는 문제맥락에 대한 동적인 이미지를 가지고 있음을 알 수 있다(유형2). 12학생 C의 “감소하는 건 당연해요”라는 말과 14학생 C는 학생 C가 θ의 변화에 따른 ϕ의 변화의 방향에 대한 인식이 분명하고(MA2), 14학생 C로부터 밑면과 옆면이 이루는 각의 변화를 고려하며 이를 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각과 조정하고 있다는 것을 관찰할 수 있다(MA3). [그림 Ⅳ-7]의 학생 C가 그린 그래프 오른쪽에 네 개의 정사각뿔이 나오는데, 다소 크기가 작은 왼쪽의 정사각뿔 두 개는 밑면과 옆면이 이루는 각이 작은 $\theta=0$ 근처에 해당하는 것이고 다음 두 개의 정사각뿔은 밑면과 옆면이 이루는 각이 큰 $\theta=\pi/2$ 근처에 해당하는 것이다. 정사각뿔을 자세히 살펴보면 밑면과 옆면이 이루는 각을 표시하는 선분이 보이는데 이것은 밑면과 옆면이 이루는 각의 일정한 증가율을 고려하기 위해 표시한 것이다. 학생 C는 변화량의 변화를 살펴보기 위해 밑면과 옆면이 이루는 각의 같은 크기의 증분에 대한 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각의 변화를 살피고 있는 것이다(MA4). 16학생 C에서 아주 큰 것과 작은 것을 그려보았다는 것은 매우 작은 증분을 고려했다는 것을 의미한다. 그리고 이를 바탕으로 18학생 C에서 보는 것처럼 밑면과 옆면이 이루는 각(θ)에 대한 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각(ϕ)의 변화율이 θ가 커짐에 따라 점점 감소함을 명확히 인식하고 있음을 알 수 있다. 이를 바탕으로 [그림 Ⅳ-7]에서 보는 것처럼 두 양 사이의 관계를 나타내는 위로 오목한 매끄러운 그래프를 정확하게 표현하였다(MA5). 따라서 [과제2]에 대해 학생 C는 L5(순간비율) 수준의 공변 추론 능력을 가진 것으로 판단된다.

학생 C의 연습지를 살펴보면 한 번에 정확한 그래프를 그린 것이 아니라 여러 번 수정하고 증분에 대해서도 계속하여 고민한 것을 관찰할 수 있었다. 이는 학생 C가 변하는 양들(θ와 ϕ) 사이의 관계를 탐구하는 과정을 통해 문제맥락에 대한 자신의 이미지를 계속해서 개선해 나갔음을 보여준다. [과제2]를 해결하기 위해서는 L5 수준의 공변 추론 능력이 요구되는데, 학생 C는 L5 수준의 공변 추론 능력을 갖고 있으므로 주어진 문제 상황에서의 불변의 구조를 잘 파악하였다고 말할 수 있다. 달리 말하면 학생 C의 문제맥락에 대한 이미지는 밑면과 옆면이 이루는 각의 변화에 대한 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각의 변화율이 어떻게 변하는지를 포함하는 잘 발달된 양적 구조를 포함하고 있다고 말할 수 있다. 학생 C는 이러한 양적 구조를 구성함으로 문제맥락에 대한 자신의 이미지를 수정하였고 이를 통해 [과제2]에 대한 정확한 그래프를 그린 것으로 판단된다. 따라서 학생 C의 [과제2]에서의 문제맥락에 대한 이미지는 유형3에 해당한다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 학생이 문제해결의 초기에 갖는 문제맥락에 대한 정신적 이미지가 어떠한지, 또 그러한 이미지가 문제해결 하는 동안 어떻게 변화하고 문제해결에 어떤 영향을 미치는지를 분석하였다. 이를 위해 학생이 문제맥락을 상상하면서 문제 상황에서의 양들과 그 양들이 어떻게 함께 변하는지에 대한 학생들의 이해가 드러날 수 있도록 함께 변하는 양들을 서로 관련시킬 것을 요구하는 과제 두 가지를 제시하였다. 두 과제 모두 변의 길이나 각 등에 대해 구체적인 수치나 문자가 주어지지 않았다. 이는 학생들이 문제 상황의 수치적인 측면에 관심을 기울이기보다 양들과 그들 사이의 관계에 좀

더 초점을 두도록 하려는 의도이다. 이에 대해 본 연구는 다음과 같은 결과를 얻게 되었다.

두 평면이 이루는 각을 구하는 [과제1]의 정사면체 문제에서 학생 A는 문제해결 초기에 $\triangle ABP$의 변의 길이 변화에 대한 인식이 없고 점 P의 위치와의 불변의 관계도 파악하지 못한 것으로 보아 $\triangle ABP$의 변의 길이와 P의 위치에 대한 학생 A의 초기 이미지는 정적이라고 말할 수 있다. 학생 A는 아직 두 양 사이의 역동적 관계를 개념화하는데 필요한 양적 구조를 형성하지 못한 상태였다. 학생 A가 두 양 사이의 역동적 관계를 고려하게 된 것은 연구자가 구체적인 사례를 살펴보라고 권한 이후이다. 학생 A는 스스로 구체적인 두 가지 예를 만들어 문제 상황을 다시 살피고 관련 양들을 계산하였다. 문제해결 하는 동안 자신의 계산과 발현되는 이미지를 계속해서 비교하는 가운데 학생 A는 $\triangle ABP$가 점 P의 위치에 상관없이 $\overline{AP} = \overline{BP}$인 이등변삼각형이라는 사실을 알게 되었다. 문제해결 과정 중에 주어진 경험적 일반화의 과정이 학생 A로 하여금 $\triangle ABP$의 변의 길이 변화에 대해 다시 분석하도록 하여 문제맥락에 대한 이미지를 개선하도록 도운 것이다. 이를 통해 학생 A는 피상적 유사성이 아닌 구조적 유사성을 파악한 이론적 일반화 수준에 이르렀고 문제 상황에서의 불변의 관계를 정확히 인식하게 되었다. 따라서 학생 A의 문제맥락에 대한 이미지는 문제 해결하는 동안 유형1에서 유형3으로 발달했고 이러한 이미지의 변화가 학생 A가 문제해결에 성공하는 바탕이 되었다. 학생 A의 문제해결 과정은 학생이 문제를 해결하지 못하였을 경우, 문제 상황을 다시 바라보고 문제맥락에 대한 이미지를 개선해 나갈 수 있도록 충분한 경험적 일반화의 과정이 주어져 양들 사이의 관계를 분석할 수 있도록 환경을 조성하는 것이 매우 중요한 역할을 할 수 있음을 시사하고 있다.

[과제1]에 대해 학생 B는 문제 상황의 양들이 서로 동시에 변한다는 것과 그들 사이의 변화 관계를 잘 파악하고 있음을 보여주었다. 특별히, [대화문 6]의 2학생 B에서 분명한 이론적 일반화의 수준을 보여주고 있다. 더불어 [대화문 5]와 [그림 Ⅳ-5]에서 볼 수 있듯이 자신의 결과를 구체적 상황(원소)으로 확인해 보고 결과에 대해 확신을 갖는 과정은 경험적 일반화와 이론적 일반화의 교대가 이루어지며 서로 보완 또는 통합되는 과정으로 볼 수 있다. 학생 B는 양들 사이의 역동적 관계와 불변의 관계를 포함한 잘 발달된 양적 구조를 갖고 있는 것으로 관찰되었다. 이는 학생 B의 문제맥락에 대한 이미지가 유형3에 해당됨을 말해준다. 달리 말해, [과제1]에 대한 학생 B의 해결 과정과 결과는 그의 이미지가 문제 진술에 의해 의도된 양적 관계와 일치함을 보여준다.

[과제2]에 대해 학생 B와 학생 C는 모두 밑면과 옆면이 이루는 각을 x축으로, 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각을 y축으로 설정하였다(MA1). 두 학생의 문제해결 과정과 그래프에서 볼 수 있는 공통점은 우선, 문제 상황에서의 두 양에 대한 동적인 이미지를 가지고 서로의 관계를 함께 변하는 양으로써 인식하고 있다는 것이다. 다음으로, 두 학생 모두 밑면과 옆면이 이루는 각이 커짐에 따라 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각의 크기가 감소한다는 사실을 분명히 인식하였고(MA2) 한 양(밑면과 옆면이 이루는 각)의 변화에 대한 다른 양(서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각)의 변화율의 변화에 대해 고민하고 이를 통해 그래프가 감소하는 추세를 파악하려 했다는 점이다(MA3). [과제2]에서의 두 학생의 문제해결 과정을 통해 두 학생 모두 문제 상황에서의 양들에 대한 동적인 이미지(유형2)를 갖고 있음을 관찰할 수 있었지만, 변화율의 변화에 대한 인식에서 차이가 드러났다.

학생 B의 경우 밑면과 옆면이 이루는 각이 0 근처와 $\pi/2$ 근처에서는 변화율이 작고 각도의 변화는 연속적이라고 인식하여 [그림 Ⅳ-6]와 같이 그래프를 아래로 오목에서 위로 오목으로 바뀌는 모양으로 나타내었다. 하지만 학생 B는 그래프를 그릴 때, 밑면과 옆면이 이루는 각의 증분을 고려하지 않았고 이로 인해 변화율의 추이에 대한 부정확한 결과를 얻게 되었다. 반면, 학생 C는 변화율의 추이를 파악하기 위해 밑면과 옆면이 이루는 각의 같은 크기의 증분을 고려하였다(MA4). 이를 통해 변화율이 밑면과 옆면이 이루는 각이 작을수록 크고 클수록 작아진다는 사실을 인지하였고 전체적으로 위로 오목인 매끄러운 그래프를 그렸다(MA5).

[과제2]는 두 양의 변화 관계를 나타내는 그래프를 그리는 문제이므로 밑면과 옆면이 이루는 각이 커짐에 따라 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각이 작아진다는 변화율의 방향만 알아서는 과제를 정확히 해결할 수 없다. 결론적으로 말해 학생 B는 문제맥락에 대한 동적인 이미지를 가지고 있지만 불변의 관계를 파악하지 못하였고, 학생 C는 동적인 이미지와 함께 두 양의 변화 관계에 대한 불변의 관계를 정확히 파악하였다. [과제2]를 해결함에 있어 공변적 함수의 관점에서 불변의 관계를 인지한다는 것은 밑면과 옆면이 이루는 각의 변화에 따른 서로 이웃하는 두 옆면이 이루는 각의 변화율의 변화를 정확히 파악하는 것인데, 이는 L5 수준의 공변 추론 능력을 요구하는 것이다. 따라서 L3 수준의 공변 추론 능력을 가진 학생 B의 문제맥락에 대한 이미지는 동적이지만 양들 사이의 불변의 관계를 명확히 인식하지 못한 유형2에 해당되고 이러한 이미지가 문제해결의 어려움으로 작용하였다.

학생 C의 경우 변화율의 증가와 감소를 정확히 파악한 L5 수준의 공변 추론 능력을 보여주었고 두 양의 함수적 관계를 나타내는 그래프를 정확하게 나타내었다(유형3). 이것은 학생 C가 같은 크기의 증분에 대한 변화율을 생각하며 두 양 사이의 변화 관계를 탐구함으로 문제맥락에 대한 자신의 이미지를 계속해서 개선해 나갔기 때문이다. 이는 자신의 개념화 구조를 문제 진술에 의해 의도된 양적 관계에 맞추기 위해 적응하는 과정으로 볼 수 있다. 이러한 과정을 통해 형성된 양적 구조를 통해 자신의 문제맥락에 대한 이미지를 개선시켜 나감으로서 정확한 그래프를 그릴 수 있었다고 판단된다. 반면, 학생 B의 경우 문제맥락에 대해 자신이 가지고 있는 이미지를 수정해 나가지 않았으며 그럴 기회도 주어지지 않은 것이 부정확한 그래프를 그리게 된 원인이라고 말할 수 있겠다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 본 연구는 학생의 문제해결 과정에 대한 연구와 이와 관련된 교수학습 과정에 다음과 같은 시사점을 줄 수 있다.

첫째, 수업에서 학생의 문제해결에 초점을 두고 있다면 교사는 학생의 수행 결과물에 대해 맞았는지 틀렸는지에 초점을 두기보다 학생의 문제맥락에 대한 이미지가 수행 결과에 어떻게 반영되고 있는지를 살피고 학생으로 하여금 자신의 이미지를 수정할 수 있도록 도와주는 것이 중요하다. 학생이 정확한 결과를 얻지 못했다는 것은 그가 문제맥락에 대한 빈약한 양적 구조를 가진 것이 하나의 원인이 될 수 있다. 이를 보완할 수 있는 하나의 방법은 [과제1]의 학생 A의 경우에서 볼 수 있듯이, 충분한 경험적 일반화를 통해 특정한 사례들 사이의 유사성을 파악하고 이론적 일반화로 나아갈 수 있는 기회를 제공하는 것이다. 현재 학교 교육은 시간상의 제약, 진도 문제 등 여러 이유로 학생이 문제맥락에 대한 잘 발달된 이미지를 갖기 전에 정의, 공식, 그래프, 정리 등을 바로 제시하는 수업이 많이 이루어지고 있다. 이는 학생으로 하여금 자신의 양적 구조를 구성할 기회를 주지 못하고 있는 것이므로 학생이 자신에게 의미 있는 정의, 공식, 그래프 등을 생산할 수 있는 능력을 신장시키기 어렵게 된다. 따라서 수업 시간에 학생들이 문제를 해결하는 동안 문제 상황을 상상하고, 관련된 양의 값을 변화시키고, 공변시키는 활동에 적극적으로 참여하도록 하여 학생이 자신의 문제맥락에 대한 이미지를 개선시킴으로 자신의 양적 구조를 구성할 기회를 충분히 제공해야 할 것이다.

둘째, 본 연구에서 주어진 과제와 같이 문제 상황에서 양들과 그들 사이의 관계로 상황을 해석하여 문제를 해결해야 할 경우, 서로 관련하여 변화하는 방식에 주의를 기울이면서 두 변화하는 양을 조정하는 것과 관련된 인지 활동인 '공변 추론'이 문제해결에 중요한 추론능력으로 작용하므로 이를 신장시킬 수 있는 수업 구성이 필요하다. Moore & Carlson(2012)은 문제맥락에 대한 이미지의 유형을 유형1, 유형2, 유형3의 세 가지로 제시하였는데, 이 중에서 유형2와 유형3을 구분하는 기준은 양들 사이의 불변의 관계를 파악했는지의 여부이다. 하지만 그들의 연구 결과에서 학생이 주어진 문제 상황에서 불변의 관계를 파악했는지의 여부를 어떻게 판별할 것인지는 언급하고 있지 않다. 이에 본 연구는 결과를 대수식으로 나타내는 [과제1]의 경우는 일반화의 수준으로, 역동적 함수적 상황에서 공변하는 두 양의 관계를 나타내는 [과제2]의 경우는 공변 이미지의 발달 수준을 제시한 Carlson et al.(2002)이

제시한 공변 추론 틀로 판별하였다. 이를 통해 문제맥락에 대한 학생의 이미지에 대한 좀 더 세밀한 정보를 얻을 수 있었다. 그동안의 공변 추론에 관한 대부분의 연구들은 주어진 문제 상황에서 학생들의 공변 추론의 수준을 판단하는데 주안점을 두었다. 반면, 문제 상황에서 드러난 학생들의 공변 추론의 수준에 맞게 어떤 교수 학습 활동을 해야 그 수준을 높일 수 있는지에 대한 연구는 거의 이루어지지 않고 있다. 만약 이에 관한 연구가 활발히 이루어진다면 문제맥락에 대한 학생의 이미지에 대한 좀 더 세분화 된 분류가 가능해지고 각 이미지의 단계에 맞게 견고한 양적 구조를 발전시키기 위한 다양하고 생산적인 교수학적 조치가 나올 것으로 기대된다.

참고 문헌

교육부(2015). **수학과 교육과정.** 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8].

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤(2011). **수학교육과정과 교재연구.** 서울: 경문사.

우정호(1999). **학교수학의 교육적 기초.** 서울: 서울대학교출판부.

우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈(2006). **수학교육학 연구방법론.** 서울: 경문사.

권영인, 서보억(2007). 고등학교 도형의 방정식 단원에서 논증기하의 활용에 대한 연구. **한국수학교육학회 시리즈 E. 수학교육논문집, 21**(3), 451-466.

김근배, 최옥환, 박달원(2018). 유추와 분석적 방법을 활용한 타원 초점 작도. **한국학교수학회논문집, 21**(4), 401-418.

김성준(2002). 대수적 사고와 대수 기호에 관한 고찰. **수학교육학회, 12**(2), 229-245.

김희, 김선희(2010). 기하 증명에서 기호의 역할과 기호 중재에 의한 직관의 형성. **수학교육학연구, 20**(4), 511-528.

나귀수(1997). 기하 개념의 이해와 적용에 관한 소고. **수학교육학연구, 7**(2), 349-358.

나귀수(2009). 분석법을 중심으로 한 기하 증명 지도에 대한 연구. **수학교육학연구, 19**(2), 185-206.

도정철, 손홍찬(2015). GSP를 사용한 기하수업에서 수준별 학생의 논증기하와 해석기하의 연결에 관한 연구. **한국학교수학회논문집, 18**(4), 411-429.

마민영, 신재홍(2016). 대수 문장제의 해결에서 드러나는 중등 영재 학생간의 공변 추론 수준 비교 및 분석. **학교수학, 18**(1), 43-59.

박종희, 신재홍, 이수진, 마민영(2017). 그래프 유형에 따른 두 공변 추론 수준 이론의 적용 및 비교. **수학교육학연구, 27**(1), 23-49.

반은섭, 신재홍, 류희찬(2016). 오마르 카얌(Omar Khayyam)이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법의 교육적 활용. **학교수학, 18**(3), 589-608.

반은섭, 류희찬(2017). 동적 기하 환경을 활용한 문제 해결 과정에서 변수 이해 및 일반화 수준 향상에 관한 사례연구. **수학교육학연구, 27**(1), 89-112.

손홍찬(2011). GSP를 활용한 역동적 기하 환경에서 기하적 성질의 추측. **학교수학, 13**(1), 107-125.

양은경, 신재홍(2014). 개방형 기하 문제에서 학생의 드래깅 활동을 통해 나타난 수학적 추론 분석. **수학교육학연구, 24**(1), 1-27.

양은경, 신재홍(2015). 역동적 기하 환경에서 중등 영재학생들의 합동변환 활동에 대한 발생적 분해. **수학교육학연구, 25**(4), 499-524.

장혜원(2013). Byrne의 'Euclid 원론'에 기초한 증명 지도에 대한 연구. **수학교육학연구, 23**(2),

173-192.
정영우, 김부윤(2015). 기하 증명에서의 대표성에 관한 연구. **수학교육학연구, 25**(2), 225-240.
Boyer, C. B. (1946). Proportion, equation, function: Three steps in the development of a concept. *Scripta Mathematica, 12*, 5 - 13.
Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.
Carlson, M. P., Smith, N., & Persson, J. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate of change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME and PMENA* (Vol. 2, pp. 165 - 172). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawai'i.
Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rate of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164.
Davydov, V. V. (1990). Types of generalisation in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula (Soviet studies in mathematics education, Vol. 2; J. Kilpatrick, Ed., J. Teller, Trans.).Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Original work published 1972)
Dindyal, J. (2004). Algebraic thinking in geometry at high school level: Students′ use of variables and unknowns. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville)* (pp. 183-190). Sydney: MERGA, Inc.
Dindyal, J. (2007). The need for an inclusive framework for students′ thinking in school geometry. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*(1), 73-83.
Duval, R. (2002). Representation, vision, and visualization: Cognitive functions in mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 311-336). Mexico: PME-NA-Cinvestav-IPN.
Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationship through quantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 215-238): Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
Herbert, K., & Brown, R. (1999). Patterns as tools for algebraic thinking. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking: Grades K – 12 (pp. 123-128). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.*
Hoffer, A. (1981). Geometry in more than proof. *Mathematics Teacher, 74*, 11-18.
Kaput, J. (1995). Long term algebra reform: Democratizing access to big ideas. In C. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium* (pp. 33 - 52). Washington, DC: U.S. Department of Education.
Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In *8th International Congress on Mathematical Education, Selected Lectures* (pp. 271 - 286). S.A.E.M. THALES.
Mason, J. H. (2002). Generalisation and algebra: Exploiting children's powers. In L. Haggerty (Ed.),

Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice (pp.105-120). London: RoutledgeFalmer.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Mitchelmore, M. (1993). Abstraction, generalization and conceptual change in mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 2*, 45 - 57.

Mitchelmore, M. C., & White P. (1995). Abstraction in mathematics: Conflict, resolution and application. *Mathematics Education Research Journal, 7*, 50-68.

Mitchelmore, M. C., & White P. (1999). *Learning mathematics: A new look at generalisation and abstraction*. Referred paper at the combined conference of the Australian and New Zealand Associations for Research in Education, Australia.

Moore, K. C., & Carlson, M. P. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. *The journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 48-59.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variatin. In S. B. Berensen &, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, & L. Stiff(Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 298-303). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Schoenfeld, A. H. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81,* 420-427.

Smith, J., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). New York: Erlbaum.

Steffe, L., & Izsak, A. (2002). Pre-service middle-school teachers' construction of linear equation concepts through quantitative reasoning. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Noony (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 1163 - 1172). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Thompson, P. W. (1989). A cognitive model of quantity-based algebraic reasoning. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. In English, L., & Kirshner, D. (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 435-461). London: Taylor and Francis.

Thompson, P. W., Hatfield, N., Joshua, S., Yoon, H., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical* *behavior, 48,* 95-111.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra,* K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Students' Problem Solving Based on their Construction of Image about Problem Contexts

Koo, Dae Hwan[4) · Shin, Jaehong[5)

Abstract

In this study, we presented two geometric tasks to three 11th grade students to identify the characteristics of the images that the students had at the beginning of problem-solving in the problem situations and investigated how their images changed during problem-solving and effected their problem-solving behaviors. In the first task, student A had a static image (type 1) at the beginning of his problem-solving process, but later developed into a dynamic image of type 3 and recognized the invariant relationship between the quantities in the problem situation. Student B and student C were observed as type 3 students throughout their problem-solving process. No differences were found in student B's and student C′s images of the problem context in the first task, but apparent differences appeared in the second task. In the second task, both student B and student C demonstrated a dynamic image of the problem context. However, student B did not recognize the invariant relationship between the related quantities. In contrast, student C constructed a robust quantitative structure, which seemed to support him to perceive the invariant relationship. The results of this study also show that the success of solving the task 1 was determined by whether the students had reached the level of theoretical generalization with a dynamic image of the related quantities in the problem situation. In the case of task 2, the level of covariational reasoning with the two varying quantities in the problem situation was brought forth differences between the two students.

Key Words: image of a problem's context, empirical generalization, theoretical generalization, covariational reasoning

Received February 21, 2020
Revised March 21, 2020
Accepted March 22, 2020

---

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C30, 97D70

4) Daejeon Science High School for the Gifted (dhkoo2011@gmail.com)
5) Korea National University of Education (jhshin@knue.ac.kr), Corresponding Author