한국학교수학회논문집 제 23 권, 제 1호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 23, Number 1, 89-109, March 2020
http://doi.org/10.30807/ksms.2020.23.1.005

예비 수학교사들이 이산수학 학습에서 겪는 어려움 분석

임해미[1] · 전영주[2]

본 연구는 예비 수학교사들이 이산수학 학습에서 겪는 어려움의 원인과 배경을 조사·분석하여 교사 교육 개선에 도움을 주고자 함이다. 이를 위해 예비교사를 대상으로 이산수학 교과목에 대한 설문과 지필평가를 실시하고 여기서 얻은 자료를 분석하였다. 그 결과 첫째, 이산수학 교육의 필요성에 대한 예비교사들의 가치 인식 공유가 요구된다. 둘째, 이산수학 내용요소의 적정성 및 이수 시수의 검토가 필요하다. 셋째, 예비 수학교사들이 갖는 학습 곤란의 발생 원인을 학습요인 이외의 측면에서 살펴볼 필요가 있다. 그리고 중등 학교수학과 대학의 이산수학 교육과정 연속성 측면에서 내용요소의 체계성, 계열성 연구가 필요하다는 것과 중등임용에서의 이산수학 출제 비율 조정에 대한 신중한 고려가 요구된다는 시사점을 도출하였다.

주요용어 : 예비 수학교사, 이산수학, 학습 곤란

Ⅰ. 서론

우리는 4차 산업시대를 준비하며 살아가고 있다. 그래서 지금 필요한 것은 불확실성의 추상적인 환경과 실생활의 역동적 문제 상황 속에서 논리적으로 추론하는 능력으로, 이 능력은 대학의 수학 코스를 성공적으로 이수할 수 있는 토대가 되기도 한다. 이산수학에 대한 최근 관심도 이러한 새로운 시대의 삶의 적응력을 높이기 위한 논리·추론 능력 계발의 기초를 제공하기 때문이다. 이산수학은 알려진 바와 같이 디지털 회로와 오토마타(automata)의 설계, 관계형 데이터베이스, 프로그래밍 언어, 지식기반 시스템 등을 이해하는데 필수적인 사고와 지식을 습득할 수 있게 해준다. 그래서 이산수학은 정보과학의 훌륭한 주제가 된다. 이러한 정보 교환 도구로서의 이산수학의 유용성을 인식하고 연구한 윤현진, 박선용, 김서령과 이영하(2009)도 정보를 형식화하고 추론하는 과정으로서의 이산수학 학습이 학교현장에서 이루어질 필요가 있다고 강조하였다.

이산수학을 학교수학에 처음 접목하려는 노력은 이산수학 초기 연구자들이 연속의 개념을 주로 다루는 학교수학에 이산적인 주제(discrete topics)의 중요성을 언급하며 교육과정에 그 내용을 포함시키자는 운동을 전개하면서부터이다(Crisler, Fisher, & Froelich, 1997). 여기에 학교수학의 가이드를 제공하고 있는 NCTM(1989)이「학교수학의 교육과정과 평가 규준」에서 내용 규준의 하나로 이산수학을 제시하면

* MSC2010분류 : 97B50
1) 공주대학교 교수 (rimhaemee@kongju.ac.kr)
2) 전북대학교 교수 (jyj@jbnu.ac.kr), 교신저자

서 이산수학이 학교수학에서 자리 잡는 계기가 마련되었다. 이 같은 추세를 반영한 우리나라도 1997년에 고시한 제 7차 교육과정에서 이산수학을 도입하였다. 그렇지만 서둘러 도입하게 되면서 이산수학의 실용성만을 지나치게 강조하게 되었고, 이는 이산수학 본래의 특성을 왜곡하는 실수를 초래하였다. 또한 교과목 이수 대상을 고등학교 고학년으로 선정하면서 이산수학의 내용의 특성을 온전하게 반영하지 못하고 한정된 교과 내용으로 구성(윤현진 등, 2009)하는 등, 이산수학을 학교수학으로 도입하는데 있어 교수·학습의 계통성, 체계성 등의 지속적인 문제를 야기하게 되었다. 이것은 또다시 내용을 조직화, 구체화해야 하는 과제를 남기게 되었고, 결국 2007 개정 교육과정 개편과정에서 이산수학 교과목이 폐지되는 원인으로 작용하였다. 그렇지만 이것이 이산수학의 유용성, 실용적, 학문적, 수학적 가치가 아닌 단지 교육과정 체제의 문제가 만들어낸 결과이었기에 교과목 폐지의 아쉬움은 매우 크다 하겠다. 이후 개정되는 교육과정에서 일부 관련 내용을 여러 교과목에 나누어 학습이 이루어지도록 하였으며, 현재 2015 개정 수학과 교육과정에서도 보통교과와 전문교과에 이산수학의 내용을 담아 적용하고 있다.

이 시점에서 윤현진 등(2009)의 주장, '이산수학은 문제해결 교육, 수학적 모델링 구성, 조작적 연구, 수학화 등을 목적으로 도입하는 것이 바람직하다'는 소리에 대해 숙의할 필요가 있다. 특히, 이산수학이 지니고 있는 특유의 실용성은 학교수학을 풍부하게 하며, 수학교육의 목표를 달성하는데 큰 도움이 될 수 있다. 또한 이산수학은 현대사회에서 필요로 하는 정보 관련 지식을 생성하고, 기성 수학과 다른 차별화된 수학적 사고방식을 경험하게 하며, 21세기 미래핵심역량인 창의성 계발의 도구교과로서 그 역할을 기대하기에도 충분하다. 그러므로 학교교실에서 수학을 가르쳐야 하는 예비수학교사들은 마땅히 이산수학에 대한 PCK(Pedagogical Content Knowledge)와 이산수학의 가치의 중요성을 인식하는 것이 매우 당연하다 할 수 있다. 본 연구는 이런 점에서 예비 수학교사들이 이산수학 교과목을 어떻게 인식하고 있는지, 또 이산수학을 이수하면서 겪게 되는 학습 곤란의 원인과 배경이 무엇인지를 파악하여, 향후 이산수학 교수(teaching)의 질 개선을 위한 시사점을 제시하고자 하였다. 또한 예비교사들에는 이산수학에 대한 정확한 개념 이해를 장려하고 이를 바탕으로 올바른 교수(teaching) 자세를 갖추도록 준비시키는데 그 목적이 있다. 이를 위해 예비 교사들에게 이산수학에 대한 설문과 지필평가를 통해 이산수학 이수과정에서 겪게 되는 어려움을 조사·분석하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 이산수학과 이산수학 학습

이산수학(Discrete mathematics)은 수학의 기본 개념과 원리, 법칙을 활용하여 주변에서 일어나는 유한이나 불연속의 상황을 수학적으로 분류하고, 논리적으로 사고하여 합리적인 문제해결의 능력과 태도를 기르게 하는 교과목이다(교육인적자원부b, 2004). 또한 이산수학의 교과 활동을 통해 얻은 이산적 사고는 경제 현상이나 사회적인 의사결정, 정보 처리와 같은 비물질 세계를 다루거나 실생활 활동에서 매우 유용할 수가 있다(교육인적자원부a, 2004). 그렇지만 이와 같은 이산수학의 중요함에 비해 학교교실에서는 그동안 실수 공간을 다루는 연속수학의 그늘 아래 지속적으로 소외되어 왔다. 이는 우리 주변의 사회현상이나 자연현상을 수학화하거나 수학적 모델을 만들기에 적합한 아이디어를 이산수학보다 연속수학에서 쉽게 얻을 수 있어서일 것이다. 그러나 지금과 같은 정보와 컴퓨터로 대변되는 4차 산업혁명시대의 길목에서 이산적 사고와 알고리즘을 기반으로 하는 문제해결능력은 그 어느 때보다 절실히 요구되고 있다.

그리고 이러한 변화 요구에 대한 행동은 학교수학에서부터 시작해야 한다. 또한 교육당국도 이산수학이 현대사회에서 차지하는 기능과 역할을 인정하고 학교수학에서 일정 영역을 확보하도록 노력해야 한다. 일찍이 이 부분을 이해한 이산수학 연구자들은 이산의 중요성을 강조하며 학교교육과정에서 다루어야 한다는 주장을 펼쳐왔다. 1992년 10월 Rutgers University에서는 “Discrete Mathematics in the Schools: How Do We Make an Impact?”라는 주제로 미국과학재단(National Science Foundation, NSF)의 후원아래 고등학교와 대학의 연구자들이 이산수학 컨퍼런스를 개최하였다. 그리고 여기서 ‘유치원부터 고등학교까지 이산수학은 할 수 있고 이를 가르쳐야 한다.’는 것을 결의하였다. 이보다 앞서 NCTM(1989)도「Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics」를 통해 9-12학년의 교육과정에 정보화 시대를 준비하는 차원으로 이산수학을 학교수학과 접목시키려는 시도를 보였다. 우리나라도 예외는 아니었다. 지난 제 7차 교육과정에서 이산수학을 선택과목으로 도입하며 시대의 흐름에 순응하였다. 그렇지만 도입 결정과정에서는 이산수학을 수학에 재능이 있는 상위학생과 영재학생들의 선택과목으로 성격 지우려는 의견 때문에 이산수학의 구현 방향, 교육과정과 그 수준, 교육대상과 교수법 등에 대한 많은 논란이 있었다(교육인적자원부b, 2004). 사실 미국의 경우에는 이산수학이 AP 미적분학 과정을 이수하고 미적분 이외의 심화 수학과정을 이수하려는 학생들에게 새로운 수학 경험과 수학적 성숙을 제고하기 위해 도입되었다(Bailey, 1997). 그러나 이러한 의견이나 여건에도 불구하고 이산수학은 여러 사업과 산업에서 능동적으로 대처하는 현대수학으로서 학교수학의 주된 부분이 되어야 하고 그 주제들은 수학의 다른 분야와 자연스럽게 다루어져야 한다(NCTM, 2000). 또한 중요한 것은, 연속수학에 익숙하지 못해 미성취를 보이는 학생들을 위한 수학의 새로운 과정이기도 해야 한다.

아래 <표 Ⅱ-1>과 요약문은 이와 같은 사항들을 반영한 우리나라 제 7차 교육과정에 개설된 이산수학의 내용 체계와 NCTM(1989)의 규준이다.

<표 Ⅱ-1> 이산수학 내용체계

영역	내용	
Ⅰ. 선택과 배열	순열과 조합	• 경우의 수 • 순열 • 조합
	세는 방법	• 포함 배제 원리 • 집합의 분할 • 여러 가지 배열 • 비둘기집 원리
Ⅱ. 그래프	그래프	• 그래프의 뜻 • 여러 가지 그래프
	여러 가지 회로	• 오일러회로 • 해밀턴회로
	수형도	• 수형도 • 생성수형도
	그래프의 활용	• 행렬과 그래프 • 색칠 문제
Ⅲ. 알고리즘	수와 알고리즘	• 수의 규칙성 • 이진법으로 나타낸 수 • 소수의 판정과 최대공약수

	점화 관계	• 두 항 사이의 관계(1) • 두 항 사이의 관계(2) • 여러 가지 수열 • 세 항 사이의 관계
Ⅳ. 의사 결정과 최적화	의사 결정 과정	• 게임과 의사 결정 • 선거와 정당성 • 공평한 분배
	최적화와 알고리즘	• 계획세우기 • 그래프와 최적화

다음은 NCTM(1989)이 제시한 이산수학 규준이다.

> 이산수학을 통해 학생들은 유한 그래프, 행렬, 수열과 재귀(recurrence)관계와 같은 이산구조를 사용하여 문제 상황을 표현할 수 있어야 한다. 행렬을 사용하여 유한 그래프를 표현하고 분석할 수 있어야 한다. 알고리즘을 개발하고 분석할 수 있어야 한다. 세는 방법과 유한 확률문제를 풀 수 있어야 한다. 선형 프로그래밍과 계차방정식을 이용하여 문제를 표현하고 해결할 수 있어야 한다. 알고리즘 응용과 컴퓨터 타당화 과정과 관련되어 생기는 문제 상황을 탐구할 수 있어야 한다.

교육부(2004a)와 NCTM(1989)의 내용체계와 규준을 살펴보면, 세기의 방법, 그래프 이론, 알고리즘과 점화 관계, 그리고 의사결정에 관한 내용 등을 이산수학 교육과정 내용 영역으로 설정하고자 함을 알 수 있다. 그러나 아쉽게도 우리는 '이산수학'으로서의 독립된 교과는 제 7차 교육과정에서만 적용되었다. 이후 개정된 2009 개정 교육과정, 2015 개정 교육과정에서는 다른 수학 교과목으로 그 내용이 축소, 이동되거나 삭제되면서 이산수학의 명맥을 간신히 유지하고 있는 실정이다. 특히, 2015 개정 교육과정에서는 특목고에서 개설되는 전문교과에나 이산수학의 실제적 내용요소들이 대부분 포함되어 있어 일반 학생들은 이산수학을 접하기가 이전의 교육과정에 비해 더욱 어려워졌다. <표 Ⅱ-2>는 2015 개정 수학과 교육과정에서의 교과목과 이산수학 주제들을 표로 정리해 놓은 것이다.

<표 Ⅱ-2> 2015 개정 수학과 교육과정의 이산수학 내용체계

교과			교과목명	내용
보통교과	공통과목		수학	◦ 경우의 수 ◦ 순열과 조합
	선택과목	일반선택	수학Ⅰ	◦ 등차수열과 등비수열 ◦ 수열의 합 ◦ 수학적 귀납법
			수학Ⅱ	
			미분과 적분	
			확률과 통계	◦ 순열과 조합 ◦ 이항정리
		진로선택	기하	
			실용수학	
			경제수학	◦ 수열과 금융
			수학과제 탐구	

전문교과	전문교과Ⅰ	심화수학Ⅰ	
		심화수학Ⅱ	◦순열과 조합 ◦집합의 분할 ◦자연수의 분할 ◦이항정리
		고급수학Ⅰ	◦그래프와 행렬 ◦평면그래프와 수형도
		고급수학Ⅱ	◦수학적 모델링 ◦채색수와 채색다항식 ◦여러 가지 색칠문제 ◦오일러그래프 ◦해밀턴그래프

제 7차 교육과정의 <표 Ⅱ-1>과 비교해보면, 포함배제의 원리, 비둘기집의 원리, 점화관계와 의사결정의 최적화 등의 내용이 대표적으로 삭제된 내용들이다. 이산수학의 중요성을 감안한다면 이 내용 요소를 재포함 시키는 것에 대한 논의가 있어야 한다. 대학에서도 이산수학이 개설되어 있는바, 대부분의 사범대학 수학교육과에서도 이수 학점에는 약간의 차이가 있으나 이산수학을 필수적으로 이수토록 교육과정을 운영하고 있다. 또한 한국교육과정평가원이 주관하는 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험(이하 중등임용)에서도 이산수학 내용 요소를 매년 출제하고 있어, 수학교사가 되기 위해서는 반드시 이수해야 할 필수 교과목으로 예비 교사들은 받아들인다. 중등임용의 평가 내용요소는 논리학, 집합론, 논리학, 집합론, 수론, 조합론, 그래프이론, 알고리즘, 정보이론, 계산가능성이론, 계산복잡도 이론, 확률론, 선행대수학과 학교 교육과정, NCTM, COMAP(Consortium for Mathematics and its Applications)에서 제안한 이산수학 내용이 그 범주이다(한국교육과정평가원, 2008). 그리고 사범대학에서는 이와 관련된 세는 방법, 점화관계와 생성함수, 그래프 등을 주요 내용으로 하는 이산수학 강의가 이루어지고 있다(김창일, 전영주, 2017).

이 같은 사범대학 학부 강의와 관련한 이산수학 선행연구들을 살펴보면 다음과 같다. 우선 국내 연구로는 학생이 학습과정에 능동적으로 참여한 후 학습 목표에 도달하였는가를 알아보기 위해 강좌를 개설하고 그 운영 사례를 연구한 이상구와 이재화(2019)의「학생중심의 대학 이산수학 강의 운영사례」, 2011~2017학년도까지 출제된 중등 임용에서의 이산수학 문항들을 분석한 김창일 등(2017)의「수학과 중등임용 이산수학 기출 문항 분석」, 그리고 중등 예비수학교사들에게 가르쳐야 할 이산수학의 성격과 목표 및 교육과정 개발에 대해 연구한 이재학(2003)의「중등학교 교사 양성을 위한 이산수학 강좌에 대한 연구」등이 있다. 이외 다른 연구들이 있으나 이는 중등 학교수학에서의 이산수학 관련 연구들로 본 연구의 주제와 거리가 있어 배제하였다. 국외 연구로는 Middleton, Toncheff와 Haag(2011)의「Growth in Secondary Teachers′ Content Knowledge and Practice in Discrete Mathematics」 연구에서 수학지식 향상을 목적으로 1년간 35명의 수학교사를 대상으로 이산수학 프로젝트를 실시하였다. 그 결과 교사지식은 물론 참여교사의 지도학생들 성취도에도 영향을 끼쳤다는 결론을 내놓았다. Pagliaro와 Kritzer(2005)의 연구「Discrete Mathematics in Deaf Education: A Survey of Teachers′ Knowledge and Use」에서는 청각을 상실한 K-8, K-12학년 학생 120명과 이들을 지도하는 290명의 수학교사를 대상으로 이산수학을 통한 수학 커리큘럼 체제 정비와 교육 개혁이 요구된다고 하였다. 그 밖에 다른 연구들도 있으나 공학 도구를 이용한 학교수학에서의 이산수학 등 중등수학 주제들이 대부분이며, 예비 수학교사들이 갖는 이산수학에 대한 인식 연구는 찾기 어려웠다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 대상

본 연구는 전북 J도시에 소재한 국립 J대학교 수학교육과 31명을 대상으로 실시하였으며, 2019학년도 1학기 2학년과정 교과목인 이산수학을 이수한 학생들이다. 예비수학교사인 이들은 기존 1학년 과정에서 전공 학습에 도움이 될 수 있는 대수학개론, 정수론, 해석학, 집합론, 선형대수학 등 5개 교과목을 이수하였다. 학교 교육환경은 정부와 학교의 지원으로 우수하고, 예비교사들은 수학에 대한 관심이 매우 높으며, 교사가 되기 위한 자질과 역량을 갖추기 위한 준비과정에 있다.

2. 도구 및 분석 방법

이산수학 과목을 이수한 전북의 J대학교 수학교육과 2학년 예비 수학교사들을 대상으로 설계한 본 연구의 연구 도구 및 분석 방법은 다음과 같다.

첫째, 이산수학에 대한 예비수학교사의 인식을 알아보기 위해 이산수학의 필요성과 학습요소의 난이도 등에 대한 판단, 그리고 교육과정에서의 내용영역을 중심으로 학습과정에서 겪는 어려움을 설문조사하고 그 세부 내용을 분석한다.

둘째, 이산수학 강의 이수에 따른 두 번의 지필평가를 실시하고 평가 결과 성취도가 낮게 나타난 문항(정답률 40% 이하)을 추출하고 이를 기초로 예비 수학교사들이 겪는 이산수학 문제해결 과정에서의 인지적 장애 요인을 알아본다.

두 가지 연구도구인 설문과 지필평가는 시기를 달리하여 별도 실시하므로, 이로 인해 예비 수학교사들이 학습과정에서 어려움을 겪은 설문의 내용요소와 지필평가에서 성취도가 낮게 나타난 내용요소가 다를 수 있다. 두 가지 연구도구를 서로 다른 시기에 실시하는 이유는 다음과 같다. 우선, 설문과 평가를 동시(또는 평가 먼저 실시)에 실시할 경우 예비교사들이 문제해결과정에서 어렵게 느낀 평가요소를 설문에서도 어려운 내용요소로 응답할 개연성이 높아 예비교사에게서 얻고자 하는 실제 정보를 놓칠 수 있어 향후 강의 내용과 수준을 조정하는데 혼란스러울 수밖에 없기 때문이다. 그리고 수학적 아이디어를 대하는 예비교사의 문제해결 태도는 이산수학을 어떻게 배웠는가와 밀접한 관계가 있어, 이를 알아보기 위한 방안으로 설문조사 후 평가(1차설문-중간평가-2차설문-기말평가)라는 방법을 선택하였다. 두 연구도구는 모두 예비교사들이 알아야 할 내용과 교수자가 가르쳐야 할 내용요소를 점검하고, 여기서 얻어진 정보는 이산수학의 교육과정을 점검하고 궁극적으로 강의의 질을 관리하기 위한 도구이다. 이에 따른 세부적인 연구도구 및 분석 방법을 정리하면 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 연구도구 및 분석 방법

연구 도구	분석 방법	
	분석 관점	분석 내용
설문지	이산수학 인식	◦ 이산수학의 필요성, 이산수학에 관한 체감 난이도
	학습의 어려움	◦ 학습의 어려움을 겪은 내용요소와 그 원인
평가	문제해결과정	◦ 문제해결과정에 나타난 교육과정의 성취 장애 요인

Ⅳ. 연구결과 및 분석

1. 이산수학에 대한 인식

이산수학에 대한 인식 조사는 예비 수학교사들이 갖는 이산수학의 필요성과 이산수학을 학습하는 과정에서 느낀 체감 난이도를 알아보는 것이 그 핵심이다. 이를 위해 두 가지 설문을 실시하였다. 하나는 이산수학 학습이 필요하다고 생각하는가, 그리고 그 이유는 무엇인가이고, 다른 하나는 이산수학 교과목의 난이도는 어떠한가에 대한 것으로 ‘매우 어려움’, ‘어려움’, ‘보통’, ‘쉬움’, ‘매우 쉬움’의 리커스트 5단계로 설정하여 질문하였다. 먼저, 이산수학에 대한 필요성은 전체 응답자의 96.8%(30명)가 ‘그렇다’라고 응답하였다. 그 이유로는 ‘확률과 통계와 연계되어 있다’, ‘컴퓨터 공학 등 이산적 사고가 요구되는 곳에서 유용하게 사용될 수 있다’ 등의 예상 답변과 ‘수학의 또 다른 아름다움을 느낄 수 있다’, ‘실생활에서 가장 유용하게 사용할 수 있는 교과목’, ‘규칙성과 패턴을 알아볼 수 있다’ 등의 예상 밖의 의견도 있었다. 한편, 이산수학의 난이도에 대해서는 ‘어려움’이 67.7%로 가장 높은 비율로 나타났고 ‘보통’ 19.4%, ‘매우 어려움’ 6.5% 그리고 ‘매우 쉬움’과 ‘쉬움’ 3.2% 순으로 나타났다. 아래 <표 Ⅳ-1>은 이산수학에 대한 체감 난이도를 조사한 결과이다.

<표 Ⅳ-1> 이산수학의 체감 난이도

난이도	매우 쉬움	쉬움	보통	어려움	매우 어려움	계
인원 수(명)	1	1	6	21	2	31
퍼센트(%)	3.2	3.2	19.4	67.7	6.5	100

<표 Ⅳ-1>에서 볼 수 있듯이 이산수학이 어렵다고 여기는 비율이 전체 74.2%(어려움, 매우 어려움)로 상당히 높게 나타났다. 그것은 예비교사들이 이산수학 학습에서 익혀야 할 개념 원리가 많으며, 정리 증명과정에서 증명을 위한 아이디어를 떠올리기가 쉽지 않고, 문제해결의 접근 방법이 복잡하고 난해하다는 이유에서이다. 또한 실생활에 기반을 둔 구체적 상황을 모델링으로 변환시키는 수학화 단계에서 수학적 개념과 표현을 자연스럽게 이끌어내지 못하는 경향도 보였다. 다음은 예비 수학교사의 직접적인 반응을 적어 놓은 것이다.

> “당연히 그렇게 되는 것 같은데 막상 풀려고 하면 어디서부터 어떻게 시작해야 할지 감이 잡히지 않는다.”, “고려해야 할 경우의 수가 많고 생각의 방향이 너무 다양하다.”, “증명이 추상적인 부분이 많고 같은 식임에도 여러 가지 해석이 가능하다.”, “조금만 식을 바꿔도 새로운 문제 같다.”

이러한 결과들은 대수, 해석, 기하와 같은 전통적인 수학학습 내용을 주로 다루는 초·중등의 학교수학과 대학의 수학학습에 익숙하고, 물질세계의 수학적 모델링인 미적분과 대수, 기하 문제를 해결하기 위한 필수적인 아이디어인 연속수학에 가치를 더 부여하는 수학학습 환경 노출되어 왔기 때문으로 보인다. 그리고 이러한 학습 배경은 이산수학 대상에 대한 이해 부족과 관련 학습량 부족으로 이어지고, 그것은 다시 이산적 사고가 익숙하지 않은 수학적 상황으로 이어지는 악순환이 발생될 수 있다. 특히, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 전문교과인 심화수학Ⅱ, 고급수학Ⅰ, 고급수학Ⅱ에 이산수학 교과 내용이 집중 배정되어 있어 향후 이산수학에 대한 이러한 문제점이 지속될 가능성이 예견된다. 따라서 이를 해결할 수 있는 방안이 시급하다 할 수 있다.

2. 이산수학 학습의 어려움

이산수학은 선택과 배열, 그래프, 알고리즘, 의사결정과 최적화 등 4개 영역으로 나누어져 있으나, 본 연구에서는 사범대학에서 주로 강의가 이루어지는 선택과 배열의 ‘세는 방법’, 알고리즘의 ‘점화관계와 생성함수’, 그리고 ‘그래프’ 등 3개 영역의 내용요소를 중심으로 예비 수학교사들이 겪는 학습의 어려움을 조사하고 그 원인을 찾아본다. 먼저, 세는 방법에서 학습에 곤란함을 겪는 내용요소는 <표 Ⅳ-2>와 같이 조사되었다. 학습 곤란 내용요소를 중복하여 선택하거나 전혀 선택하지 않은 경우도 있어 전체 인원수와는 차이가 있다.

<표 Ⅳ-2> ‘세는 방법’ 영역에서의 학습 곤란 내용요소(복수선택)

내용요소	순열·조합	이항계수	수의 분할	집합의 분할	포함배제의 원리	비둘기집의 원리
인원 수(명)	0	8	1	2	2	8
퍼센트(%)	0.0	25.8	3.2	6.5	6.5	25.8

<표 Ⅳ-2>에서와 같이 예비 수학교사들은 ‘이항계수’와 ‘비둘기집의 원리’에서 학습 곤란을 느끼는 비율이 가장 높은 것으로 나타났다. 이항계수는 $\binom{n}{k}$와 관련된 문제로 조합, 격자, 이항정리 등으로 접하게 되는데, 여기서 예비 수학교사들은 항등식 증명의 아이디어를 떠올리지 못하거나 설령 문제해결의 실마리를 찾았다하더라도 문제 구조를 전체적으로 파악하여 떠올린 아이디어를 어떻게 적용해야 하는지 그 방안을 찾지 못하고 있음을 보였다. 예를 들어, $\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r+1}+\cdots+\binom{m}{m}\binom{n}{r+m}$ $=\binom{m+n}{m+r}$임을 보일 때, $\binom{m}{r}=\binom{m}{m-r}$로 대체하는 것과 $\binom{m}{m}\binom{n}{r}$이 $(m+n)$에서 $(m+r)$개를 뽑는 경우의 수라는 수학적 과정을 따라가지 못하는 것으로 나타났다. 또한, 일반화된 이항계수의 정의와 이항정리를 융통성 있게 응용할 수 있는, $\binom{-n}{k}=(-1)^k{}_n\mathrm{H}_\mathrm{k}$, $\binom{1/2}{k}=\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}$의 식을 이용한 사고의 유연성 훈련이 요구되기도 하였다. 즉, 주어진 이항계수 문제 상황을 단순히 공식에 대입하여 답을 구하는 것이 아닌 주어진 식의 의미를 해석하는 것이 쉽지 않기 때문에 학습의 전이가 잘 이루어지지 않아 예비교사들이 이 부분을 어려워하는 것으로 조사되었다. 그리고 해의 존재성 여부를 확인하는 방법을 제시해 주는 비둘기집의 원리를 단지 연산 처리하려는 제한적 접근 시도로 그 성과를 제대로 얻지 못하고 있음이 발견되었다. 이를테면, 200 이하 자연수의 집합에서 임의로 101개의 원소를 꺼내면 그 안에는 한 수가 다른 수의 배수인 두 수가 있다는 것을 보일 때, 임의의 자연수 n을 $n=2^k a$ (k는 음이 아닌 정수, a는 홀수)의 꼴로 표현하여 문제해결의 실마리를 찾는 것에서 서투름을 보였다. 반면 선택과 배열 가운데 ‘경우의 수’, ‘순열과 조합’의 경우는 학부에서 다루는 내용요소가 이미 고등학교에서 학습한 내용과 유사하고, 내용의 난도가 ‘세는 방법’의 다른 내용 영역들에 비해 크게 높지 않아 예비 수학교사들이 선수학습을 통해 충분히 형성된 사전 지식으로 학습 과정에서 전혀 어려움을 느끼지 않는 것으로 조사되었다. 이 영역의 학습 곤란 응답률은 0.0%이었다.

알고리즘은 문제를 해결하기 위한 유한한 계산 단계의 집합으로(Johnsonbaugh, 1990: 윤현진 등, 2009에서 재인용), 일상생활에서 부딪치는 단순한 문제부터 컴퓨터 프로그래밍까지 포함한다(윤현진 등, 2009). 이는 산업과 경영, 공학, 그리고 컴퓨터 과학 등에 수학의 적용과 응용이라는 의의를 지닌

다. 또한 알고리즘은 규칙과 패턴을 찾는 과정으로도 볼 수 있다. 이런 점은 귀납적이고 실험적인 측면이 있긴 하지만 궁극적으로 논리적 사고 능력 발달과 문제해결능력 향상에 영향을 끼친다. 따라서 점화관계와 생성함수 영역은 예비교사들에게 창의적이면서도 논리적인 사고를 정련시켜 나갈 수 있다. 역으로 알고리즘은 그 특성상 기계적인 접근 방법으로는 제한된 해결밖에 될 수 없기 때문에 창의적인 발상과 시각이 요구되어 진다. 그만큼 학습 부담도 증가할 수 있다. 아래 <표 Ⅳ-3>에서 보듯 예비교사들이 '점화관계'는 48.4%, '생성함수'는 무려 61.3%가 학습에 어려움을 토로하고 있음이 학습부담의 근거라 할 수 있다. 이 비율들은 '세는 방법'의 내용 요소에 비해 크게 높은 수치이다.

<표 Ⅳ-3> '점화관계와 생성함수' 영역에서의 학습 곤란 내용요소(복수선택)

내용요소	점화관계	생성함수
인원 수(명)	15	19
퍼센트(%)	48.4	61.3

이 내용 영역에서의 어려움은 주어진 문제 상황에서 점화관계를 찾아내거나 특성다항식을 이용하여 점화식의 일반항 a_n을 구하는 과정에 등장하는 일반해, 특수해 등의 개념에 대한 명확한 이해가 이루어지지 않아 문제해결 방법을 찾아내지 못해 발생된다. 예를 들면, n개의 계단을 오르는데 한 걸음에 한 계단이나 두 계단씩 오른다고 한다. 이런 방법으로 n개의 계단을 오를 수 있는 서로 다른 방법의 수를 a_n이라 할 때, a_n에 대한 점화식은 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$이 된다. 그런데 예비교사들은 a_{n-1}, a_{n-2}가 '처음 한 계단을 오르거나', 아님 '두 계단을 오른다는 가정'의 식임을 기본적으로 생각하지 못하는 경우이다. 또 점화식 $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 1$을 풀려고 하면 특성다항식 $C(t) = t^2 + t - 2$에서 특성근을 이용하여 점화식의 일반해 x_n을 구하고, 그 다음 점화식의 특수해를 구해야 한다. 이때 $q_n = B$라 하면 모순이 발생하게 되어 n의 차수를 높인 $q_n = B_1 n + B_0$라 놓고 q_n을 구해야 한다. 여기서 일반해, 특수해가 무엇인지, 그리고 왜 이러한 알고리즘 절차를 따라야 하는지의 개념 해석의 부족한 경우이다. 한편, '생성함수'에서는 수열 $\{a_n\}$에서 생성함수 $f(x)$를 구한다거나 역으로 수열 $\{a_n\}$의 생성함수 $f(x)$에서 일반항 a_n을 구하는 것, 그리고 주변의 상황을 생성함수로 모델링하여 해결하는 문제에서 어려움을 겪는 것으로 조사되었다. 일부는 Maclaurin 급수를 이용하여 생성함수 $f(x)$에서 일반항 a_n을 구하는 단계에서 수학적 지식 결핍이 발견되었다.

마지막 세 번째 내용요소인 '그래프' 이론은 이산수학에서 가장 대표적인 주제로 통신, 네트워크, 회로도, 경기 대진표, 생산스케줄과 같은 문제 상황의 탐구 기회를 제공한다. 또한 그래프는 행렬로 전사하여 대수적 표현이 가능하므로 행렬은 그래프와 함께 다루게 되는 수학적 도구가 된다(NCTM, 1989). 그래프 영역에서 학습에 곤란함을 겪는 내용요소는 <표 Ⅳ-4>와 같이 조사되었다.

<표 Ⅳ-4> '그래프' 영역에서의 학습 곤란 내용요소(복수선택)

내용요소	그래프, 그래프의 동형	오일러·해밀턴 회로	평면그래프	수형도	색칠문제	행렬과 그래프
인원 수(명)	4	5	7	8	12	3
퍼센트(%)	12.9	16.1	22.6	25.8	38.7	9.7

<표 Ⅳ-4>에서와 같이 '색칠문제' 38.7%, '수형도' 25.8%, '평면그래프' 22.6%, '오일러회로·해밀턴회로' 16.1%, '그래프'와 '그래프의 동형' 12.9%, 그리고 '행렬과 그래프' 9.7% 순으로 어려움을 느끼는 것으로 나타났다. 어려움을 겪는 구체적 내용은 다음과 같다. 먼저, '색칠문제'는 오색정리(Five color theorem), 사색문제(Four color problem), 축약정리(deletion-contraction argument) 등을 증명하는데 요구되는 추론 및 직관의 수준이 높게 요구된다는 것과 연속수학 증명에 접근하던 기존의 연역적 방법과 다른 수학적 사고 양식의 차이에서 발생하는 것으로 나타났다. '수형도'에서는 수형도의 개념에 대한 이해, 깊이 우선 선택(depth-first search)과 너비 우선 선택(width-first search)으로 그래프 G의 생성수형도(minimal spanning tree)를 찾아가는 과정을 꼽았다. '평면그래프'의 경우에는 연결된 평면 그래프 G에서 꼭짓점의 수 v, 변의 수 e의 관계인 충분조건, 필요조건, 필요충분조건에 관한 심층적인 이해를 요하는 데에서 일어난다. 그리고 '오일러회로·해밀턴회로'에서는 해밀턴회로를 갖는 충분조건의 증명을 어려워하는 것으로 나타났다. 이 밖에 그래프, 그래프의 동형, 행렬과 그래프는 꼭짓점을 집합위에 도입하고 상호 동치관계의 구조를 밝히는 것이 어려움의 원인으로 조사되었다. 여기서 색칠문제와 수형도 두 가지 예를 들어보면 다음과 같다. 아래는 색칠문제의 예이다.

어느 대학 수학과에는 10명의 교수 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J가 재직하고 있고, 교수들은 다음과 같이 8개의 위원회에 소속되어 있다. 수학과의 모든 교수가 소속된 위원회에 참석하여 한 시간 동안 회의할 수 있도록 시간을 배정하려면 최소 몇 시간이 필요한지 구하시오.

위원회	교수	위원회	교수
인사위원회	A, B, C, D	교양교육위원회	D, E
도서관위원회	A, E, F, G	교과과정위원회	C, A
홍보위원회	G, H, I, J	출판위원회	I, G
복지위원회	H, B, F	대학원위원회	J, C

출처 : 박종안 외(2018), 이산수학

이 문제를 해결하기 위해서는 각 위원회를 꼭짓점으로 하고 공통으로 소속된 교수가 있는 두 위원회에 해당되는 꼭짓점을 변으로 이으면 하나의 그래프를 얻는다. 이때, 문제해결의 아이디어는 회의시간 잡는 것을 꼭짓점의 채색으로 생각하면, 같은 위원이 2개의 위원회에 동시에 참석할 수 없으므로 서로 다른 채색을 해야 한다는 것이다. 이와 같은 아이디어를 그래프로 표현하면 되는데 이 그래프를 그리기가 쉽지 않다는 것이 예비교사들의 전언이었다. 또 수형도에서는 n개의 꼭짓점을 갖는 완전그래프의 생성수형도의 개수를 구하는 케일리(Cayley)의 수형도 공식 n^{n-2}의 증명을 다루는 것에 부담을 갖고 있는 것으로 조사되었다.

3. 이산수학 문제해결과정

평가는 교육과정 운영의 중요한 일부분으로, 교육과정 개선에 그 목적이 있다. 이러한 목적에 따라 예비 수학교사들을 대상으로 이산수학 내용요소에 대한 두 번의 평가(중간평가 M, 기말평가 F)를 실시하였다. 평가 내용요소와 평가 요소는 <표 Ⅳ-5>와 같다. 문항유형은 서답형이며, 문항별 배점은 5점이다. 평가 결과, 정답률 40% 이하(모든 평가문항을 대상으로 분석하는 것이 가장 좋은 연구방법이나 지면의 제약과 중등임용에서의 과락 기준인 40%를 참고)의 문항을 중심으로 교육과정에 담긴 내용요소의 성취 장애 요인을 분석하였다. 일반적으로 수험생의 성취수준을 파악하는데 일관된 기준은

존재하지 않지만 국가 수준의 성취 기준은 평가대상 학생들이 성취할 것으로 기대하는 기본 내용의 이해 정도를 양적으로 표현하는 것으로 정의한다(이양락, 김선희, 고정화, 조영미, 구자형, 2005). 이 때 수치화를 위해 정답률을 사용할 수 있다. 다만, 이러한 정답률은 이산수학에 대한 예비교사들의 성취 수준을 양적으로 표현했을 뿐 학습과정에서 겪는 어려움과 이해정도를 파악하기에는 한계가 있다. 따라서 이런 부분을 보완하기 위해 문제해결과정에 나타난 예비교사들의 문항반응을 통한 질적 접근으로 분석하고자 한다.

<표 Ⅳ-5> 이산수학 교육과정 평가요소 및 정답률

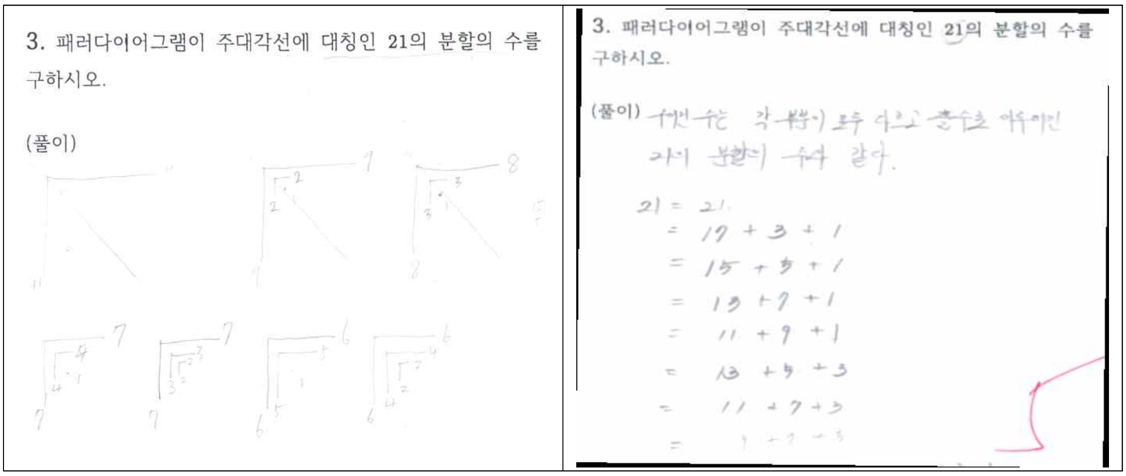
내용 영역	문항 번호	평가 내용요소		정답률 (%)
		내용요소	평가 요소	
세는 방법	M_1	중복조합	주어진 부등식의 음이 아닌 정수해의 개수	65.16
	M_2	이항계수	일반화된 이항정리를 이용한 식의 전개	42.58
	M_3	수의 분할	패러다이어그램	20.65
	M_4	집합의 분할	조건을 만족시키는 함수 f의 개수	53.55
	M_5	포함배제의 원리	자연수 $1, 2, 3$으로 이루어진 n자리 수 중 $1, 2, 3$을 적어도 한 번 포함하는 수의 개수	32.90
점화관계와 생성함수	M_6	생성함수	수열 $\{a_n\}$의 생성함수 $f(x)$ 구하기	35.48
	M_7	생성함수	실생활 상황의 지수생성함수로의 모델링	13.55
	M_8	점화관계	점화식 $a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ 풀기	62.58
그래프	F_1	그래프	그래프의 꼭짓점과 변의 수	86.02
	F_2	그래프의 동형	동형사상의 정의와 동형 판별	56.45
	F_3	해밀턴회로	$K_{n,n}$의 해밀턴회로의 존재 증명	12.90
	F_4	평면그래프	평면그래프 G에서 $e \le 3v-6$의 증명	31.61
	F_5	그래프와 색칠문제	조건을 만족시키는 그래프 G의 꼭짓점의 차수와 채색수 $\chi(G)$	41.29
	F_6	평면그래프와 색칠문제	조건을 만족시키는 그래프 G가 평면그래프인가의 판별과 채색수 $\chi(G)$	52.26
	F_7	수형도	수형도로 이루어진 그래프 G의 변의 수	45.16
	F_8	행렬과 그래프	인접행렬과 근접행렬의 성질	50.54

*정답률 산출은 서답형 문항 유형상 부분점수가 주어지므로 다음과 같은 계산식을 사용하였다.
(정답률)=($\sum$(개별 예비교사 점수)/(문항별 배점×총 인원))×100

중간평가 8개 문항(M_1～M_8), 기말평가 8개 문항(F_1～F_8) 총 16개의 문항 가운데 정답률이 가장 높은 문항은 정답률은 'F_1'의 86.02%이고, 가장 낮은 문항은 'F_3'의 12.90%로 나타났다. 'M_1'～'M_8'과 'F_1'～'F_8'의 정답률의 평균은 각각 40.81%, 47.03%이며, 전체 16문항에 대한 정답률의 평균은 43.92%를 보였다. 그리고 이산수학 교육과정 평가요소 및 정답률을 통해 분석하고자 하는 정답률 40% 이하의 문항은 모두 6개 문항(M_3, M_5, M_6, M_7, F_3, F_4)으로 집계되었다. 이하 'M_3', 'M_5', 'M_6', 'M_7', 'F_3', 'F_4' 순으로 예비교사들의 문항 반응을 분석하고자 한다.

우선, 'M_3'는 수의 분할에 관한 문항이다. 자연수 n의 분할(partition)은 정의는 간단하나 수학의 여러 분야에 활용된다. 대표적으로 분할수의 생성함수인 오일러함수가 있다. 수의 분할 영역에는 몇 가지 흥미로운 성질들이 있는데, "(정리1) n의 분할 중 부분이 모두 다르고 각 부분이 홀수인 분할의 수는 패러다이어그램 주대각선에 관하여 대칭인 n의 분할의 수와 같다."도 그 중 하나이다. 증명은

간단하다. 그럼에도 불구하고 이 (정리1)를 이용하여 패러다이어그램이 주대각선에 대칭인 21의 분할의 수를 찾는 ‘M_3’의 문항 정답률이 20.65%로 낮은 원인으로는 <표 Ⅳ-2>에서 볼 수 있듯이 ‘수의 분할’ 내용요소에서 학습의 어려움을 느낀다는 비율이 1명(3.2%)으로 예비교사들이 본 내용에 대해 잘 알고 문제를 쉽게 해결할 것이라는 오상(誤想)에서 비롯된 것으로 보인다. 동시에 (정리1)에 대한 학습 부족도 하나의 원인으로 해석된다. [그림 Ⅳ-1]은 ‘M_3’에 대한 예비교사의 문항 반응 사례이다.

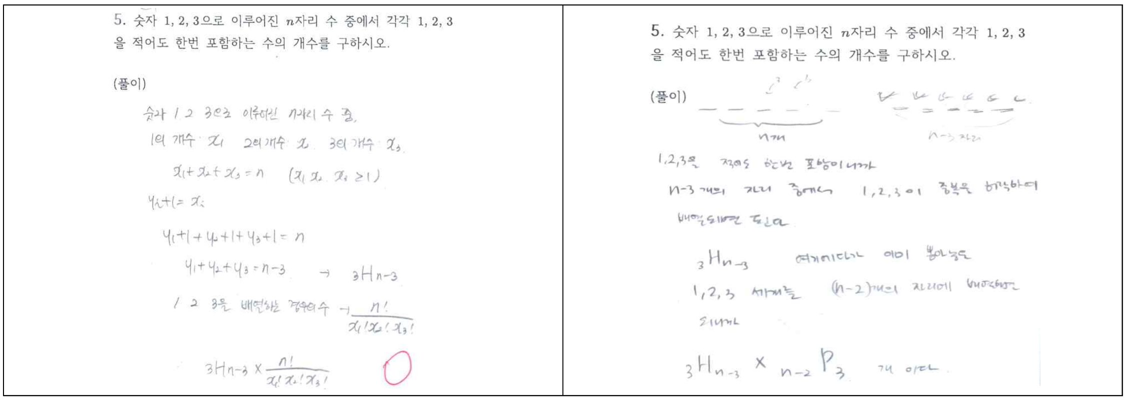


[그림 Ⅳ-1] 예비교사의 ‘M_3’ 문항 반응 예

문항 ‘M_5’는 포함배제의 원리에 관한 문항이다. 포함배제의 원리는 비둘기집의 원리와 함께 해의 존재성을 쉽게 확인할 수 있는 방법을 제시해 준다. 이 원리는 전체집합을 U라 하고 $A_1, A_2, \cdots, A_n$을 U의 n개의 부분집합이라 하자. 그러면 $A_1, A_2, \cdots, A_n$의 합집합의 원소의 개수는 $\left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right|$이다. 이를 여집합에 적용하여도 성립한다. ‘M_5’ 문항의 발문은 다음과 같다.

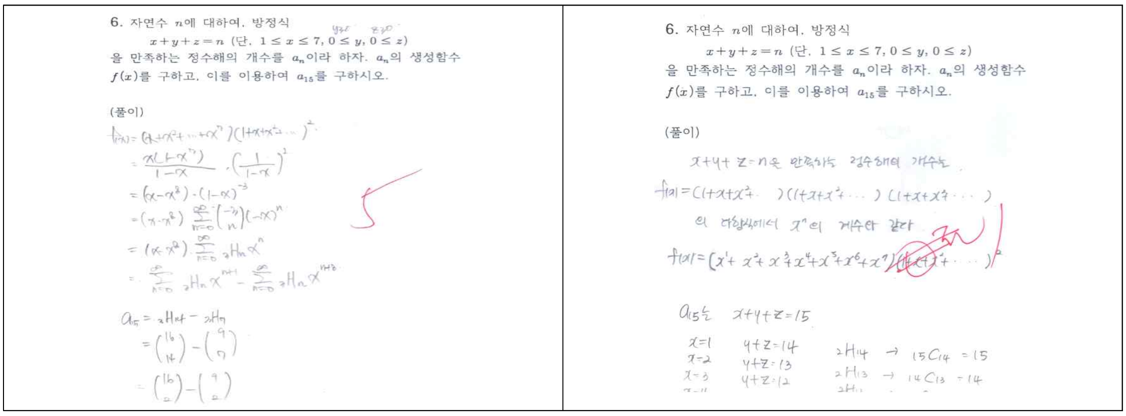
숫자 1, 2, 3으로 이루어진 n자리 수 중에서 각각 $1, 2, 3$을 적어도 한번 포함하는 수의 개수를 구하시오.

이 문항은 1, 2, 3으로 이루어진 n자리 수의 전체 집합 $|U|$와 전체집합 U 중에서 $i(i = 1, 2, 3)$가 포함되지 않은 수를 원소로 갖는 n자리 수의 집합을 A_i라 할 때, $\left|A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C\right|$를 두 집합 사이의 관계인 $|U| - \left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right|$을 이용하여 구하는 문제이다. 이 평가문항에서 예비교사들은 깊은 개념적 접근보다는 중복조합과 순열의 단순 연산으로 접근하려는 경향을 보였다. 예를 들면, n자리 중 1, 2, 3을 적어도 한 번 포함하므로 세 자리를 제외한 나머지 $n-3$개의 자리에 1, 2, 3을 중복배열하면 된다고 생각하여 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$으로 답을 얻으려 시도하는 것이다. 또한 일부 예비교사는 스털링수(Stirling numbers of the second kind) $S(n, k)$의 의미로 해석하기도 하였다. 포함배제의 원리에 관한 기본적인 문제임에도 불구하고 정답률은 32.90%로 다소 낮은 편이고, [그림 Ⅳ-2]는 이 문항에 대한 예비교사의 반응 사례이다.



[그림 Ⅳ-2] 예비교사의 'M_5' 문항 반응 예

'M_6'은 수열 $\{a_n\}$의 생성함수 $f(x)$를 구하는 문제로 정답률은 35.48%이다. 본 문항은 2014학년도 중등임용 기출문항으로 실제 난도는 배점이 3점인 중수준의 문항이었다. $1 \leq x \leq 7$, $0 \leq y$, $0 \leq z$에 대하여 $x+y+z=n$을 만족하는 정수해의 개수를 a_n이라 할 때, a_n의 생성함수 $f(x)$를 구하고, 이를 이용하여 a_{15}를 구하는 문항으로 교육과정을 이수한 예비교사들의 중등임용 문항에 대한 문제해결 정도를 알아보고자 출제하였다. 우선 x, y, z의 조건을 어떻게 해석할 것인가의 문제인데, 방정식 $x+y+z=n$ (단, $1 \leq x \leq 7$, $0 \leq y$, $0 \leq z$)을 만족하는 정수해의 개수와 다항식 $f(x)=(x+x^2+\cdots+x^7)(1+x+x^2+\cdots)^2$에서 x^n의 계수가 같다는 수학적 지식이 필요한 문항이다. 그렇지만 일부 예비교사는 이러한 식을 세우지 못하거나 식을 세우긴 하였으나 문제해결의 다음 단계$f(x)=(x+x^2+\cdots+x^7)(1-x)^{-2}$이고, 일반화된 이항정리를 이용하여 $(1-x)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty} {}_2\mathrm{H}_n x^n$을 유도하는 것과 그 다음 $f(x)=(x+x^2+\cdots+x^7)\sum_{n=0}^{\infty} {}_2\mathrm{H}_n x^n$에서 x^{15}의 계수를 얻는 문제임을 깨닫지 못해 문제해결에 어려움을 겪는 것으로 확인되었다. 아래 [그림 Ⅳ-3]에서는 예비교사의 'M_6' 문항에 관한 문제해결방법을 볼 수 있다.

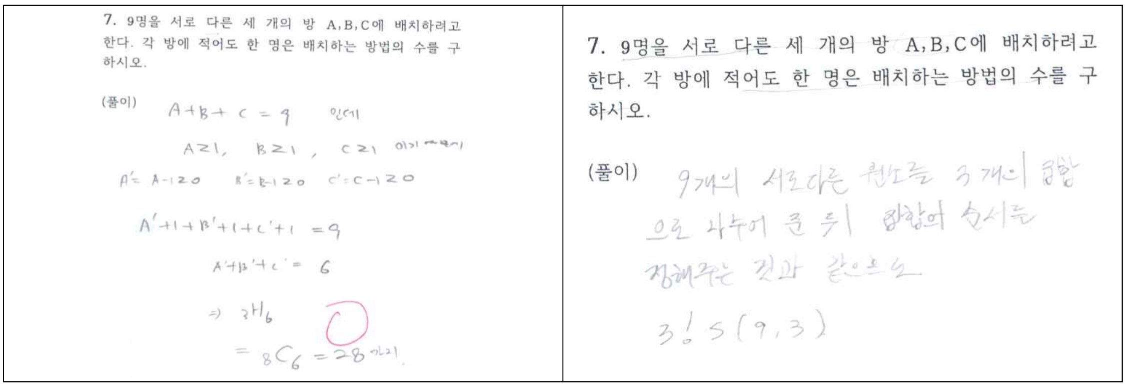


[그림 Ⅳ-3] 예비교사의 'M_6' 문항 반응 예

수학을 통해 자연현상과 사회현상을 해석하는 능력은 수학교육의 중요한 목적이기도 하다. 이때 필요한 능력은 수학적 모델링과 관련되어 있다. 수학적 모델링은 보이는 현상을 수학이라는 도구를 사용하여 그 본질을 규명하기 위한 과정 전체를 가리킨다. 학습자가 어떤 수학적 개념이 내면화되어 있지 않은 경우 문제해결 과정에서 무엇을 해야 할 것인가의 계획과 목표를 세우거나 발견하지 못하게 된다. ‘M_7’은 이러한 수학적 모델링 문항으로 발문은 다음과 같다.

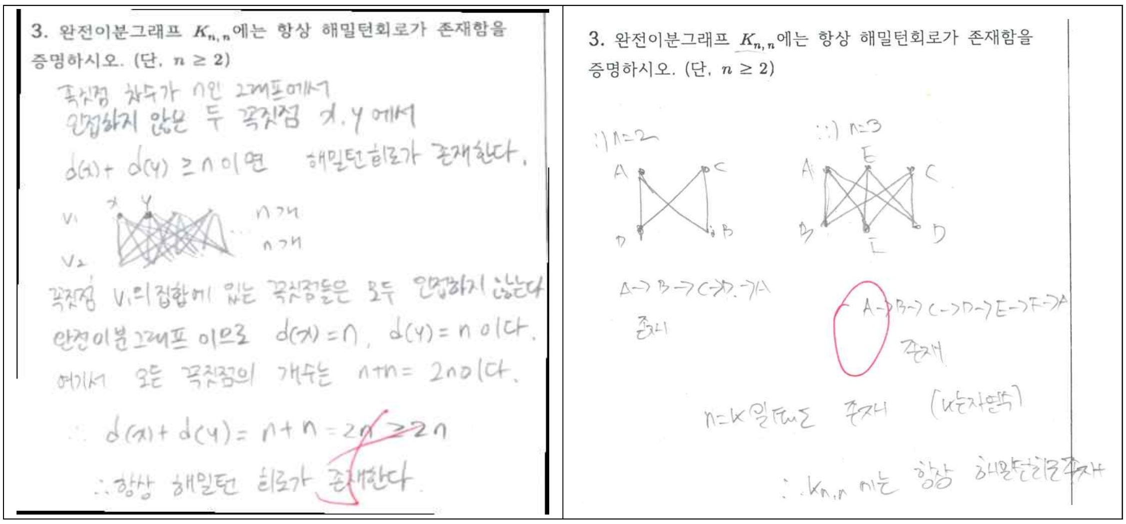
> 9명을 서로 다른 세 개의 방 A, B, C에 배치하려고 한다. 각 방에 적어도 한 명은 배치하는 방법의 수를 구하시오.

이 문항은 ‘M_6’의 세트문항이라 할 수 있다. ‘M_6’은 일반생성함수, ‘M_7’은 지수생성함수에 관한 것으로 ‘M_6’이 방정식의 정수해를 직접 구하는 문항이라면 ‘M_7’은 주어진 상황을 규명하기 위해 식을 세워 문제를 해결하는 지수생성함수로의 모델링 문항이다. 이제 드러난 현상, n명을 서로 다른 세 개의 방 A, B, C에 배치하려고 할 때, 각 방에 적어도 한 명을 배치하는 방법의 수 $\{a_n\}$가 이면의 본질인 주어진 수열 $\{a_n\}$에 대한 지수생성함수 $f(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3$에서 $\frac{x^n}{n!}$의 계수와 같다는 것을 추론할 수 있어야 한다. 또한 $f(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3=(e^x-1)^3$이고, $f(x)=(e^x-1)^3=\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-3\cdot 2^n+3)\frac{x^n}{n!}-1$이므로 $a_n=\begin{cases}0 & (n=0)\\ 3^n-3\cdot 2^n+3 & (n\geq 1)\end{cases}$이 된다. 따라서 $n=9$일 때의 $a_9=3^9-3\cdot 2^9+3$이다. 그러나 ‘$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=9(\mathrm{A}\geq 1, \mathrm{B}\geq 1, \mathrm{C}\geq 1)$라 할 때, $\mathrm{A}'+1=\mathrm{A}$, $\mathrm{B}'+1=\mathrm{B}$, $\mathrm{C}'+1=\mathrm{C}$로 놓으면 $\mathrm{A}'+\mathrm{B}'+\mathrm{C}'=6$이 된다. 따라서 구하고자 하는 값은 ${}_3\mathrm{H}_6$이다.’라거나 ‘S가 9-집합, S′가 3-집합일 때 S에서 S′로 가는 전사함수의 개수 $3!\,S(9,3)$이다.’로 이해한 풀이를 보인 일부 예비교사가 있었다. 이는 <표 Ⅳ-3>에서 볼 수 있듯이 생성함수 영역에서의 학습 곤란을 겪는다는 비율이 61.3%로 높게 조사된 것과 관련이 있다는 것과, 수열 $\{a_n\}$와 생성함수 $f(x)$의 관계, 그리고 Maclaurin 급수를 이용하여 생성함수 $f(x)$에서 일반항 a_n을 구하는 것을 어려워 한다는 것을 입증하는 예라 할 수 있다. [그림 Ⅳ-4]는 예비교사의 문항 ‘M_7’ 반응 사례이다.



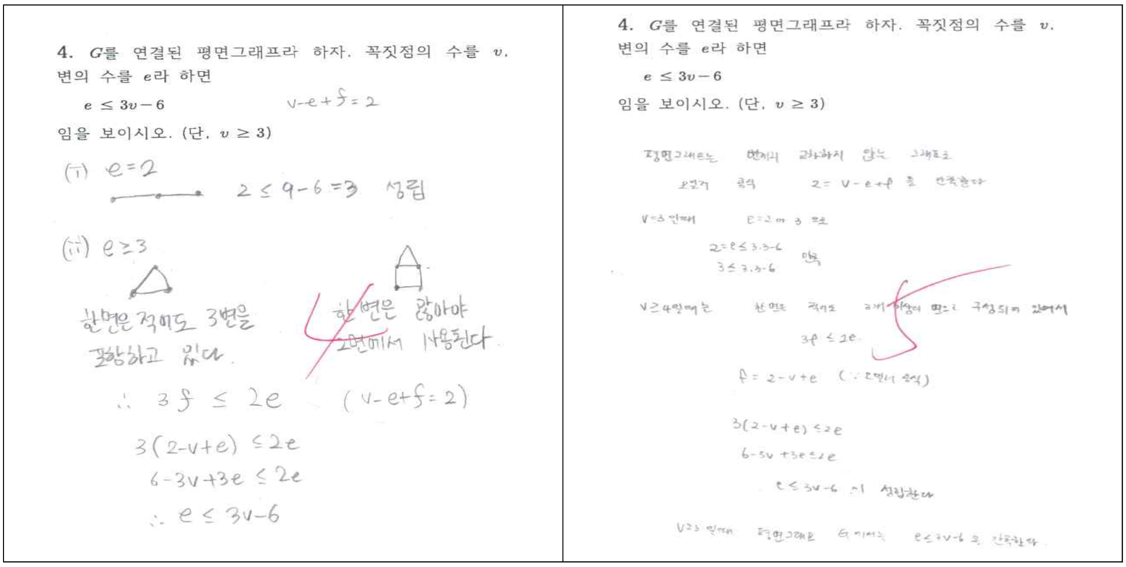
[그림 Ⅳ-4] 예비교사의 ‘M_7’ 문항 반응 예

이제, 그래프 단원의 문제해결을 살펴보고자 한다. 문항 'F_3'은 완전이분그래프 ($n \geq 2$)의 해밀턴회로의 존재를 증명하는 문제이다. 정답률은 가장 낮은 12.90%로 나타났다. 이 문항의 해법은 '(정리2) n개의 꼭짓점을 갖고 있는 연결그래프에서 인접하지 않은 임의의 두 꼭짓점 x, y의 차수의 합이 n 이상이면 해밀턴회로가 존재한다.'는 정리를 바탕으로 접근할 수 있다. 즉, '$d(x)+d(y) \geq n$이면 해밀턴회로가 존재한다.'는 성질로부터 출발하면 된다. 다시 말해, 완전이분그래프 $K_{n,n}$은 각 꼭짓점의 차수는 n이고 서로 인접하지 않는 두 꼭짓점의 차수의 합이 $2n$이므로 (정리2)에 의해 해밀턴회로가 존재한다. 그러나 일부 예비교사는 (정리2)를 전혀 학습하지 않았거나 학습하였더라도 이를 완전하게 이해하지 못한 도구적 이해 단계 수준에 머무르는 것을 보였다. 그러므로 (정리2)를 이용한 증명이 아닌 귀납적 방법으로의 증명 한계를 보이게 된다([그림 Ⅳ-5] 좌측). 또한 거짓인 가정을 세우고 결론을 이끄는 증명을 함으로써 항상 참인 명제를 증명하는 오류를 범하기도 한다. 이를 종합하면, 문제해결 전략에서의 필수 조건인 중요한 개념과 원리의 인지 구조화가 이루어지지 않아 문제해결의 어려움이 발생한 것으로 판단된다. [그림 Ⅳ-5]는 예비교사의 'F_3' 문항에 대한 반응 사례이다.



[그림 Ⅳ-5] 예비교사의 'F_3' 문항 반응 예

평면그래프 G에서 꼭짓점과 변의 관계식 $e \leq 3v-6(v \geq 3)$을 증명하는 문항 'F_4'는 정답률이 31.61%로 다소 낮았다. 그 이유는 평가 결과를 통해 두 가지로 분석되었는바, 하나는 변의 수 e, 꼭짓점의 수 v의 중 어느 것을 기준으로 증명을 이끌어 나갈 것인지 설정하지 못한 것이고, 다른 하나는 면의 수 f와 모든 차수의 합의 관계식 $3f \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2e$를 파악하지 못해서이다. 그러므로 본 문항이 평면그래프의 기본적인 정리임에도 불구하고 그와 같은 결과를 얻은 것으로 분석되었다. [그림 Ⅳ-6]는 예비교사의 'F_4' 문항에 대한 반응 사례이다. 반면, 수형도와 색칠문제의 학습곤란도 조사(<표 Ⅳ-4>)에서는 각각 25.8%, 38.7%로 그래프 영역에서 비율이 가장 높았으나 실제 평가 문항에서의 정답률은 수형도 45.16%, 그래프와 색칠문제 41.29%, 그리고 평면그래프와 색칠문제 52.26%로 나타나 그래프의 다른 내용요소보다 오히려 높게 나타났다. 이러한 결과는 학습 부담이 높은 내용요소에 대한 예비교사들의 집중적인 개념이해 학습과 적절한 학습 기법을 찾은 것에 기인한 것으로 보인다.



[그림 Ⅳ-6] 예비교사의 'F_4' 문항 반응 예

Ⅴ. 결론 및 제언

OECD(2003: 윤현진 등, 2009에서 재인용)에 따르면, 실세계에서의 수학의 역할을 확인하고 이해하는 능력, 현명한 판단을 내리는 능력, 그리고 개인이 삶의 요구에 맞도록 수학을 사용하는 능력을 수학적 소양이라고 정의하였다. 이러한 수학적 소양은 이산수학을 통해 자연스럽게 기를 수 있다. 왜냐하면 이산수학은 수학의 기본적인 개념과 원리, 법칙을 바탕으로 우리 주변에서 일어나는 이산 상황의 여러 문제를 수학적으로 분류하고 논리적 사고를 통한 합리적 문제해결의 능력과 태도를 기를 수 있는 교과이기 때문이다. 내용요소 또한 실생활 소재는 물론 4차 산업혁명 시대의 필수적인 코딩, 프로그래밍, 테크놀러지 등과 관련된 기초 학습을 다룬다. 이러한 점에서 본 연구는 일부지역, 소수를 대상으로 이루어진 연구라는 제한점은 있으나 예비 수학교사들이 이산수학 학습에서 겪는 어려움을 조사하고 분석하여 미래 학교수학을 가르칠 예비교사들에게 이산수학 학습 보정 기회를 제공하고, 더불어 사범대학 이산수학 강좌의 교수·학습 개선을 위한 시사점을 얻고자 진행되었다. 이를 통해 본 연구에서 얻은 결론과 제언은 다음과 같다.

첫째, 이산수학 교육의 필요성에 대한 예비교사들의 가치 인식 공유이다.

이산수학 학습에 대한 예비교사들의 인식조사에서 전체 31명 중 30명(96.8%)이 필요하다고 응답하였다. 그러나 왜 필요한가의 질문 답변에는 '유용성', '실생활'의 키워드가 비록 포함되어 있으나 구체적이고 명확함은 부족하였다. 이는 장차 교단에서 이산수학을 가르칠 예비교사들이 이 교과목을 왜 가르쳐야 하는지 그 목적과 목표를 정확하게 알지 못한 채 학생들을 만나게 된다는 의미이기도 하다. 예비교사들이 언급하였듯이 이산수학은 그 응용성과 유용성이 담보되어 있음에도 학교 수학의 주변으로 밀려나 있다. 그래서 더욱 이산수학 교육의 필요성에 대한 예비교사의 올바른 인식이 요구된다. 이 부분에 있어 NCTM(1989)이 '왜 이산수학이 중요한가' 의 근거로 다섯 가지로 나누어 강조하였는지를 참고할 만하다. 하나는 이산수학이 보안과 관련된 암호학, 자동화 장치, 프로그램 언어 작성 등 현대

사회에서 사용 분야가 계속해서 증가하기 때문이라는 것이다. 둘째는 수학의 다른 교과목에 비해 선수학습 지식이 크게 요구되지 않아 모든 학년에서 다양한 방식으로 문제해결의 소재를 풍부하게 제공할 수 있다는 측면이다. 셋째는 이산수학의 주제들이 일상적이며, 우리 주변에서 쉽게 만나는 실생활 맥락에서 정보를 찾아 이를 단순화하고 개연화하여 문제해결의 아이디어를 얻는 수학적 경험 즉, 수학화 활동을 경험할 수 있다는 것이다(Casey, Fellows, 1997: 윤현진 등, 2009에서 재인용). 넷째는 수학을 싫어하고 실패한 학생들에게 수학의 흥미를 불러일으킬 주제가 포함되어 있으며, 사고과정의 위계성이 강하여 쉽고 간단한 문제부터 복잡하고 추상적인 문제 상황까지 변화시킬 수 있어 풍부한 이산수학적 상황을 제시할 수 있다는 것이다. 그리고 마지막으로 이산수학은 연역적으로 전개되었던 전통적인 대수, 해석, 기하의 교육과정을 보완하는 새로운 가능성을 제공하기 때문이라는 것이다. 이처럼 이산수학은 시대적인 변화 추세를 반영하며, 미래사회에서 요구되는 수학적 지식과 소양을 갖추도록 하는데 부합하는 교과목이라 하지 않을 수 없다. 예비교사들이 이러한 이산수학의 가치에 대한 재인식이 필요하다.

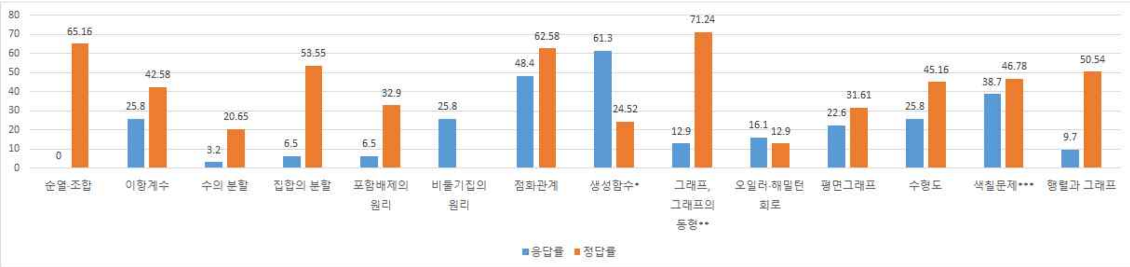
둘째, 이산수학 내용요소의 적정성 및 이수 시수의 검토이다.

사범대학에서의 이산수학은 세기, 점화관계와 알고리즘, 그래프 등 크게 세 개의 주제를 주로 다룬다(김창일 등, 2017). 구체적인 내용요소는 <표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-3>, <표 Ⅳ-4>에서와 같이 순열과 조합, 이항계수, 수의 분할, 집합의 분할, 포함배제의 원리, 비둘기집의 원리, 점화관계, 생성함수, 그래프, 그래프의 동형, 오일러회로, 해밀턴회로, 평면그래프, 수형도, 색칠문제, 행렬과 그래프이다. 이러한 내용요소들을 2~3학점으로 모두 이수하기에는 시수가 부족한 편이다. 물론 예비교사들이 학습곤란을 적게 느끼는 내용요소보다는 점화관계(48.4%), 생성함수(61.3%), 색칠문제(38.7%)와 같이 학습 도움이 필요한 부분에 강의를 집중하더라도 정확한 개념형성, 수학적 구조, 수학적 사고 등을 강조하며 교수·학습이 이루어지기 위해서는 절대적 시간 확보가 요구된다. 뿐만 아니라 예비교사는 학문의 학습자이면서 동시에 미래 학교수학의 교수자이기에 기본적으로 학습하는 이산수학의 내용요소들에 대한 교육목표와 Freudenthal(1973: 박교식, 1992에서 재인용)이 고등수학의 일부를 학교에서 교과로 반영하기 위해 낮은 수준으로 각색하는 것을 나타내기 위해 사용한 내용요소의 초등화(初等化)과정을 경험하도록 학부에서의 안내가 이루어져야하기에 더욱 그렇다. 만일 이수 시수 확보가 전제된다면 점화관계에서의 여러 가지 점화관계식, 동차선형점화관계식, 특성다항식과 생성함수에서의 일반생성함수, 지수생성함수, 그리고 색칠문제에 대한 수준과 내용을 강화하고, 중등의 학교수학과의 연계성도 고려한 교육과정 조직으로 현재 발생한 여러 결점을 보완할 수 있을 것이라 생각된다. 여기에 한국교육과정(2008)이 제시한 이산수학 내용요소에서 알고리즘(알고리즘, 복잡도, 탐색알고리즘, 분류알고리즘 등), 게임이론(영합 게임, 비영합 게임, 결정적 게임, 비결정적 게임, 게임의 값, 최적 전략 등), 공편한 분배(여러 가지 공평한 분배, 유산상속문제 등) 등 누락된 내용을 새롭게 추가 확대하여 예비교사들에게 이산수학을 통한 다양한 수학적 지식으로의 추상화 경험을 제공할 수 있을 것이다. 그렇지 못하고 현재 조건하에서라면 예비교사들의 학습 곤란 정도를 배려하여 세기, 점화관계와 알고리즘, 그래프 대신 세기, 그래프, 점화관계와 알고리즘 순으로 다루는 주제 내용의 순서 이동 고려가 필요하다.

셋째, 예비교사의 학습 곤란 발생 원인을 내용 요소의 어려움으로 한정하는 국소적 시각 탈피이다.

예비교사들의 학습 곤란 내용요소는 <표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-3>, <표 Ⅳ-4>의 응답률과 <표 Ⅳ-5>의 정답률을 보면 알 수 있다. 예비교사들은 생성함수(61.3%), 점화관계(48.4%), 색칠문제(38.7%), 그리고 이항계수(25.8%)의 순으로 어려움을 토로했다. 실제 평가를 통한 정답률 결과로는 오일러·해밀턴회로(12.9%), 수의 분할(20.65%), 생성함수(24.52%) 순으로 성취도가 낮게 나타났다. 응답율과 실제 정답률을 한발 더 들여다보면, 예비교사들이 어렵다고 응답한 점화관계(48.4%), 색칠문제(38.7%) 경우 실제 정답률은 각각 62.58%, 46.78%로 나타나 이 자료만 비교해서는 문제해결에 큰 어려움을 겪었다고 볼

수 없는 결과이다. 또한 오일러·해밀턴회로는 어려움을 느낀다는 응답률이 16.1%로 체감으로는 매우 쉬운 내용요소였으나 정답률에서는 반대로 12.9%로 가장 낮게 나타나 실제로는 문제해결과정에서 가장 어려움을 느낀 문항으로 분석되었다. 다만, 학습에 어려움을 느낀다는 응답률이 높았던 생성함수(61.3%)는 실제 정답률에서도 24.52%로 나타나 예비교사의 응답과 어느 정도 일치하는 것으로 나타났다.



[그림 Ⅴ-1] 예비교사의 학습 곤란 내용요소 응답률과 평가 실제 정답률

[그림 Ⅴ-1]은 예비교사의 학습 곤란 내용요소 응답률(<표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-3>, <표 Ⅳ-4>)과 평가 실제 정답률(<표 Ⅳ-5>)을 비교 도식화한 것이다. 단, 효율적인 도식 이해를 위해 생성함수*의 정답률은 수열 $\{a_n\}$의 생성함수 $f(x)$ 구하기 'M_6', 실생활 상황의 지수생성함수로의 모델링 'M_7'의 각각의 정답률 35.48%, 13.5%의 평균인 24.52%로, 그래프·그래프의 동형**은 그래프의 꼭짓점과 변의 수를 알아보기 위한 'F_1'과 동형사상의 정의와 동형 판별에 대한 'F_2' 문항의 정답률 86.02%, 56.45%의 평균 71.24%, 그리고 색칠문제***의 정답률 46.78%는 조건을 만족시키는 그래프 G가 평면그래프인가의 판별과 채색수 $\chi(G)$를 구하는 'F_5', 수형도로 이루어진 그래프 G의 변의 수를 구하는 'F_6'의 각각의 정답률 52.56%, 45.16%의 평균이다.

각각의 학습 곤란 내용요소((<표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-3>, <표 Ⅳ-4>)와 평가 문항(<표 Ⅳ-5>)에 대한 분석은 Ⅳ장에서 구체적으로 언급하였으므로 여기서는 다른 두 가지 시각에서 재조망해 보고자 한다. 하나는 이산수학이라는 교과의 영역 특성이다. 이산수학은 유한집합이나 셀 수 있는 집합에서의 문제해결방법을 동원하게 된다. 이러한 이산적인 방법 외에 실생활을 관찰, 조사하며 귀납적인 사고 방법을 훈련하게 된다. 그러나 이산적·귀납적인 방법으로 이산수학의 주제들을 모두 다루기에는 선천적 한계가 있다. 예를 들면, 이항정리 $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$에서 a는 임의의 실수이다. 또 생성함수에서는 형식적 무한급수(formal power series)를 취급하기는 하나 Taylor 급수와 Maclaurin 급수의 연속 개념을 받아들여야 한다. 그리고 가장 벗어나기 어려운 것은 이산수학 소재들을 정리한 명제의 연역적 증명 절차이다. 이처럼 이산수학은 비물질 세계를 다루면서 물질적인 현상을 분석하고 이해하도록 하는 연속수학의 실수, 연속, 증명이라는 개념과 절차가 동시에 요구된다. 즉, 이산수학 학습에 다른 장애요소가 상존하고 있다. 이에, 오일러·해밀턴회로의 학습 곤란 응답률 16.1%와 해밀턴회로의 존재 증명 문항 'F_3'의 정답률 12.9%의 괴리는 이로 설명이 가능하다. 물론 새롭게 접하는 생성함수의 내용요소('M_6', 'M_7')는 다른 내용요소들에 비해 학습에 있어 어려운 물리적 제약이 정답률로 이어져 나타난 것으로 해석된다. 다른 하나는 사범대학이라는 특수성이다. 사범대학은 타 대학과 달리 교직이라는 진로를 정해놓고 학습의 출발선상에 서게 된다. 따라서 교과목 학습량이 전통적 수학인 대수와 해석이 많을 수밖에 없어 이산수학은 학문적 위치뿐만 아니라 학습량에서도 우선순위에서 밀려나 있다. 단적

으로 중등임용에서 이산수학에서 출제되는 문항의 수는 2014학년도 이후 단 1개의 문항만이 출제되고 있어 이산수학 교과목은 예비교사의 관심 밖에 놓여 있다. 이는 학습해야 하는 양에 비해 출제 비중이 매우 낮아 교과목 학습 태도에 온전히 영향을 끼치게 된다. 기본적 이해 수준에서 해결할 수 있는 패러다이어그램(Ferrer's diagram)이 주대각선에 대칭인 21의 분할의 수를 찾는 문항 'M_3'의 정답률이 20.65%가 이를 잘 대변한다고 할 수 있다. 이렇듯 예비교사의 이산수학에 대한 어려움 호소에는 학습요인 이외 외적 환경 요소도 내포되어 있음이다.

다음은 결론에 따른 두 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 중등 학교수학과 대학의 교육과정 연속성 측면에서 이산수학 내용요소의 체계성, 계열성에 대한 연구이다. 김창일 등(2017)의 연구에서 사범대학에서의 이산수학은 세기, 점화관계와 알고리즘, 그래프 등 크게 세 개의 주제를 주로 다루는 것으로 조사되었다. 1997년 고시된 제 7차 교육과정에서의 이산수학 교과의 학습내용은 <표 Ⅱ-1>에서 보듯이 선택과 배열(순열과 조합, 세기의 방법), 그래프(그래프, 수형도, 여러 가지 회로, 그래프의 활용), 알고리즘(수와 알고리즘, 점화관계), 의사결정의 최적화(의사결정과정, 최적화와 알고리즘)과 비교해 보면 이것은 학교수학에서 다루던 의사결정의 최적화도 접하지 못하는 비정상적인 교육과정 설계가 된다. 더욱이 학습량 경감과 학습 수준을 낮추는 방향으로 개정된 2015 개정 수학과 교육과정의「고급수학」교과목의 수학적 모델링도 누락된 상황이다. 이는 대학에서도 배우지 않은 내용을 학교 현장에서 가르쳐야 하는 이율배반적인 문제가 발생된다. 이를 개선함은 물론 학생에게 중요한 것, 수학적으로 중요한 것, 그리고 미래사회에서 중요하게 요구되는 이산수학의 내용과 주제들을 중심으로 중등과 대학에서의 이산수학을 체계적으로 새롭게 정비할 필요가 있다.

둘째, 중등임용에서의 이산수학 교과목에 대한 출제 비중 확대 고려이다. 교육과정과 평가는 연계되어야 한다. 이런 점에서 현재 이산수학의 중요성과 교육과정 내용 요소를 고려하면 이산수학이(물론 이산수학 교과목 이외 다른 교과목도 중요하지만)중등임용에서 다소 소홀히 취급되고 있음을 부인하기 어렵다. 이산수학이 수학과 현실을 가깝게 만드는 교과목이라는 하나의 축과 AI로 대변되는 제 4차 산업혁명 시대의 수학적 소양을 담기 위한 교과목이라는 또 다른 한축으로서 이산수학을 이해하고 바라본다면, 중등임용에서 이산수학의 출제 비중을 높이는 문제에 대해 관련 전문가들의 심도 있는 논의가 이루어질 요청해 본다.

참고 문헌

교육부 (2014a). **이산수학**. 교육인적자원부.

교육부 (2014b). **이산수학 교사용 지도서**. 교육인적자원부.

김창일, 전영주 (2017). 수학과 중등임용 이산수학 기출 문항 분석. **한국콘텐츠학회 논문지, 17**(10), 472-482.

박교식 (1992). **함수 개념 지도의 교수현상학적 접근**. 박사학위논문. 서울대학교 대학원, 서울.

윤현진, 박선용, 김서령, 이영하 (2009). 수학과 교육 내용 개선 방안 연구 - '이산수학', '확률과 통계' 영역을 중심으로 -. 한국교육과정평가원, 연구보고 RRC 2009-3-3.

이상구, 이재화 (2019). 학생중심의 대학 이산수학 강의 운영사례. **한국수학교육학회지 시리즈 E, 33**(1), 1-19.

이양락, 김선희, 고정화, 조영미, 구자형 (2005). 2004년 국가수준 학업성취도 평가 연구 -수

학-. 한국교육과정평가원, 연구보고 RRE 2005-1-4.
이재학 (2003). 중등학교 교사 양성을 위한 이산수학 강좌에 대한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 A, 42**(4), 579-588.
한국교육과정평가원 (2008). **2009학년도 개편 중등교사임용후보자선정경쟁시험 표시과목 「수학」의 교사 자격 기준 개발과 평가 영역 상세화 및 수업 능력 평가 연구**, 연구보고 CRE 2008-6-2.
Bailey, H. F. (1997). *The Status of Discrete Mathematics in the High Schools*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol.36, 311-316.
Crisler, N., Fisher. P., & Froelich, G. (1997). *A Discrete Mathematics Textbook for High Schools*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 36, 323-330.
Middleton, J. A., Toncheff, M., & Haag, S. (2011). Growth in Secondary Teachers' Content Knowledge and Practice in Discrete Mathematics, *PME-NA 2011 Proceedings,* 425-433.
NCTM (1989). *Curriculum and evaluation Standards for School Mathematics,* VA.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics,* VA.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
Pagliaro, C., & Kritzer, K. L. (2005). Discrete Mathematics in Deaf Education: A Survey of Teachers' Knowledge and Use. *American Annals of the Deaf*, Vol 50(3), 251-259.

A Study on the Difficulties of Pre-service Mathematics Teachers in the Discrete Mathematics Learning

Rim, Haemee[3)] · Jeon, Youngju[4)]

Abstract

This study aims to improve teacher education by analyzing the causes and backgrounds of which pre-service mathematics teachers experience learning difficulties on the topic of discrete mathematics. To this end, we conducted a questionnaire and an evaluation on the topic of discrete mathematics, and the obtained data were analyzed. The results show that (1) pre-service mathematics teachers need to share their perceptions of the need for discrete mathematics education; (2) a review of the adequacy of the discrete mathematical content and its credits are required; (3) the causes of their learning difficulties need to be looked at from a different perspective than the learning factors. And two implications were obtained. First, it is necessary to study the systematicity and sequence of content elements of discrete mathematics in the aspect of its continuity of curriculum of secondary school and university. Second, it is required consideration for adjusting the ratio of discrete mathematics to secondary teachers' employment examination.

Key Words : Pre-service Mathematics Teacher, Discrete mathematics, Learning Difficulty

Received February 03, 2020
Revised February 27, 2020
Accepted February 29, 2020

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97B50
4) Kongju National University (rimhaemee@kongju.ac.kr)
5) Jeonbuk National University (jyj@jbnu.ac.kr), Corresponding Author