한국학교수학회논문집 제 23 권, 제 1호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 23, Number 1, 67-88, March 2020
http://doi.org/10.30807/ksms.2020.23.1.004

예비교사들의 HCK 분석 : 역함수 기호에 대한 이해를 중심으로

신보미[1]

여러 국외 연구는 SMK의 주요 특징을 HCK와 관련하여 설명하면서 수학 교사 교육의 핵심 목표 중 하나로 HCK의 개발을 강조하였다. 그러나 국내에는 SMK의 하위 요소로서 HCK의 구체적인 의미를 살피거나 우리나라 교사들이 지닌 HCK의 특징을 본격적으로 분석한 연구가 거의 없다. 이에 이 연구는 Ball & Bass(2009)의 관점에서 HCK를 다룬 국외 연구를 검토하여 대학 수학을 통해 개발될 필요가 있는 HCK의 특징을 구체적으로 확인하였다. 또한 대학 수학의 목표가 AMT 개발에 있음을 강조한 Zazkis & Leikin(2010)에 따라 AMT 관련 선행 연구를 분석하여 HCK 개발의 기반이 되는 AMT의 핵심 특징을 구체화하였다. 이를 토대로 예비교사들의 HCK를 역함수 기호에 대한 이해에 주목하여 분석하기 위한 지필 검사 도구를 개발하였으며, 이를 예비교사 57명에게 적용하여 얻은 답변 자료를 검사 도구 개발 의도 및 함수 개념 수준에 비추어 분석하였다. 이로부터 역함수 및 역함수 기호와 관련하여 예비교사들이 지닌 HCK의 특징을 4가지로 추출하였으며, 각각의 특징이 지닌 시사점을 수학 교사 전문성 신장을 위한 HCK 개발의 측면에서 기술하였다.

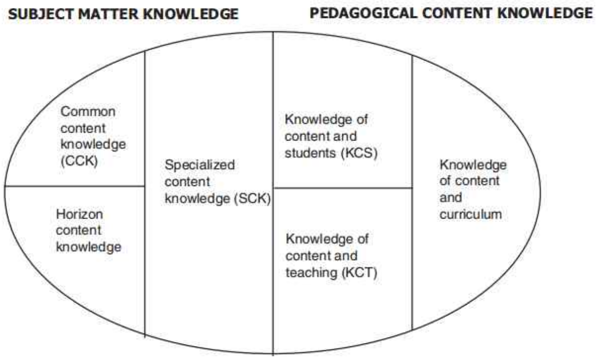
주요용어 : 수학적 식견으로서의 지식(HCK), 교과 내용 지식(SMK), 고등 수학적 사고(AMT), 교사 지식, 역함수, 역함수 기호

Ⅰ. 서론

Ball, Thames, & Phelps(2008)는 '수학을 가르치는데 필요한 지식(mathematical knowledge for teaching, 이하 [MKT])'을 '교과 내용 지식(subject matter knowledge, 이하 [SMK])'과 '교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge, 이하 [PCK])'으로 구분하고 [그림 Ⅰ-1]과 같이 6가지 하위 요소를 제시하였다. Ball et al.(2008)은 [그림 Ⅰ-1]을 설명하는 과정에서 '수학적 식견으로서의 지식(horizon content knowledge, 이하 [HCK])'을 "수학 내용이 교육과정에서 다루는 수학과 어떻게 관련되는지를 아는 지식"(p. 403)이라고 하였다. 그러나 이는 HCK가 의미하는 바를 명확히 설명하고 있지 않아 교사 지식 연구에 시사를 얻기가 어려우며(Cho & Tee, 2018), SMK의 하위 요소인 HCK와 PCK의 하위 요소인 KCC[2]의 차이를 모호하게 한다(Zazkis & Mamolo, 2011). 실제로 최근 10년간 교사들의 MKT를 분석한 국내 연구 총 16편중 11편은 의미가 분명하지 않은 HCK를 제외하고 다른 하위 요소만으로 MKT를 다루었으며, 5편은 HCK를 교육과정에 대한 지식으로 해석함으로써 KCC와 혼용하였다[3].

---

* MSC2010분류 : 97B50, 97C30, 97D80
1) 전남대학교 교수 (bomi0210@jnu.ac.kr)
2) 내용과 교육과정에 대한 지식(knowledge of content and curriculum, 이하 [KCC])



[그림 Ⅰ-1] MKT의 하위 요소(Ball et al., 2008, p. 403)

교사 지식은 복합적이고 다면적인 요소와 이들 요소간의 상호작용을 통해 드러나므로 각 요소의 의미를 배타적으로 기술하는데 어려움이 있으나, 이를 가능한 정교하게 규명하려는 시도에 의해 그 개발과 평가를 위한 구체적 방안을 모색할 수 있다(Shulman, 1987). 이러한 맥락에서 Ball et al.(2008) 역시 HCK에 대한 자신들의 설명에 한계가 있음을 인정하고 SMK의 하위 요소로서 HCK의 의미를 좀 더 탐색할 필요가 있다고 제안하였다. 이후 Ball & Bass(2009)는 HCK를 PCK의 하위 요소인 KCC와 구별하여 “가르칠 수학을 넘어서는 폭넓은 수학적 상황에 대한 지식”으로 정의함으로써, SMK의 다른 하위 요소로서 가르칠 수학 내용과 직접적으로 관련되는 SCK나 CCK와의 차이도 함께 설명하였다. Ball & Bass(2009)에 따르면 HCK는, 수학 교사가 겪는 이중단절(double discontinuity)[4]을 극복하는데 필요한 능력으로 클라인(Klein)이 제안한 “학교 수학에 대한 높은 수준의 이해”와 밀접한 관련이 있다[5].

여러 연구는 수학 교사 전문성의 핵심 토대로 SMK에 주목하였다(Guberman & Gorev, 2015; 고희정, 고상숙, 2013). 특히 Vale, McAndrew, & Krishnam(2010)은 SMK의 중심에 HCK를 두고 수학 교사 교육의 주요 목표는 HCK의 개발에 있다고 역설하였다. Jakobsen, Thames, & Ribeiro(2013)에 따르면 교사는 HCK를 통해 가르치는 수학 너머를 볼 수 있으며 학생의 전략을 수학적 관점에서 해석할 수 있다. 또한 HCK가 풍부한 교사는 수업에서 학생이 제기하는 예상치 못한 질문이나 의견에 적절히 대처할 수 있으며 필요한 경우 계획했던 수업 목표를 학생의 요구에 따라 유연하게 변화시킬 수 있다(Zazkis & Marmur, 2018). 이처럼 여러 국외 연구는 SMK의 주요 특징을 HCK와 관련지어 설명하고 HCK의 의미를 구체화하거나 그 개발 방안을 모색하였다. 그러나 수학 교사 지식을 분석한 국내 연구 대부분은 SMK보다 PCK를 주로 다루었으며(송근영, 방정숙, 2013), 수학 교사의 HCK를 Ball & Bass(2009)의 관점에서 살피는데 거의 주목하지 않았다. 이에 본 연구는 선행 연구에서 밝힌 HCK의 의미를 구체적으로 확인하고, 교사 교육과정을 통해 교사 지식으로서 의미있는 HCK를 개발하기 위해 좀 더 강조할 필요가 있는 측면을 탐색하여 HCK의 의미를 풍부히 하고자 한다. 이를 토대로 예비교사들의 HCK를 역함수 기호에 대한 이해에 주목하여 분석함으로써 수학 교사 전문성 신장에서 HCK가 갖는 시사점을 기술하고자 한다.

3) 학술연구정보서비스(http://www.riss.kr/)를 통해 2011년 3월부터 2019년 12월까지의 기간 동안 등재(후보) 학술지에 게재된 논문 중 주제어 MKT로 검색한 결과를 분석하여 얻은 결과이다.

4) 대학에 들어온 예비 수학 교사는 학교 수학과는 다른 대학 수학을 접하면서 한 번의 단절을 느끼고, 교사가 되어 대학 수학과 전혀 다른 학교 수학을 가르치게 될 때 또 다시 단절을 경험하게 된다(Klein, 1932).

5) 이하에서 사용되는 HCK의 의미는 Ball & Bass(2009)의 관점에 기초한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. HCK의 의미

HCK는 수학을 학생에게 소개하기 위한 목적으로 습득한 지식이라기보다 교사 스스로 수학적인 활동을 수행하면서 얻게 된 지식으로, 교사가 대학 수학을 통해 학문적인 수학을 경험함으로써 '수학의 주요 아이디어와 구조', '수학의 필수 관행' 등을 인식하게 되는 것을 이른다(Ball & Bass, 2009). Ball & Bass(2009)는 수학을 지도하기 위해서 교사는 학교 수학을 폭넓은 수학적 견지에서 바라볼 수 있어야 함을 강조하면서 HCK를 MKT의 하위 요소로 명시하였다. 특히 Jakobsen et al.(2013)은 교사가 대학 정수론 강좌에서 배운 귀류법에 비추어 무리수에 대한 학생의 설명을 해석하는 과정을 HCK의 발현으로 기술함으로써, 교사 지식으로서 HCK가 갖는 특징을 대학 수학과 관련하여 제시하였다. 한편 Zazkis & Mamolo(2011)는 대학 수학을 통해 습득한 SMK를 의미하는 '고등 수학적 지식(advanced mathematical knowledge, 이하 [AMK], Zazkis & Leikin, 2010)'이라는 개념을 이용하여 HCK를 수업 상황에서 활용되는 AMK로 규정하였다. 이들에 따르면 AMK를 지닌 교사는 수학적 구조와 핵심 아이디어, 수학 용어 및 용어 사이의 관계와 같은 수학의 학문적 특징이 학교 수학을 통해 드러나도록 수업을 실행할 수 있다. 그러나 교사가 대학 수학을 배운 것만으로는 수업 상황에서 AMK를 적합한 방식으로 활용할 수 있다고 보장하기 어려우므로(Figueiras, Ribeiro, Carrillo, Fernández, & Deuloffeu, 2011), HCK의 토대가 되는 AMK의 특징을 수학적 이해나 사고와 같은 인지적 측면에서 살펴볼 필요가 있다.

Montes, Ribeiro, Carrillo, & Kilpatrick(2016)은 Ball & Bass(2009)가 HCK와 깊은 관련이 있다고 언급한 "학교 수학에 대한 높은 수준의 이해(Klein, 1932)"가 의미하는 바를 구체화하기 위해 수학 교사 지식을 개념화한 여러 연구를 분석하여 이들 연구가 직 · 간접적으로 지식의 연결성에 주목하고 있음을 확인하였다. 교사가 학교 수학을 높은 수준에서 이해한다는 것은 교사 자신이 수학이라는 학문 분야에 정통하여 수학적 개념, 절차, 성질 등을 연결하여 파악할 수 있음을 뜻하며, HCK는 연결성과 관련된 수학적 사고를 핵심 특징으로 갖는다(Montes, et al., 2016). 실제로 교사의 연결 지식은 개별 수업 사이에 일관성을 유지하거나 과제 계열을 설계할 때 중요한 역할을 하며(Turner & Rowland, 2011), 학생의 의견이나 설명에 적절히 반응하여 수학적인 의미를 부여하는데 실질적인 영향을 미친다(Mellone, Jakobsen, & Ribeiro, 2015).

Vale et al.(2010)은 교사에게 필요한 연결 지식과 HCK의 관계를 수학적 식견에 의한 연결 짓기로 해석하고, 대학 수학을 통해 예비교사는 수학적 구조에 대한 통찰 능력을 개발해야 한다고 강조하였다. 수학적 구조의 통찰이라는 관점에서 바람직한 HCK를 지닌 교사는 구체적인 상황에서 드러나는 일반적인 성질을 수학적 대상 사이의 위계 관계로 규명할 수 있으며, 특정 수학 개념에 대한 폭넓은 관계망을 통해 해당 개념과 관련된 여러 해석의 유사점과 차이점을 알아볼 수 있다. 수학에 대한 깊은 이해를 교사 지식의 핵심 특징으로 강조한 Ma(1996) 역시 교사에게 필요한 가장 상위 수준의 이해는 수학적 구조에 대한 이해라고 설명하였다.

이상의 선행연구는 HCK가 AMK를 통해 개발되는 연결성 관련 수학적 사고 및 수학에 대한 구조적 통찰과 깊은 관련이 있음을 시사하지만, 이와 같은 수학적 사고나 이해에 도달하기 위해 필요한 정신활동의 구체적인 특징까지를 보여주지는 않는다. 한편 Zazkis & Leikin(2010)은 톨(Tall)의 편집으로 1991년에 출판된 단행본인 '고등 수학적 사고'에서 영감을 얻어, 대학 수학을 통한 고등 수학적 사고(advanced mathematical thinking, 이하 [AMT]) 개발의 중요성을 강조하였으며 대학 수학을 통해

습득하는 SMK를 AMT에 쓰인 용어를 빌어 AMK로 정의한 바 있다. 이 점에 착안하여 앞서 선행연구가 밝힌 HCK와 관련되는 AMK의 인지적 특징을, HCK 개발을 위해 대학 수학이 주목할 필요가 있는 AMT로 해석하면 HCK 개발에 필수적인 정신활동의 특징을 AMT에 비추어 좀 더 탐색해 볼 수 있다. 이에 다음 절에서는 '고등 수학적 사고(1991)'에 수록된 논문을 비롯한 AMT 관련 선행 연구를 분석하여 예비교사들이 대학 수학에서 다루는 AMK를 통해 경험할 필요가 있는 AMT의 특징을 기술함으로써, HCK 개발의 토대가 되는 정신활동의 특징을 AMT와 관련하여 살펴본다.

2. AMT와 '과정-개념'

Tall(1991)은 대학에서 다루는 형식 체계로서의 고등 수학과 정신활동인 고등 사고로서의 수학을 구분하고, 수학 개념을 조작적 과정(process)에서 정신적 대상(object)으로 인식하는 상태의 변화를 수학적 사고 발달의 핵심 특징으로 강조하였다. Harel & Kaput(1991)은 이와 같은 인식 상태의 변화를 '개념적 실체(conceptual entity)의 구성'으로 명명하고 이를 AMT의 필수 작용으로 보았다. 예를 들어 대학 수학을 통해 두 함수 공간 사이의 사상을 다루는 것은 정의역과 공역의 원소인 함수를 인지적 '대상'인 개념적 실체로 파악하는 정신활동을 배경으로 하며, 이는 함수를 입-출력 '과정'으로 인식하는 것보다 높은 수준의 AMT를 토대로 한다.

Tall(2013)은 수학적 개념 형성의 인지활동 중 가장 상위 수준에서 일어나는 AMT의 특징을 과정-개념(procept)으로 설명하였다. 과정-개념은 수학적 개념을 과정, 대상, 기호라는 3요소의 통합체로 인식하는 정신활동을 이른다. 이 수준에서는 과정이었던 수학적 개념이 정신적 조작이 가능한 대상으로 압축되며, 기호는 과정이면서 동시에 대상을 뜻하는 개념의 수학적 의미를 담아 해당 개념을 인지구조의 일부로 통합한다. 예를 들어 기호 $(x,\ y)$는 다른 벡터를 성분 x, y만큼 이동시키는 '과정'을 지시함과 동시에 2차원 공간에 존재하는 '대상'으로서의 벡터 자체를 표현한다. 벡터의 수학적 의미로서 이러한 과정-개념을 기호 $(x,\ y)$로부터 인식하여 수학적 구조를 형성하는데 AMT가 주요한 역할을 한다.

한편 개념적 실체의 구성과 관련된 AMT의 힘은 수학 기호의 의미를 이해하고 조작하는 역량에 달려 있다(Harel & Kaput, 1991; Tall, 2013). 기호를 이용하면 복잡한 아이디어의 조작 과정을 하나의 덩어리로 묶어 표현할 수 있고, 기호를 통해 개념을 정신적 대상으로 다루어 새로운 아이디어를 생성할 수도 있다. 기호는 과정이었던 수학적 개념을 실체로 대상화하거나 과정과 대상이라는 개념의 의미를 동시에 표현하는데 도움을 주며, 추론 과정에서 동일한 개념적 실체를 다른 방법으로 조작하는 도구로 활용되어 이들을 서로 연결하고 하나의 구조로 체계화하는 역할을 한다. 기호 8+6은 덧셈이라는 과정, 합이라는 대상으로서의 수학적 개념을 나타냄과 동시에, 이러한 개념적 실체를 정신적 조작에 의해 14[6], 6+8, 5+9처럼 표현할 수 있도록 하여 이들 사이의 연결성을 드러내는데 활용된다.

이상에 따르면 AMT는 수학적 개념 형성의 인지활동에서 과정으로서의 개념을 수학적 대상으로 압축하는 개념적 실체를 구성하고, 개념을 정적인 대상으로 파악하여 이를 수학적으로 조작하는 기능을 수행한다. 개념의 이원성과 관련된 AMT의 이러한 작용은 개념을 표현하거나 다루는데 쓰이는 기호의 의미와 역할에 대한 이해 정도와 깊은 관련이 있다. 즉, AMT 활동의 주요 특징은 수학적 개념을 과정, 대상, 기호의 통합체로 인식하는 정신활동인 과정-개념의 구성으로 요약할 수 있으며, 이러한 AMT 활동을 통해 수학적 대상을 서로 연결지어 그 구조를 통찰하는 것이 가능하게 된다. 이는 HCK

6) 세기를 통한 '과정'으로서의 덧셈이 아니라 합이라는 '대상'을 나타내는 것으로 기호 8+6을 인식하면 8+2가 10이고 6-2는 4라는 정신적 조작을 통해 8+6을 기호 14처럼 다른 방법으로 표현할 수 있게 된다(Tall, 2013).

개발을 위해 대학 수학에서 주목할 필요가 있는 연결성 관련 수학적 사고 및 수학에 대한 구조적 통찰 능력이 수학적 대상을 과정-개념으로 파악하는 AMT 활동을 통해 얻어질 수 있으며 이러한 AMT 활동은 수학 기호를 이해하고 조작하는 역량에 기반함을 보여준다.

3. 함수 개념과 역함수 기호

과정-개념의 구성과 관련하여 AMT의 작용을 가장 잘 보여주는 예는 함수이다(Tall, 2013). 함수를 입력 값에 따라 출력 값이 만들어지는 관계로 생각하여 정의역에 있는 원소를 공역에 있는 원소로 보내는 '과정'으로 인식하는 것은 함수 개념 발달 수준의 초기 단계로서 가치가 있다. 그러나 함수 개념에 대한 체계적인 틀이 인지구조로 자리 잡기위해서는 함수의 3요소인 함수 규칙, 정의역, 공역을 하나의 개념적 실체로 압축하는 AMT 활동을 통해 개별 함수를 함수 집합의 한 원소인 '대상'으로 파악하는 수준에 이르러야 한다. 이러한 AMT 작용에 의해 두 함수 f, g를 연산하여 새로운 함수 $(f \circ g)(x)$을 생성하는 합성 개념의 구조적 의미를 이해할 수 있다(Dubinsky, 1991).

과정-개념의 의미에 비추어 볼 때 함수에 대한 개념적 실체를 구성하는 AMT 활동의 특징은 기호에 대한 이해와 조작 활동을 통해 드러난다. 특히 역함수 기호에 대한 해석에서 드러나는 역함수 개념으로부터 함수 개념 발달과 관련된 AMT의 작용 양상을 살펴볼 수 있다(Brown & Reynolds, 2007). 학교 수학에서 역함수는 일대일대응인 함수 $f: X \to Y$, $y=f(x)$에 대하여 Y의 각 원소 y에 $y=f(x)$을 만족하는 X의 원소 x을 대응시키는 함수 $f^{-1}: Y \to X$와 같이 주어진 함수의 역대응으로 정의되며(이준열 외, 2017), 주로 역함수를 구하는 대수적인 '과정'에 집중하여 지도가 이루어진다. 주어진 함수식에서 x와 y을 바꾼 다음 이를 y에 대하여 풀면 역함수를 구할 수 있고, 원래 함수의 그래프와 역함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이 된다는 성질이 학교 수학을 통해 주요하게 다루어진다. 한편 대학의 대수학 강좌에서는 일대일대응인 함수의 집합 G는 합성 $\circ$에 대해 대수적 구조인 군을 이루는 바, 역함수 f^{-1}는 항등함수 I에 대하여 $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$을 만족하는 함수로 이항연산 $\circ$에 대한 역원을 의미한다. 이처럼 역함수를 일대일대응인 함수 군 구조하의 $\circ$에 대한 역원으로 해석하는 수준에 이르기 위해서는 입-출력 과정이었던 함수를 집합의 한 원소인 '대상'으로 압축하여 파악하는 AMT 활동이 전제되어야 한다(Brown & Reynolds, 2007).

이상에 따르면 학교 수학에서 역함수 기호 f^{-1}가 나타내는 역함수 개념은, 반대로 대응시키기, x와 y을 바꾸기, 직선 $y=x$에 대하여 대칭하기와 같이 '과정'으로서의 함수 개념을 토대로 하며 함수의 합성과 관련된 개념적 이해를 직접적으로 필요로 하지는 않는다. 그러나 대학 수학에서 역함수는 군 $(G, \circ)$에서 $\circ$에 대한 역원을 의미하므로, 역함수를 설명하는데 $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$와 같은 표현이 필수적으로 사용된다. 즉, 대학 수학에서 다루는 역함수는 두 함수를 연산하여 새로운 함수를 생성하는 합성 개념에 대한 구조적 이해를 필요로 하며, 이는 함수를 '대상'으로 파악하는 과정-개념 수준의 이해에 기반한다. 실제로 이와 같은 역함수 개념의 특징은 역함수 기호 f^{-1}을 5^{-1}와 관련하여 해석할 때 구체적으로 드러난다(Zazkis & Marmur, 2018). 일반적으로 군의 원소 a에 대해 a의 역원은 a^{-1}와 같이 a에 위 첨자 -1을 붙여 나타내는 바, f^{-1}는 일대일대응인 함수 군 G에서 $\circ$에 대한 f의 역원을 의미하며 5^{-1}는 0이 아닌 유리수의 집합에서 곱셈에 대한 5의 역원을 의미하므로 서로 다른 맥락을 표현하는 것처럼 보이는 f^{-1}과 5^{-1}을 특정 이항연산에 대해 역원을 나타내는 기호로 해석하면 역함수와 역수를 대수적 구조인 군이라는 공통 원리로 통합하여 조직할 수 있다. 이상과 같이 학교 수학과 대학 수학을 통해 습득할 수 있는 역함수 및 역함수 기호에 대한 이해의 차이는 함수 개념 수준의 특징을 보여주며 그 내용을 요약하면 <표 Ⅱ-1>[7]과 같다.

<표 Ⅱ-1> 역함수 및 역함수 기호에 대한 이해와 관련된 함수 개념 수준

함수 개념 수준	역함수 및 역함수 기호에 대한 이해
과정으로서 함수	* 원래 함수의 정의역과 공역을 바꾸어 반대로 대응시키는 함수이다. * 원래 함수식에서 x와 y을 바꾸면 구할 수 있다. * 역함수의 그래프는 원래 함수의 그래프와 직선 $y=x$에 대해 대칭이다.
대상으로서 함수	* 일대일대응인 함수 f, 항등함수 I에 대하여 $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$을 만족하는 함수이다. * 함수의 합성 $\circ$에 대한 역원이다. * 기호 f^{-1}은 이항연산의 역원을 나타낸다는 점에서 기호 5^{-1}과 같은 의미를 갖는다.

본 연구는 교사 지식으로서 의미있는 HCK를 개발하기 위해 교사 교육과정에서 강조할 필요가 있는 측면을 탐색하여 HCK의 의미를 풍부히 하고 이로부터 예비교사들의 HCK를 역함수 기호에 대한 이해에 주목하여 분석함으로써 수학 교사 전문성 신장에서 HCK가 갖는 시사점을 기술하는데 목적을 둔다. 이러한 연구 목적 달성의 이론적 토대로 이 장에서 살펴본 선행연구에 따르면 HCK의 개발을 위해 대학 수학에서는 연결성 관련 수학적 사고 및 수학에 대한 구조적 통찰 능력에 주목할 필요가 있으며, 이는 수학적 대상을 과정-개념으로 파악하는 AMT 활동을 통해 함양될 수 있다. 한편 함수에 대한 과정-개념 구성과 관련된 AMT의 작용은 함수 개념 수준의 특징 및 역함수 기호 f^{-1}을 5^{-1}와 관련하여 해석하는 양상에 비추어 살펴볼 수 있다.

이에 본 연구는 다음과 같이 연구문제를 설정하여 예비교사들이 지닌 HCK의 특징을 역함수 기호에 대한 이해를 중심으로 기술하고자 한다.

1) 예비교사들은 역함수 기호 f^{-1}을 5^{-1}와 관련하여 어떻게 설명하는가?

2) 예비교사들이 제시한 설명은 함수 개념 수준과 관련하여 어떤 특징이 있는가?

Ⅲ. 연구방법

1. 검사 도구

Zazkis & Mamolo(2011)은 실제 수업 상황을 예로 들어 $5^{-1} = \frac{1}{5}$이기 때문에 $f^{-1}(x)$을 $\frac{1}{f(x)}$과 같다고 보는 학생의 혼동에 대해 교사가 보이는 반응에서 교사의 HCK를 알아볼 수 있다고 하였다. 앞 장에서 살펴보았듯이 역함수 기호 f^{-1}을 5^{-1}과 연결지어 군의 관점에서 통합적으로 설명하는 것은 역함수를 일대일대응인 함수 군 구조하의 $\circ$에 대한 역원으로 파악하는 개념 수준을 보여주며 이는 함수를 과정-개념으로 파악하는 AMT 활동을 전제로 한다. 즉, 이상과 같은 학생의 혼동을 f^{-1}과 5^{-1}이 표현하는 개념의 구조적 유사성에 비추어 다루는 것은 가르칠 수학인 함수와 관련하여 폭넓은 수학적 상황에 대한 지식인 HCK가 발현된 것으로 학교 수학에서 다루는 함수 개념에 대해 교사가 지닌 높은 수준의 이해를 보여준다.

7) 대학에서 함수를 다루는 맥락은 학교 수학을 통해 함수를 입-출력 과정으로 학습한 경험을 전제로 하므로, 대학 수학을 통해 함수를 대상으로 파악하는 AMT 활동이 새롭게 일어남을 강조할 때는 대학 수학이 목표하는 함수 개념 수준을 '과정-개념으로서 함수'라는 용어보다 '대상으로서 함수'라는 용어로 설명한다.

한편 Watson, Beswick, & Brown(2006; Adler & Davis, 2006)은 교사 지식이 수학을 가르치는 맥락 속에서 의미를 갖는 실행 지식이므로 그 특징을 살피기 위해서는 교사가 마주할 수 있는 수업 상황을 배경으로 할 필요가 있다고 강조하였다. 이에 연구자들은 학교 수학에서 다루는 구체적인 내용 요소를 지도하는 가상의 수업 상황에서 학생이 제기한 질문에 대한 답변을 작성하는 지필 검사 문항을 개발하여 해당 내용 요소와 관련된 교사 지식의 특징을 분석한 바 있다. 특히 Watson et al.(2006)에 따르면 이러한 지필 검사 문항에 대한 교사들의 반응으로부터 해당 내용 요소와 관련되는 대학 수학 내용에 대해 교사들이 지닌 이해의 특징도 간접적으로 살필 수 있다. 또한 양선아, 이수진(2019)은 학교 수학과 대학 수학 사이의 연계성에 대한 교사 지식의 특징을 알아보기 위하여 [그림 Ⅲ-1]과 같이 특정 수업 상황에서 학생이 제기한 가상의 질문에 대해 어떻게 답하겠는지를 묻는 지필 검사 문항을 활용하였다.

ㄱ교사는 「복소수의 연산」에 대한 수업 후, 다음과 같은 학생의 질문을 받았습니다. 아래 질문에 답해주세요.

학생 : 선생님, 오늘 수업 시간에는 내내 계산만 한 것 같아요. 답을 그냥 $\frac{1}{1+i}$라고 쓰면 안되나요? 중학교 때도 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$이 나오면, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$처럼 분모에 무리수를 없애는 계산을 해야 한다고 선생님께서 말씀하셔서 하기는 했는데... 대체 분모의 유리화, 실수화를 굳이 왜 해야 하나요?

[그림 Ⅲ-1] 가상의 수업 상황에서 학생이 제기하는 질문에 대한 답변을 요구하는 지필 검사 문항의 예(양선아, 이수진, 2019, p. 429)

이상에 따르면 가상의 수업 상황에서 학생이 제기하는 질문에 대해 어떻게 답변하겠는지를 묻는 지필 검사 문항은 수업에서 활용되는 AMK로서 대학 수학과 학교 수학을 구조적으로 연결하여 바라보는 HCK의 특징을 파악하는데 적합한 도구가 될 수 있다. 이에 이 연구는 예비교사들의 역함수 기호에 대한 이해를 분석하여 함수를 과정-개념으로 다루는 AMT의 작용 양상을 살펴보고 이로부터 역함수 및 역함수 기호와 관련하여 예비교사들이 지닌 HCK의 특징을 기술하기 위해, Zazkis & Mamolo(2011)가 예로 든 수업을 활용하여 Watson et al.(2006; Adler & Davis, 2006; 양선아, 이수진, 2019)의 문항 유형이 포함된 지필 검사 도구를 개발하였다[8].

이러한 지필 검사 도구에서 문항 1의 개발 의도는 예비교사들이 기호 f^{-1}과 5^{-1}의 관계를 어떻게 설정하는지 살핌으로써 학교 수학을 통해 다루는 함수에 대해 예비교사들이 지닌 폭넓은 상황 지식으로서의 HCK를 분석하는데 있다. 문항 2에서는 문항 1의 설명이 해당 상황에 대한 예비교사 자신의 수학적 이해와 다를 수 있음을 감안하여, '수학을 전공한 사람에게 이 문제를 어떻게 설명하겠는지'를 물음으로써 교사 지식의 PCK 측면이 아니라 SMK의 하위 요소로서 HCK의 특징을 직접적으로 밝히려는 개발 의도가 있다. 문항 3은 학생이 겪는 어려움과 관련하여 문항 1에서 학생에게 제시한 조치가 타당한 이유를 예비교사들이 어떻게 설명하는지 알아봄으로써 문항 1을 통해 드러난 HCK의 특징과 학생의 어려움을 인식하는 양상의 관련성을 확인하려는 개발 의도를 담고 있다.

8) 지필 검사 도구의 세부 내용은 <부록>을 참조하기 바란다.

2. 연구대상 및 분석 방법

이 연구의 연구대상은 광역시 소재 사범대학 수학교육과 3, 4학년, 수학교육 부·복수전공 및 교직 이수 학생 57명이다. 연구대상은 졸업과 동시에 수학 2급 정교사 자격을 취득하게 되는 예비교사들[9]로 교육실습 이수 여부 등의 세부 정보는 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 연구대상 세부 정보

연구대상 정보	수학교육과 3학년		수학교육과 4학년		수학교육 부·복수 전공		교직 이수	
	교육실습 이수	교육실습 미이수	교육실습 이수	교육실습 미이수	교육실습 이수	교육실습 미이수	교육실습 이수	교육실습 미이수
인원수	0	23	18	3	4	5	1	3

개발된 검사 도구를 활용하여 2019년 9월에 해당 학과에서 진행하는 예비교사 수업 역량 강화 특별 프로그램에 참여한 연구대상 57명을 대상으로 약 1시간에 걸쳐 연구자의 참관 하에 지필 검사를 실시하였다.

지필 검사를 통해 수집한 예비교사들의 답변 자료는 검사 문항 개발 의도 및 <표 Ⅱ-1>에 비추어 분석하였다. 특히 문항 1에 대한 예비교사들의 답변은 기호 f^{-1}과 5^{-1}을 대수적 구조인 군이라는 공통 원리로 통합하여 조직한 경우(이하 [범주 1])와 그렇지 않은 경우로 우선 범주화한 다음, f^{-1}과 5^{-1}을 군 구조로 통합하지 않았더라도 두 기호의 공통점에 주목한 경우(이하 [범주 2-1])와 두 기호의 차이점을 강조한 경우(이하 [범주 2-2])로 분류하여 각 범주에 속하는 예비교사들의 인원수를 파악하였다. 범주 1과 범주 2-1의 예비교사들은 두 기호에 사용된 위 첨자 -1의 다의어(polysemy)로서의 측면에, 범주 2-2의 예비교사들은 위 첨자 -1의 동음이의어(homonymy)로서의 측면을 강조하여 살핀 것으로 볼 수 있다[10]. Mamolo(2010)에 따르면 서로 다른 기호가 공유하는 수학적 의미를 인식하는 것은 해당 기호가 나타내는 수학적 개념의 구조를 파악하는데 기여하는 바, 문항 1의 답변을 이상과 같이 범주화하는 것은 수학적 구조의 통찰과 관련되는 HCK의 특징을 설명하는 적절한 방법으로 볼 수 있다. 다음으로는 범주 1과 범주 2-1, 2-2로 분류된 예비교사들의 세부 답변 내용을 <표 Ⅱ-1>을 토대로 분석하여 함수 개념에 대한 AMT의 작용 양상을 살펴보았으며, 이를 문항 2 및 문항 3의 답변 내용과 관련하여 각 문항의 개발 의도에 비추어 확인함으로써 예비교사의 역함수 및 역함수 기호에 대한 HCK의 특징을 알아보았다.

이상과 같은 분석의 과정은 연구자와 수학교육전공 박사 과정에 있는 현직 교사 2명이 개별적으로 진행하였으며, 개별 분석 과정에서 분석자들 간에 차이가 발생하는 부분에 대해서는 4회에 걸친 공동 논의를 통해 지속적으로 수정하고 보완하여 최종 분석 결과를 도출하였다.

9) 연구대상은 학부과정에 있는 예비교사들로 교육대학원 등의 석사과정 학생은 포함되지 않는다.

10) 다의어는 서로 다른 용어가 공유하는 공통의 의미에 주목하여 해당 용어의 특징을 설명하는 것이며, 동음이의어는 같은 기호로 표현된 서로 다른 의미를 강조할 때 활용되는 용어이다(Mamolo, 2010).

Ⅳ. 연구결과

문항 1에 대한 예비교사들의 답변은 연구문제 1의 해결과 관련되는 바, 두 기호 f^{-1}과 5^{-1}을 군 구조로 통합하는지 여부 및 두 기호의 공통점에 주목하는지 여부에 따라 범주 1과 범주 2-1, 2-2로 분류하였다. 또한 각 범주에 속한 예비교사들의 설명은 <표 Ⅱ-1>에 비추어 함수 개념 수준별로 구분함으로써 연구문제 2를 해결하고자 하였다. 나아가 연구문제 1과 2에서 드러난 특징사이의 관계를 알아볼 수 있도록 문항 2의 답변은 문항 1에서 예비교사들이 제시한 설명 내용에 따라 정리하였으며, 문항 3의 답변은 문항 1의 답변 범주별로 그 특징을 요약하였다. 이상을 정리한 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 문항 1, 2, 3에 대한 예비교사들의 답변 요약

<table>
<tr><th></th><th>범주</th><th>내용(인원수)</th><th>인원수</th><th>설명</th><th>함수 개념 수준</th><th>문항 2 답변(인원수)</th><th>문항 3 답변(인원수)</th></tr>
<tr><td rowspan="8">문항 1 답변</td><td rowspan="4">범주 1</td><td rowspan="4">f^{-1}과 5^{-1}에서 -1은 역원을 나타내는 같은 기호이다.(15)</td><td>4</td><td>①항등원, 역원, $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$을 모두 사용하여 설명</td><td>대상으로서 함수</td><td>문항 1과 같은 설명</td><td rowspan="4">*역함수를 함수의 합성에 대한 역원으로 파악하지 못했기 때문이다.(9)
*함수의 합성을 수의 곱셈처럼 연산으로 인식하지 못했기 때문이다.(6)</td></tr>
<tr><td>6</td><td>②항등원, $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$을 사용하여 설명</td><td>대상으로서 함수</td><td>문항 1과 같은 설명</td></tr>
<tr><td>4</td><td>③$f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$을 사용하여 설명</td><td>대상으로서 함수</td><td>군, 이항연산, 항등원, 역원으로 설명</td></tr>
<tr><td>1</td><td>④항등원, 역원, $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$을 사용하지 않고 설명</td><td>대상으로서 함수</td><td>군, 이항연산, 항등원, 역원으로 설명</td></tr>
<tr><td rowspan="2">범주 2-1</td><td rowspan="2">f^{-1}과 5^{-1}에서 -1은 '거꾸로'라는 같은 의미를 나타내지만 해석은 맥락에 따라야 한다.(23)</td><td>14</td><td>⑤원래 함수식에서 x와 y을 바꾸어 y에 대한 식을 찾는 함수이다.</td><td>과정으로서 함수</td><td>*문항 1과 같은 설명(11)
*무응답(3)</td><td rowspan="2">*같은 기호가 다른 맥락을 표현하기 때문이다.(16)
*무응답(7)</td></tr>
<tr><td>9</td><td>⑥원래 함수의 대응관계를 거꾸로 바꾼 함수이다.</td><td>과정으로서 함수</td><td>*문항 1과 같은 설명(8)
*군, 이항연산, 항등원, 역원으로 설명(1)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">범주 2-2</td><td rowspan="2">f^{-1}과 5^{-1}에서 -1은 모양만 같을 뿐 완전히 다른 의미를 나타낸다.(19)</td><td>8</td><td>⑦원래 함수의 대응관계를 거꾸로 바꾼 함수이다.</td><td>과정으로서 함수</td><td>*문항 1과 같은 설명(5)
*무응답(3)</td><td rowspan="2">*엄연히 다른 기호를 같게 보았기 때문이다.(5)
*기호가 같으면 의미도 같아야 한다고 생각하기 때문이다.(10)
*무응답(4)</td></tr>
<tr><td>11</td><td>⑧실생활의 비슷한 상황을 예로 들어 설명</td><td>·</td><td>*문항 1과 같은 설명(9)
*무응답(2)</td></tr>
</table>

<표 Ⅳ-1>를 통해 예비교사들의 역함수 및 역함수 기호에 대한 이해로부터 드러난 HCK의 특징은 다음과 같이 4가지로 요약할 수 있다. 이하에서는 이러한 특징을 문항 1, 2, 3의 구체적인 답변에 비추어 상술함으로써 수학 교사 전문성 신장을 위한 HCK 개발과 관련되는 시사점을 살펴본다.

* 학생에게 제시하는 설명의 양상은 역함수에 대한 HCK 수준에 의해 대부분 결정된다.
* 역함수를 군 구조와 연결짓는 HCK를 토대로 위 첨자 -1의 의미를 설명한 예비교사들만 학생의 어려움을 함수 개념과 관련하여 해석한다.
* 역함수와 역수가 공유하는 의미를 '거꾸로'로 파악한 예비교사들은 역함수의 식을 구하는 맥락에 더 주목한다.
* 역함수와 역수의 차이를 강조한 예비교사들만 함수 개념이 아닌 실생활 상황을 예로 들어 설명을 제시한다.

1. 학생에게 제시하는 설명의 양상은 역함수에 대한 HCK 수준에 의해 대부분 결정된다.

예비교사 43명[11)]은 문항 1에서 기호 f^{-1}과 5^{-1}의 관계에 대해 학생에게 제시한 설명을 문항 2에서도 그대로 기술하였다(연구문제 1). 문항 2는 '수학을 전공한 사람'에게 할 수 있는 설명을 작성하도록 하여 예비교사들이 기호 f^{-1}과 5^{-1}을 대수적 구조와 연결짓는 HCK를 지니고 있는지 직접적으로 확인하려는 의도를 담고 있다. 그러나 범주 2-1, 2-2에 속한 예비교사들 중 문항 2에 답한 33명은 [그림 Ⅳ-2]와 같이 수학을 전공한 사람에게도 [그림 Ⅳ-1]처럼 문항 1에서와 유사한 설명을 제시하였다.

지수에서의 -1은 역수를 의미하는 것과 비슷하게 함수에서의 -1는 역함수, 즉,
역 대응관계라고 할 수 있습니다.

[그림 Ⅳ-1] 문항 1에 대한 설명 ⑥ 사례

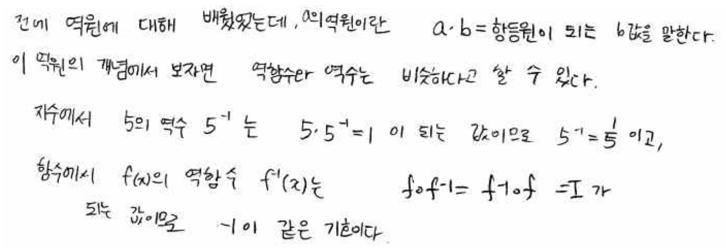
비슷하게 이해하고 있기는 하지만, '-1'가 '역', '거꾸로'의 의미로 이해하고 있습니다.
따라서 지수에서는 -1은 역수, 행렬에서는 -1은 역행렬, 함수에서는 -1은 역함수 등
'-1'의 의미는 인식하고 상황에 따라 그 의미가 달라진다고 생각합니다.

[그림 Ⅳ-2] [그림 Ⅳ-1]을 제시한 예비교사의 문항 2에 대한 답변

예비교사 33명은 대학에서 대수학 강좌를 통해 군 이론과 관련된 AMK를 학습하였지만[12)] 역함수를 '원래 함수식에서 x와 y을 바꾸면 구할 수 있는 함수' 또는 '원래 함수의 정의역과 공역을 바꾸어 반대로 대응시키는 함수'와 같이 학교 수학의 개념 수준에서 이해하고 있어(연구문제 2), 역함수를 대수적 군 구조에 비추어 보다 높은 수준으로 통찰하는 HCK를 개발하지 못한 것으로 보인다. 이는 대학에서 AMK를 학습한 것이 HCK 발달의 토대가 되는 AMT 활동을 보장하지 않는다는 Figueiras et al.(2011)과 같은 맥락에 있는 결과이다. 특히 Hodgen(2011)에 따르면 교사의 지식은 자신이 실행하는 수학 수업 및 학교 수학 교육과정에 의해 상황화되는 경향이 강하여 수학을 중ㆍ고등학교 수준으로만 해석하는데 쓰일 가능성이 크다. 이는 학교 수학을 폭넓은 수학적 견지에서 바라보는 HCK 개발에 직접적인 목표를 둔 교사 교육 강좌의 설계와 실행이 구체적으로 모색될 필요가 있음을 보여준다.

한편 범주 1에 속한 예비교사들 중 10명은 [그림 Ⅳ-3]과 같이 '항등원', '역원'이라는 용어 및 $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$과 같은 표현을 사용하여 학생들에게 f^{-1}과 5^{-1}에서 위 첨자 -1이 의미하는 바를 설명하였다(연구문제 1).

11) 문항 2의 답변 중 '문항 1과 같은 설명'을 제시한 인원수를 모두 합한 것이다.
12) 연구대상이 속한 사범대학 수학교육과는 3학년 1학기에 '대수학Ⅰ및 실습'을 전공필수 강좌로 개설하여 운영하고 있는 바, 연구대상 57명은 모두 해당 강좌를 이수하였다.

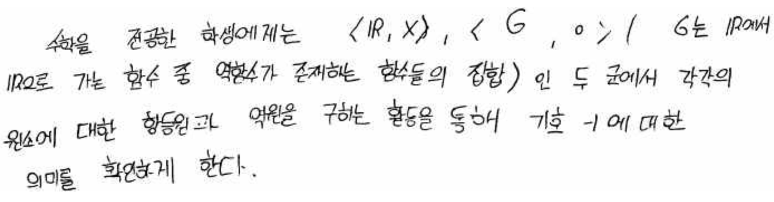


[그림 Ⅳ-3] 문항 1에 대한 설명 ① 사례

문항 1을 [그림 Ⅳ-3]과 같이 답한 예비교사 10명의 문항 2에 대한 설명을 볼 때, 해당 예비교사들은 역함수를 일대일대응인 함수 군의 합성 연산에 대한 역원으로 인식하는 함수 개념 수준에 있으며(연구문제 2), 이는 학교 수학에서 다루는 역함수를 대학 수학 내용과 연결짓는 HCK의 발현으로 볼 수 있다. 그러나 이들은 '항등원', '역원'이라는 학습 요소가 고등학교 수학에서는 다루어지지 않으며(교육부, 2015), $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$ 은 고등학교 교과서에서 $(f \circ f^{-1})(y) = y$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ (이준열 외, 2017)과 같이 함수끼리의 연산을 의미하는 표현보다는 함숫값이 같음을 강조하는 표현으로 다루어지고 있음을 간과한 채, 자신들이 대학에서 학습한 AMK를 학교 수학 지도에 그대로 사용하였다.

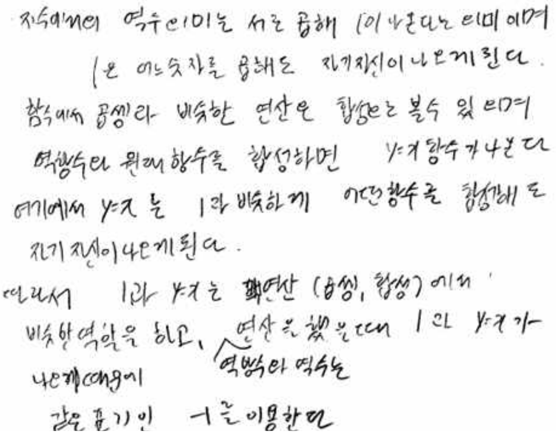
교사들이 겪는 이중단절 문제를 극복하기 위해서는 대학 수학과 학교 수학의 연계성이 강조되어야 하며 이를 위해 가르칠 수학에 대한 폭넓은 수학적 상황 지식인 HCK의 개발이 무엇보다 중요하다(Montes, et al., 2016). 그러나 대학 수학의 내용을 학교 수업에서 그대로 사용하는 전송 모델(transport model)에 배경한 HCK를 통해서는 이중단절 문제를 해결하는데 한계가 있다(Wasserman, Weber, Villanueva, & Mejia-Ramos, 2018). HCK는 학교 수학 지도 맥락을 풍부히 하고 활성화하여 학생의 학습을 돕고자 하는 교사 지식의 일부이므로, 교사 지식으로서 가치는 있는 HCK의 개발은 대학 수학의 관점에서 학교 수학을 보는 것뿐만 아니라 학교 수학의 관점으로 대학 수학을 보고 이를 학교 수학에 맞게 번역하는 교수학적 변환(Brousseau, 1998) 능력의 개발을 필수적으로 요구함에 주목할 필요가 있다.

한편 연구대상 57명 중 역함수를 일대일대응인 함수 군과 관련하여 다루는 대수학의 아이디어를 학교 수학 수준으로 변환하여 설명한 예비교사는 범주 1에서 설명 ③, ④를 제시한 예비교사 5명과 범주 2-1에서 설명 ⑥을 제시하고 문항 2에서 문항 1과 다른 설명을 제시한 예비교사 1명뿐이었다.

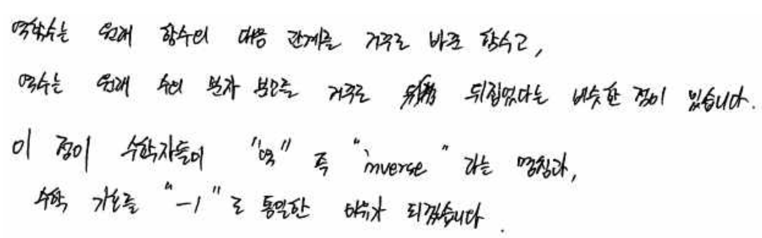


[그림 Ⅳ-4] 설명 ③을 제시한 예비교사의 문항 2에 대한 답변 사례

실제로 이들 6명은 [그림 Ⅳ-4]와 같이 문항 2에서 역함수와 역수 개념을 대수적 구조인 군에 비추어 통찰하는 HCK를 보여주었으며(연구문제 2), [그림 Ⅳ-5]와 같이 '항등원', '역원'이라는 용어 및 $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$ 과 같은 표현을 사용하지 않고 기호 f^{-1} 과 5^{-1} 의 위 첨자 -1 이 지닌 의미를 역원과 관련하여 설명하거나 [그림 Ⅳ-6]과 같이 고등학교에서 다루는 역함수 개념에 따라 기호 f^{-1} 과 5^{-1} 에 쓰인 -1 이 공유하는 의미를 '거꾸로'로 설명하였다(연구문제 1).



[그림 Ⅳ-5] 문항 1에 대한 설명 ④ 사례



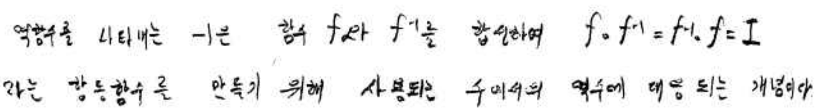
[그림 Ⅳ-6] 문항 2에서 문항 1과 다른 답변을 제시한 예비교사의 문항 1에 대한 설명 ⑥ 사례

이상에 따르면 기호 f^{-1}과 5^{-1}의 위 첨자 -1과 관련된 이슈를 다룰 때 예비교사 대부분은 역함수를 자기 자신이 이해하고 있는 함수 개념 수준 그대로 학생들에게 설명하는 경향이 있었다(연구문제 1, 2). 이러한 경향은 대상으로서의 함수 개념 수준에 기초하여 역함수를 일대일대응인 함수 군의 합성에 대한 역원으로 파악할 수 있는 예비교사나 역함수를 과정으로서의 함수 개념에 따라 학교 수학 수준에서 이해하고 있는 예비교사 모두에게서 나타났다. 즉, 예비교사가 문항 1에서 학생이 겪는 어려움을 돕기 위해 제시하는 설명은 예비교사가 함수나 역함수를 바라보는 HCK의 수준에 의해 직접적으로 결정된다고 볼 수 있다.

대학에서 군 구조를 학습하였지만 역함수를 학교 수학 수준에서 이해하고 있는 예비교사와 학교 수학의 역함수 지도 맥락을 고려하지 않고 대학 수학 내용을 그대로 전달하는 예비교사의 사례를 볼 때, 교사 지식으로서 의미있는 HCK의 개발은 학교 수학을 대학 수학의 관점에서 깊고 넓게 바라보는 안목의 함양을 한 축으로 하고 다른 한 축으로는 대학 수학을 학교 수학의 관점에서 적합하게 해석하는 변환 능력의 개발을 목표로 하여 진행될 필요가 있다.

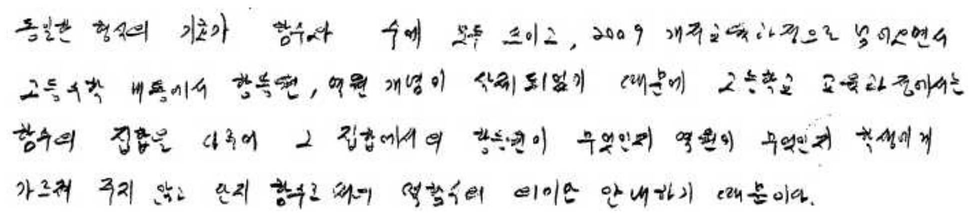
2. 역함수를 군 구조와 연결짓는 HCK를 토대로 위 첨자 -1의 의미를 설명한 예비교사들만 학생의 어려움을 함수 개념과 관련하여 해석한다.

앞 절에서 살펴본 바에 따르면 역함수에 대한 HCK의 수준에 따라 기호 f^{-1}과 5^{-1}에서 위 첨자 -1의 의미를 학생에게 설명하는 양상이 달라진다. 이와 더불어 역함수를 일대일대응인 함수 군의 합성에 대한 역원으로 바라보는 HCK를 지닌 예비교사 15명은 문항 1에서 대상으로서의 함수 개념 수준과 관련되는 설명 ①~④를 통해 기호 f^{-1}과 5^{-1}의 관계를 제시하였으며(연구문제 1, 2), 문항 3에서 학생이 겪는 어려움도 함수 개념 또는 함수의 합성 개념과 연관시켜 파악하였다(연구문제 2).


역함수를 나타내는 -1은 함수 f와 f^{-1}를 합성하여 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 라는 항등함수로 만들기 위해 사용되는 수에서의 역수에 대응되는 개념이다

[그림 Ⅳ-7] 문항 1에 대한 설명 ③ 사례

특히 [그림 Ⅳ-7]과 같이 설명 ③을 제시하여 위 첨자 -1을 역원을 나타내는 기호로 다룬 예비교사들 중 1명은 학생이 역함수를 함수의 합성에 대한 역원으로 파악하지 못하는 이유에 대해 문항 3에서 [그림 Ⅳ-8]과 같이 고등학교 교육과정의 전개 방식과 관련되는 이슈를 언급하였다.

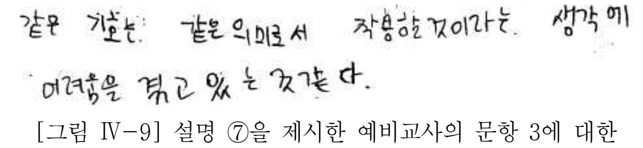

동일한 형식의 기호가 함수와 수에 모두 쓰이고, 2009 개정교육과정으로 넘어오면서 고등수학 내용에서 항등원, 역원 개념이 삭제되었기 때문에 고등학교 교육과정에서는 함수의 집합을 다루어 그 집합에서의 항등원이 무엇인지 역원이 무엇인지 학생에게 가르쳐 주지 않고 단지 함수로써 역함수의 의미만 안내하기 때문이다.

[그림 Ⅳ-8] [그림 Ⅳ-7]을 제시한 예비교사의 문항 3에 대한 답변

[그림 Ⅳ-8]에서 예비교사는 고등학교 교육과정을 통해서는 과정으로서의 역함수 의미만을 다루기 때문에 함수를 집합의 원소인 대상으로 간주하여 역함수를 함수의 합성에 대한 역원으로 해석해볼 기회가 없다고 언급하면서 2009 개정 교육과정 이후에 '항등원'과 '역원' 개념을 고등학교에서 지도하지 않게 된 상황의 적절성을 간접적으로 지적하였다.

한편 기호 f^{-1}과 5^{-1}의 관계를 묻는 문항 1에 대해 범주 2-1, 2-2에 속하는 답변을 제시하여 역함수를 학교 수학 수준에서 과정으로서의 함수 개념으로 해석하는 HCK를 지닌 것으로 추측되는 예비교사 41명[13]은 문항 3에서 학생이 겪는 어려움을 함수 개념 또는 합성 개념의 구조적 의미에 비추어 설명하지 않았다(연구문제 1, 2). 이들 중 문항 3에 답한 31명은 기호를 해석할 때는 맥락에 따라야 한다는 점이나 같은 모양의 기호라도 다른 의미를 나타낼 수 있다는 점을 강조하면서 [그림 Ⅳ-9]처럼 기호의 의미와 관련하여 학생이 오개념을 지닌 것으로 진단하였다.

13) 범주 2-1, 2-2에 속한 예비교사 중 문항 2에 대한 설명에서 군, 이항연산, 항등원, 역원을 사용한 [그림 Ⅳ-6]의 예비교사 1명을 제외한 인원수이다.

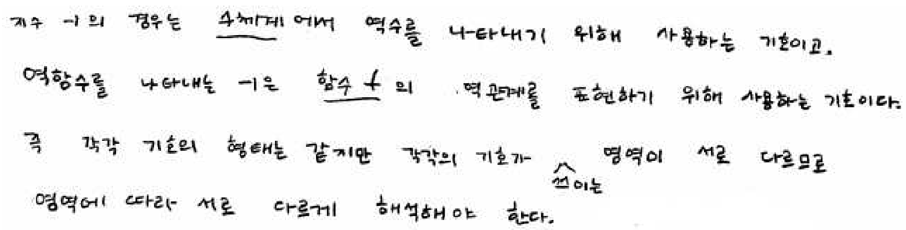

같은 기호는 같은 의미로서 작용할 것이라는 생각에
어려움을 겪고 있는 것 같다.

[그림 Ⅳ-9] 설명 ⑦을 제시한 예비교사의 문항 3에 대한 답변 사례

이상에 따르면 기호 f^{-1}과 5^{-1}의 관계를 설명하는 과정에서 드러난 예비교사들의 역함수에 대한 HCK 수준은 예비교사가 학생의 어려움을 진단할 때 함수 개념 수준이나 합성 개념의 구조적 의미를 고려하는지 여부에 주요한 영향을 미친다(연구문제 1, 2). 특히 역함수를 대상으로서의 함수 개념에 기초하여 군 구조와 연결짓는 HCK를 지니고 있어 학생이 겪는 어려움을 함수 개념 또는 함수의 합성과 관련하여 해석하는 예비교사는 역함수 개념 지도와 관련된 학교 수학 교육과정의 문제를 함수 개념 수준 지도의 측면에서 지적할 수 있었다. Jakobsen et al.(2013; Mellone et al., 2015)은 HCK를 통해 교사는 가르치는 수학 너머를 볼 수 있으며 학생의 전략을 수학적 관점에서 해석할 수 있다고 강조한 바, 이 연구의 결과는 앞선 선행 연구의 결과에서 좀 더 나아가 수학적 대상을 과정-개념으로 인식하여 이를 수학적 구조로 통합하는 HCK를 지닌 교사는 학생의 의견을 수학적 개념의 의미에 비추어 설명할 수 있으며 학생이 겪는 어려움의 원인도 교수학적 관점에서 적절히 진단할 가능성이 높아짐을 보여준다.

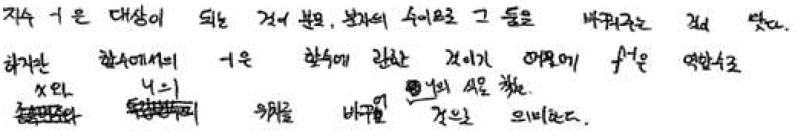
3. 역함수와 역수가 공유하는 의미를 '거꾸로'로 파악한 예비교사들은 역함수의 식을 구하는 맥락에 더 주목한다.

범주 2-1에 속한 예비교사 23명은 두 기호 f^{-1}과 5^{-1}에서 위 첨자 -1을 군 구조에 비추어 통합하는 대신 '역' 또는 '거꾸로'를 나타내는 기호로 파악하여 역함수와 역수가 공유하는 의미를 강조하기는 하였으나 그 해석은 [그림 Ⅳ-10]과 같이 위 첨자 -1이 사용되는 맥락에 따라야 한다고 설명하였다(연구문제 1).


지수 -1의 경우는 수체계에서 역수를 나타내기 위해 사용하는 기호이고,
역함수를 나타내는 -1은 함수 f의 역관계를 표현하기 위해 사용하는 기호이다.
즉 각각 기호의 형태는 같지만 각각의 기호가 쓰이는 영역이 서로 다르므로
영역에 따라 서로 다르게 해석해야 한다.

[그림 Ⅳ-10] 문항 1에 대한 설명 ⑥ 사례

특히 범주 2-1에 속한 예비교사 중 14명은 역함수의 개념을, 설명 ⑤와 같이 그 식을 구하는 방법과 관련하여 다루었다. 이는 [그림 Ⅳ-11]에서 보듯이 역수와 역함수의 공통점이 '무엇인가를 바꾸는 데 있음'을 강조하여 두 기호 f^{-1}과 5^{-1}가 공유하는 위 첨자 -1이 같은 의미임을 설명하기 위한 전략으로 보인다.

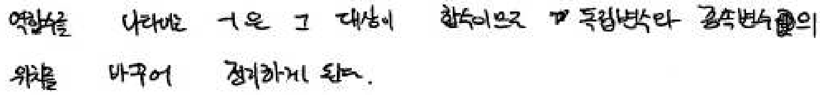


[그림 Ⅳ-11] 문항 1에 대한 설명 ⑤ 사례

그러나 문항 1에서 학생이 묻는 바가 단순히 두 기호 f^{-1}과 5^{-1}에 쓰인 위 첨자 -1이 같은 의미이냐의 문제가 아니라, 지식을 일관된 관계망으로 조직하려는 구조에 대한 지적 욕구(intellectual needs for structure, Harel, 2013)에 기초한 것이라면 범주 2-1과 같은 설명이 학생에게 적절한 도움으로 작용할 수 있을지에 대해서는 논란의 여지가 있다.

Harel(2013)은 지적 욕구를 현재의 지식이 불완전하다고 인식될 때 느끼는 욕구라고 설명하면서 학생의 지적 욕구는 학습을 일으키는 핵심 원동력이라고 강조하였다. 그에 따르면 지적 욕구는 목표로 하는 지식의 습득을 통해 지적인 균형 상태에 도달함으로써 해소될 수 있는 바, 역함수 및 역수에 대한 구조적인 관계망의 조직을 필요로 하는 학생에게 두 기호 f^{-1}과 5^{-1}이 공유하는 위 첨자 -1을 '거꾸로'의 의미로 설명하는 것이 타당한지에 대해서는 교수학적 검토가 필요하다.

한편 범주 2-1에 속한 예비교사 중 19명은 문항 2에 대해 설명 ⑤, ⑥과 거의 유사한 답변을 제시하였다. 특히 [그림 Ⅳ-11]의 예비교사는 [그림 Ⅳ-12]와 같이 문항 2에서 역함수 개념의 수학적 의미를 '독립변수와 종속변수를 바꾸는 함수'로 설명한 바, 이 예비교사는 함수를 대상이 아닌 과정으로 파악하는 초보적인 개념 수준에 있는 것으로 보인다(연구문제 2).



[그림 Ⅳ-12] [그림 Ⅳ-11]을 제시한 예비교사의 문항 3에 대한 답변

예비교사 19명이 함수를 과정으로 파악하는 초보적인 이해 수준에 따라 문항 2에 답한 것을 볼 때, 이들 예비교사는 과정이었던 함수를 대상으로 압축하는 AMT에 기초하여 역함수를 군 구조에 비추어 해석하는 HCK를 개발하지 못한 것으로 판단할 수 있다. 그러나 이들 예비교사 19명 중 [그림 Ⅳ-12]의 예비교사를 비롯한 16명[14]은 '대수학Ⅰ및 실습' 강좌에서 상당히 높은 수준의 학업 성취도를 보였다. 이상의 결과는 대학 수학에 대해 높은 학업 성취도를 보인 예비교사일지라도 과정-개념 구성과 관련된 AMT 활동에 기반하여 교사 지식으로서 의미있는 HCK를 갖는데 한계가 있을 수 있음을 시사한다.

4. 역함수와 역수의 차이를 강조한 예비교사들만 함수 개념이 아닌 실생활 상황을 예로 들어 설명을 제시한다.

두 기호 f^{-1}과 5^{-1}에 쓰인 위 첨자 -1을 완전히 다른 의미로 보아 역함수와 역수에 어떤 관련성도 없음을 강조한 예비교사들 중 11명은 문항 1에서 [그림 Ⅳ-13]과 같이 실생활 상황을 예로 들어 설명함으로써 학생이 겪는 어려움을 돕고자 하였다(연구문제 1).

14) 이들은 군과 관련된 내용을 다룬 '대수학Ⅰ및 실습' 강좌의 중간고사에서 모두 A학점 이상의 점수를 받은 것으로 파악되었다.

꽃을 벽에 걸면 장식이 되고
꽃을 사람에게 걸면 미친 사람이 된다
벽이랑 사람 귀랑 같나?
-1도 숫자에 달면 역수고
함수에 달면 역함수다.
수랑 함수는 다르다

[그림 Ⅳ-13] 문항 1에 대한 설명 ⑧ 사례

[그림 Ⅳ-13]의 예비교사는 같은 꽃이라도 완전히 다른 의미를 갖게 되는 실생활 상황을 통해 역함수와 역수 개념 역시 수학적으로 전혀 무관한 개념이라고 설명하였다. 이들 예비교사 11명은 기호 f^{-1}과 5^{-1}에 쓰인 위 첨자 -1의 다름을 강조하는 동음이의어(homonymy)적 측면에 주목하는 대신 수학 영역과 실생활 영역의 유사성을 탐색하여 그 다의성(polysemy)에 따라 문항 1을 설명한 것으로 보인다. Vinner(1991)는 수학적 상황을 비슷한 실생활 상황을 통해 접근하는 다의성 전략은 수학적 개념에 대한 학생들의 오해를 초래할 수 있으므로 그 활용에 교수학적 경각심이 필요하다고 지적하였다.

한편 설명 ⑧을 제시한 예비교사 중 9명은 문항 2에서도 문항 1과 같은 답변을 기술한 바, 역함수와 역수를 수학적으로 완전히 다르게 해석하는 지엽적인 함수 개념 수준의 HCK를 보여주었다(연구문제 2). William(2010)에 따르면 푸앙카레(Poincaré)는 수학이란 다른 대상에 같은 이름을 붙이는 기술이라고 규정하면서 다른 대상일지라도 동일한 틀에 의해 다듬어짐으로써 수학적인 구조를 생성한다고 설명하여 구조를 다루는 학문으로서 수학이 지닌 특징을 강조하였다. 교사가 지닌 HCK에 따라 수학적 구조와 핵심 아이디어, 용어 사이의 관계와 같은 수학의 학문적 특징이 학교 수학을 통해 구현되는 양상이 달라지므로(Zazkis & Leikin, 2010), 이상과 같은 예비교사들의 사례는 대학 수학을 통해 AMK를 지도함으로써 수학적 대상을 연결하여 그 구조를 통찰하는 AMT 활동 경험을 구체적으로 제공하고 이로부터 수학적 식견으로서의 지식인 HCK의 개발에 명시적인 목표를 둔 교수 활동이 시급하게 필요함을 보여준다.

Ⅴ. 결론

이 연구는 여러 국외 연구가 수학 교사 교육의 주요 목표 중 하나로 HCK 개발에 주목하고 있음에도 불구하고 국내에서는 SMK의 하위 요소로서 HCK의 구체적인 의미를 살피거나 우리나라 교사들이 지닌 HCK의 특징을 본격적으로 분석한 연구가 거의 없다는 아쉬움에서 시작되었다. 이에 본 연구는 교사 지식으로서 의미있는 HCK를 개발하기 위해 교사 교육과정에서 강조할 필요가 있는 측면을 탐색하여 HCK의 의미를 풍부히 하고 이로부터 예비교사들의 HCK를 역함수 기호에 대한 이해에 주목하여 분석함으로써 수학 교사 전문성 신장에서 HCK가 갖는 시사점을 기술하는데 목적을 두었다. 이러한 연구 목적의 이론적 토대가 되는 선행연구에 따르면 HCK의 개발을 위해 대학 수학에서는 연결성 관련 수학적 사고 및 수학에 대한 구조적 통찰 능력에 주목할 필요가 있으며, 이는 수학적 대상을 과정-개념으로 파악하는 AMT 활동을 통해 함양될 수 있다. 더불어 함수에 대한 과정-개념 구성과 관련된 AMT의 작용은 함수 개념 수준의 특징 및 역함수 기호 f^{-1}을 5^{-1}와 관련하여 해석하는 양상에 비추어 살펴볼 수 있다. 이상의 선행연구 확인 결과를 토대로 이 연구는 예비교사들의 HCK를

역함수 기호에 대한 이해에 주목하여 분석하기 위한 지필 검사 도구를 개발하였으며 이를 예비교사 57명에게 적용하여 이들이 작성한 답변을 검사 도구 개발 의도 및 함수 개념 수준에 비추어 해석하였다. 이상과 같이 역함수 및 역함수 기호에 대해 예비교사들이 지닌 HCK의 특징을 분석한 연구결과의 시사점과 한계를 교사 전문성 신장을 위한 HCK 개발의 측면에서 선행연구와 관련하여 기술하면 다음과 같다.

첫째, 여러 선행 연구(Vale et al., 2010; Zazkis & Mamolo, 2011)는 SMK의 주요 특징을 HCK에 비추어 설명하고 HCK의 의미를 정교화하기 위해 다양한 시도를 하였으나, 교사들이 지닌 HCK의 특징을 구체적으로 밝히는데 활용한 수학 내용 요소는 정수론의 합동식 및 대수학의 인수분해(Ball & Bass, 2009), 귀류법(Jakobsen et al., 2013) 등으로 많지 않은 실정이다. 이 연구는 역함수 기호에 대한 이해에 주목하여 예비교사들이 지닌 HCK의 특징을 분석함으로써 예비교사들 다수가 역함수를 학교 수학 수준으로 이해하고 있어 대수적 군 구조에 비추어 역함수의 의미를 통찰하는 HCK 개발에 한계가 있음을 확인하였다. 또한 역함수를 함수의 합성에 대한 역원으로 바라보는 HCK를 지닌 예비교사들 중 일부는 학교 수학의 역함수 지도 맥락을 고려하지 않고 자신이 알고 있는 대학 수학의 내용을 학생에게 그대로 전달하기도 하였다. Montes et al.(2016)은 교사 지식으로서 의미있는 HCK를 개발하기 위해서는 학교 수학을 대학 수학의 관점에서 깊고 넓게 바라보는 안목의 함양이 시급함을 지적하였으나, 이 연구의 결과에 따르면 HCK 함양과 관련하여 대학 수학을 학교 수학의 관점에서 적절하게 변환하는 능력의 개발 역시 교사 교육과정의 주요 목표로 다룰 필요가 있다.

둘째, 선행연구(Jakobsen et al., 2013; Mellone et al., 2015)에 따르면 교사는 HCK를 통해 가르치는 수학 너머를 볼 수 있으며 학생의 전략을 수학적으로 해석할 수 있다. 이 연구는 역함수를 대상으로서의 함수 개념에 기초하여 군 구조와 연결짓는 HCK를 지닌 예비교사들만이 학생의 어려움을 함수 개념 또는 함수의 합성과 관련하여 해석할 수 있으며, 역함수 개념을 다루는 학교 교육과정의 문제도 함수 개념 지도 수준에 비추어 논할 수 있음을 확인하였다. 이상과 같은 본 연구의 결과는 HCK의 특징으로 Jakobsen et al.(2013)이 밝힌 가르치는 수학 너머를 볼 수 있게 하는 능력에 덧붙여, 수학적 대상에 대한 과정-개념 수준의 이해와 이를 수학적 구조로 통합하는 능력 역시 HCK의 주요 특징이 됨을 보여준다. 나아가 이러한 특징과 관련되는 HCK를 지닌 교사는 Mellone et al(2015)이 지적하였듯이 학생의 전략을 수학적으로 해석할 수 있을 뿐만 아니라 학생이 겪는 어려움의 원인도 수학적인 개념 지도와 관련하여 교수학적 측면에서 진단할 수 있음을 밝힘으로써 교사 지식으로서 HCK의 역할을 보다 구체화하는 성과를 얻었다. 즉, 이 연구에 따르면 HCK는 수학적 대상을 과정-개념으로 인식하는 능력을 토대로 수학적 대상을 연결짓는 구조에 대한 통찰을 특징으로 하며, 이러한 HCK를 통해 교사는 학생의 이해를 수학적 관점에서 해석하여 학생이 겪는 어려움의 원인을 수학 개념 지도의 교수학적 쟁점에 비추어 판단할 수 있다.

셋째, Tall(1991; 2013; Harel & Kaput, 1991)에 따르면 대학에서 형식 체계로서의 고등 수학을 학습하였더라도 고등 수학적 사고와 관련되는 정신활동 능력이 개발되지 않을 수 있다. 이 연구의 결과는 대수학 강좌에서 높은 학업 성취도를 보인 예비교사들도 역함수를 군 구조하의 역원으로 해석하는 HCK를 개발하지 못한 채 '원래 함수식에서 x 와 y 을 바꾸면 구할 수 있는 함수' 또는 '원래 함수의 정의역과 공역을 바꾸어 반대로 대응시키는 함수'와 같이 학교 수학 수준에서 역함수를 이해하는 경우가 있음을 보임으로써 Tall(1991; 2013; Harel & Kaput, 1991)의 주장에 구체적이고 직접적인 연구 사례를 제공하였다. 또한 이 연구는 적지 않은 예비교사들이 역함수와 역수를 수학적으로 어떤 관련성도 없는 이질적인 개념으로 파악하여 이를 대수적 구조인 군에 비추어 통찰하는데 근본적인 한계가 있음을 확인하였다. 이상의 사례는 과정-개념으로 압축된 수학적 대상에 대한 관계망의 구성 및 수학적 구조에 대한 통찰 능력으로 이 연구가 특징지은 HCK의 개발에 직접적인 교수 목표를 둔 교사 교

육 강좌의 설계와 실행이 시급하게 필요함을 시사한다.

넷째, 이 연구는 광역시 소재 사범대학 수학교육과 3, 4학년, 수학교육 부·복수전공 및 교직이수 학생 57명을 연구대상으로 삼아, 예비교사들이 지닌 HCK를 역함수 기호에 대한 이해에 주목하여 분석함으로써 수학 교사 전문성 신장에서 HCK가 갖는 시사점을 기술하였다. 다만 이러한 분석 과정에서 수학교육 주전공 및 부·복수 전공, 교직이수 학생사이에 역함수 및 역함수 기호에 대한 이해와 관련된 HCK의 구별되는 특징을 발견하지 못하였으며, 교육실습 이수 여부와 관련하여서도 마찬가지로 그 차이를 찾지 못하였다. 이는 SMK의 하위 요소로서 HCK의 의미를 확인하여 우리나라 교사들이 지닌 HCK의 특징을 분석한 초기 국내 연구로서 본 연구가 갖는 연구의 제한점으로, 각기 다른 교원 양성 과정에 속한 예비교사들의 HCK에서 드러나는 차이를 비롯하여 교육실습 이수 여부에 따른 HCK의 특징 등을 살피는 후속 연구가 폭넓게 진행되기를 바란다.

참고문헌

고희정, 고상숙(2013). 고등학교 미적분 수업에서 나타나는 초임교사의 교수를 위한 전문화된 수학 내용 지식(SCKT). **한국학교수학회논문집, 16**(1), 157-185.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 서울: 저자.

송근영, 방정숙(2013). 수학과 교사지식에 관한 국내 연구의 동향 분석. **한국학교수학회논문집, 16**(1), 265-287.

양선아, 이수진(2019). 학교 수학과 대학 수학 사이의 연계성에 대한 중등교사의 전문성 분석-대학 수학에 대한 인식과 대수 영역에 대한 MKT를 중심으로-. **학교수학, 21**(2), 419-439.

이준열 외(2017). **고등학교 수학**. 서울: 천재교육.

Adler, J., & Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education, *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 270-296.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners'mathematical futures. *Paper presented at the 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference*, LA: University of California.

Brousseau, G. (1998). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, C., & Reynolds, B. (2007). Delineating four conceptions of function: A case of composition and inverse. In T. Lamberg, & L. R. Wiest (Eds.), *Proceeding of the 29th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 190-193) NV: University of Nevada.

Cho, Y., & Tee, F. (2018). Complementing mathematics teachers' horizon content knowledge with an elementary-on-advanced aspect. *Pedagogical Research, 3*(1), 1-11.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Figueiras, L., Ribeiro, M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deuloffeu, J. (2011). Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: A response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics, 31*(3), 26-28.

Guberman, R., & Gorev, D. (2015). Knowledge concerning the mathematical horizon: A close view. *Mathematics Education Research Journal, 27*, 165-182.

Harel, G., & Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 82-94). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. (2013). Intellectual need. In K. Leatham (Ed.) *Vital direction for mathematics education research* (pp. 119-152). NY: Springer.

Hodgen, J. (2011). Knowing and identity: A situated theory of mathematics knowledge in teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.) *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 27-42). NY: Springer.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M. (2013). Delineating issues related to Horizon Content Knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 3125-3134). Turkey: ERME.

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis* (Vol. 1. E. R. Hedrick & C. A. Noble trans.) NY: Macmillan. (Original work published 1924).

Ma, L. (1996). *Profound understanding of fundamental mathematics: What is it, why is it important, and how is it attained?* Unpublished doctoral dissertation, Stanford: Stanford University.

Mamolo, A. (2010). Polysemy of symbols: Signs of ambiguity. *The Montana Mathematics Enthusiast, 7*(2), 247-262.

Mellone, M., Jakobsen, A., & Ribeiro, C. M. (2015). Mathematics educator transformation(s) by reflecting on students' non-standard reasoning. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of CERME 9* (pp. 2874-2880). Prague: ERME

Montes, M., Riberiro, M., Carrillo, J., & Kilpatrick, J. (2016). Understanding mathematics from a higher standpoint as a teacher: An unpacked example. In Csikos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, (pp. 351-322). Hungary: PME.

Mosvold, R., & Fauskanger, J. (2014). Teachers′ Beliefs about Mathematical Horizon Content Knowledge. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1-16.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57,* 1-22.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.) A*dvanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically : Exploring the three worlds of mathematics*. NY: Cambridge University Press.

Turner, F. & Rowland, T. (2011). The knowledge Quartet as an organising framework for developing and deepening teachers′ mathematics knowledge. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.) *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 195-212). NY: Springer.

Vale, C., McAndrew, A, & Krishnan, S. (2011). Connecting with the horizon: Developing teachers' appreciation of mathematical structure. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 193-212.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wasserman, N., Weber, K., Villanueva, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2018). Mathematics teachers' view about the limited utility of real analysis: A transport model hypothesis. *The Journal of Mathematics Behavior, 50,* 74-89.

Watson, J., Beswick, K., & Brown, N. (2006). Teachers' knowledge of their students as learners and how to intervene. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces: Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 551-558). Adelaide: MERGA.

William, B. (2010). *How mathematicians think : Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Zazkis, R., & Leizin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12,* 263-281.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics, 31*(2), 8-13.

Zazkis, R., & Zazkis, D. (2014). Script writing in the mathematics classroom: Imaginary conversations on the structure of numbers. *Research in Mathematics Education, 16*(1) 54-70.

Zazkis, R., & Marmur, O. (2018). Groups to the rescue: Responding to situations of contingency. In N. H. Wasserman (Ed.), *Connecting abstract algebra to secondary mathematics for secondary mathematics teachers*, (pp. 363-387) NY: Springer.

An Analysis on Prospective Teachers' HCK : Focused on Understandings of Inverse Function Symbol

Shin, Bomi[15)]

Abstract

This study analyzed the characteristics of prospective teachers' Horizon Content Knowledge(HCK) related to understandings of an inverse function symbol. This study aimed to deduce implications of developing HCK in terms of the means which would enhance mathematics teachers' professional development. In order to achieve the aim, this study identified features of HCK by examining the previous literature on HCK, which has conformed Ball & Bass(2009) and exploring the research in AMT, including Zazkis & Leikin(2010) which has emphasized cultivating AMT through university mathematics education. In addition, a questionnaire was developed regarding the features of HCK and taken by 57 prospective teachers. By analyzing the data obtained from the written responses the participants presented, this study delineated the specific characteristics of the teachers' HCK with regard to an inverse function symbol. Additionally, several issues in the teacher education for improving HCK were discussed, and the results of this research could inspire designing and implementing a teacher education program relevant to HCK.

Key Words : HCK(Horizon Content Knowledge), SMK(Subject Matter Knowledge), AMT(Advanced Mathematical Thinking), teachers' knowledge, inverse function, inverse function symbol

Received February 03, 2020
Revised March 03, 2020
Accepted March 11, 2020

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97B50, 97C30, 97D80

15) Chonnam National University (bomi0210@jnu.ac.kr)

<부록> 지필 검사 도구 (작성 영역 생략)

1. 다음 대화에서 역함수와 역수를 나타내는 기호 -1에 대한 학생 A의 이해를 깊게 하기 위해 어떤 설명을 제시하겠는지 구체적으로 작성해 주십시오.

> 교사 : 이 시간에는 주어진 함수의 역함수를 어떻게 구하는지 알아보겠습니다. 예를 들어 ….
> 학생 A : 선생님, 그런데요, 어제 선생님께서 f^{-1}은 f의 역함수를 의미한다고 하셨잖아요?
> 교사 : 맞습니다.
> 학생 A : 그런데 예전에 지수 -1은 역수를 의미한다고 배웠습니다. 예를 들면 $5^{-1}=\frac{1}{5}$ 라고요.
> 교사 : 맞습니다.
> 학생 A : 역함수를 나타내는 -1과 역수를 나타내는 -1이 같은 기호인가요?

2. 1에서 학생 A가 지적한 문제를 스스로가 이해하고 있는 방식은 1에서 학생 A에게 설명한 방식과 다를 수 있습니다. 만약 다르다면 자신은 이 문제를 어떻게 이해하고 있는지 설명해 주십시오. 또, 수학을 전공한 사람에게는 이 문제를 어떻게 설명하겠는지 작성해 주십시오.

3. 1에서 학생 A가 겪는 어려움은 무엇이라고 생각합니까? 1에서 학생 A에게 제시한 자신의 설명이 타당한 이유는 무엇입니까?