JANT 한국항행학회논문지
Journal of Advanced Navigation Technology

기반 기술

J. Adv. Navig. Technol. 24(6): 607-612, Dec. 2020

비구조화된 불확실성을 갖는 이산 지연 시스템의 새로운 안정조건

New Stability Condition for Discrete Delayed System with Unstructured Uncertainty

한 형 석
가천대학교 전자공학과

Hyung-seok Han
Department of Electronic Engineering, Gachon University, Gyeonggi-do, 13120, Korea

[요 약]

본 논문에서는 시변 지연 시간이 있는 선형 이산 시스템에 비구조화된 불확실성이 존재하는 경우에 대하여 안정조건을 다룬다. 안정조건은 리아프노프 안정 조건을 기반으로 유도되며, 이 새로운 조건에는 불확실성에 의한 영향이 포함되어 반영된다. 논문에서 고려된 불확실성은 그의 특성을 정확하게 파악할 수 없고, 단지 그 크기만을 알 수 있는 비구조화 형태로 반영된다. 이와 관련된 기존의 결과 대비하면, 안정성 기준을 적용할 수 있는 시스템을 확장할 수 있으며, 기 제안된 안정 조건보다 유연한 것으로 안정성 판정에 있어 더욱 효과적인 결과이다. 제안된 안정 조건들은 간단한 부등식의 형태로 표현되며, 시변 지연에 대한 영향과 불확실성에 대한 영향이 모두 수식에 포함되어 있다. 제안된 안정조건을 기존의 조건들과 비교한 결과를 수치 예제를 통하여 제시하며, 제안된 조건의 효용성과 우수성을 검증한다.

[Abstract]

In this paper, we deal with the stability of linear discrete systems with time-varying delays and unstructured uncertainty. Stability conditions are derived based on Lyapunov stability theory, and can include the effect of uncertainty. The unstructured uncertainty in the papaer which can not be figured out its exact characteristics and only can be expreesed by its magnitude is considered. Compared with the previous results on the stability, the new results can expand the applicable systems and alleviate the stability conditions which are more effective and powerful. The proposed stability condition is expressed in the form of an simple inequality, and includes the both effects of the uncertainties and time-varying delay. We present the results comparing the new stability condition with the existing results, and verify the effectiveness and the superiority of the proposed results through numerical example.

Key word : Discrete system, Lyapunov, Stability condition, Time-varying delay, Unstructured uncertainty.

https://doi.org/10.12673/jant.2020.24.6.607

Received 23 November 2020; **Revised** 26 November 2020
Accepted (Publication) 26 December 2020 (30 December 2020)

***Corresponding Author; Hyung-seok Han**

Tel: +82-31-750-5561
E-mail: hshan@gachon.ac.kr

Ⅰ. 서 론

시스템에 인가되는 불확실성과 상태 지연 현상은 시불변 혹은 시변의 특성을 가질 수 있으며, 시스템의 안정성에 영향을 줄 수 있다. 이와 관련된 많은 연구 결과들이 [1]과 [2]에 정리되어 발표되었다. 참고 문헌 [1]에서는 시불변 이산시스템의 상태변수에 시불변 지연시간을 갖는 시스템에 대하여 2002년에서 2010년 사이에 이루어진 결과 위주로 정리하였고, 참고 문헌 [2]에서는 연속 시스템에서 상태변수에 시변 지연시간이 있는 시스템에 대한 연구 결과를 분석하였다. 최근에는 선형 이산시스템에 대하여 시스템 행렬의 특성이 시변/시불변, 지연 시간의 특성이 시변/시불변, 불확실성에 관하여 포함/비포함 한 경우를 구분하여 다양한 경우에 대한 연구 결과가 발표되었다 [3]-[9]. 참고 문헌 [3],[4]과 [6]의 결과는 시불변 시스템에 시변 지연이 있는 경우에 대한 안정조건을 시스템 행렬이 포함되는 복잡한 선형행렬부등식 (LMI; linear matrix inequality)의 형태[3], 지연시간에 종속되는 두 가지의 부등식 형태[4], 시스템 행렬들의 노름(norm)을 이용하는 간단한 부등식 형태[6]로 제시하였다. 또한, 참고 문헌 [5]에서는 대규모 시불변 이산 시스템에서 상호연관 시스템 행렬에 시불변 지연시간이 존재하는 특별한 경우에 대한 안정조건을 시스템 행렬의 노름을 이용하는 부등식의 형태로 유도하였다. 이들 결과들이 시불변 이산시스템을 대상으로 유도된 결과인 것과 구별하여 더욱 복잡한 시변 이산시스템에 대하여 시변 지연에 대한 안정조건도 참고 문헌 [7]에서 제시되었다. 참고 문헌 [7]에서는 안정조건을 시변시스템 행렬들의 최대 변동 한도에 관련된 행렬들의 노름을 이용하여 간단한 부등식으로 제안하였다. 참고 문헌 [3], [4], [6]과 [7]에서의 결과들에서는 상태변수의 시변지연에 대한 부분은 고려되었으나, 지연시간과 함께 시스템의 특성에 영향을 미치는 불확실성 요소를 고려하지는 못하였다. 불확실성요소를 고려한 결과로는 참고 문헌 [8]과 [9] 가 있으며, 이들 결과에서는 비구조화된 시변 불확실성이 인가되는 시스템의 안정성 결과가 제시되었다. 참고 문헌 [8]에서는 안정조건이 행렬에 대한 간단한 부등식으로 표현되며, 행렬이 아닌 대수부등식으로 제시된 결과도 함께 제시되었다. 그러나, 참고 문헌 [8]에서 고려한 시스템 행렬의 특성은 시불변이고, 지연 시간 또한 시불변을 고려한 것으로, 시변 지연 시간에 대하여서는 적용이 불가능한 결과이다. 참고 문헌[9]에서는 이전의 결과[8]에서 고려하지 못한 시변 지연과 비구조화된 시변 불확실성을 동시에 고려할 수 있는 안정조건을 상한 해 한계 방법[8]과는 다른 접근 방법으로 유도하였다. 본 논문에서는 기존 참고 문헌[9]의 안정조건보다 완화된 안정조건을 새롭게 제안하며, 다음 장에 설명되는 참고 문헌 [8]과[9]의 조건들과 비교하여 우수함을 확인한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 기존 결과를 요약하고, III장에서는 새로운 안정조건을 리아프노프 이론을 이용하여 제시하며, IV장에서는 기존 수치 예제에 대하여 새로운 조건을 적용한 결과를 제시한다.

Ⅱ. 기존의 안정 조건 결과

본 장에서는 논문의 주요 결과에 사용된 행렬에 관한 중요한 기초 이론과 기존에 제안된 중요 안정조건을 정리한다. 본 논문에서 사용하는 기호로는 $\|X\|$는 행렬 X의 스펙트랄 노옴(spectral norm), ($\|X\|$: X^TX행렬의 최대 고유치의 제곱근)을 의미하며, $X>0$는 대칭행렬 X가 양의 정칙(positive definite), $\lambda_{\max}(X)$는 행렬 X의 최대 고유치, $\rho(X)$ 는 $max|\lambda_i(X)|$,즉, 스펙트랄 반경(spectral radius), I_n는 $n\times n$ 차원의 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

식 (1)과 같은 이산 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} x(k+1) = A(\bullet)x(k) + B(\bullet)x(k-d(\bullet)) \\ + f(x(k),k) + f_1(x(k-d),k) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, A는 시스템 행렬, B는 지연 상태변수에 대한 시스템 행렬이며, $f(x(k),k), f_1(x(k-d),k)$는 비선형 불확실성을 나타내며, $A(\bullet), B(\bullet), d(\bullet)$의 시간에 따른 특성에 따라 다수의 결과가 발표되었다[3]-[9]. 특히, [8]에서는 식 (2)와 같이 비선형 불확실성을 포함한 시스템을 다루었다. 이 시스템에서는 지연시간을 시불변으로 고려하였음을 주목한다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-d) + f(x(k),k) + f_1(x(k-d),k) \tag{2}$$

여기서, A,B는 시불변 시스템 행렬,이며, $f(x(k),k), f_1(x(k-d),k)$는 식 (3)의 조건을 만족하는 비선형 불확실성을 나타낸다.

$$\|f(x(k),k)\| \le n\|x(k)\|, f_1(x(k-d),k) \le \gamma\|x(k-d)\| \tag{3}$$

기존 결과 1[8]: 식 (2), (3)를 만족하는 이산시스템이 식 (4)의 조건을 만족하면

$$((\|A\| + \|B\| + \eta + \gamma)\ (\frac{A^TA}{\|A\|} + \frac{B^TB}{\|B\|} + \eta I_n + \gamma I_n) < I_n \tag{4}$$

점근안정하다.

위의 결과가 시불변 지연시간에 대한 것에 반하여, 기존 결과 [6]에서는 다음 식과 같은 지연 시간이 시변인 경우에 대한 안정조건을 제시하였다. [6]에서 고려된 시스템에서는 비선형 불확실성에 대한 부분이 포함되지 않은 점을 주목한다.

https://doi.org/10.12673/jant.2020.24.6.607

$$
\begin{aligned}
&x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k)) \\
&0<d_m \le d(k) \le d_M
\end{aligned} \tag{5}
$$

기존 결과 2[6]: 식 (5)의 시변 지연시간을 갖는 시스템이 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$
\begin{aligned}
&(\|A\|+\sqrt{1+d_M-d_m}\,\|B\|) \\
&\times\left(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{1+d_M-d_m}\,\frac{B^TB}{\|B\|}\right)<I_n
\end{aligned} \tag{6}
$$

위의 기존 결과 1,2는 각각 시변 지연 시간과 비선형 불확실성에 대한 부분은 고려하지 못한 결과이며, 이들을 동시에 포함할 수 없는 결과임에 주목한다. 이를 보완할 수 있도록 최근의 결과[9]에서는 이 두 가지 요소를 포함할 수 있는 조건들을 제시하였다. 다음은 [9]에서 고려한 시스템을 나타낸다.

$$
x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k))+f(x(k),k) \tag{7}
$$

$$
\|f(x(k),k)\|\le \eta\|x(k)\|,\ 0\le d_m\le d(k)\le d_M,\ \ \forall k \tag{8}
$$

기존 결과 3[9]: 수식 (7).(8)의 시변 지연시간과 불확실성을 갖는 시스템이 $D\equiv 1+d_M-d_m$ 에 대하여 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$
\begin{aligned}
&D\equiv 1+d_M-d_m \\
&(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)\left(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n\right) \\
&\qquad +\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|B\|}\quad <I_n
\end{aligned} \tag{9}
$$

기존 결과 4[9]: 수식 (7),(8)의 시변 지연시간과 불확실성을 갖는 시스템이 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$
(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}-1)^2\|B\|<1 \tag{10}
$$

보조정리 I ([6],[7]) : 임의의 벡터 x,y와 양의 상수 ϵ 에 대하여 식 (11)이 성립한다.

$$
2x^Ty\le \epsilon^{-1}x^Tx+\epsilon y^Ty \tag{11}
$$

Ⅲ. 새로운 안정 조건

본 장에서는 식 (7),(8)과 같이 구간 시변 지연을 갖는 시스템에 비구조화된 불확실성이 인가된 시스템의 안정 조건을 유도한다.

안정성을 위한 리아프노프 함수를 다음의 식 (12)와 같이 정의한다.

$$
\begin{aligned}
&V(x(k))=x^T(k)x(k)+\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\
&+\sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1}\sum_{i=k+j-1}^{k-1}x^T(i)Rx(i)=V_1+V_2+V_3
\end{aligned} \tag{12}
$$

여기서, 대칭행렬 R은 양의 정칙행렬로 $R>0$ 이다.

보조정리 II: 식 (7),(8)의 시스템은 식 (12)에 정의된 리아프노프 함수와 임의의 $\epsilon>0, d_M-d_m\ge 0$ 에 대하여 식 (13)의 관계식을 만족한다.

$$
\begin{aligned}
&D\equiv 1+d_M-d_m \\
&V(x(k+1))-V(x(k))=\triangle V_1+\triangle V_2+\triangle V_3 \\
&\le x^T(k)(A^TA-I_n+(1+d_M-d_m)R)x(k) \\
&\quad +x^T(k-d(k))(B^TB-R)x(k-d(k)) \\
&\quad +2x^T(k-d(k))B^TAx(k)+2f^T(x(k),k)Ax(k) \\
&\quad +2f^T(x(k),k)Bx(k-d(k))+f^T(x(k),k)f(x(k),k) \\
&\le x^T(k)\left(\left(1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A\|}\right)A^TA-I_n+DR+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta)I_n\right)x(k) \\
&+x^T(k-d(k))((1+\epsilon+\eta)B^TB-R)x(k-d(k))
\end{aligned} \tag{13}
$$

증명: $V(x(k+1))-V(x(k))=\triangle V_1+\triangle V_2+\triangle V_3$

$$
\begin{aligned}
&x_d(k)\equiv x(k-d(k)) \\
&\triangle V_1=x^T(k+1)x(k+1)-x^T(k)x(k) \\
&=x^T(k)(A^TA-I_n)x(k) \\
&\quad +2x_d^T(k)B^TAx(k)+2f^T(x(k),k)Bx_d(k)+2f^T(x(k),k)Ax(k) \\
&\quad +x_d^T(k)B^TBx_d(k)+f^T(x(k),k)f(x(k),k)
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangle V_2&=\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k}x^T(i)Rx(i)-\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\
&=x^T(k)Rx(k)-x_d^T(k)Rx_d(k)+\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\
&\quad -\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i)
\end{aligned} \tag{15}
$$

참고문헌 [10]의 식 (19)에서와 같이 식 (16)이 유도된다.

$$
\begin{aligned}
\triangle V_3&=\sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1}(x^T(k)Rx(k)-x^T(k+j-1)Rx(k+j-1)) \\
&=(-d_m+1-(-d_M+2)+1)x^T(k)Rx(k) \\
&\quad -(x^T(k-d_M+2-1)Rx(k-d_M+2-1)-\ldots \\
&\quad -x^T(k-d_m+1-1)Rx(k-d_m+1-1)) \\
&=(d_M-d_m)x^T(k)Rx(k)-\sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m}x^T(i)Rx(i)
\end{aligned} \tag{16}
$$

보조정리 I과 대칭행렬의 성질 $A^TA\le\|A\|^2I_n$, $f^Tf\le\eta^2\|x(k)\|^2$ 을 이용하면 식 (17)-(19)의 관계식이 성립한다.

$$2x_d^T(k)B^TAx(k) \leq \frac{1}{\epsilon}x^T(k)A^TAx(k)+\epsilon x_d^T(k)B^TBx_d(k) \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&2f^T(x(k),k)Bx_d(k)\\&\leq \frac{1}{\eta}f^Tf+\eta x_d^T(k)B^TBx_d(k)\\&\leq \eta x^T(k)x(k)+\eta x_d^T(k)B^TBx_d(k)\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&2f^T(x(k),k)Ax(k) \leq \frac{\|A\|}{\eta}f^Tf+\frac{\eta}{\|A\|}x^T(k)A^TAx(k)\\&\leq \eta\|A\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|A\|}x^T(k)A^TAx(k)\end{aligned} \tag{19}$$

위의 식 (14)-(19)을 이용하면 다음의 수식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&V(x(k+1))-V(x(k))=\triangle V_1+\triangle V_2+\triangle V_3\\&\leq x^T(k)(A^TA-I_n)x(k)\\&\quad+2x_d^T(k)B^TAx(k)+2f^T(x(k),k)Bx_d(k)+2f^T(x(k),k)Ax(k)\\&\quad+x_d^T(k)B^TBx_d(k)+f^T(x(k),k)f(x(k),k)\\&\quad+x^T(k)Rx(k)-x_d^T(k)Rx_d(k)+(d_M-d_m)x^T(k)Rx(k)\\&\leq x^T(k)(A^TA-I_n+(1+d_M-d_m)R)x(k)\\&+x_d^T(k)(B^TB-R)x_d(k)\\&+2x_d^T(k)B^TAx(k)+2f^T(x(k),k)Bx_d(k)+2f^T(x(k),k)Ax(k)\\&+f^T(x(k),k)f(x(k),k)\\&\leq x^T(k)(A^TA-I_n+DR)x(k)\\&+x_d^T(k)(B^TB-R)x_d(k)\\&+\frac{1}{\epsilon}x^T(k)A^TAx(k)+\epsilon x_d^T(k)B^TBx_d(k)\\&+\eta x^T(k)x(k)+\eta x_d^T(k)B^TBx_d(k)\\&+\eta\|A\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|A\|}x^T(k)A^TAx(k)+\eta^2x^T(k)x(k)\\&\leq x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A\|})A^TA-I_n+DR+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta)I_n)x(k)\\&+x_d^T(k)((1+\epsilon+\eta)B^TB-R)x_d(k)\end{aligned} \tag{20}$$

마지막 부등식이 식 (13)의 부등식과 같음을 알 수 있다. ■

위의 보조정리II을 이용하면 다음과 같은 안정조건을 얻을 수 있다.

새로운 결과(정리 I): 주어진 $\epsilon>0, d_M-d_m\geq 0$에 대하여, 식 (21)의 부등식을 만족하면 식 (7),(8)의 시스템은 안정하다.

$$\begin{aligned}&(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n)\\&\quad+\eta(DB^TB-\sqrt{D}\|B\|I_n-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+I_n)<I_n\end{aligned} \tag{21}$$

증명: 다음 식 (22)과 같은 음의 정칙행렬 R을 선택하여 식 (13)에 대입하면 식 (23)이 성립한다.

$$-R=\frac{(1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A\|})A^TA-I_n+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta)I_n}{1+d_M-d_m}<0 \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&V(x(k+1))-V(x(k))\\&\leq x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A\|})A^TA-I_n\\&\quad+DR+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta)I_n)x(k)\\&\quad+x_d^T(k)((1+\epsilon+\eta)B^TB-R)x_d(k)\\&=x_d^T(k)((1+\epsilon+\eta)B^TB-R)x_d(k)\end{aligned} \tag{23}$$

위의 식 (23)에 식 (22)으로 정의된 행렬R을 대입하여 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$의 조건을 유도하면, 다음의 조건으로 표현된다.

$$\begin{aligned}&(1+d_M-d_m)(1+\frac{\|A\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|}+\eta)B^TB\\&+(1+\frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|}{\|A\|}+\frac{\eta}{\|A\|})A^TA+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta)I_n<I_n\end{aligned} \tag{24}$$

$D\equiv 1+d_M-d_m$로 하고 식 (24)을 간단한 형태로 표현하면 식 (25)과 같이 된다.

$$\begin{aligned}&(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n)\\&+\eta(DB^TB-\sqrt{D}\|B\|I_n-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+I_n)<I_n\end{aligned} \tag{25}$$

위의 부등식을 만족하면 식 (13)의 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$이 만족된다. 또한, 식 $(1+\epsilon+\eta)B^TB-R<0$이 만족되므로 $-R<0$ 의 조건도 당연히 만족하게 되어 식 (7),(8)의 시스템은 안정하다. ■

위의 결과를 변형하여 더욱 간단한 조건을 유도하면 다음과 같이 표현된다.

새로운 결과(따름정리 I): 주어진 $d_M-d_m\geq 0$에 대하여, 식 (26)의 부등식을 만족하면 식 (7),(8)의 시스템은 안정하다.

$$(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}\|B\|-1)^2<1 \tag{26}$$

증명: 잘 알려진 관계식인 $A^TA<\|A\|^2I_n, B^TB<\|B\|^2I_n$를 식 (20)의 마지막 항에 대입하여 새로이 유도한다.

$$\begin{aligned}&V(x(k+1))-V(x(k))=\triangle V_1+\triangle V_2+\triangle V_3\\&\leq x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A\|})\|A\|^2I_n-I_n+DR+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta)I_n)x(k)\\&+x_d^T(k)((1+\epsilon+\eta)\|B\|^2I_n-R)x_d(k)\end{aligned} \tag{27}$$

새로운 결과(정리 I) 증명의 식 (22)에서 A^TA를 $\|A\|^2I_n$으로 변

경하고, 변경된 음의 정칙행렬 R을 식 (24)과 같은 방법으로 전개하면 다음을 얻는다.

$$(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{\|A\|^2}{\|A\|}I_n+\sqrt{D}\frac{\|B\|^2}{\|B\|}I_n+\eta I_n) \tag{28}$$
$$+\eta(D\|B\|^2-\sqrt{D}\|B\|-\sqrt{D}\frac{\|B\|^2}{\|B\|}+1)I_n < I_n$$

위의 식은 다음과 같이 완전제곱의 형태로 표현될 수 있다.

$$(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}\|B\|-1)^2<1 \tag{29}$$

따라서, 위의 부등식을 만족하면 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$이 만족된다. 그러므로, 식 (7),(8)의 시스템은 안정하다. ■

위의 두 개의 새로운 결과를 기존의 결과와 비교하면, 새로운 결과(정리 I)의 결과는 기존결과 3, 새로운 결과(따름정리 I)의 결과는 기존결과 4에 비하여 불확실성의 크기가 포함된 항에서 차이가 난다. 이 수식의 직접적인 우열을 비교하기 위하여 다음의 수치 예제를 고려한다.

Ⅳ. 새로운 조건의 수치 예제 적용

수치예제를 통하여 제안된 두 개의 안정조건에 대하여 기존 결과와 비교한다.

예제 [9][11]: 식 (30)과 같이 표현되는 이산 시스템을 고려한다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k))+f(x(k),k) \tag{30}$$
$$A=\begin{pmatrix}-0.24 & 0.12\\-0.12 & 0.12\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0.12 & 0.12\\0.12 & 0.24\end{pmatrix}$$

[11]에서는 지연시간이 시불변이고 $d_M=d_m=1$ 인 경우에 대하여 비선형 불확실성이 없는, 즉 $f(x(k),k)=0$ 인 경우에 대하여 안정성 조건을 다루었고, 위의 예제에서의 시스템 행렬에 대하여 제안된 조건으로 안정함을 확인하였다. 그러나, 본 예제에서는 새로운 조건을 적용하기 위하여 $f(x(k),k)\le 0.05\|x(k)\|$ 인 경우를 고려한다. 이 경우 $\|A\|=0.3142,\ \|B\|=0.3142,\ \eta=0.05$ 이다. 지연시간이 시변인 경우를 고려하기 위하여, $d_M-d_m=3$ 인 경우에 대하여, 기존 [9]의 안정조건인 식 (10)을 적용하면 식 (31)과 같이 계산된다. 식 (31)에서 보듯이 안정조건이 만족되지 않아 안정성을 결정할 수 없다. 그러나, 3장에서 새로 제안된 조건들을 적용한 결과인 식 (32)에 의하면 3장의 새로운 결과(정리1)와 함께 또 다른 새로운 결과(따름정리 I)로 안정함을 확인할 수 있다. 이는 제안된 안정조건들이 [8],[11]의 시불변 지연시간의 한계를 극복하고, [9]의 조건에 비해 적용 가능한 시스템의 범위와 안정성 판단 성능에 있어 우수한 것임을 입증하는 것으로, 기존 결과로는 다룰 수 없는 시변 지연시간과 불확실성을 동시에 고려할 수 있음을 확인한 것이다.

기존 결과 3,4:

$$\lambda_{\max}((\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n)$$
$$+\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|B\|})=0.6613 < 1$$
$$(\|A\|+\sqrt{4}\|B\|+\eta)^2+\eta\|B\|(\sqrt{4}-1)^2=1.0010>1 \tag{31}$$

새로운 결과(정리1, 따름정리1):

$$\lambda_{\max}((\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n)$$
$$+\eta(DB^TB-\sqrt{D}\|B\|I_n-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+I_n))=0.6523<1$$
$$(\|A\|+\sqrt{4}\|B\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{4}\|B\|-1)^2=0.9922<1 \tag{32}$$

불확실성 크기가 $\eta=0.36$인 경우에 대한 결과는 아래와 같으며, 기존조건 적용 결과인 식 (33)로는 안정성을 판단할 수 없으나 새로운 결과(정리I)의 식 (34)로는 안정함을 확인할 수 있다.

기존 결과 3 :

$$\lambda_{\max}((\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n) \tag{33}$$
$$+\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|B\|})=1.0509 > 1$$

새로운 결과(정리 1):

$$\lambda_{\max}((\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n) \tag{34}$$
$$+\eta(DB^TB-\sqrt{D}\|B\|I_n-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+I_n))=0.9875<1$$

위의 예를 통하여 본 논문에서 제안된 2개의 새로운 안정조건들이 기존의 결과에 비교하여 우수한 조건임을 확인할 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 일정 구간 내의 지연 시간에 대하여 시변으로 지연이 있는 선형 이산 시스템에 비구조화된 불확실성이 인가되는 경우의 시스템 안정성 해석을 수행하였다. 안정성 이론에 기초하여 새로운 안정 조건식을 유도하고, 이를 간략한 수식으로 표현하였으며, 기존에 발표된 안정조건들과 비교하여 적용 가능한 시스템의 범위와 안정성 판단 능력의 우수성을 확인하였다. 본 논문의 결과는 지연 상태변수에 의한 불확실성 요소를 포함하여 다양한 형태로 표현되는 이산시스템에 대하여서도 안정 조건이 적용가능 하도록 확장 연구가 진행될 예정이다. 또한, 본 연구에서 다룬 이론의 결과를 실제적인 분야에 응용할 수 있도록 논문에서 가정한 수식과 같이 표현될 수 있는 실제 시스템을 탐색할 예정이다.

References

[1] D. L. Debeljković, and S. Stojanović, "The stability of linear discrete time delay systems in the sense of Lyapunov: an overview," *Scientific Technical Review,* Vol. 60, No. 3, pp. 67-81, Mar. 2010.

[2] P. G. Park, W. I. Lee, and S. Y. Lee, "Stability on time delay systems: A survey," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, Vol. 20, No. 3, pp. 289-297, Mar. 2014.

[3] S. Xu, J. Lam, B. Zhang and Y. Zou, "A new result on the delay-dependent stability of discrete systems with time-varying delays," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 24, No. 16, pp. 2512-2521, Oct. 2014.

[4] L. V. Hien, and H. Trinh, "New finite-sum inequalities with applications to stability of discrete time-delay systems," *Automatica*, Vol. 71, pp. 197-201, Sep. 2016.

[5] C. H. Lee, "Sufficient conditions for robust stability of discrete large-scale interval systems with multiple time delays," *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 5, No. 4, pp. 759-765, Apr. 2017.

[6] H. S. Han, "New stability conditions for networked control system with time-varying delay time," *Journal of Korea Navigation Institute,* Vol. 17, No. 6, pp. 679-686, Dec. 2013.

[7] H. S. Han, "Stability condition for discrete interval time-varying system with time-varying delay time," *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 20, No. 5, pp. 475-481, Oct. 2016.

[8] C. H. Lee, T. L. Hsien, and C. Y. Chen, "Robust stability of discrete uncertain time-delay systems by using a solution bound of the Lyapunov equation," *Innovative Computing Information and Control Express Letters,* Vol. 8, No. 5, pp. 1547-1552, May 2011.

[9] H. S. Han, "Stability condition of discrete system with time-varying delay and unstructured uncertainty," *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 22, No. 6, pp. 630-635, Oct. 2018.

[10] S. B. Stojanovic and D. Debeljkovic, "Delay-dependent stability analysis for discrete-time systems with time varying state delay," *Chemical Industry & Chemical Engineering Quaterly,* Vol. 17, No. 4, pp. 497-503, Apr. 2011.

[11] C. S. Zhou and J. L. Deng, "Stability analysis of grey discrete-time systems," *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 34, No. 2, pp. 173-175, Feb. 1989.

한 형 석 (Hyung-Seok Han)

1986년 2월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학사)
1993년 8월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학박사)
1993년 9월 ~ 1997년 8월: 순천향대학교 제어계측공학과 조교수
1997년 9월 ~ 현재 : 가천대학교 전자공학과 교수
※관심분야 : 유도제어, 견실제어, 센서 응용 시스템