

# Volatility-nonstationary GARCH(1,1) models featuring threshold-asymmetry and power transformation

Sun Woo Choi<sup>a</sup> · Sun Young Hwang<sup>a</sup> · Sung Duck Lee<sup>b,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University;

<sup>b</sup>Department of Information and Statistics, Chungbuk National University

(Received September 22, 2020; Revised October 5, 2020; Accepted October 5, 2020)

---

## Abstract

Contrasted with the standard symmetric GARCH models, we consider a broad class of threshold-asymmetric models to analyse financial time series exhibiting asymmetric volatility. By further introducing power transformations, we add more flexibilities to the asymmetric class, thereby leading to power transformed and asymmetric volatility models. In particular, the paper is concerned with the nonstationary volatilities in which conditions for integrated volatility and explosive volatility are separately discussed. Dow Jones Industrial Average is analysed for illustration.

Keywords: volatility-nonstationary, threshold-asymmetry, power transformation

---

## 1. 서론

금융자산(financial asset)의 가격과 관련된 금융시계열 자료는 변동성(volatility)이 시간에 따라 변하는 특징이 있다. 변동성이란 수리통계학 언어로 조건부 분산(conditional variance)을 의미한다. 금융시계열에서 변동성은 위험을 설명하고 측정하는 수단이므로 위험관리, 포트폴리오의 선택, 금융자산의 가치평가 등에 중요한 역할을 한다. 변동성의 일반적인 특징은 어느 일정 기간에는 연속적으로 변동성이 높고 또 다른 기간에는 변동성이 낮은, 소위 변동성 집중 현상(volatility cluster)과 변동성이 자산 가격의 상승과 하락에 다르게 반응하는 비대칭 효과(asymmetric effect)를 들 수 있다 (Tsay, 2010). 또한 금융시계열은 일반적인 시계열에 비해서 분포의 모양이 정규분포에 비해 꼬리가 두껍고 급첨(high kurtosis or leptokurtic) 현상을 보이는 특징이 있다. 즉, 극단적인 값이 나올 가능성이 정규분포에 비해 높은 경향이 있다 (Terasvirta, 2009). 변동성을 측정하는 방법은 자료 기반(data based) 방법과 모형 기반(model based) 방법으로 나눌 수 있다. 자료 기반 변동성 추정 방법으로는 역사적 변동성(historical volatility), 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average; EWMA) 등이 있다. 빅데이터 처리 능력의 향상으로 짧은 시간 단위의 고빈도 시계열(high frequency time series) 분석이 가능해졌다. 고빈도 자료로부터 일중 수익률(intra-daily return)을 계산한 후 일간 변동성(daily volatility)을 추정하는 실현변동성(realized volatility; RV) 방법이 제안되었으며 실현변동성도 자료기반 방법으로 분류 가능하다 (Kim과 Hwang, 2018). 모형 기반 변동성은 점화 수식을 통한 변동성 계산방법으로 Bollerslev (1986)의 일반화 자기회귀 조건부 이분산 모형(generalized ARCH; GARCH)이 대표적인 점화식 모형이다. 다양한 GARCH 모형의 일반화에 대해서는 Choi 등 (2012)를 참고

---

<sup>1</sup> Corresponding author: Department of Information and Statistics, Chungbuk National University, 1 Chungdae-ro, Cheongju, Chungbuk 28644, Korea. E-mail: [sdlee@chungbuk.ac.kr](mailto:sdlee@chungbuk.ac.kr)

하기 바란다.

변동성 입장에서 정상/비정상 모형을 구분해 보자. 시계열 모형  $\{\varepsilon_t\}$ 에서  $l$ -시차 후 변동성 ( $l$ -step ahead volatility)을  $h_t(l) = \text{Var}(\varepsilon_{t+l} | F_t)$ 으로 표현한다. 여기서  $l = 1, 2, \dots$  이며  $F_t$ 은 “시점  $t$ ” 지의 정보 집합을 나타낸다. 시차  $l = 1$ 인 경우는  $h_{t+1} = h_t(1)$ 를 의미한다. 변동성-정상인 모형은  $l \rightarrow \infty$ 일 때  $h_t(l)$ 이 고정된 상수로 수렴하는 모형이며 변동성-비정상(volatility-nonstationary) 모형은  $l \rightarrow \infty$ 일 때  $h_t(l)$ 이 무한대로 발산하는 모형을 의미한다. 대표적인 변동성-비정상 모형으로는 Nelson (1991)이 제안한 IGARCH (1,1) 모형이 있다. 변동성 모형식의 정상/비정상 정의는 일반적인 시계열에서의 정상/비정상 정의와는 약간 다르며 변동성에 대한 정의이므로 주의를 기울일 필요가 있다. 시계열 모형의 정상/비정상 성질을 다른 각도에서 바라본 연구로는, 예를 들어, Hwang 등 (2014)의 연구가 있다.

Bollerslev (1986)는 시계열  $\{\varepsilon_t\}$ 가 다음 점화식에 의해 생성될 때 GARCH(1,1) 모형이라 정의 하였다.

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (1.1)$$

여기서  $h_t = \text{Var}(\varepsilon_t | F_{t-1})$ 는 조건부 분산 시계열, 즉 변동성 시계열이다. 표준화 오차  $\{e_t\}$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 iid 과정이고, 연관 모수들은 모두 비음, 즉,  $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ 을 만족한다. 고차의 GARCH 모형을 고려할 수 있으나 Hansen과 Lunde (2005)가 주장한 바, 실제 금융/경제 시계열 자료 분석에서 일차 모형인 GARCH(1,1)만을 고려해도 충분하므로 본 논문에서는 일차 모형만을 다루고자 한다. GARCH(1,1) 모형에서  $l$ -시차 후 변동성  $h_t(l)$ 은 다음과 같은 점화식 구조를 가진다 (Tsay, 2010, 식 (3.16)).

$$h_t(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)h_t(l-1), \quad l \geq 2, \quad h_t(1) = h_{t+1}. \quad (1.2)$$

따라서  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ 일 때  $h_t(l)$ 은  $l$ 이 무한대로 갈 때 상수  $\alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta_1)$ 으로 수렴함으로 변동성-정상 모형이며 이런 이유로  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ 을 정상성 조건이라 부른다. 식 (1.2)로부터  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ 이면  $h_t(l) = (l-1)\alpha_0 + h_t(1)$ 이므로  $l$ 이 무한대로 갈 때  $h_t(l)$ 이 무한대로 발산하므로 변동성-비정상이 된다. Nelson (1990, 1991)은 GARCH(1,1)에서  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$  제약조건이 있는 변동성-비정상 모형을 Integrated GARCH (1,1), 즉, IGARCH(1,1)이라 칭하였으며, 변동성 문헌에서는 IGARCH(1,1)을 초기 변동성  $h_t(1) = h_{t+1}$ 이 미래의 변동성  $h_t(l)$ 에 계속 남아서 영향을 준다는 의미로 지속-변동성(persistent volatility)모형이라 부른다.

식 (1.1)의 변동성-정상 GARCH(1,1) 모형과 변동성-비정상 IGARCH(1,1)은 모두  $\varepsilon_t$ 에 관해서 대칭모형이다. 본 연구에서는 GARCH(1,1) 모형에 분계점-비대칭(threshold-asymmetry)과 멱변환(power transformation)을 적용하여 다양한 비대칭성을 도입하고 동시에 모형의 수식 다양성을 제고하고자 한다. 특히 변동성-비정상 모형을 중심으로 알아보하고자 하며, 미국 다우존스 산업평균지수(다우 지수)에 다양한 변동성-비정상 모형을 적용해서 비교하고자 한다.

## 2. 분계점-비대칭과 멱변환을 통한 다양한 GARCH(1,1) 모형 소개

본 절에서는 식 (1.1)의 표준적인 GARCH(1,1) 모형에 비대칭성 및 멱변환을 적용하여 다양한 변동성 점화식을 소개하고자 한다. 주로 인용한 문헌은 Choi 등 (2012), Park 등 (2009), Hwang 등 (2010), Rabemananjara와 Zakoian (1993), Terasvirta (2009), Glosten 등 (2003), Hwang과 Kim (2004), 그리고 Hwang과 Basawa (2004)이며 이 문헌들 내부의 참고문헌을 보면 비대칭 멱변환 모형에 대한 많은 정보를 얻을 수

있을 것이다.

비대칭성을 도입하기 위해 다음과 같은 분계점(threshold) 함수를 정의한다.

$$\varepsilon^+ = \max(0, \varepsilon), \quad \varepsilon^- = \max(0, -\varepsilon)$$

분계점 함수  $\varepsilon^+ \geq 0$ 와  $\varepsilon^- \geq 0$ 의 곱은 언제나 영(zero)함수이다. 즉,  $\varepsilon^+ \varepsilon^- = 0$ .

- Threshold GARCH (TGARCH)

비대칭 효과를 반영하는 Threshold GARCH (TGARCH) 모형식은 다음과 같다.

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_{11}(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + \alpha_{12}(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (2.1)$$

여기서  $\alpha_{11}, \alpha_{12}$ 는 분계점-비대칭 효과를 반영하는 모수로서,  $\alpha_{12}$ 가  $\alpha_{11}$ 보다 큰 경우, 같은 양이면 음의 수익률을 가질 때가 양의 수익률을 가질 때 보다 위험이 더 크다는 leverage effect를 의미하고,  $\alpha_{11} = \alpha_{12}$ 이면 위험이 수익률의 부호에 영향을 받지 않는 대칭인 GARCH 모형이 된다.

- Power-transformed GARCH (Power GARCH)

Power-transformed GARCH 모형은 다음과 같다.

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2)^\delta + \beta_1 h_{t-1}^\delta, \quad (2.2)$$

여기서 멱변환  $\delta > 0$ 이다.  $\delta = 1$ 일 때는 GARCH(1,1)이며  $\delta = 1/2$ 일 때는 절대값-GARCH(absolute GARCH) (Hwang과 Basawa, 2004) 모형이 된다.

- Power transformed threshold GARCH (Power TGARCH)

비대칭 및 멱변환 효과를 모두 가진 멱변환 비대칭 GARCH 모형은 다음과 같다.

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_{11}(\varepsilon_{t-1}^+)^{2\delta} + \alpha_{12}(\varepsilon_{t-1}^-)^{2\delta} + \beta_1 h_{t-1}^\delta \quad (2.3)$$

이 모형은 다양한 변동성 함수식을 포함하는 방대한 모형식으로서 변동성-정상성 및 에르고딕성과 모멘트의 존재성에 대해서는 Hwang과 Basawa (2004)를 참고하기 바란다.

### 3. 변동성-비정상 모형 소개 : Integrated 모형 및 Explosive 모형

변동성 입장에서 정상성은  $l$ -시차 후 변동성  $h_t(l)$ 이 시차  $l$ 이 무한대로 접근 할 때 상수로 수렴하는 모형을 의미하며 비정상 모형은  $h_t(l)$ 이 무한대로 발산하는 모형이다. 본 절에서는 비대칭 모형인 TGARCH 모형과 Power TGARCH 모형에서 변동성 정상/비정상 조건을 Park 등 (2009) 및 Hwang 등 (2010)을 중심으로 알아보고자 한다. 먼저, TGARCH 모형을 고려한다.  $\{e_t\}$ 의 분포는 평균이 영이고 분산이 1인 표준화된 분포로서 영을 중심으로 대칭임을 가정한다.

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_{11}(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + \alpha_{12}(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + \beta_1 h_{t-1}.$$

모형의 변동성 정상/비정상을 구분하는 핵심 모수는 다음과 같다.

$$\phi = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{12}}{2} + \beta_1. \quad (3.1)$$

Park 등 (2009)에 따르면  $h_t(l) = \alpha_0 + \phi h_t(l-1)$ ,  $l \geq 2$ 이 성립하므로  $\phi < 1$ 일 때  $h_t(l)$ 은 상수  $\alpha_0/(1-\phi)$ 로 수렴하므로 변동성-정상이다.  $\phi = 1$ 인 경우는 IGARCH 모형의 경우와 같이  $h_t(l) = (l-1)\alpha_0 + h_t(1)$ 인 변동성-비정상이다. 따라서  $\phi = 1$ 인 Integrated 변동성 모형을 I-TGARCH 모형으로 부르기로 한다.  $\phi > 1$ 인 경우에는

$$h_t(l) = (\phi - 1)^{-1} (\phi^{l-1} - 1) \alpha_0 + \phi^{l-1} h_t(1)$$

이므로 변동성-비정상 모형으로서 현재 변동성  $h_t(1)$ 이 미래 시차의 변동성에 폭발적인 영향을 끼치므로 Explosive 변동성 모형으로 부르며 I-TGARCH 모형과 분리해서 고려한다. 폭발적인 변동성 연구로는, 예를 들어, Hwang 등 (2007)의 연구가 있다.

다음으로, Power-TGARCH 모형을 고려해 보자.

$$h_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_{11}(\varepsilon_{t-1}^+)^{2\delta} + \alpha_{12}(\varepsilon_{t-1}^-)^{2\delta} + \beta_1 h_{t-1}^\delta, \quad \delta > 0.$$

Hwang 등 (2010)은 다음의 핵심모수를 정의한 후 변동성-정상, 변동성-비정상을 구분하였다.

$$\phi(\delta) = (\alpha_{11} + \alpha_{12}) E(e_t^+)^{2\delta} + \beta_1 \quad (3.2)$$

$\phi(\delta) < 1$ 인 경우 Power TGARCH 모형은 변동성-정상이며  $\phi(\delta) = 1$ 일 때 Integrated 변동성 비정상 모형으로서  $\delta$ I-TGARCH으로 부르기로 한다.  $\phi(\delta) > 1$ 인 경우는 Explosive 변동성 비정상 모형이다.  $\delta = 1$ 인 경우는  $\phi(1) = \phi = (\alpha_{11} + \alpha_{12}) + \beta_1$ 이 성립한다. 본 연구에서는 평균이 영이고 분산이 1인 표준화 오차의 분포로서 표준정규분포와 다음의 pdf를 가진 자유도(df)가  $\nu$ 인 표준화  $t$ -분포 (분산 = 1)를 고려하기로 한다 (Tsay, 2010, p.121).

$$f(e_t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{(\nu-2)\pi}} \left(1 + \frac{e_t^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad \nu > 2. \quad (3.3)$$

변동성-비정상을 결정하는 핵심모수  $\phi(\delta)$ 는 표준화 오차  $e_t$ 의 적률  $E(e_t^+)^{2\delta}$ 에 의존한다. 대칭성에 의해서  $E(e_t^+)^{2\delta} = E(e_t^-)^{2\delta} = E|e_t|^{2\delta}/2$ 이 성립하므로 표준화  $t$ -분포에 대한 다음의 적률식은 유용하다 (Chung과 Hwang, 2017).

$$E|e_t|^{2\delta} = \frac{(\nu-2)^\delta \Gamma\left(\frac{2\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2\delta}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad \delta > 0. \quad (3.4)$$

표준정규분포의 경우에는 다음이 성립한다.

$$E|e_t|^{2\delta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^\delta \Gamma\left(\frac{2\delta+1}{2}\right). \quad (3.5)$$

최근 금융시계열 분야에서 표준화 오차  $\{e_t\}$ 의 분포가 비대칭인 경우에 대한 연구가 활발해지고 있다. 예를 들어 skewed-표준정규분포와 skewed-표준화  $t$ -분포 등이 있다. 표준화 오차가 비대칭인 경우에는 식 (3.1)과 (3.2)의 핵심모수는 변형이 필요하다. 예를 들어 TGARCH 모형의 핵심모수 식 (3.1)의  $\phi$ 는 비대칭을 고려한  $\phi_{asym} = \tau_e \alpha_{11} + (1-\tau_e)\alpha_{12} + \beta_1$ 으로 대체된다. 여기서  $\tau_e = E(e_t^+)^2$ 이다. TGARCH 모형은  $\phi_{asym} < 1$ ,  $\phi_{asym} = 1$ ,  $\phi_{asym} > 1$  따라서 변동성-정상, 변동성-비정상(integrated), 변동성-비정상(explosive) 성질을 가진다 (Hwang 등, 2010).

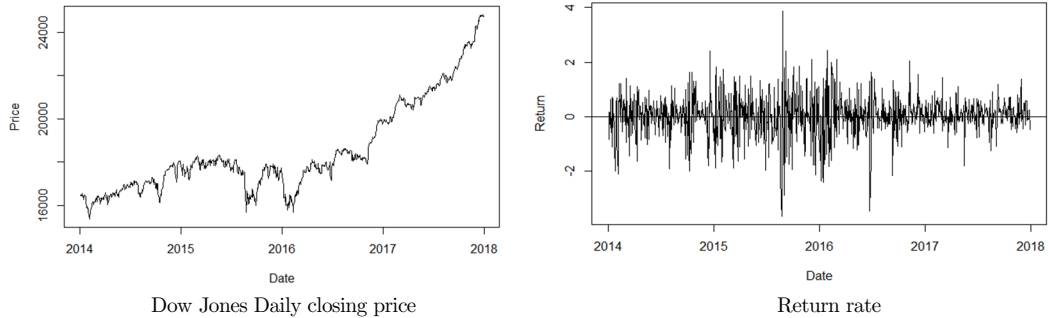


Figure 4.1. Daily closing price and return rate.

Table 4.1. Dow Jones Indices return rate and descriptive statistics

	DOW
Mean	0.03968078
Median	0.05401923
Min	-3.640243
Max	3.87548
Standard Deviation	0.7458574
Skewness	-0.3457165
Kurtosis	5.720799
Jarque-Bera ( <i>p</i> -value)	333.33 (< 0.0001)

## 4. 자료 분석: 다우지수

### 4.1. 사전 분석

본 절에서는 변동성-비정상 모형을 미국 다우존스 산업평균 지수(Dow Jones Industrial Average; Dow)의 일별 종가 자료에 적용하고 평가하고자 한다. 사용된 자료는 2014년 1월 2일에서 2017년 12월 29일까지 총 1,007개의 관측치 데이터이다. 먼저, 수익률 자료를 얻기 위해 로그 차분을 하고 분석을 시작하였다. 다우지수  $\{P_t\}$ 를 시간  $t$ 에서의 일별 종가라고 할 때, 일별 백분위 로그수익률  $\{r_t\}$ 를 다음과 같이 계산 한다. 앞으로는 백분위 로그수익률을 간략히 “수익률”로 부르기로 한다.

$$r_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100 .$$

Figure 4.1은 일별 종가와 일별 수익률의 시도표이다. 일별 종가 시도표를 보면 2015년 8월과 2016년 2월에 급격히 하락하는 구간을 관찰 할 수 있다. 국제 유가의 급락, 글로벌 경제 성장률 둔화 우려, 중국 경제 지표 악화 등으로 인한 경제 악화 우려가 급락의 원인으로 판단된다.

변동성 모형을 적합하기 전에 일별 수익률의 분포를 살펴보았다. 다우 자료의 기초적인 기술 통계량은 Table 4.1과 같다. Jarque-bera 검정에서 괄호 안에 있는 *p*-value 값으로 부터 수익률이 비정규분포임을 유추할 수 있다. 왜도(skewness) 값은 음수이므로 분포가 왼쪽으로 다소 긴 꼬리를 가지고 있다는 것을 알 수 있다. 첨도(kurtosis)가 3보다 크므로 급첨을 가지고 있다고 판단할 수 있으며 GARCH 분석이 유용할 것임을 시사한다. Figure 4.2는 일별 수익률의 Normal Q-Q plot이다. 비정규성뿐 아니라 꼬리가 정규분포 보다 두꺼운 분포임을 알 수 있다.

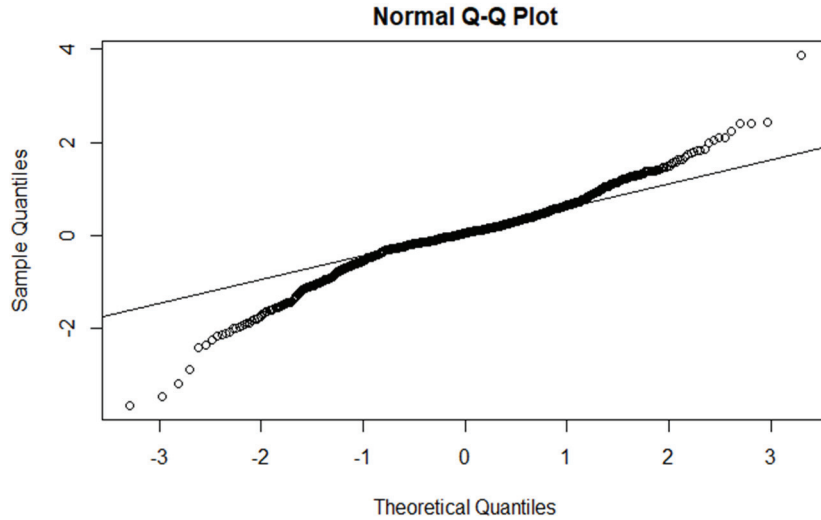


Figure 4.2. Dow Jones Indices Q-Q plot.

#### 4.2. 변동성-비정상성 및 비대칭성

다우 자료가 변동성-비정상성이 있는지와 비대칭성(asymmetry)이 있는지를 파악하고자 한다. 수익률 변동성 분석은 R의 rugarch 패키지와 SAS의 AUTOREG와 MODEL 프로시저를 이용하였다. 변동성-비정상성 여부를 판단하기 위해 TGARCH(1,1) 모형 적합 결과를 살펴보자. TGARCH(1,1) 모형의 적합 결과는 다음과 같다.

TGARCH(1,1) :

$$r_t = 0.042572 + \varepsilon_t; \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$$

$$h_t = 0.040268 + 0.029152(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + 0.31746(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + 0.752316h_{t-1}$$

TGARCH(1,1) 모형에서 모수  $\phi = (\alpha_{11} + \alpha_{12})/2 + \beta_1$  값은 0.9256212로 1에 가깝다고 볼 수 있다. 그러므로 다우 자료는 변동성-정상 모형과 동시에 Integrated 변동성-비정상 모형 분석이 유용하리라 판단된다.

변동성의 비대칭성을 확인하기 위해 TGARCH(1,1) 모형의 적합 결과를 살펴보고 New Impact Cure (NIC)를 확인해 보고자 한다. NIC는 Engle과 Ng (1993)에 의해 제안된 변동성 비대칭성을 쉽게 파악할 수 있는 그래프로서 직전 수익률을  $x$ -축으로 하고 변동성  $h_t$ 를  $y$ -축으로 그린 그림이다. 국내 금융시계열의 다양한 비대칭성 NIC에 대해서는 Lee 등 (2013)을 참고하기 바란다. 적합된 TGARCH(1,1) 모형에서  $(\varepsilon_{t-1}^-)^2$ 의 계수(0.31746)가  $(\varepsilon_{t-1}^+)^2$ 의 계수(0.029152)에 약 11배이다. Figure 4.3은 TGARCH(1,1) 모형을 이용하여 구한 NIC 그림이다. NIC 그림을 보면  $\varepsilon_{t-1}^-$ 의 기울기가  $\varepsilon_{t-1}^+$ 의 기울기보다 확연히 큰 기울기를 가지고 있다. 따라서 다우 자료의 수익률 변동성은 좋은 소식의 영향에 비해 나쁜 소식의 영향에 더 민감하게 반응한다는 사실을 알 수 있다.

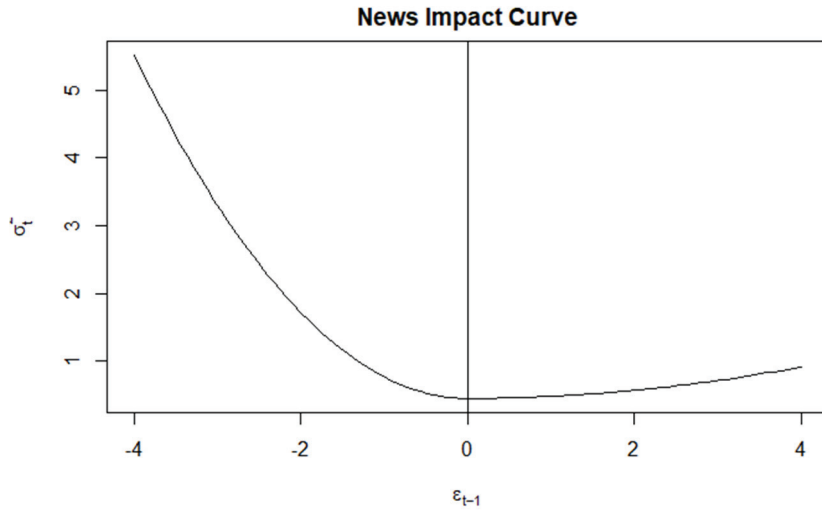


Figure 4.3. NIC of Dow Jones return rate: asymmetry.

Table 4.2. Selected  $\delta$  values of distributions

$\delta$	Normal	표준화 $t$ -분포			
		df = 5	df = 8	df = 10	df = 15
	1.2	0.9	1.0	1.1	1.1

#### 4.3. $\delta$ I-TGARCH(1,1) 모형 적합

다우 자료의 변동성에 비대칭성과 비정상성이 존재한다는 것을 확인하였다. 따라서 이를 동시에 담고 있는 식 (2.3)의  $\delta$ I-TGARCH(1,1) 모형을 적합하고자 한다. 모형의 성능을 판단하기 위해 비교 모형으로는 IGARCH(1,1)와 TGARCH(1,1) 모형을 사용하고자 한다. 각 모형마다 표준화 오차  $\{e_t\}$ 의 분포는 표준정규분포와 표준화  $t$ -분포를 가정하였다. 표준화  $t$ -분포는 분산이 1인 분포로서 자유도(df)가  $\nu$ 인 표준화  $t$ -분포의 확률밀도 함수 및 적률은 식 (3.3)과 (3.4)를 참고하기 바란다.

$\delta$ I-TGARCH(1,1) 모형을 적합하기 위해서는 제약조건인 식 (3.2)의  $\phi(\delta)$ 에 대한 계산이 필요하다.  $\phi(\delta)$ 값 계산을 위해서는 먼저  $\{e_t\}$ 의 분포가 정의 되어야 하므로  $\{e_t\}$ 의 분포가 표준화  $t$ -분포를 따르는 경우에는 자유도 5, 8, 10, 그리고 15를 고려하였다. 또한  $\delta$ 값의 경우, 0.1부터 1.5까지 0.1 간격으로  $\delta$  값을 증가시키며  $\phi(\delta)$  값을 계산한 후 모형을 적합하였다.  $\{e_t\}$ 의 분포 시나리오 별로 가장 적합한  $\delta$ I-TGARCH(1,1) 모형을 선택하기 위해 로그 가능도(log likelihood)을 이용하였다. 분포와  $\delta$ 에 따른 로그가능도 값으로부터 최대 로그가능도를 갖는  $\delta$  값을 선택하였다. 선택된  $\delta$  값은 Table 4.2에 정리하였다.

$\delta$  값은 정규분포에서는 1.2가 선택되었으며 자유도 5, 8, 10, 15인 표준화  $t$ -분포에서는 차례대로 0.9, 1.0, 1.1, 1.1이 선택되었다. 표준화  $t$ -분포의 경우,  $\delta$  값이 1 부근에서 선택됨을 확인 할 수 있었다.  $\delta$ I-TGARCH 모형의 적합 추정식은 아래 Table 4.3과 같다.

선택된 모형이 적합한지를 판단하기 위해 표준화된 잔차 시계열  $\{e_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}\}$ 과  $\{e_t^2\}$ 을 구하여 Ljung-Box 검정을 하였다. Table 4.4는 Ljung-Box 검정 통계량이다. 괄호 안의 수치는 검정 통계량  $p$ -value이다. Table

Table 4.3. Fitted results of  $\delta$ I-TGARCH

모형	추정식
1.2 I-TGARCH(1,1)-Normal	$r_t = 0.031148 + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t^{1.2} = 0.035169 + 0.060283(\varepsilon_{t-1}^+)^{2.4} + 0.47604(\varepsilon_{t-1}^-)^{2.4} + 0.68417h_{t-1}^{1.2}$
0.9 I-TGARCH(1,1)-t (df = 5)	$r_t = 0.046 + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t^{0.9} = 0.015818 + 0.017785(\varepsilon_{t-1}^+)^{1.8} + 0.29065(\varepsilon_{t-1}^-)^{1.8} + 0.77913h_{t-1}^{0.9}$
1.0 I-TGARCH(1,1)-t (df = 8)	$r_t = 0.041966 + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t = 0.017561 + 0.22132(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + 0.33903(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + 0.75923h_{t-1}$
1.1 I-TGARCH(1,1)-t (df = 10)	$r_t = 0.042317 + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t^{1.1} = 0.018003 + 0.022249(\varepsilon_{t-1}^+)^{2.2} + 0.34457(\varepsilon_{t-1}^-)^{2.2} + 0.74299h_{t-1}^{1.1}$
1.1 I-TGARCH(1,1)-t (df = 15)	$r_t = 0.038458 + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t^{1.1} = 0.020899 + 0.025247(\varepsilon_{t-1}^+)^{2.2} + 0.38499(\varepsilon_{t-1}^-)^{2.2} + 0.73829h_{t-1}^{1.1}$

Table 4.4. Ljung-Box results

Model	df	$Q(12)$	$Q^2(12)$
1.2 I-TGARCH(1,1)-Normal	-	9.46 (0.6634)	7.60 (0.8159)
0.9 I-TGARCH(1,1)-t	5	10.91 (0.5366)	7.62 (0.8142)
1.0 I-TGARCH(1,1)-t	8	10.65 (0.5590)	7.72 (0.8070)
1.1 I-TGARCH(1,1)-t	10	10.39 (0.5817)	7.53 (0.8211)
1.1 I-TGARCH(1,1)-t	15	10.35 (0.5852)	7.55 (0.8192)

4.4를 보면 괄호 안의  $p$ -value 모두 0.05 이상이므로 신뢰수준 0.05 하에서 백색잡음 모형(white noise)을 따른다는 귀무가설을 기각하지 못한다. 따라서 12차까지의 잔차와 잔차 제곱이 신뢰수준 0.05 하에서 백색잡음 모형을 따른다고 판단할 수 있으며 선택한 모든  $\delta$ I-TGARCH(1,1) 모형 적합의 적절성을 확보하였다. 변동성-비정상  $\delta$ I-TGARCH(1,1) 모형의 효과를 비교 분석하기 위해 대칭모형인 IGARCH(1,1)을 다음 자료에 적합하였다. 비교모형의 적합 결과는 다음과 같다.

IGARCH(1,1)-Normal :

$$r_t = 0.071549 + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$$

$$h_t = 0.033858 + 0.281380\varepsilon_{t-1}^2 + 0.718620h_{t-1}$$

IGARCH(1,1)-t:

$$r_t = 0.072281 + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$$

$$h_t = 0.027006 + 0.257658\varepsilon_{t-1}^2 + 0.742342h_{t-1}$$

$\delta$ I-TGARCH(1,1) 모형과 비교 모형들을 적합 후 모형별 AIC와 BIC 값을 이용하여 비교하였다. AIC와 BIC 값은 Table 4.5와 같다. Table 4.5에서  $\delta = 0.9$ 이고 자유도가 5인 표준화  $t$ -분포를 가진  $\delta$ I-TGARCH(1,1) 모형이 가장 작은 AIC와 BIC를 갖는다.

따라서 주어진 다음 자료에는  $\{e_t\}$ 의 분포가 멱변환  $\delta = 0.9$ 이며 자유도 5인 표준화  $t$ -분포를 가진 비대칭인 0.9 I-TGARCH-t 모형을 사용하는 것이 바람직해 보인다.



Table 4.5. AIC and BIC

Model	df	logL	AIC	BIC
1.2 I-TGARCH(1,1)-Normal	–	–996.9259	1.9899	2.0143
0.9 I-TGARCH(1,1)-t	5	–956.7195	1.9101	1.9345
1.0 I-TGARCH(1,1)-t	8	–961.0443	1.9187	1.9431
1.1 I-TGARCH(1,1)-t	10	–964.2775	1.9251	1.9495
1.1 I-TGARCH(1,1)-t	15	–970.6908	1.9378	1.9622
IGARCH(1,1)-Normal	–	–1017.056	2.0259	2.0406
IGARCH(1,1)-t	4.59	–976.5167	1.9474	1.9669

## References

- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Choi, M. S., Park, J. A., and Hwang, S. Y. (2012). Asymmetric GARCH processes featuring both threshold effect and bilinear structure, *Statistics & Probability Letters*, **82**, 419–426.
- Chung, S. A. and Hwang, S. Y. (2017). A profile Godambe information of power transformations for ARCH time series, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **46**, 6899–6908.
- Engle, R. F. and Ng, V. K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance*, **48**, 1749–1778.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *The Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH (1,1)?, *Journal of Applied Econometrics*, **20**, 873–889.
- Hwang, S. Y. and Basawa, I. V. (2004). Stationarity and moment structure for Box-Cox transformed threshold GARCH(1,1) processes, *Statistics & Probability Letters*, **68**, 209–220.
- Hwang, S. Y., Basawa, I. V., Choi, M. S., and Lee, S. D. (2014). Non-ergodic martingale estimating functions and related asymptotics, *Statistics*, **48**, 487–507.
- Hwang, S. Y., Baek, J. S., Park, J. A., and Choi, M. S. (2010). Explosive volatilities for threshold-GARCH processes generated by asymmetric innovations, *Statistics & Probability Letters*, **80**, 26–33.
- Hwang, S. Y., and Kim, T. Y. (2004). Power transformation and threshold modeling for ARCH innovations with applications to tests for ARCH structure, *Stochastic Processes and their Applications*, **110**, 295–314.
- Hwang, S. Y., Kim, S., Lee, S. D., and Basawa, I. V. (2007). Generalized least squares estimation for explosive AR(1) processes with conditionally heteroscedastic errors, *Statistics & Probability Letters*, **77**, 1439–1448.
- Kim, J. Y. and Hwang, S. Y. (2018). A threshold-asymmetric realized volatility for high frequency financial time series, *Korean Journal of Applied Statistics*, **31**, 205–216.
- Lee, J. W., Yoon, J. E., and Hwang, S. Y. (2013). A graphical improvement in volatility analysis for financial series, *Korean Journal of Applied Statistics*, **26**, 785–796.
- Nelson, D. B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(1, 1) model, *Econometric Theory*, **6**, 318–334.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, **59**, 347–370.
- Park, J. A., Baek, J. S., and Hwang, S. Y. (2009). Persistent threshold-GARCH processes: Model and application, *Statistics & Probability Letters*, **79**, 907–914.
- Rabemananjara, R. and Zakoian, J. M. (1993). Threshold ARCH models and asymmetries in volatility, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 31–49.
- Terasvirta, T. (2009). An introduction to univariate GARCH models, in *Handbook of Financial Time Series*, 17–42, Eds., Andersen, T. G., Davis, R. A., Kreiss, J. P. and Mikosch, T., Springer, Berlin.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series* (3rd ed), Wiley, New York.

# 분계점 비대칭과 역변환 특징을 가진 비정상-변동성 모형

최선우<sup>a</sup> · 황선영<sup>a</sup> · 이성덕<sup>b,1</sup>

<sup>a</sup>숙명여자대학교 통계학과, <sup>b</sup>충북대학교 정보통계학과

(2020년 9월 22일 접수, 2020년 10월 5일 수정, 2020년 10월 5일 채택)

---

## 요약

본 논문에서는 금융시계열의 특징인 비대칭 변동성을 연구하고 있다. 역변환을 동시에 고려한 역변환-비대칭 GARCH 모형을 소개하고 있다. 변동성이 비정상인 모형을 다루고 있으며 오차항으로 표준정규분포와 더불어 표준화  $t$ -분포도 고려하여 변동성 정상/비정상 조건을 제시하고 있다. 미국 주가 시계열인 다우지수 적용사례를 예시하였다.

주요용어: 비정상 변동성, 비대칭 변동성, 역변환

---

---

<sup>1</sup>교신저자: (28644) 충북 청주시 서원구 충대로 1, 충북대학교 정보통계학과. E-mail: sdlee@chungbuk.ac.kr