J. Soc. Korea Ind. Syst. Eng Vol. 43, No. 1 : 61-69, March 2020
https://doi.org/10.11627/jkise.2020.43.1.061
ISSN : 2005-0461(print)
ISSN : 2287-7975(online)

Optimal Periodic Replacement Policy Under Discrete Time Frame

Jinpyo Lee†

College of Business Administration, Hongik University

이산 시간을 고려한 시스템의 교체와 수리 비용 최적화 연구

이 진 표†

홍익대학교 경영대학 경영학과

Systems such as database and socal network systems have been broadly used, and their unexpected failure, with great losses and sometimes a social confusion, has received attention in recent years. Therefore, it is an important issue to find optimal maintenance plans for such kind of systems from the points of system reliability and maintaining cost. However, it is difficult to maintain a system during its working cycle, since stopping works might incur users some troubles. From the above viewpoint, this paper discusses minimal repair maintenance policy with periodic replacement, while considering the random working cycles. The random working cycle and periodic replacement policies with minimal repair has been discussed in traditional literatures by usually analyzing cases for the nonstopping works. However, maintenance can be more conveniently done at discrete time and even during the working cycle in real applications. So, we propose that periodic replacement is planned at discrete times while considering the random working cycle, and moreover provide a model in which system, with a minimal repair at failures between replacements, is replaced at the minimum of discrete times KT and random cycles Y. The average cost rate model is used to determine the optimal number of periodic replacement.

Keywords : Minimal Repair, Random Cycle Time, Renewal Theory, Replacement Policy

1. 서 론

기업에서 데이터베이스 시스템, 통신 네트워크 시스템 그리고 소셜 네트워크 시스템과 같이 폭넓게 사용되고 있는 시스템의 갑작스러운 고장이나 성능 저하 등은 비용 면에서 뿐만 아니라 사회적인 혼란도 야기하는 경우가 종종 발생하고 있다. 따라서 시스템 안정성이라는 관점에서 시스템에 대한 수리, 가용성, 정기적인 교체 등의 관리 비용 등을 고려한 최적의 유지 보수 정책을 수립하는 것은 기업에 있어서 상당히 중요하다. 그러나 시스템을 유지 관리하기 위한 비용은 일반적으로 상당히 높고 또한 일정한 수준을 유지하는 것은 쉬운 일이 아니며 또한 시스템 내에서 진행 중인 작업을 중지하는 것은 시스템 사용자인 고객에게는 상당히 불편하며 때로는 고객 이탈로 이어질 수 있다. 그러므로 지속적인 성능 저하 및 고장 등이 발생하는 시스템에서는 체계적인 교체 및 수리 정책을 수립하여 적용하여야 한다.

이러한 관점에서 본 연구는 진행 중 작업이 존재하는 시스템에서의 교체 비용과 최소수리 비용 간의 상충 관계를 분석하고, 최적의 정기 교체 시점을 제시한다. 기존 연구는 대부분 작업주기나 정기교체 시점의 고려에 연속시간(continuous time) 개념을 적용하였는데, 이는 최적화

Received 13 February 20220; Finally Revised 19 March 2020; Accepted 20 March 2020
† Corresponding Author : jinpyo.lee@hongik.ac.kr

계산에 유리하기 때문이다. 그러나 연속적인 시간의 개념은 현실적으로 적용하는데 문제점을 낳게 되는데 우선 주말이나 휴일 또는 조직의 일정 등을 고려하면 연속적인 시간을 적용하여 최적화를 할 경우 현실적으로 실행이 불가능한 시점에서 최적화되는 경우가 발생하게 된다. 이에 이 연구에서는 이산 시간(discrete time)의 개념으로 진행을 하였는데 우선 정기적으로 교체를 하고자 하는 최소 단위의 시간을 현실적으로 실행 가능한 이산 단위의 시간으로 정한 다음 이 최소 단위 시간에 대한 최적 배수를 결정하는 모형을 개발하였다. 여기서 정기적으로 교체를 하고자 하는 최소 단위의 시간이란 예를 들어 교체 부서 또는 업체와 협의하여 매주 또는 매달 단위와 같이 7일 또는 30일과 같이 이산 단위의 시간으로 교체를 위한 최소 시간 단위를 설정하는 것을 의미한다.

Nakagawa[14]가 언급한 바와 같이 고장 후 또는 고장 전에 시스템을 교체하는 것을 각각 수정 교체 및 예방 교체라고 한다. Barlow et al.[1]는 예정된 정기적 시점에 장치를 교체하거나 교체 후 고장 발생 시에는 고장률이 이전과 같이 일정하게 유지할 정도로만 최소한의 수리를 하는 시스템에 대한 수리적 모형을 개발하여 분석하였다. Holland and McLean[4]은 모터나 전자기적 부품 등과 같은 시스템이 적용되는 실질적인 정책에 대하여 연구하였다. Morimura[9]은 고장 발생 시 한 번은 교체를 실행하고 그 다음 고장 발생 시에는 최소한의 수리를 실행하는 즉 교체와 최소한의 수리를 반복하는 패턴에 대한 정책을 연구하였다. Tilquin과Cleroux[17]는 비용이 시간에 따라 증가하는 시스템에서 교체와 최소한의 수리에 대한 모형을 연구하였다. Nakagawa[10-12]은 교체가 예정된 정기 시점 또는 교체 후 일정 횟수의 고장 중 먼저 발생하는 시점에 시스템을 교체하고 교체와 교체 사이에 발생하는 고장에 대해서는 최소한의 수리만을 적용하는 정책에 대하여 제시하였으나 본 연구에서 고려하는 시스템 내 운영되고 있는 작업에 대한 주기 등은 모형에 적용하지 않았다. Nakagawa[13]는 정기적 교체 하에서 주어진 기간 동안 발생하는 고장의 발생 횟수가 다양한 임계값에서 발생하는 교체 비용에 대한 모형을 제시하였다. Pulcini[15]은 최소한의 수리를 받으면 운영이 가능한 시스템에 대한 다양한 모형의 분석과 수치 분석 예제를 제시하였다. Chien et al.[3]은 시스템이 두 종류의 충격(약한 또는 재앙적으로 강한)이 발생하는 경우에 각각 교체 또는 최소한의 수리를 적용하는 정책에 대한 모형을 제시하였다. Huynh et al.[5]은 성능 저하와 재앙적으로 강한 충격 두 상황을 고려하여 적용가능한 최소한의 수리 및 교체에 대한 정책 모형을 제시하였다. Lim[7]은 정기적인 교체 시점 이전에 고장이 발생하는 경우 고장의 정도를 정확히 알 수 없다는 가정하에서 확률적으로 최소한의 수리 또는 교체를 하는 정책에 대한 모형을 연구하였다. Wang[18]은 경제적 생산 모형(EPQ)를 사용하여 예방 교체와 최소한의 수리를 하는 경우 최적의 경제적 생산량을 구하는 모형을 연구하였다. Chang[2]은 수리가 가능한 고장과 수리가 불가능한 고장이 발생하는 시스템에 대해서 노화 기반 교체를 하는 기본적인 모형과 확장 모형을 연구하였다. 특히 확장 모형에서는 작업 주기가 일정한 횟수를 반복한 시점에 교체를 진행하는 정책을 적용하였다. Yuan et al.[19]는 일반적으로 많은 경우에 불완전한 수리 후에도 시스템은 상당히 민첩하면서도 정상적으로 작동한다는 점을 언급하면서, 최소한의 수리만으로도 시스템을 사용하는데 큰 문제가 없음을 보였다. Zhao et al.[20]은 정기 시점과 일정 횟수의 수리 중 먼저 또는 늦게 발생하는 시점에 교체를 하는 정책에 대한 모형을 연구하였다. Mizutani[8]는 이산 시간을 고려하여 일정한 반복 작업 주기와 정기적 교체 중 먼저 발생하는 시점에 교체를 하거나 고장이 발생하면 교체를 하는 모형을 제시하면서 작업 주기의 반복 횟수 그리고 정기 교체 반복 횟수를 최적화하였다. Lee[6]는 시스템 내에서 운영되고 있는 작업이 시작하고 끝나는 시구간인 주기가 시스템 운영자에 의해 사전에 정한 반복 횟수를 마치는 시점에 교체를 하고 교체 시점이 도래하기 전에 시스템이 고장 난 경우에는 정상 작동이 될 정도인 최소한의 수리(minimal repair)를 하는 상황을 고려한 모형을 제시하였다.

위에서 살펴본 바와 같이 기존의 연구에서 다양한 조합의 교체와 수리에 대한 연구가 진행되어 왔지만 본 연구에서는 기존의 연구에서는 없는 다음의 상황들을 동시에 고려하여 진행하였다 : (1) 연속된 두 교체 구간 동안에 발생하는 고장들은 최소한의 수리를 한다. (2) 시스템 내에서 운영은 되고 있지만 작업이 시작하고 끝나는 시점 즉 주기를 시스템 운영자 입장에서는 인지할 수 없는 무작위적 주기의 작업이 발생한다고 보았다. 예를 들어 클라우드 시스템 내에서의 작업은 시스템 운영자가 아니라 시스템을 대여하여 사용하는 사용자만이 자신의 작업 주기를 알 수 있다. (3) 현실적으로 이산 시간인 최소 실행 가능 교체 시간(T)을 설정하고 KT ($K=1, 2, 3, \cdots$)에서 교체를 하고자 한다. 여기서 최소 실행 가능 교체 시간이란 예를 들어 교체 부서 또는 업체와 협의하여 매주 금요일 또는 매달 마지막 주 금요일 등으로 설정하는 것을 의미한다. (4) (2)의 작업 주기와 (3)의 KT 중 먼저 발생하는 시점에 교체를 진행한다.

본 연구에서 고려하고 있는 시스템에서는 교체(replacement)와 연속된 두 교체 사이에서 발생하는 고장 하에서 지속적으로 반복되어지고 있다. 즉 시스템에서 운영 중인 사용자의 작업에 대한 시간 즉 작업 주기가 무작위인

상황에서 시스템에서 매 작업 주기가 끝나는 시점(every working cycle) 또는 정기 교체의 최소 실행 가능 시간의 반복 횟수 중 먼저 발생하는 시점에 교체(replacement)을 하거나 또는 교체 후 다시 교체 시점이 오기 이전에 시스템이 고장 나는 경우 고장 이전과 같은 고장률로 작동이 되도록 최소한의 수리(minimal repair)를 하는 정책을 고려한다. 본 연구에서는 연속된 교체 기간에 동안에 발생하는 교체와 수리에 대한 총 비용을 최소화하는 최적의 정기 교체 반복 횟수를 결정하는 모형을 제시한다. 또한 현실에서 적용 가능한 이산 시간(discrete time) 모형이 용이한 경우가 많으므로 본 연구에서는 이산 시간 프레임 하에서 교체 또는 수리 대상인 시스템에 대한 모형을 제시하고 분석하였다.

앞으로 전개될 본문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 교체(replacement) 또는 수리(repair) 대상인 시스템에서 무작위적 작업 주기가 끝나는 시점(every working cycles) 또는 교체를 하고자 하는 시점이 일정 횟수 반복되는 시점 중 먼저 발생하는 시점에 고장 여부와는 무관하게 교체(replacement)을 진행하고 교체 후 다시 교체 시점이 도래하기 전에 시스템이 고장 나는 경우 작동이 확률적으로 이전과 같은 정도로 될 만큼 최소한의 수리(minimal repair)를 하는 상황에서 총 비용을 최소화 하는 작업 반복 횟수를 결정하기 위한 모형을 소개하고 분석하였다. 제 3장에서 수치 예제를 통해 모형의 파라미터 변화에 따른 최적의 작업 반복 횟수의 변화를 보여주는 민감도 분석을 진행하였다. 마지막으로 제 4장에서는 연구결과를 바탕으로 결론을 제시한다.

2. 가정과 모형

2.1 용어 및 가정

본 절에서는 교체(replacement) 또는 수리(repair) 대상인 시스템에서 무작위적 작업 주기가 끝나는 시점(every working cycles) 또는 교체를 하고자 하는 시점이 일정 횟수 반복되는 시점(KT) 중 먼저 발생하는 시점에 고장 여부와는 무관하게 교체(replacement)를 진행하고 교체 후 다시 교체 시점이 도래하기 전에 시스템이 고장나는 경우 작동이 확률적으로 이전과 같은 정도로 될 만큼 최소한의 수리(minimal repair)를 하는 상황을 고려하고 있다. 이러한 상황에서 교체 간에 발생하는 총 비용을 최소화 하는 최적의 교체 기간 반복 횟수(K^*)를 구하는 것을 목적으로 하여 연구를 진행하였다.

본 연구에서 사용하고 있는 용어와 가정은 다음과 같다.

X_j는 $(j-1)$번째 고장과 j번째 고장 사이의 시간에 대한 확률변수로 정의한다. 모든 j에 대하여 서로 독립적이고 동일하게(independently and identically) 분포되며 누적분포함수 $P[X_j \le t]$는 $F(t)$이며 평균은 $\mu \equiv \int_0^{INF} \overline{F}(t)dt$이다. $(\overline{F}(t) \equiv 1-F(t))$ 확률밀도함수는 $f(t) \equiv \frac{dF(t)}{dt}$이며 고장률 함수(failure rate) $h(t) \equiv \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$는 t에 대해서 순 증가하는(strictly increasing) 함수이다.

Y_k는 k번째 작업주기에 대한 확률변수로 정의한다. 누적분포 $P[Y \le t]$는 $G(t)$이고 유한한 평균 $\frac{1}{\theta}=\int_0^{\infty} G(t)dt$을 가진다. 또한 모든 k에 대하여 서로 독립적이고 동일하게 분포되어 있다. 그리고 확률밀도함수는 $g(t) \equiv \frac{dG(t)}{dt}$이고 $G(t)$의 n-겹 결합은 $G^n \equiv P[\sum_{i=1}^{n} Y_i \le t]$이다$(n=1,2,\cdots)$.

c_1은 교체 간에 시스템이 고장 시 진행하게 되는 최소한 수리에 대한 건 당 비용(minimal repair cost)이며 c_2 정기적 교체 시기(KT) 또는 작업 주기가 끝나는 시점에 진행하는 교체에 대한 비용이다.

2.2 이산 시간을 고려한 최소수리정책에 대한 최적 교체 주기 횟수 모형

본 연구에서의 교체(replacement)이란 시스템이 일정한 시기에 한 번씩 고장 여부와는 무관하게 새 제품으로 교환하는 것으로 정의하였다. 또한 최소한의 수리(minimal repair)는 시스템이 교체 후 다시 교체 시점이 오기 전에 고장이 발생하는 경우 수리하였을 때 몇 번째 고장인지와는 무관하게 고장이 발생할 확률이 일정하게 유지되는 수리로 정의하였다. 이는 시스템이 고장이 난 경우 최소한 수리를 한다는 것은 몇 번째 고장과는 상관없이 고장률이 일정하다고 정의할 수 있다. 즉 모든 n번째 고장에 대한 고장률 $h_n(t)$는 n과는 무관하게 t에만 의존하는 값 즉 $h_n(t)=h(t)=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$이 된다. n번째 고장까지의 시간 $(\sum_{k=1}^{n} X_k)$에 대한 확률분포는 다음과 같다[14].

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le t\right\} = 1-\sum_{j=0}^{n-1} e^{-H(t)} \frac{[H(t)]^j}{j!} \tag{1}$$

식 (1)에서 $H(t)=\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}dx$을 의미한다. 식 (1)을 사용하여 $[0,t]$ 구간 동안 시스템이 고장 나는 횟수를 나타내는 셈과정(Counting process)을 $\{\mathrm{N(t)}, \mathrm{t} \ge 0\}$

라고 한다면 $P\{N(t) \geq n\}$는 $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\right\}$와 같다. 그러므로 $\{\mathrm{N(t)}, \mathrm{t} \geq 0\}$는 평균이 $E[N_x(t)] = H(t)$인 Poisson Process 가 된다[16].

교체는 정기 교체 기간(KT) 또는 작업 주기가 끝나는 시점(every working cycles) 중 먼저 발생하는 시점마다 실행을 하므로 $\min\{Y_k, \mathrm{KT}\}$에서 교체를 진행하게 된다. 또한 교체 후 교체 시점이 오기 전에 발생하는 고장에 대한 수리 비용을 포함하게 합산한 총 교체 및 수리 비용을 계산하게 되는데 즉 주어진 정기 교체 기간 반복 횟수(K)에 대한 교체 간 총 예상 비용을 구하면 식 (2)와 같다.

$$\int_0^{KT} [c_1 E[N(t)] + c_2] dG(t) + [c_1 E[N(KT)] + c_2](1 - G(T)) = c_1 \int_0^{KT} (1 - G(t)) dE[N(t)] + c_2 \tag{2}$$

주어진 정기 교체 기간 반복 횟수(K)에 대한 교체 간 예상 시간은 식 (3)과 같다.

$$\int_0^{KT} t\,dG(t) + \int_{KT}^{INF} KT\,dG(t) + c_2 = \int_0^{KT} (1 - G(t))dt \tag{3}$$

교체 간 총 예상 비용을 교체 간 예상 시간으로 나누면 주어진 정기 교체 기간 반복 횟수(K)에 대한 총 예상 비용율 $C(K)$는 식 (4)와 같다.

$$\frac{c_1 \int_0^{KT} (1 - G(t)) dE[N(t)] + c_2}{\int_0^{KT} (1 - G(t))dt} \tag{4}$$

최적의 정기 교체 기간 반복 횟수는 총 예상 비용율인 $C(K)$가 최소가 되는 K를 찾으면 된다. 이를 위해서 $C(K+1) - C(K)$의 값이 음에서 양으로 변하는 가장 작은 정수를 최적의 정기 교체 기간 반복 횟수로 결정하면 된다. $C(K+1) - C(K)$는 식 (5)와 같이 정리된다(정리 과정은 Appendix 참조).

$$\frac{\int_{KT}^{(K+1)T} (1 - G(t))dt}{\int_0^{(K+1)T} (1 - G(t))dt \int_0^{KT} (1 - G(t))dt} \times \left(c_1 \frac{\int_{KT}^{(K+1)T} (1 - G(t)) dE[N(t)]}{\int_{KT}^{(K+1)T} (1 - G(t))dt} \int_0^{T} (1 - G(t))dt - c_1 \int_0^{KT} (1 - G(t)) dE[N(t)] - c_2 \right) \tag{5}$$

식 (5)에서 $\dfrac{\int_{KT}^{(K+1)T} (1 - G(t))dt}{\int_0^{(K+1)T} (1 - G(t))dt \int_0^{KT} (1 - G(t))dt}$은 모든 K에 대하여 양의 값이므로 최적의 정기 교체 기간 반복 횟수는 총 예상 비용율인 $C(K)$가 최소가 되는 K를 구하기 위해서는 식 (5)의 대한 성질을 이해할 필요가 있다. 이 항에 대한 성질은 다음 Lemma 1에 정리하였다. (증명은 Appendix 참조)

Lemma 1. 고장이 발생하는 시간에 대한 확률변수의 고장률인 $h(t) \equiv f(t)/\overline{F}(t)$가 t에 순 증가(strictly increasing) 한다고 가정한다. 그러면 식 (6)은 K에 대해서 순 증가(strictly increasing)한다.

Lemma 1의 결과를 식 (5)에 적용하여 $C(K+1) - C(K) \geq 0$을 만족하는 가장 작은 정수 값을 K로 결정하면 되므로 다음의 결과를 얻을 수 있다. 고장이 발생하는 시간에 대한 고장률 함수 $h(t) \equiv f(t)/F(t)$가 t에 순 증가(strictly increasing)할 경우 총 예상 비용율을 최소화하는 최적의 정기 교체 기간 반복 횟수 K^*가 존재하며 그 값은 다음의 식 (6)을 만족시키는 가장 작은 값이 된다.

$$c_1 \frac{\int_{KT}^{(K+1)T} (1 - G(t)) dE[N(t)]}{\int_{KT}^{(K+1)T} (1 - G(t))dt} \int_0^{T} (1 - G(t))dt - c_1 \int_0^{KT} (1 - G(t)) dE[N(t)] - c_2 \tag{6}$$

식 (6)을 만족하는 가장 작은 값을 구하면 정기 교체 기간의 일정 반복 횟수(KT) 또는 작업이 끝나는 시점(every working cycles) 중 먼저 발생하는 시점마다 발생하는 단위 시간 당 평균 총 비용을 최소화하는 작업 주기에 대한 최적의 횟수를 구하게 된다. 제 3장에서는 수치 예제를 이용하여 최적 작업 주기에 횟수를 구해본다.

3. 수치 예제

이 장에서는 본 연구에서 제시한 모형을 적용한 수치 예제와 결과를 제공하고 있다. 시스템 고장 간격 시간 확률 변수의 확률밀도함수는 $f(t) = 2\lambda^2 t e^{-(\lambda t)^2}$이고 평균은 $\mu \equiv \int_0^{\infty} x f(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}$이다. 고장 간격 시간 확률 변수의 고장률인 $h(t) = \frac{f(t)}{F(t)} = 2\lambda^2 t$는 t가 증가하면 순 증가한다. 시스템에서 작업을 할 경우 한 작업이 시작하고 끝나는 주기 확률 변수의 확률밀도함수는 $g(t) = \theta e^{-\theta t}$를 사용하

였다. 최소한 수리에 대한 고장 당 발생 비용 $c_1 \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$이고 교체 시 발생하는 건 당 비용은 $c_2 = 4$이다. T는 정기적으로 시스템을 교체를 할 수 있는 최소 기간 단위이다. 즉 $K=1$인 경우 T 마다 교체를 할지를 결정하고 $K=2$인 경우 $2T$ 마다 교체를 할지를 결정하는 식이다.

최적의 정기 교체 기간 반복 횟수인 K^*는 식 (6)에 위의 확률밀도함수를 적용한 다음의 부등식을 만족하는 가장 작은 정수 값이 된다.

$$c_1 \frac{\int_{KT}^{(K+1)T} e^{-\theta t} dE[N(t)]}{\int_{KT}^{(K+1)T} e^{-\theta t} dt} \int_0^T e^{-\theta t} dt - c_1 \int_0^{KT} e^{-\theta t} (2\lambda^2 t) dt \ge c_2$$

위의 부등식을 만족하는 최소 정수 값인 최적의 정기 교체 기간 반복 횟수인 K^*를 다양한 고장 간격 확률 변수에 대한 파라미터 $\lambda \in \{0.12, 0.125, 0.13, 0.135, 0.14, 0.145, 0.15, 0.155\}$와 작업 주기 확률 변수에 대한 파라미터 $\frac{1}{\theta} \in \{0.5, 1.0, 1.5\}$ 그리고 다양한 최소 정기 교체 시점($T \in \{3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 8.0\}$)에 대한 민감도 분석을 실행하였다. <Table 1>은 다양한 분석 결과를 보여주고 있다.

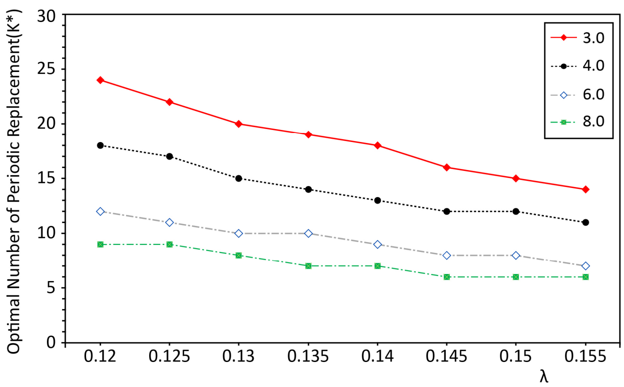
<Figure 1>에서 보면 고장 간격 확률 변수에 대한 파라미터 λ가 증가할수록 최적의 정기 교체 기간 반복 횟수는 감소하고 있다. 이는 다음과 같이 설명될 수 있다. 단위 시간 당 고장 발생 비율이 높아질수록 고장 시 진행하게 되는 최소한의 수리 비용(c_1)의 발생 빈도가 높아지는데 두 연속된 교체 시점 사이에 최소한의 수리 비용의 비중이 상대적으로 높아지는 효과가 발생한다.

이에 총 비용을 낮추기 위해서는 정기 교체 반복 횟수(K)를 줄임으로써 연속 교체 시점 사이에 상대적으로 고장 발생 빈도수를 줄이고 단발성 비용인 교체 비용(c_2)의 비중을 높여 시스템의 총 비용을 최적화할 수 있기 때문이라고 이해할 수 있다.

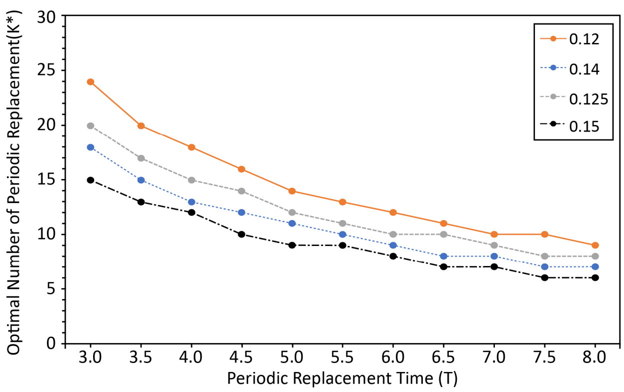
<Figure 2>는 정기 교체 시점(T)이 높아질수록 최적의 정기 교체 기간 반복 횟수가 감소하는 것을 볼 수 있다. 정기 교체 시점(T)은 시스템 운영하는 동안 고정되어 있으므로 기간이 긴 최소 정기 교체 시점을 사용하면 정기 교체 기간 반복 횟수를 줄여 고장 발생 시 최소 수리 비용(c_1)의 발생 빈도를 줄이기 위해서 길어진 최소 정기 교체 시점(T)을 낮아진 정기 교체 기간의 반복 횟수로 균형으로 맞춤으로써 교체 구간 사이에서는 단발성 비용인 교체 비용(c_2)으로 시스템의 총 비용을 최적화하기 때문이라고 이해할 수 있다.

<Table 1> Optimal Number of Periodic Replacement(K^*)

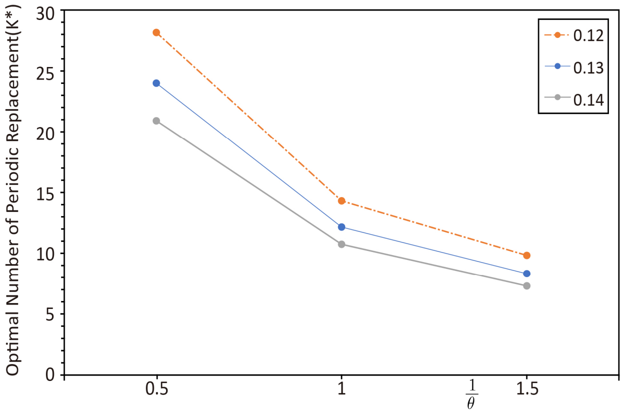
	T	λ				
		0.12	0.13	0.14	0.15	0.155
$1/\theta = 0.2$	1.0	47	40	35	30	28
	1.2	35	30	26	23	21
	1.4	28	24	21	18	17
	1.6	24	20	18	15	14
	1.8	20	17	15	13	12
	2.0	18	15	13	12	11
$1/\theta = 0.4$	1.0	24	20	18	15	14
	1.2	18	15	13	12	11
	1.4	14	12	11	9	9
	1.6	12	10	9	8	7
	1.8	10	9	8	7	6
	2.0	9	8	7	6	6
$1/\theta = 1.5$	1.0	16	14	12	11	10
	1.2	12	10	9	8	8
	1.4	10	8	7	6	6
	1.6	8	7	6	5	5
	1.8	7	6	5	5	4
	2.0	6	5	5	4	4



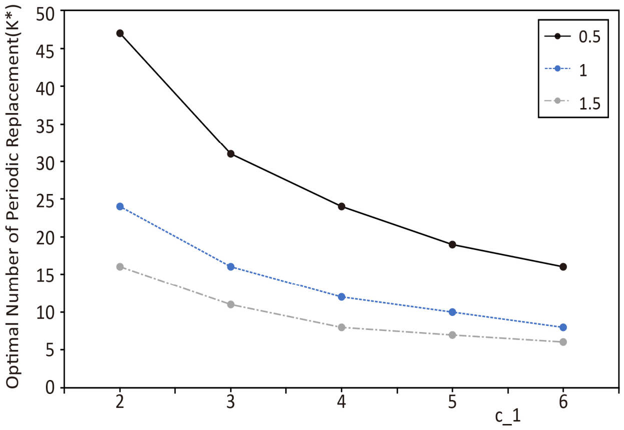
<Figure 1> λ vs. Optimal Number of Periodic Replacement(K^*)



<Figure 2> Periodic Replacement Time(T) vs. Optimal Number of Periodic Replacement(K^*)



<Figure 3> $\frac{1}{\theta}$ vs. Optimal Number of Periodic Replacement(K^*)



<Figure 4> c_1 vs. Optimal Number of Periodic Replacement(K^*)

<Figure 3>은 지수 분포인 작업 주기에 대한 모수인 $\frac{1}{\theta}$이 증가할수록 최적의 정기 교체 기간 반복 횟수가 감소하는 경향을 볼 수 있다. 여기서 작업 주기에 대한 모수 $\frac{1}{\theta}$는 작업 주기의 평균값이므로 이 값이 커지면 정기 교체 기간 반복 횟수를 줄여서 교체 구간을 줄이게 된다. 그럼 연속 교체 구간 사이에서 최소한의 수리 비용(c_1)이 줄어들게 되면서 단발성의 교체 비용(c_2)과 함께 총 유지 비용을 낮추고자 하기 때문이라고 이해할 수 있다.

<Figure 4>는 최소한의 수리 비용 증가할수록 최적의 정기 교체 기간 반복 횟수가 감소하는 경향을 볼 수 있다. 최소한의 수리 비용이 커지면 정기 교체 기간 반복 횟수를 줄여서 연속된 교체 구간을 줄이게 되는데 연속 교체 구간 사이에서 최소한의 수리 비용(c_1)의 발생 빈도수를 줄이게 되는 효과나 나타나 단발성인 교체 비용(c_2)과 함께 총 유지 비용을 낮추고자 하기 때문이라고 이해할 수 있다.

4. 결 론

본 연구는 지속적인 성능 저하 또는 고장이 발생하는 시스템에서 무작위적인 주기를 가지는 작업이 진행되는 상황 하에서 교체 또는 최소한의 수리를 하는 정책에 대하여 분석하였다. 교체는 무작위적인 주기를 가지는 작업이 끝나는 시점 또는 정기적인 교체 주기 중에서 먼저 발생하는 시점에 교체를 하고 교체와 교체 사이에 고장이 발생하는 경우에는 시스템이 작동할 정도로 유지되게 하는 최소한의 수리를 진행하도록 하였다. 그러나 최소한의 수리 서비스를 받은 시스템은 과거 고장 발생 경험에 영향을 받지 않으나 고장 직후부터 시간이 길어지면 길어질수록 고장이 날 조건부 확률인 고장률은 증가한다는 가정 하에 본 연구의 모형을 설계하였다.

또한 현실에서 적용 가능한 정기 교체 시점을 모형에 적용하였는데 이는 주말 또는 휴일 등과 같이 현실에서는 교체 시점으로 설정하기에는 어려운 시점을 배제하는 효과가 있으며 이를 위해서 이산 시간을 적용한 모형을 제시하였다. 교체를 이행할 수 있는 최소한의 정기 교체 시점을 기반으로 이에 적절한 배수 즉 최적의 최소 교체 시점의 반복 횟수를 구하는 것을 본 연구의 모형의 목적으로 하였다. 이를 위해서 두 연속적인 교체 기간 동안에 발생하는 단위 시간 당 총 비용을 최소화하는 최적의 최소 교체 시점의 반복 횟수를 구하기 위한 모형을 제시하였다.

수치 예제에서는 간단한 데이터와 확률 분포를 사용하여 모형에 대한 민감도분석을 시행하였다. 수치 예제에서 작업 주기 시간에 대한 확률 분포는 지수 분포 그리고 시스템 고장 간격에 대한 확률 변수는 고장률이 증가하는 확률분포를 이용하여 분석한 결과를 제시하였다. 첫째, 고장 발생 빈도가 커질수록 최소 정기 교체 기간에 대한 최적의 반복 횟수는 작아지는 경향을 보이고 있다. 이 결과를 활용하면 현재 사용하고 있는 시스템 고장률에 대한 비용과 고장률이 상대적으로 낮은 새로운 시스템 도입으로 인한 비용을 비교하여 현 시스템을 계속 사용할 것인지에 대한 판단을 내릴 수 있을 것이다. 둘째, 최소 정기 교체 기간이 길어지면 최소 정기 교체 기간에 대한 최적의 반복 횟수는 작아지는 경향을 보이고 있다. 셋째, 무작위적 주기를 가지는 작업의 기간의 평균이 길어지면 길어질수록 최소 정기 교체 기간에 대한 최적의 반복 횟수는 작아지는 경향을 보이고 있다. 마지막으로 최소한의 수리 비용이 커질수록 최소 정기 교체 기간에 대한 최적의 반복 횟수는 작아지는 경향을 보이고 있다. 본 연구는 이러한 수치 결과를 실제적으로 확인할 수 있는 현실에 적용 가능한 모형을 제시하였다는 것이 기여점이 될 수 있으며 또한 본 연구에서 고려하는 복잡하지만

현실적인 상황 하에서 최적의 교체 시점을 찾기 위해서 최소 실행 가능 교체 시간에 대한 반복 횟수를 최적화할 수 있는 모형을 제시하였다는 것이다.

앞으로의 연구주제로는 다음과 같은 상황 등을 고려할 수 있을 것이다. (1) 최소 정기 교체 시점의 반복 횟수와 무작위적 주기를 가지는 작업이 복수로 반복 후 교체를 하는 두 가지 경우를 동시에 놓고 최적화하는 모형을 분석하는 것이다. (2) 교체 시점이 정기 교체 시점 보다 작업 주기 종료 시점이 먼저 발생하는 경우에는 사용자의 작업의 멈출 수 있는 상황이 발생하여 교체 비용 이외 추가 비용이 발생할 수 있는데 이를 고려한 모형을 분석할 수 있다.

References

[1] Barlow, R. and Hunter, L., Optimum preventive maintenance policies, *Operations Research*, 1960, Vol. 8, No. 1, pp. 90-100.

[2] Chang, C.C., Optimum preventive maintenance policies for systems subject to random working times, replacement, and minimal repair, *Computers and Industrial Engineering*, 2014, Vol. 67, pp. 185-194.

[3] Chien, Y.H. and Sheu, S.H., Extended optimal age-replacement policy with minimal repair of a system subject to shocks, *European Journal of Operational Research*, 2006, Vol. 174, No. 1, pp. 169-181.

[4] Holland, C.W. and McLean, R.A., Applications of replacement theory, *AIIE Transactions*, 1975, Vol. 7, No. 1, pp. 42-47.

[5] Huynh, K.T., Castro, I.T., Barros, A., and Berenguer, C., Modeling age-based maintenance strategies with minimal repairs for systems subject to competing failure modes due to degradation and shocks, *European Journal of Operational Research*, 2012, Vol. 218, No. 1, pp. 140-151.

[6] Lee, J., Optimal Working Cycles for Minimal Repair Policy with Periodic Replacement, *Working paper*, 2020.

[7] Lim, J.H., Qu, J., and Zuo, M.J., Age replacement policy based on imperfect repair with random probability, *Reliability Engineering and System Safety*, 2016, Vol. 149, pp. 24-33.

[8] Mizutani, S., Zhao, X., and Nakagawa, T., Random age replacement policies with periodic planning times, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 2019, Vol. 26, No. 5, pp. 1950023-1 - 1950023-17.

[9] Morimura, H., On some preventive maintenance polices for IFR, North Carolina State University, Dept. of Statistics, 1969.

[10] Nakagawa, T., Generalized models for determining optimal number of minimal repairs before replacement, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 1981, Vol. 24, No. 4, pp. 325-338.

[11] Nakagawa, T., Optimal number of failures before replacement time, *IEEE Transactions on Reliability*, 1983, Vol. 32, No. 1, pp. 115-116.

[12] Nakagawa, T., Optimal policy of continuous and discrete replacement with minimal repair at failure, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1984, Vol. 31, No. 4, pp. 543-550.

[13] Nakagawa, T. and Yasui, K., Periodic-replacement models with threshold levels, *IEEE Transactions on Reliability*, 1991, Vol. 40, No. 3, pp. 395-397.

[14] Nakagawa, T., Maintenance theory of reliability, Springer Science & Business Media, 2006.

[15] Pulcini, G., Mechanical reliability and maintenance models, Handbook of Reliability Engineering, 2003, pp. 317-348.

[16] Ross, S.M., Introduction to probability models, Academic press, 2014.

[17] Tilquin, C. and Cleroux, R., Periodic replacement with minimal repair at failure and adjustment costs, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1975, Vol. 22, No. 2, pp. 243-254.

[18] Wang, W.Y., Optimum production and inspection modeling with minimal repair and rework considerations, *Applied Mathematical Modelling*, 2013, Vol. 37, No. 4, pp. 1618-1626.

[19] Yuan, F. and Kumar, U., A general imperfect repair model considering time-dependent repair effectiveness, *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, Vol. 61, No. 1, pp. 95-100.

[20] Zhao, X., Al-Khalifa, K.N., Hamouda, A.M., and Nakagawa, T., First and last triggering event approaches for replacement with minimal repairs, *IEEE Transactions on Reliability*, 2016, Vol. 65, No. 1, pp. 197-207.

ORCID

Jinpyo Lee | http://orcid.org/0000-0001-6613-400X

<Appendix>

식 (5)의 정리

$C_K(K+1)-C_K(K)$를 정리하면 다음과 같다($\overline{G}(t)=1-G(t)$).

$$
\begin{aligned}
&C(K+1)-C(K)\\
&=\frac{c_1\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dE[N(t)]+c_2}{\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt}-\frac{c_1\int_0^{KT}\overline{G}(t)dE[N(t)]+c_2}{\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt}\\
&=\frac{c_1\left(\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dE[N(t)]+c_2\right)\times\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt}{\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt}-\frac{\left(c_1\int_0^{KT}\overline{G}(t)dE[N(t)]+c_2\right)\times\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt}{\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt}\\
&=\frac{c_1\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)dE[N(t)]\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt}{\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt}-\frac{c_1\int_0^{KT}\overline{G}(t)dE[N(t)]\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt}{\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt}-\frac{c_2\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt}{\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt}\\
&=\frac{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt}{\int_0^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt}\times\left(c_1\frac{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)dE[N(t)]}{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt}\int_0^{KT}\overline{G}(t)dt-c_1\int_0^{KT}\overline{G}(t)dE[N(t)]-c_2\right)
\end{aligned}
$$

Lemma 1의 증명

$E[N(t)]=H(t)=\int_0^t h(u)du$이므로 식 (6)의 첫 번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\frac{\int_{KT}^{(K+1)T}(1-G(t))dE[N(t)]}{\int_{KT}^{(K+1)T}(1-G(t))dt}=\frac{\int_{KT}^{(K+1)T}(1-G(t))dH(t)}{\int_{KT}^{(K+1)T}(1-G(t))dt}
$$

또한 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$
\int_{KT}^{(K+1)T}\frac{1-G(t)}{\int_{KT}^{(K+1)T}(1-G(t))dt}h(t)dt
$$

이는 $h(t)$를 $tIN[KT,(K+1)T]$ 사이에서 $\frac{1-G(t)}{\int_{KT}^{(K+1)T}(1-G(t))dt}\in(0,1)$를 적용한 Convex combination이고 고장률 $h(t)$는 t에 대하여 순 증가 함수이므로 모든 K에 대하여 다음 부등식이 성립한다($\overline{G}(t)=1-G(t)$).

$$
\frac{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)dH(t)}{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)dt}>h(KT)>\frac{\int_{(K-1)T}^{KT}\overline{G}(t)dH(t)}{\int_{(K-1)T}^{KT}\overline{G}(t)dt}
$$

그러므로 $\dfrac{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)\,dH(t)}{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)\,dt}$ 는 K에 대하여 순 증가(strictly increasing) 함수이다.

$c_1\dfrac{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)\,dH(t)}{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)\,dt}\int_0^{KT}\overline{G}(t)\,dt-c_1\int_0^{KT}\overline{G}(t)\,dH(t)-c_2$를 $P(K)$라고 하면 $P(K+1)-P(K)$는 다음과 같이 정리가 되며 $\dfrac{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)\,dH(t)}{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)\,dt}$ 의 K에 대한 순 증가 성질 때문에 다음이 성립한다.

$$P(K+1)-P(K)=c_1\left(\frac{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)\,dH(t)}{\int_{KT}^{(K+1)T}\overline{G}(t)\,dt}-\frac{\int_{(K-1)T}^{KT}\overline{G}(t)\,dH(t)}{\int_{(K-1)T}^{KT}\overline{G}(t)\,dt}\right)\int_0^{KT}\overline{G}(t)\,dt>0$$