Journal for History of Mathematics http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2020.33.6.327
Vol. 33 No. 6 (Dec. 2020), 327–343

A Study on the Educational Implications of Zeno's Paradoxes through Philosophical Investigation

제논의 역설에 대한 철학적 검토를 통한 교육적 시사점 고찰

Baek Seung Ju 백승주 Choi Younggi* 최영기

This study investigate philosophical discussions related to the Zeno's paradoxes in order to derive the mathematics educational implications. The paradox of Zeno's motion is sometimes explained by the calculus theories. However, various philosophical discussions show that the resolution of Zeno's paradox by calculus is not a real solution, and the concept of a continuum which is composed of points and the real number continuum may not coincide with the physical space and time. This is supported by the fact that the hyperreal number system of nonstandard analysis could be another model of a straight line or time and that an alternative explanation of Zeno's paradox was possible by the hyperreal number system. The existence of two different theories of the continuum suggests that teachers and students may not have the same view of the continuum. It is also suggested that the real world model used in school mathematics may not necessarily match the student's intuition or mathematical practice, and that the real world application of mathematics theory should be emphasized in education as a kind of 'correspondence.'

Keywords: Zeno's paradox, continuum, nonstandard analysis, intuition, mathematical practice; 제논의 패러독스, 연속체, 비표준해석학, 직관, 수학적 관행.

MSC: 01A20, 01A60

1 서론

학교수학에서 제논의 역설은 흥미와 동기유발을 위한 효과적인 소재로서 자주 등장한다. 특히 2015 개정 수학과 교육과정의 교과서들은 미적분학의 이론이 제논의 역설을 효과적으로 해소함을 보여줌으로써 수학의 유용성을 제시하고 있다. 특히 1종의 교과서 [9]는 '아킬레스와 거북이의 경주의 역설' 을 2종의 교과서 [12, 16]는 '이분법의 역설' 을 다루고

*Corresponding Author.
Baek Seung Ju: Sejong Science High School E-mail: seung07@snu.ac.kr
Choi Younggi: Dept. of Math. Edu., Seoul National Univ. E-mail: yochoi@snu.ac.kr
Received on Sep. 22, 2020, revised on Dec. 11, 2020, accepted on Dec. 15, 2020.

있으며, 등비급수의 개념을 통해 오랫동안 수학자들을 괴롭혀온 난제가 해결되는 방법을 제시하고 있다. 그러나 백승주, 최영기 [1]는 등비급수에 의한 제논의 '아킬레스와 거북이의 역설'의 해소는 진정한 해소가 아니며, 그 배경에는 표준해석학과 비표준해석학의 연속체 이론과 수학 용어의 자생적 의미의 문제가 있음을 밝히고 있다. 이동근 [15, pp.412–413]은 이분법의 역설과 아킬레스의 역설에 대한 등비급수의 해결에서 학생들이 "작은 값이지만 계속 더해야만 하기 때문에 그 결과를 구할 수 없고 동일한 이유로 아킬레스는 거북이를 따라잡을 수 없다"고 생각하는 모습을 보였음을 보고하였다. 이들의 연구 결과는 학교수학에서 다루어지는 제논의 역설에 대해 추가적인 분석과 그에 따른 교육적 논의가 필요함을 의미한다. 따라서 본 연구는 제논의 역설에 대해 존재하는 철학적 논의에 대한 검토를 통해 교육적 시사점을 고찰해보고자 한다.

2 제논의 운동의 역설에 대한 미적분학의 설명과 반론들

2.1 제논의 운동의 역설의 종류

Cajori은 제논의 운동의 역설을 다음과 같이 제시하고 있다.

> ① 이분법(Dichotomy): 당신은 무한개의 점을 유한의 시간으로 지나갈 수 없다: 전체를 다 가기 전에 그것의 반을 가야하고, 나머지 반을 가기 위해서는 또 반을 지나가야 하는데, 아무리 이 과정을 계속해도 여전히 '반'이 남기 때문이다.
>
> ② 아킬레스(Achilles): 아킬레스는 거북이를 따라 잡을 수 없다: 거북이가 간 거리만큼 아킬레스가 갔을 때는 이미 거북이는 앞서 가 있고, 그만큼을 따라 잡으면 거북이는 또 조금 더 나아가 있는 과정이 무한히 계속되기 때문이다.
>
> ③ 화살(Arrow): 화살은 날아가지 않는다: 한 순간에 화살은 한 점에 위치하는데, 그때 화살은 정지해 있다. 따라서 모든 점에서 정지해 있으므로 화살은 날아갈 수 없다.
>
> ④ 운동장(Stade): A, B, C의 3개의 열이 아래 그림과 같이 있다. A는 왼쪽으로 움직이고, B는 정지해 있으며, C는 오른쪽으로 A와 같은 속력으로 움직인다. B에 대한 A의 속력은 C에 대한 A의 속력의 두 배이다. 따라서 한 순간이 한 점에서 다른 점으로 이행하는 과정(passage)이 될 수 없다 [10, p.245 재인용].

← A : aaaaaaaa

B : bbbbbbb

C : cccccccc →

Figure 1. Paradox of Stade [10, p. 245]

본 연구는 학교수학의 내용과 관련이 깊은 '아킬레스', '화살'의 역설에 한정하여 논의하고자 한다. '이분법'은 학교수학의 주제와 관련이 깊지만 '아킬레스'의 패러독스와 그 논의 양상이 유사하므로 본 연구에서는 제외한다.

2.2 '아킬레스'의 역설에 대한 등비급수의 설명과 반박—task와 super task

제논의 역설 중 '이분법'과 '아킬레스'의 역설에 대한 논쟁이 있었던 것은 고대 그리스 시대에 무한급수의 수렴 개념이 없었기 때문으로 생각되기도 한다. 다음의 '아킬레스'의 역설을 생각해보자.

> 거북이가 아킬레스보다 100m 앞에 서서 출발하고, 아킬레스의 속력은 거북이보다 10배 빠르다고 하자. 아킬레스가 거북이가 위치했던 자리에 도달했을 때 거북이는 10m 더 앞에 있다. 그리고 아킬레스가 또 거북이가 있던 자리에 도달하면, 거북이는 아킬레스보다 1m 더 앞에 있게 된다. 이와 같이 거북이는 아킬레스보다 조금이라도 더 앞에 있게 되기 때문에 아킬레스는 결코 거북이를 따라 잡을 수 없다.

수학교과서들은 '아킬레스'의 역설을 등비급수의 수렴으로 해소한다. 아킬레스가 처음에 거북이가 있던 자리까지 도달하는 데 t시간이 걸렸다고 하자. 다음에 거북이가 있던 자리까지 도달하는 데는 $\frac{t}{10}$ 시간이 걸리고 이를 반복하면 아킬레스가 달린 시간은 $t + \frac{t}{10} + \frac{t}{100} + \cdots$가 된다. 등비급수의 결과는 아킬레스는 $\frac{10t}{9}$ 시간까지 거북이를 따라잡을 수 없지만, $\frac{10t}{9}$ 시간에 거북이를 따라잡고 이후에는 거북이보다 더 앞에 있게 됨을 말해준다. 그러나 Black [4, p. 93]은 등비급수에 의한 역설의 해소에 의문을 제기한다. 이 설명은 "만약 아킬레스가 거북이를 따라잡을 수 있다면 언제 그리고 어디서 따라 잡을 수 있는지" 말해주는 것이며, 이때의 '만약'은 지나치게 큰 가정이라는 것이다. Black은 무한급수의 합으로 과제의 무한한 수열들을 완료한 것에 대해 설명하는 것은 적절하지 못하며, 따라서 무한급수와 아킬레스의 상황을 대응하는 것이 '큰 가정'이라고 주장한다 [21]. Black의 이러한 관점에 의하면 수학에 의한 '아킬레스'의 패러독스의 해소는 성공했다고 보기 어렵다.

이러한 주장은 task와 super task의 논쟁에 의해 뒷받침될 수 있다. super task의 용

어는 Thomson [27, p. 1]에 의해 사용된 것으로 '아킬레스'의 패러독스의 상황과 같이 "여행을 완료하기 위해 무한한 수의 여행을 완료"해야 하는 상황을 말한다. 즉, 어떤 유한한 과제를 완료하기 위해 무한히 많은 단계를 수행해야 하는 상황이다. Thomson [27]은 '램프'의 예를 통해 super task에 대해 설명한다. 램프는 버튼을 한 번 누르면 켜지고 다시 한 번 누르면 꺼진다고 하자. 처음에 버튼을 눌러 램프를 켰다고 하자. 그리고 1분 후 다시 버튼을 눌러 램프를 끄자. 다음으로 $\frac{1}{2}$분 후 버튼을 눌러 램프를 켜고, 다시 $\frac{1}{4}$분 후 램프의 버튼을 눌러 끈다고 하자. 이러한 과정은 무한히 반복될 수 있다. 이때, 램프의 버튼을 조작하여 램프가 켜져 있거나 꺼져 있도록 한 시간의 합은 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$이 되어 2에 수렴한다. Thomson은 2분이 지났을 때 램프의 상태에 의문을 제기한다. 램프는 켜져 있는가? 꺼져 있는가? 램프는 무한히 많은 과제를 수행한 후 2분이 되었을 때 켜져 있을 수도 있고 꺼져 있을 수도 있는 모순된 상황에 있다. 따라서 램프의 이 시점에서의 상태는 설명하기 어렵다 [20]. 시간이 수렴한다는 사실은 '아킬레스'의 역설과 동일하게 대응되지만, 그 시간의 수렴 값에서 즉, 무한히 많은 과제를 수행한 후인 2분 후의 램프의 상태에 대해 알기 어려운 것이다.

Salmon [20]이 제시한 또 다른 super task의 예를 생각해 보자. 위의 아킬레스의 경주 상황에 추가하여 파리가 한 마리 있다고 가정하자. 이 파리는 경주의 시작 시점에 아킬레스와 같은 위치에 있고 경주 시작 후에는 아킬레스로부터 거북이까지, 거북이로부터 아킬레스까지 아킬레스보다 두 배 빠른 속도로 아킬레스와 거북이 사이를 움직인다. 즉, 거북이의 속도가 v라면 아킬레스의 속도는 $10v$이고 파리의 속도는 $20v$이다. 만약 $\frac{10t}{9}$ 시간이 되었을 때, 아킬레스가 거북이를 따라잡는 super task가 가능하다고 가정하자. 그러면 그 사이를 달리고 있는 파리 역시 같은 자리에서 만나게 된다. 그러나 $\frac{10t}{9}$ 시간 직후에 파리의 위치는 어디인가라는 질문이 제기된다. 아킬레스보다 두 배 빠른 속도의 파리는 아킬레스와 거북이 사이를 움직여야 한다는 super task를 수행해야 하는 상황에 처한다 [20]. 아킬레스의 super task 즉, 무한히 많은 과제를 유한한 시간에 완료한다는 것을 받아들이는 경우 여전히 또 다른 논리적인 어려움에 처하게 되며 따라서 등비급수에 의한 역설의 해소가 적절한지에 대한 의문이 다시 제기 된다.

이와 같은 super task와 task의 논의는 두 가지 점에서 의의가 있다. 첫째, 수학적 이론이 실제 물리적 세계의 질문에 대한 답을 제공하는 것이 적절한지에 대해 의문을 제기한다 [20]. 수학적 설명은 수학 그 자체 안에서는 타당하지만 물리적인 행동과 대상에 대응시킴으로써 실제 상황의 문제를 해결할 때 인지적 어려움이 발생할 수 있는 것이다. 둘째, super task와 task의 논쟁, 그리고 super task의 일종인 아킬레스의 패러독스에 대한 논의가 현재까지도 지속되고 있다는 사실은 등비급수에 의한 패러독스의 해소가 충분하지 않다는 것을 뒷받침 한다. 이동근 [15]의 연구에서 학생들이 실제로 등비급수에 의한 설명에

도 불구하고 아킬레스는 거북이보다 더 뒤에 있을 것 같다고 생각하는 모습이 나타났지만, 이와 관련한 실제 경험적인 연구 결과는 많지 않다. 그럼에도 불구하고 task와 super task에 대한 논쟁이 지금도 계속되고 있다는 사실은 철학자들이 아킬레스의 패러독스와 같은 상황에 대해 여전히 고민하고 있고, 따라서 학생들도 패러독스의 해소에 의문을 제기할 수 있음을 나타낸다.

2.3 '화살'의 역설에 대한 순간 속도의 설명과 반박

제논의 '화살'의 역설에서 날아가는 화살이 각 순간에 정지해 있다고 말한 이유는 당시의 미적분학의 '순간 속도' 개념의 부재로 설명되기도 한다. 미적분학의 발달로 이제는 날아가는 화살이 각 순간에 정지해 있는 것이 아닌 '순간 속도'를 가지고 날고 있는 상태라는 설명이 제시되며 '화살'의 역설은 해소가 되는 듯하다. 그러나 Salmon [20, 21]은 순간 속도 개념을 이용한 역설의 해소는 적절하지 않다는 의견을 제시하였다. 순간 속도를 말하기 위해서는 바로 그 순간만으로는 충분하지 않다. 미적분학에서 어떤 순간 $t = a$의 순간 속도를 구하기 위해서는 a를 포함한 (크기가 0보다 큰) 시간 구간 동안의 '평균 속도의 극한'을 고려해야만 한다. 따라서 어떤 시간 구간 동안에 대한 고려 없이 단지 '한 순간'만을 생각할 경우 순간 속도의 개념은 불가능하며 의미가 없다. 제논이 말하고 싶었던 것은 시간의 구간에 대한 고려를 배제한 어떤 '한 순간'을 생각했을 때, 화살이 정지해 있다는 것이며 그 결과 화살은 모든 순간에 정지해 있게 되어 결국 움직일 수 없다는 것이다. 그러나 미적분학의 '순간 속도'를 구하고 싶으면 바로 그 순간뿐만이 아니라 그 순간을 둘러싼 작은 시간 구간 동안의 운동을 고려해야 하기 때문에 제논의 가정 자체를 부정한 것이다. 따라서 순간 속도에 의한 제논의 역설의 해소는 단지 제논의 가정을 거부한 채로 다른 설명을 제시한 것일 뿐 진정한 역설의 해소라고 말하기는 어렵다. 이러한 관점에서 Salmon [21, p. 24]은 어떤 시간의 구간을 배제하고 단지 한 순간에 대해서 말할 때는 화살이 움직이고 있는 상태인지, 정지한 상태인지에 대해 말할 수 없으며, 우리는 오직 그 순간에 화살이 그 위치에 있음을 말할 수 있을 뿐이라고 하였다.

2.4 제논의 운동의 역설과 점–직선, 순간–시간의 관계

제논의 운동의 역설에 대해 Tannery는 제논이 운동 자체를 불가능하다고 논증한 것이 아니라고 하였다 [6]. Tannery에 의하면 제논이 하고 싶었던 말은 "만약 공간이 점들로 구성되어 있다면 운동이 불가능하다"는 것으로서, 그가 진정으로 반박하고 싶었던 것은 "공간은 점들의 합이고, 시간은 순간의 합이다"라는 명제라는 것이다 [6, p. 15].

Pythagoras학파는 "점은 위치를 가진 단위"라고 하였다 [6, p. 15]. 그리고 Euclid는 '점은 부분이 없는 것'이며 "선은 폭이 없이 길이만 있는 것"으로 정의하였다 [11, p. 3].

기하학적인 직선과 점들에 대한 이러한 관계는 공간과 시간에도 적용되는 것으로 여겨졌다. 제논은 바로 이러한 가정을 반박하고자 하였던 것이다.

'아킬레스'의 패러독스는 시간과 공간이 무한히 분할가능하다는 전제를 가지고 전개된다. 이 패러독스를 통해 제논은 '유한한 시간이 무한히 많은 부분들로 분할되는가? 시간은 순간들로 이루어져 있는가? 아킬레스가 도달한 위치에 대해 시간의 순간을 대응시킬 수 있는가?'와 같은 의문을 제기한 것으로 볼 수 있다. '화살'의 패러독스 역시 시간이 순간들로 구성되고, 어떤 특정한 순간에 화살은 특정한 위치에 있다는 것을 전제로 한다. 시간이 순간들로 구성되어 있고 그 순간은 기간이 없으므로 움직일 수 없기 때문에 그 순간 동안 화살이 점유하는 위치에 대해 정지하고 있다고 말한 것이다. 즉, 제논은 '화살'의 역설을 통해서도 시간이 순간들로 구성된 것에 의문을 제기한 것이다.

시간이 순간들로 이루어졌는지 여부에 대해서는 여러 철학적 논의가 있다. 이 중에 Weyl [28, p. 92]은 시간을 연속체로 보면서, 연속체 시간에서 한 독립적인 지점은 있을 수 없다고 말하였다. 시간의 순간들은 흐름 속에서 '이행 중인 점'으로서만 존재하는데, 이것은 우리의 감각이 불완전하기 때문이 아닌 시간의 본질에 의한 것으로 보았다. 즉, Weyl의 논의에 의하면 연속체로 간주되는 시간에서는 어떤 특정한 고정된 한 순간이 독립적으로 제시될 수 없다. 따라서 Weyl [28, p. 93]은 우리의 직관적인 연속체와 수학의 실수 연속체가 일치하지 않는다고 하였다.

'아킬레스와 거북이'의 역설에서 아킬레스는 거북이가 바로 전에 있던 그 자리까지 온다. 그리고 출발지점에서 순간까지의 시간 구간을 고려한다. 그러나 Weyl의 시간에 대한 설명을 적용하면 우리는 거북이가 직전에 있던 자리에 아킬레스가 도달하는 그 순간을 뽑아낼 수 없으며, 시간의 연속체 안에서 그 시간을 독립적으로 제시할 수도 없다 [1]. 그런데 우리는 이 역설에서 이렇게 불가능한 시간의 한 순간을 뽑아내면서 계산을 하였고, 따라서 역설이 발생한 것이다. 이러한 Weyl의 시간에 대한 관점은 '날아가는 화살'의 역설에 대해서도 적용할 수 있다. 우리는 역시 시간의 연속체 안에서 날아가고 있는 화살의 기간을 배제한 한 순간에 대해 말할 수 없다. 그러나 이 논의에서 뽑아낼 수 없는 그러한 시간을 뽑아내서 그 순간에 '정지하고 있다'는 판단을 하고 있으며, 이로부터 역설이 발생한 것이다.

Salmon [21, p. 32]은 시간과 공간을 일반적으로 수학적인 연속체로서 표현하긴 하지만, 실제로 우리가 물리학적으로 경험하는 시간은 기간이 배제된 순간들로 구성된 연속체가 아닐 수도 있음을 말하였다. 그보다는 매우 작은 기간으로 구성된 어떤 기간들의 이산적인 열로서 시간을 경험하고 있을 수도 있다는 것이다. 그러나 물론 이러한 설명을 받아들이면 시간을 순간의 연속체로 가정한 많은 이론들을 포기해야 하는 어려움이 발생한다.

요약하면, 제논의 이 역설들은 시간의 연속체에서 단일한 순간을 잡아내는 이러한 불가능한 일을 하였기 때문에 발생하는 것으로 이해할 수 있다. 일부 학자들은 시간이 연속체

라는 사실을 우리가 받아들여야만 하는 필연적인 이유는 없다고 주장하며 수학의 또 다른 연속체 이론으로서 제논의 역설을 해석하려는 시도를 하기도 하였다. 이에 대해서는 다음 장에서 논의한다.

3 제논의 역설과 연속체 이론

3.1 제논의 다수의 역설과 비표준해석학

제논은 운동의 역설에 더하여 직접적으로 연속체가 그것의 궁극적인 부분들인 점으로 이루어질 수 없다는 '다수의 역설'을 제시하였다 [21]. 다음은 Salmon이 '다수의 역설'의 문제를 정리한 것이다.

> 만약 연장(extended things)이 존재하면, 그들은 부분들로 구성되어야 한다; 따라서 부분들이 다수 있다. 게다가, 이 부분들은 또 다시 부분들을 갖는다. 부분 분할의 과정이 무한히 반복되기 때문에, 부분들이 무한히 많아야만 한다……. 두 가지 어려움이 나타난다. 첫째, 궁극적 부분들은 크기를 갖지 않아야 하는데, 만약 그들이 크기를 갖는다면 더 나누어질 수 있기 때문이다. 그러나 연장이 크기가 없는 부분들로 구성될 수 없는데, 그 이유는 그들이 얼마나 많든지에 상관없이 연장은 크기가 없을 것이기 때문이다……. 따라서 두 번째 어려움이 나타난다. 부분은 크기를 가져야만 한다. 그러나 크기들을 무한히 많이 더하면, 그들이 모두 0보다 크기 때문에 무한한 크기가 될 것이다 [21, pp. 13–14].

이 역설은 좀 더 직접적으로 공간이 점으로 이루어졌다는 것, 그리고 시간이 순간들로 이루어졌다는 것에 의문을 제기한다. 그리고 그 의문은 고대부터 연속체의 성질로 여겨졌던 무한분할 가능성과 관련이 있다. 제논에 의하면 연속체의 무한분할 결과 어떤 궁극적인 원소에 도달한다. 만약 궁극적인 원소들이 크기가 없다면, 연속체의 크기는 0들의 합이므로 0이 되고, 만약 궁극적인 원소들이 크기가 있다면 그들의 크기는 양수를 무한개만큼 더하므로 무한대가 되어 모순이 된다는 것이다 [2].

제논의 '다수의 역설'은 무한소의 관점과 관련이 있다. 연속체를 구성하는 궁극적인 부분의 크기가 0도 될 수 없고, 양수도 될 수 없다면 '임의의 양수보다 작지만 0보다는 큰 수, 즉 무한히 작은 양이 존재하는가'라는 의문이 제기된다 [2]. 아르키메데스의 원리가 제시된 이래 무한소의 개념은 수학에서 배제된 듯 했지만 수학의 역사에서 꾸준히 나타났으며 특히, 16~17세기 미적분학의 태동기에 중요한 역할을 하였다. 그리고 Cavaliei의 불가분량의 방법, Wallis의 산술, 그리고 Leibniz의 미적분학에 이르기까지 무한소는 발

견에 유용한 수학적 도구로서 역할을 하였다. 그러나 무한소의 합법적인 수학적 지위에 대해 수학자들은 지속적으로 의문을 제기하였으며, 19세기 후반 Weierstrass, Dedekind, Cantor에 의해 수학의 영역에서 다시 제외되었다. 그리고 1960년대 Abraham Robinson이 비표준해석학의 분야를 엄밀하게 정립하면서 무한소는 다시 수학 분야의 정당한 존재자로서의 지위를 획득하였다. 비표준해석학은 실수이외에 무한대와 무한소를 수학의 분야에 받아들임으로써, 실수체를 확장한 초실수체를 바탕으로 전개된다. Robinson의 초실수체계 $(*, \mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$는 5개의 공리를 만족하도록 구성되었는데 [13], 이 중 본 연구의 논의와 관련 있는 공리 3가지를 소개하면 다음과 같다.

Axiom A : $\mathbb{R}$은 완비 순서체이다.
Axiom B : $\mathbb{R}^*$는 $\mathbb{R}$의 extension인 순서체이다.
Axiom C : $\mathbb{R}^*$가 양의 무한소 ϵ를 가져서, 임의의 양수 r에 대해
$0 < \epsilon$ 이고 $\epsilon < r$ 이다 [13, p. 1].

초실수 체계는 실수 집합을 부분집합으로 포함하는 순서체이지만 실수가 갖는 성질인 완비성 공리를 만족하지 않는다. 그리고 Axiom C에 의해서 무한소 양을 포함한다. 또한 체의 공리에 의해 무한소의 역수로서 역시 무한대를 수로서 포함한다. 학교수학에서 직선은 실수 집합에 대응되지만, 비표준해석학에서는 초실수 체계에 대응된다. 따라서 기하학적 직선에 대한 산술적 모델이 실수체와 초실수체 적어도 두 가지가 존재한다. Błaszczyk et al. [5, pp. 58–60]은 이 두 가지 연속체에 대해 각각 아르키메데스적인 연속체와 베르누이적인 연속체(각각 A-continuum과 B-continuum)라 하였다. 베르누이적인 Robinson의 초실수 연속체에서 각 실수는 초실수들의 standard part이다. 각 실수점과 그 실수 근방의 무한소 거리만큼 떨어진 초실수들의 집합은 monad가 되며, 각 실수는 그 실수를 포함한 monad[1)]의 다른 초실수들을 소거한 점이 된다.

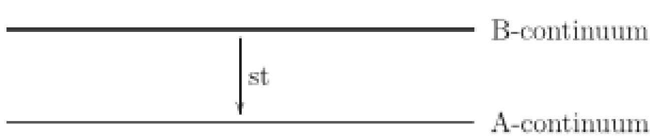

Figure 2. Two kinds of continuum [5, p. 44]

1) 무한소와 무한대를 포함한 초실수 체계에서 0과 무한히 가까운 수 x를 무한소라 부르며 기호로는 $x \approx 0$라고 쓴다. 또 초실수 x와 y가 무한히 가까울 때 $x \approx y$라 쓴다. 기호 $\approx$는 초실수 체계에서 동치관계를 나타낸다. 임의의 초실수 $x \in \mathbb{R}^*$에 대하여, monad(x)는 x와 동치관계에 있는 모든 수들의 집합이다. monad(x) $= \{y \in \mathbb{R}^* \mid x \approx y\}$ [13, p. 2].

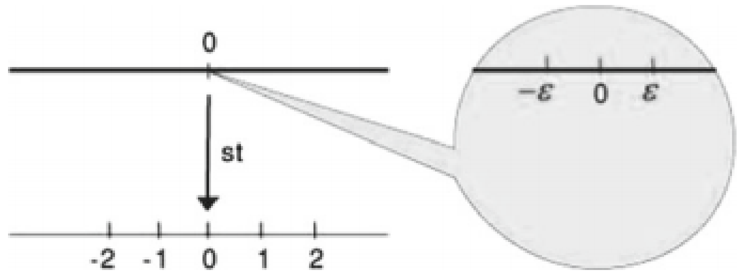

Figure 3. Infinitesimal of hyperreal line [5, p. 50]

만약 아르키메데스적인 연속체 대신에 무한대와 무한소를 포함하는 베르누이적인 초실수 연속체를 받아들인다면, 제논의 '다수의 역설' 은 발생하지 않는다. 연속체를 구성하는 궁극적인 요소의 크기가 무한소라고 간주하면, 무한소는 0이 아니며 임의의 양의 실수보다도 작은 수이고 이들을 무한히 많이 더하면 결코 0은 아니다. 또한, 무한소를 무한히 많이 더할 경우 유한이 되는 것이 가능하므로 '다수의 역설' 은 발생하지 않는다 [2]. 뿐만 아니라, 제논의 운동의 역설 역시 공간이 점으로 이루어져 있다는 전제 하에 운동이 이루어지지 않는다고 주장한 것이므로, 초실수체를 받아들일 경우 운동의 역설 또한 발생하지 않는다. 초실수체를 구성하는 요소는 각 점들이라기보다는 실수 점과 그들의 무한소적 거리에 있는 초실수들을 포함한 모나드들이기 때문이다.

3.2 비표준해석학에서 제논의 역설의 해석

McLaughlin & Miller [18]는 Robinson의 비표준해석학의 초실수 연속체와 동형인 공간과 시간 연속체를 고려함으로써 제논의 운동의 역설의 해소를 시도하였다. Dainton [7] 역시 점으로 구성된 연속체가 아닌 점토 같은(gunky) 연속체를 생각할 때, 제논의 '다수의 역설' 뿐만 아니라 아킬레스와 화살의 역설의 설명이 제시될 수 있음을 말하였다. 백승주, 최영기 [1]는 제논의 '아킬레스' 의 역설을 등비급수로 해소하는 것이 진정한 해소가 되지 않는 이유는 '도달하는 순간' 이라는 일상적 표현에는 비표준해석학적인 자생적 의미가 있는 반면, 등비급수의 수학적 설명은 표준해석학으로 이루어졌기 때문이라 하였다. 즉 한 가지 설명 안에 표준해석학적 요소와 비표준해석학적 요소를 모두 포함하고 있기에 그 설명에 대해 납득하기 어렵다는 것이다.

본 절에서는 백승주, 최영기 [1]의 논의를 통해 '아킬레스' 의 역설을 비표준해석학적으로 살펴본다. 백승주, 최영기 [1]는 '도달하는 순간' 이 비표준해석학적인 자생적 의미가 있으므로 아킬레스의 운동 역시 비표준해석학적으로 일관된 이론을 통해 해석될 필요가 있다고 하였다. 이제 아킬레스와 거북이 사이의 거리를 생각해보면, 둘 사이의 거리는 $100, 10, 1, 1/10, \cdots$ 과 같다. 즉, n 번째 시행에서 둘 사이의 거리는 ($\frac{100}{10^{n-1}}$)이다. 이러한 과정이 무한 번 계속된다

고 하자. 극한에 대한 비표준해석학의 정의[2)]에서 n이 무한대가 되면 $(\frac{100}{10^{n-1}})$은 0에 한없이 가까워지며 $(\frac{100}{10^{n-1}}) \approx 0$이 된다. 이때, $(\frac{100}{10^{n-1}})$은 0과 동치관계에 있게 된다. 이 경우를 극한 기호를 이용해 표현하면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{100}{10^{n-1}}\right) = 0$이 되어 표준해석학과 동일한 형태로 표현되지만 비표준해석학에서는 그 의미는 크게 다르다. 둘 사이의 거리 차인 $(\frac{100}{10^{n-1}})$는 0과 동치관계에 있기 때문에 0과 동일한 것으로 여겨진다. 즉, $(\frac{100}{10^{n-1}})$이 0의 동치류인 monad(0)에 포함되는 순간 둘 사이의 거리 차이는 0과 동일한 것으로 간주되며, 아킬레스는 거북이를 따라 잡은 것으로 해석된다. 즉, 시간과 공간을 모두 동일한 이론인 비표준해석학적으로 해석할 경우 역설은 발생하지 않는다.

다음으로 화살의 역설을 생각해 보자. 제논에 의하면 날아가는 화살은 각 순간에 한 장소를 점유하고 있으며 정지하고 있다. 따라서 시간의 각 순간에 정지하고 있으므로 화살이 날아간다는 것은 모순이라고 하였다. 그러나 시간의 연속체가 점들로 구성된 실수 체계에 대응되는 것이 아닌 monad들로 구성된 초실수 체계에 대응되었다고 가정하면, 시간의 각 순간들은 무한소 기간을 가진다. 따라서 무한소 기간 동안 화살은 정지하고 있는 것이 아닌 매우 짧은 시간이긴 하지만 움직이고 있는 것이라고 해석할 수 있다. 따라서 이러한 관점에서는 '화살'의 역설은 발생하지 않는다. 이 해석은 Dainton [7]의 화살의 역설에 대한 설명과 유사하다. Dainton [7]은 공간과 시간이 점토 같은(gunk-like) 연속체라고 간주하면, 시간은 점이 아닌 구간으로 구성되는 것으로 여겨지고 시간의 어떤 순간에 정지하고 있는 화살에 대한 문제는 제거된다고 하였다.

본 연구는 비표준해석학을 통한 제논의 패러독스의 이러한 설명이 표준해석학적인 설명보다 패러독스의 해소에 더 적절하다거나, 학생들이 더 이해하기 쉬운 형태라고 주장하는 것은 아니다. 단지 본 절에서 제시하는 것은 연속체에 대한 서로 다른 이론이 있으며, 이들은 각기 패러독스에 대한 설명을 가지고 있다는 것이다.

4 연속체에 대한 두 가지 이론과 학교수학

4.1 Dedekind의 실수와 실세계의 모델로서 수학 이론

학교수학은 표준해석학적 체계를 따르며 학교수학의 연속체는 실수 점들로 구성된 직선인 실수 연속체를 말한다. 직선은 비가산개의 실수 점들로 이루어진 직선 연속체이다. 그러나

2) 비표준해석학에서는 다음과 같이 극한을 동치관계를 이용하여 정의한다.
실수 L과 c에 대해, $x \approx c$이고 $x \neq c$일 때, $f(x) \approx L$이면, x가 c로 갈 때의 $f(x)$의 극한이 L이라 한다.
이것을 기호로는 다음과 같이 쓴다.

$$L = \lim_{x\to c} f(x)$$

이때, 조건을 만족하는 L이 존재하지 않을 경우에는 극한은 없다 [13, p. 43].
실수 L과 임의의 양의 무한대 H 에 대해 $f(x) \approx L$이면, $\lim_{x\to H} f(x) = L$이다 [13, p. 74].

이러한 수학적 연속체를 표상할 때 다양한 경험적 대상들이 소재가 된다. 시간, 움직임, 팽팽한 끈, 때로는 종이 위에 연필로 그린 선과 같은 것들이 대표적으로 연속체의 대응물로서 여겨진다 [17]. 그러나 여기에서 한 가지 질문이 제기된다. 우리가 학교수학에서 연속의 성질을 갖는 것으로 간주하는 구체적인 현상과 사물들이 과연 추상적인 기하학의 점의 모임으로서의 직선이나 해석학의 실수체계와 동일한 연속체의 구조를 갖는가? 3장에서 보았듯이 수학적 연속체에는 표준해석학의 실수 연속체도 존재하지만, 무한대와 무한소를 수학의 존재자로서 받아들이는 비표준해석학의 초실수 연속체도 존재한다. 그리고 제논의 역설에 대해서 비표준해석학으로 설명이 가능한 것처럼 비표준해석학의 초실수 연속체는 물리적 세계에 대한 수학적 모델로서 사용될 수 있다. 이러한 관점에서 실수체가 물리적 현상에 대응하는 유일한 연속체 이론은 아니며 일종의 수학적 모델임이 강조될 필요가 있다.

표준해석학의 실수 이론에 대한 공헌은 Weierstrass, Dedekind, Cantor에게 돌려진다. 이 세 수학자에 의해 미적분은 산술화되고, 공간과 운동의 직관으로부터 자유로워졌으며 실수는 선형 연속체의 구조를 갖게 되었다. Dedekind는 실수를 다음과 같이 정의하여 실수 집합이 직선과 일대일 대응이 되도록 하였다.

> 만약 모든 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 이 두 부분 A_1과 A_2로 나누어져서, A_1의 모든 수 a_1이 A_2의 모든 수 a_2보다 작다면, 그러면 이 분할에 의해 생성되는 오직 한 개의 수 α가 있다 [3, p. 145 재인용].

그러나 Dedekind는 자신이 정의한 산술적 연속체인 실수 체계와 공간이 동일하다고 말하기 어렵다고 하였으며 특히 자신은 불연속적인 직선을 인지할 수도 있다고 하였다 [23, 24]. Dedekind는 또한 1872년 저서에서 "만약 공간이 실제로 존재한다면 연속적일 필요는 없다"고 하였으며, 직선 자체가 실제로 연속적이라기보다는 우리가 직선을 연속적으로 보기 위해 연속이라고 생각되는 구조를 직선에 부과한 것이라고 하였다 [23, p. 171]. 즉 실수 점들로 연속체를 구성한 Dedekind도 그것이 실제 공간과 동일한 구조라고 본 것은 아니었다.

일반적으로 직선은 실수에 대응되는 것으로 생각하는 경향이 있지만, 그렇게 대응시킨 것일 뿐 공간의 직선이 Dedekind가 정의한 실수 구조와 동일한 구조를 갖는지 여부는 알 수 없다. 실제로 Dedekind의 실수 구조 이외에 비표준해석학의 초실수 구조가 수학의 합법적 이론으로 존재한다는 사실은 이를 뒷받침 한다. 공간의 직선은 실수 구조에 대응이 될 수도 있지만 비표준해석학의 초실수 구조에 대응하여 생각할 수도 있다. 물론 학교수학에서 학생들에게 이렇게 초실수라는 또 다른 수학의 연속체의 모델이 있음을 제시하자고 주장하는 것은 아니다. 그러나 적어도 학교수학에서 수학 이론의 공간 혹은 물리적 대응은 하나의 모델이라는 관점이 강조될 필요가 있다. 실제로 아킬레스의 패러독스에서 등비급수에 의한 설명, 그리고 화살의 패러독스에서 순간 속도의 설명은 실세계의 상황에 수학적 이론을 대응시킨 것이다. 만약 이러한 대응에 학생들이 의문을 느낀다면 그것이 단지 학생들의 인지적인 문제가 아닐 수

있으며, 수학 이론이 실세계를 표현하는 하나의 모델이고 이 대응은 반드시 필연적이지 않을 수도 있음이 강조될 필요가 있다.

4.2 수학적 관행과 메타 수학적 요소

연속체와 관련하여 표준해석학과 비표준해석학의 두 가지 이론이 있으며, 제논의 패러독스가 이 두 가지 연속체의 이론을 통해 각각 다르게 해석될 수 있다는 사실은 주목할 만하다. 사람들이 연속체에 대해서 서로 다른 이론을 바탕으로 생각할 수 있으며, 제논의 패러독스와 같이 일상적인 언어로 표현된 문제 상황을 바라볼 때 역시 서로 다른 연속체의 관점을 적용할 가능성이 있기 때문이다.

역사적으로 수학의 이론은 긴장 상황이 발생하고 불균형 상태를 거치기도 하면서 변화해왔다 [14]. Kitcher [14, p. 163]는 과학의 이론의 변화를 패러다임의 전환 즉 혁명적 관점으로 설명한 Kuhn의 이론을 개선하여 수학적 관행의 이론을 제시한다. 수학자들은 본인들이 속한 수학적 관행에서 작업하고 있다. 수학적 관행은 '언어(L), 허용된 진술집합(S), 추론 집합(R), 중요한 것으로 선택된 질문 집합(Q), 메타 수학적인 관점의 집합(M)' 으로 구성된다. 특히 메타 수학적 변화는 광범위한 수학적 변화와 연결되어 있으며, 과학에서 혁명에 대응된다 [14, pp. 191–192].

Sfard [22]는 Kitcher의 수학적 관행의 관점을 수용하여 교사와 학생이 서로 다른 수학적 관행에 참여할 수 있음을, 따라서 동일한 수학적 패러다임을 공유하지 못한 채 서로 다른 이론을 바탕으로 사고할 수 있음을 제시한다.

Sfard [22, p. 281]는 수학적 관행의 구성 요소 중 메타 수학은 "수학적 탐구의 대상과 방법, 수학적 대상의 존재와 본성, 근원 및 조건, 허용되는 지식 표현 형태에 대한 신념"들을 포함하는 것으로 보았다. 일반적으로 메타 수학적 요소는 수학적 관행의 다른 요소들보다 더 안정적이며 특히 인식론적 존재론적 신념은 비활성적인 특징을 지닐 뿐만 아니라 감지하기 또한 매우 어렵다. 따라서 교사와 학생이 만약 서로 다른 수학적 관행에 참여하고 있는 경우 그들은 그들이 가진 메타 수학적 요소가 다르다는 사실을 인지하기 어렵다. Sfard [22]는 심지어 교사와 학생이 각각 다른 수학적 관행에 참여하고 있다는 사실조차 깨닫지 못할 수 있으며, 그들 사이의 의사소통은 많이 손상되었기 때문에 서로를 이해하기 어렵다고 하였다. 따라서 Sfard [22]는 교실 수업의 성공에서 중요한 것은 학생들에게 가장 깊은 곳에 숨겨져 있으며 가장 찾기 어려운 이러한 메타 수학적 요소를 찾는 것이라 하였다.

이러한 관점에서 학생들이 연속체에 대한 어떤 사고를 갖고 있는지, 연속체의 구성과 관련해서 무한소의 존재성에 대해 어떤 생각을 갖고 있는지를 파악하는 것은 학생이 속한 수학적 관행을 이해하는 것과 관련이 있으며 따라서 학생과 교사의 성공적인 의사소통을 위해 중요한 단계라 할 수 있다. 특히 무한소에 대한 관점은 고등학교 과정의 미적분학의 이해와 관련하여

매우 중요하다. 일부 학생들이 무한소적 관점을 갖고 있다고 보고하는 연구들이 있으며 [8, 25], 특히 Ely [8]는 학생들의 무한소에 대한 생각이 과거의 수학자들이 가진 관점 및 비표준해석학적 관점과도 유사함을 말하고 있다. 실제로 그러한 학생들이 존재한다는 사실은 여러 수학 교실에서 학생들과 교사가 다른 관행에 참여하고 있으며 의사소통이 원활하지 않을 수 있고 따라서 수업이 효과적이지 않을 수 있음을 시사한다.

이제 본 연구는 학생들의 수학적 관행과 메타 수학적 요소를 파악하고, 학생들의 관점과 교과서 혹은 교사의 관점을 비교하는 활동으로 다음과 같이 두 가지를 제안하고자 한다.

첫째, 수학의 극한의 개념 및 Tall [26]이 제안한 포괄적 극한(generic limit) 개념에 대한 질문과 토론을 통한 반성적 활동은 학생이 가진 극한 개념에 대한 이해를 드러내는 데 도움이 될 것이다. Tall [26]은 학생들이 수열에서 각각의 항들이 어떤 성질을 공통적으로 갖고 있을 때 수열의 극한 역시 그러한 성질을 가질 것이라고 믿는 현상을 포괄적 극한이라는 개념을 통해 설명하였다. Tall [26]에 의하면 포괄적 극한 개념은 단지 수학에 한정하여 나타나는 것은 아니며, 어떤 수열들의 공통적인 특징들을 인식하고 그의 극한 상황에 대해서도 그러한 특징이 존재한다고 인식하는 사고방식이다. 수열 $0.9, 0.99, 0.999, \cdots$ 의 모든 항들이 1보다 작기 때문에 그 극한값 $0.999\cdots$도 1보다 작다고 생각하는 것이 대표적인 예이다. 또한 아킬레스의 패러독스에서 등비급수에 대한 설명에도 불구하고 여전히 패러독스가 해소되지 않았으며 아킬레스가 거북이를 따라잡는 것이 불가능하다는 생각은 역시 포괄적 극한 개념으로 설명할 수 있다.

학교에서 교사는 학생들에게 이러한 포괄적 극한 개념을 반성하는 활동으로 '$a_n = 1-(0.1)^n$ 일 때, $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, $a_3 = 0.999$, ⋯ , $a_n = 1 - (0.1)^n$, ⋯ 이며 어떤 자연수 n에 대해서도 결코 a_n은 1이 되지 않는데 왜 $0.999\cdots = 1$이라고 표현하는가?' 에 대해 질문할 수 있다. $0.999\cdots$는 학생들의 무한소적 관점을 드러낼 수 있는 가장 대표적인 예이며 때때로 인지적인 혼란의 원인이 되기도 한다. $0.999\cdots$는 1과 같은지 혹은 1보다 작은지보다, '임의의 n에 대해서도 a_n은 결코 1이 아니지만 수학에서 $0.999\cdots = 1$라고 표현한 이유가 무엇인가?, 왜 그렇게 정의했는가?' 에 대해 질문하는 것은 학생들의 무한소적 관점 여부를 드러낼 뿐만이 아니라 포괄적 극한 개념을 되돌아보고 자신의 극한 개념과 교과서, 그리고 교사의 극한 개념의 차이에 대해 비교해 볼 수 있는 기회가 될 것이다. $0.999\cdots$의 상황에 더하여 이를 아킬레스의 패러독스에 적용한 상황, 즉 '임의의 n번째 시행에서도 아킬레스는 거북이를 따라 잡을 수 없는데, 극한의 개념을 통해 따라 잡는다고 설명하는 것은 적절한가?' 에 대한 질문은 수학적 극한 개념, 포괄적 극한 개념에 대한 반성과 함께 극한 이론을 실세계에 적용한다는 의미, 수학이 실세계에 대한 일종의 가능한 모델이라는 관점을 되돌아 볼 수 있도록 할 것이다.

둘째, 제논의 화살의 역설과 관련하여 '순간 속도를 왜 극한으로 정의했는가?' 그리고 '순간은 무엇인가?' 에 대한 질문은 학생들의 무한소에 대한 존재론적 입장을 드러냄과 동시에

표준해석학적인 극한 개념의 이해를 도울 수 있을 것이다. 순간의 사전적 의미는 “아주 짧은 동안” 이다 [19]. 하지만 표준해석학적 관점을 택하는 교과서에서의 순간은 기간이 없는 실수 직선의 점에 해당한다. 따라서 순간 자체의 사전적 의미와 교과서의 수학적 의미는 다르다. 그리고 교과서의 순간은 기간이 0이기 때문에 움직인 거리도 0이고 따라서 순간 속도는 그 개념 자체에 이미 $\frac{0}{0}$ 의 모순적인 요소를 포함하고 있다. 따라서 순간 속도를 정의하기 위해 $\frac{0}{0}$ 을 이용할 수 없기 때문에 평균 변화율의 극한으로 순간 변화율을 정의한다. 위의 질문들을 통해 교사는 학생들이 순간변화율이 평균변화율의 극한이라는 것을 단지 기계적으로 이해하고 있는지, 극한으로 정의할 수밖에 없는 이유에 대해 파악하고 있는지, 혹은 무한소 시간을 통해서 즉 비표준적인 관점으로 이해하고 있는지 등에 대해서 알 수 있으며, 학생들은 본인들의 순간 속도와 미분에 대한 관점을 반성할 수 있는 기회를 가질 수 있을 것이다.

5 결론

본 연구는 학교수학의 동기유발 소재로 자주 언급되는 제논의 역설에 대해 존재하는 철학적 논의들을 통해 교육적 시사점을 도출하고자 하였다. 제논의 ‘아킬레스’ 의 역설과 ‘화살’ 의 역설을 미적분학의 등비급수와 순간속도 이론으로 해석하는 것은 패러독스에 대한 완전한 해소라고 보기는 어려웠다. 사실 제논이 운동의 패러독스를 통해 진정으로 말하고 싶었던 것은 공간이 점으로 이루어져 있고, 시간이 순간으로 이루어져 있다는 가정 아래 운동이 불가능하다는 것이었다. 제논은 이러한 관점에서 ‘다수의 역설’ 을 제기하기도 하였다. 다수의 역설은 연속체가 궁극적인 요소로 이루어졌다는 것에 대한 패러독스이다. 궁극적인 요소의 크기가 양수라면 연속체의 크기가 무한이 되고, 궁극적 요소의 크기가 0이라면 연속체의 크기는 $0+0+0+\cdots$ 이므로 0이 되어 모순이라는 것이다. 제논의 다수의 패러독스는 무한소를 수학적 대상으로 인정함으로써 해소될 수 있다. 그리고 이러한 무한소의 도입 및 비표준해석학으로 제논의 ‘운동의 역설’ 에 대한 대안적인 설명 역시 가능하다.

이처럼 연속체에 대한 적어도 두 가지 이론이 존재한다는 것은 실수가 공간과 시간의 연속적인 대상과 필연적으로 대응되지 않을 수도 있음을 보여준다. 학교수학에서 실수 점들이 직선에 대응이 되며, 직선은 실수 점들로 가득 찼다는 수직선 은유는 매우 흔하고 당연하게 받아들여진다. 그러나 이는 수학적 모델이며 실제 공간의 직선을 가리키는지, 이러한 대응이 학생들의 직관과 부합하는지 여부에 대해서는 말하기 어렵다. 많은 교사들은 수학 수업에서 경험적이고 직관적인 모델을 사용한 설명을 선호하는 경향이 있다. 그리고 추상적인 수학적 구조와 대상을 친숙한 것에 비유하여 직관적으로 설명하는 것은 자주 성공적인 결과를 가져온다. 뿐만 아니라 수학을 경험적 대상에 적용하는 것은 수학 과목에 대한 흥미를 유발하고 수학의 유용성을 보여주는 좋은 교수학적 전략이기도 하다. 그러나 본 연구에서 제시한 제논의 역설에 대한 표준해석학과 비표준해석학적인 설명들은 서로 다른 수학적 이론들이 일상적인

언어로 표현된 상황에 대해 각각의 설명 방식을 가질 수 있음을 보여준다. 따라서 학교수학에서 수학적 이론의 실세계의 적용은 반드시 학생의 직관에 부합하지 않을 수 있으며, 일종의 모델이며 '대응' 이라는 관점이 강조되어야 함을 제안하였다. 물론 본 연구는 학생들에게 비표준해석학이라는 수학의 또 다른 이론이 있음을 제시하자고 주장하는 것은 아니다. 이론과 실세계의 대응에서 학생들이 필연성을 느끼지 않거나 의아함을 나타내는 경우, 그 원인으로 학생들의 직관이 덜 발달했기 때문이 아닌 수학 이론이 실세계에 대한 가능한 대응의 하나이기 때문일 수 있다는 관점이 학교수학에서 강조될 필요가 있음을 제안하는 것이다.

연속체에 대한 적어도 서로 다른 두 종류의 이론이 있다는 사실은 또한 교사와 학생이 동일한 연속체의 관점을 갖지 않을 수도 있음을 암시한다. 실제로 학생들이 무한소적 관점을 가질 수 있음을 보고하는 선행 연구들이 있다. 무한소는 비표준해석학과 관련이 있으며, 따라서 무한소적 관점을 가진 학생들은 표준해석학적 이론 안에서 사고하지 않을 가능성이 크다. Sfard는 교사와 학생이 서로 다른 수학적 관행에 참여하고 있을 경우 그들은 의사소통에서 큰 어려움을 겪을 수 있음을 말하였다. 이러한 교수학적 문제점을 극복하기 위해 중요한 것은 학생이 어떤 수학적 관행에 참여하고 있는지 그리고 학생이 가진 메타 수학적인 요소는 무엇인지 파악하는 것이다. 따라서 본 연구는 제논의 역설과 관련하여 교사로 하여금 학생의 메타 수학적 요소를 이해하도록 하고, 학생 스스로도 본인의 메타 수학적 관점을 파악하고 자신의 수학적 지식에 대해 반성할 수 있는 두 가지 방안을 제시하였다. 본 연구가 제시한 방안이 실제로 효과가 있는지에 대해서는 추가적인 연구를 통해 확인이 필요하다.

본 연구는 학교수학에서 수학의 유용성을 보여주는 소재로 이용되는 제논의 역설과 관련하여 존재했던 철학적 논의들을 살펴봄으로써 교육적 시사점을 얻고자 하였다. 제논의 역설에 대해 현재도 계속 출판되고 있는 철학적 논문들은 학교수학에서 흥미와 동기유발의 소재로 사용되는 제논의 역설에 대한 수학적 설명들이 학습자들에게 직관적으로 받아들여지지 않을 수도 있음을, 따라서 충분한 교육적 고민이 필요함을 보여준다. 더불어 학습을 위해 도입되는 다양한 소재들이 학습자의 인지구조 및 수학적 관행에 잘 맞는지에 대한 추가적 고민을 통해 적절하게 사용되어야 함을 제안한다.

References

1. Baek S. J., Choi Y. G., Zeno' Paradox from the Paradigms of Standard Analysis and Non-standard Analysis, *School Mathematics 20*(2) (2018), 307–318. 백승주, 최영기, 표준해석학과 비표준해석학의 패러다임 관점에서 본 '제논의 역설', 학교수학 20(2) (2018), 307–318.
2. Baek S. J., Choi Y. G., A Historical and Mathematical Study on Continuum - Focusing on the Composition and Infinite Division-, *Journal of Educational Research in Mathematics* 30(4) (2020), 575–599. 백승주, 최영기, 연속체의 역사적, 수학적 분석—연속체의 구성과 무한분할을 중심으로—, 수학교육학연구 30(4) (2020), 575–599.

3. J. L. Bell, *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Polimetrica, 2005.
4. M. Black, Achilles and the Tortoise, *Analysis* 11(5) (1951), 91–101.
5. P. Błszczyk, M. G. Katz, D. Sherry, Ten Misconceptions from the History of Analysis and Their Debunking, *Foundations of Science* 18(1) (2013), 43–74.
6. F. Cajori, The Purpose of Zeno's Arguments on Motion, *Isis* 3(1) (1920), 7–20.
7. B. Dainton, *Time and Space*, Acumen, 2010.
8. R. Ely, *Student Obstacles and Historical Obstacles to Foundational Concepts of Calculus*, Dissertation of the Doctor of Philosophy in the University of Wisconsin-Madison, 2007.
9. Go S. E. et al., *High School Textbook of Calculus*. Sinsago, 2019. 고성은 외, 고등학교 미적분 교과서, 신사고, 2019.
10. Han D. H., Zeno's Re-examination, *School Mathematics* 2(1) (2000), 243–257. 한대희, 수학사 제논의 역리의 재음미, 학교수학 2(1) (2000), 243–257.
11. T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge University Press, 1956. 이무현 역, 기하학 원론—평면기하, 교우사, 1998.
12. Hwang S. W. et al., *High School Textbook of Calculus*, Mirae-n, 2019. 황선욱 외, 고등학교 미적분 교과서, 미래엔, 2019.
13. H. J. Keisler, *Foundations of infinitesimal calculus*, 2009, http://www.enzoexposito.it/Analisi_Non_Standard/Keisler_Elementary_Calculus_Foundations.pdf(Jan. 10. 2019).
14. P. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, 1984.
15. Lee D. G., A Study on the Students' Process of Solving Zeno' Paradox Task(Half Paradox and Achilles Paradox) Based on the Analysis of Students's Expressions, *School Mathematics* 21(2) (2019), 391–417. 이동근, 학생들의 Zeno의 역설(반분역설과 아킬레스 역설) 과제해결 과정에 대한 연구 학생들의 표현을 중심으로, 학교수학 21(2) (2019), 391–417.
16. Lee J. Y. et al, *High School Textbook of Calculus*, Chunjae Education, 2019. 이준열, 고등학교 미적분 교과서, 천재교육, 2019
17. G. Longo, The Mathematical Continuum, from Intuition to Logic, In *Naturalizing Phenomenology: Issues in Comtemporary Phenomenology and Cognitive Sciences* (J. Petitot, F. J. Varela, B. Pachoud, J. Roy eds.), Stanford University Press, 1999.
18. W. I. McLaughlin, S. L. Miller, An Epistemological Use of Nonstandard Analysis to Answer Zeno's Objections against Motion, *Synthese* 92(3) (1992), 371–384.
19. National Institute of Korean Language, Standard Korean Language Dictionary, https://stdict.korean.go.kr/search/searchView.do?word_no=452458&searchKeywordTo=3 (Dec,.15.2020), 국립국어원, 표준국어대사전 https://stdict.korean.go.kr/search/searchView.do?word_no=452458&searchKeywordTo=3 (2020.12.15.).
20. W. C. Salmon, *Space, Time, and Motion: A Philosophical Introduction*, University of Minnesota Press, 1980.
21. W. C. Salmon, *Zeno's Paradoxes*, Hackett Publishing Company, 2001.
22. A. Sfard, Mathematical Practices, Anomalies and Classroom Communications Problems., In *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education* (P. Ernest, ed.), The Falmer Press, 1994, 248–273.

23. S. Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, 1997.
24. H. Stein, Logos, Logic, and Logistiké: Some Philosophical Remarks on Nineteenth-Century Transformation of Mathematics., In *History and Philosophy of Modern Mathematics* (W. Aspray, & P, Kitcher ed.), University of Minnesota Press, 238–259. 1988.
25. D. Tall, Mathecatical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 1980, 170–176.
26. D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 1991. 류희찬, 조완영, 김인수 역, 고등수학적 사고, 경문사, 2003.
27. J. F. Thomson, Tasks and Super-tasks, *Analysis* 15(1) (1954) 1–13.
28. H. Weyl, *The Continuum: a Critical Examination of the Foundation of Analysis*, Courier Corporation, 1994.