Journal for History of Mathematics
Vol. 33 No. 6 (Dec. 2020), 315–325
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2020.33.6.315

A study on magic labelling of Hadoguodo

하도구오도(河圖九五圖)의 magic labelling에 대한 연구

PARK Kyo Sik 박교식

In this study, how Choi Seok-Jeong made Hadoguodo is presumed. Choi Seok-Jeong's Hadoguodo does not actually reflect the Hado. But it is verified that Hadoguodo reflecting Hado can be made. In addition, it is verified that Hadoguodo can be made so that not only the sum of the nine numbers of each square are all 207 but also the sum of the nine numbers in the horizontal and vertical directions are all 207.

Keywords: Choi Seok-Jeong, Gusuryak, Hadoguodo; 최석정, 구수략, 하도구오도.

MSC: 01A07, 01A25

1 서론

최석정(1646∼1715)은 ≪구수략(九數略)≫에서 Figure 1의 하도구오도(河圖九五圖, HG)를 제시하고 있다. 이것은 Figure 2에서 1∼45의 수를 한 번씩만 사용하여, 5개의 3×3 정사각형(이하, 정사각형)에서, 각 정사각형의 9개의 수의 합이 모두 207이 되도록 만든 것이다. 즉, 최석정은 Figure 2의 문제에 Figure 1이라는 해를 제시한 것이다.[1)]

Figure 1에서 다음 2가지를 관찰할 수 있다. 첫째, Table 1에서 $0 \leq n \leq 8$인 $5n$에 대해 $5n+1, \cdots, 5(n+1)$은 정사각형 A, B, C, D, E에 각각 1개씩 있어야 한다. 둘째, Table 1에서 1부터 20까지의 수의 진행과 31부터 45까지의 수의 진행이 교대로 이루어지고 있다. →는 수가 커지는 진행을, ←는 수가 작아지는 진행을 나타낸다. 첫째를 '분할 규칙', 둘째를 '진행 규칙' 이라고 부르기로 한다.

이 논문은 2018학년도 경인교육대학교 학술연구비에 의하여 연구된 것임.
PARK Kyo Sik: Dept. of Math. Edu., Gyeongin National Univ. of Edu. E-mail: pkspark@gin.ac.kr
Received on Jun. 25, 2020, revised on Dec. 8, 2020, accepted on Dec. 11, 2020.

1) 참고 문헌 [1]은 정해남과 허민이 번역한 ≪구수략(곤)≫을 의미한다. 그런데 Figure 1의 경우, [1]에서는 25와 33의 위치를 바꾸어 제시하고 있다. 이것은 원문이 잘 보이지 않아서 생긴 오식(誤植)이다. 한국학중앙연구원의 디지털 장서각에서 원문을 확인할 수 있다. 한편, Figure 2에서 A, B, C, D, E는 Figure 1에서 1, 2, 3, 4, 5가 위치한 각각의 정사각형을 나타낸다. 이것은 [3]에 따른 것이다.

			12	44	9			
			19	21	29			
			37	2	34			
13	43	8	15	41	6	14	42	7
18	25	26	16	23	30	17	24	28
38	3	33	40	5	31	39	4	32
			11	45	10			
			20	22	27			
			36	1	35			

Figure 1. HG 1(Choi 1)

				B				
	C			E			D	
				A				

Figure 2. HG(problem)

11~15 (→)	41~45 (←)	6~10 (←)
16~20 (←)	21~25	26~30
36~40 (→)	1~5 (→)	31~35 (←)

Table 1. range

≪구수략≫에서 제시하고 있는 지수귀문도(地數龜文圖)는 만들기가 쉽지 않고, 구구모수변궁양도(九九母數變宮陽圖)는 9차 오일러 방진이기에 관심을 받았지만 [2, 4, 5], 하도구오도는 그렇지 못했다. 그러나 하도구오도에 주목할 점이 없는 것은 아니다. 진행 규칙을 무시한다면, Figure 1에서 임의의 정사각형의 2행에 배치된 3개의 수의 합이 69이므로 그 3개의 수의 쌍을 다른 정사각형의 2행의 3개의 수의 쌍과 교환하여도 각 정사각형을 이루는 9개의 수의 합이 모두 207이 된다. 분할 규칙도 무시한다면, 이외에도 수의 위치를 바꾸는 것을 통해 각 정사각형을 이루는 9개의 수의 합이 모두 207이 되도록 할 수 있다.

최석정이 Figure 1을 하도구오도라고 하고 있기는 하지만, 실제로는 그것이 Figure 3의 하도(河圖)를 반영하고 있는 것은 아니다. 하도에서는 1과 6, 2와 7, 3과 8, 4와 9, 5와 10이 각각 함께 있지만, Figure 1의 하도구오도에서는 그렇지 않다.

7
2
8, 3 (10, 5) 4, 9
6
1

Figure 3. Hado

"최석정은 Figure 1의 하도구오도를 어떻게 만들었을까?" "하도를 반영하는 하도구오도를

만들 수 있는가?” “각 정사각형의 9개의 수의 합이 모두 207이 되는 것뿐만 아니라, 가로 방향의 9개의 수의 합과 세로 방향의 9개의 수의 합도 모두 207이 되는 하도구오도가 있는가?” 라는 3가지 질문을 생각할 수 있고, 여기에서는 이 질문의 답을 찾는다.

2 하도구오도를 만드는 방법

김용운은 하도구오도가 Table 2와 같은 방법으로 만들어졌다고 보고 있다 [3]. 1조에서는 1∼20의 수를 차례로 왕복하면서 배치했고, 이때 4개의 수의 합은 42이다. 3조에서는 36∼45의 수를 차례로 왕복하면서 배치했고, 이때 2개의 수의 합은 81이다.2) 2조의 배치 방법에 관해서는 별도의 설명을 하지 않은 채 단지 3개의 수의 합이 84라 하고 있다.

	A	B	C	D	E
1조	1 10 11 20	2 9 12 19	3 8 13 18	4 7 14 17	5 6 15 16
2조	22 27 35	21 29 34	25 26 33	24 28 32	23 30 31
3조	36 45	37 44	38 43	39 42	40 41

Table 2. method to make a Hadoguodo [3]

[3]에서 2조의 배치에 대한 설명이 없다는 점에 주목하여, 여기서는 다른 방법을 추정한다. 먼저 Figure 1에서 다음 2가지가 성립한다. 첫째, 각 정사각형에서 한 가운데 있는 수를 중심으로 1행과 3행에서 마주 보는 두 수의 쌍 3개를 찾을 수 있고, 이때 두 수의 합은 46이다. 둘째, 각 정사각형에서 2행의 3개의 수의 합은 69이다. 이때 각 수는 $16, 17, \cdots, 30$의 어느 하나이다. 첫째와 관련해서, 각 쌍은 $(1, 45), (2, 44), \cdots, (15, 31)$이다. Table 2의 1조와 같이 1부터 15까지의 수를 차례로 왕복하면서 배치하면, 45부터 31까지의 수의 배치도 그에 따라 정해진다. 둘째와 관련해서, Figure 1에서 정사각형 A, B, C, D, E의 2행에 차례로 $20, 19, 18, 17, 16$을 배치한 것이고, 남은 두 수의 합은 차례로 $49, 50, 51, 52, 53$이 되어야 한다. 그러나 이것을 만족하도록 남은 10개의 수를 차례로 왕복하여 배치하는 것은 가능하지 않다. Figure 1은 $49 = 27+22$, $50 = 29+21$, $51 = 26+25$, $52 = 28+24$, $53 = 30+23$이 되도록 배치한 것이다. 즉 정사각형 A, B, C, D, E의 2행에 각각 $(20, 22, 27), (19, 21, 29), (18, 25, 26), (17, 24, 28), (16, 23, 30)$을 차례로 배치한 것이다.3)

정사각형 A, B, C, D, E에 차례로 $20, 19, 18, 17, 16$을 배치할 때, 최석정이 제시한 것 이외의 배치도 가능하다. 그것을 구하기 위해 Table 3을 만든다. Table 3은 21∼30에서 합이 각각 $49, 50, 51, 52, 53$이 되는 서로 다른 두 수를 나타낸 것이다. 분할 규칙을 만족해야 하므로

2) [3]에서 제시하고 있는 원래의 표에는 오식이 있다. Table 2는 그 오식을 바로 잡은 것이다. 원래의 표에는 정사각형 B의 1조에서 19 대신 17, 그리고 2조에서 29 대신 27이라 하고 있다.

3) 분할 규칙을 무시한다면, 각각의 쌍에서 3개의 수의 위치를 바꾸어도 각 정사각형의 9개의 수의 합도 모두 207이 된다.

$24+25=49$, $26+27=53$은 포함되지 않는다.

49 in A	50 in B	51 in C	52 in D	53 in E
28, 21	29, 21	30, 21	×	×
27, 22	28, 22	29, 22	30, 22	×
26, 23	27, 23	28, 23	29, 23	30, 23
×	26, 24	27, 24	28, 24	29, 24
×	×	26, 25	27, 25	28, 25

Table 3. two numbers with a sum of 49 to 53

Table 3으로부터 16~30의 수를 한 번씩만 사용하여 합이 69가 되는 3개의 수의 쌍 5개의 배열은, 최석정이 제시한 ①을 포함하여, Table 4와 같이 모두 6가지이다. ②~⑥을 택하면 각각 Figure 4~Figure 8을 얻을 수 있고, 이들은 분할 규칙과 진행 규칙을 만족한다.

	A	B	C	D	E
①	20, 22, 27	19, 21, 29	18, 25, 26	17, 24, 28	16, 23, 30
②	20, 21, 28	19, 24, 26	18, 22, 29	17, 25, 27	16, 23, 30
③	20, 23, 26	19, 22, 28	18, 21, 30	17, 25, 27	16, 24, 29
④	20, 21, 28	19, 23, 27	18, 25, 26	17, 22, 30	16, 24, 29
⑤	20, 23, 26	19, 21, 29	18, 24, 27	17, 22, 30	16, 25, 28
⑥	20, 22, 27	19, 24, 26	18, 21, 30	17, 23, 29	16, 25, 28

Table 4. three numbers with a sum of 69

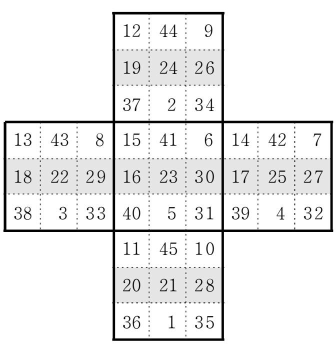

Figure 4. HG 2

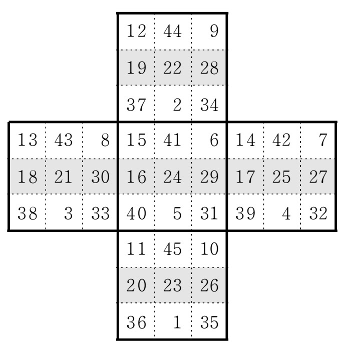

Figure 5. HG 3

Table 1에서 분할 규칙을 정사각형의 각 칸까지 엄격하게 지켜야 하는 것이 아니라고 하면, 각 정사각형의 9개의 수의 합이 모두 207이 되는 경우는 훨씬 더 많다. 정사각형의 행 또는 열을 A, B, C, D, E에서 일관되게 교환해도 각 정사각형의 9개의 수의 합은 모두 207이 된다. 예를 들어 Figure 1의 HG 1(Choi 1)에서 각 정사각형의 1열과 2열을 교환하면 Figure 9의 HG 1(Choi 2)가 된다.

			12	44	9			
			19	23	27			
			37	2	34			
13	43	8	15	41	6	14	42	7
18	25	26	16	24	29	17	22	30
38	3	33	40	5	31	39	4	32
			11	45	10			
			20	21	28			
			36	1	35			

Figure 6. HG 4

			12	44	9			
			19	21	29			
			37	2	34			
13	43	8	15	41	6	14	42	7
18	24	27	16	25	28	17	22	30
38	3	33	40	5	31	39	4	32
			11	45	10			
			20	23	26			
			36	1	35			

Figure 7. HG 5

			12	44	9			
			19	24	26			
			37	2	34			
13	43	8	15	41	6	14	42	7
18	21	30	16	25	28	17	23	29
38	3	33	40	5	31	39	4	32
			11	45	10			
			20	22	27			
			36	1	35			

Figure 8. HG 6

			44	12	9			
			21	19	29			
			2	37	34			
43	13	8	41	15	6	42	14	7
25	18	26	23	16	30	24	17	28
3	38	33	5	40	31	4	39	32
			45	11	10			
			22	20	27			
			1	36	35			

Figure 9. HG 1(Choi 2)

3 하도를 반영한 하도구오도

Figure 10∼Figure 12는 최석정이 제시한 하도사오도(河圖四五圖), 하도칠오도(河圖七五圖), 하도팔오도(河圖八五圖)이다. 이들은 하도를 반영하고 있지만, Figure 1의 하도구오도는 그렇지 않다.[4] 최석정이 하도를 반영하는 하도구오도를 Figure 13과 같이 만들 수도 있었을 것이다. Figure 13은 Figure 1에서 E의 (6, 40)과 A의 (10, 36), 그리고 B의 (9, 37)과 D의 (7, 39)를 각각 서로 바꾸는 것으로 쉽게 구할 수 있다. 최석정이 이렇게 하지 않은 것은 진행 규칙을 지키기 위한 것으로 보인다. Figure 13은 분할 규칙은 지키고 있지만, 진행 규칙은 지키고 있지 않다. 하도를 반영해야 하는 것을 '하도 반영 규칙' 이라고 하면, Figure 13은 분할 규칙과 하도 반영 규칙을 지키고 있다. Figure 13을 '수정된 하도구오도(modified Hadoguodo, mHG)' 라고 부르기로 한다.

Figure 4∼Figure 8에서도 E의 (6, 40)과 A의 (10, 36), 그리고 B의 (9, 37)과 D의 (7, 39)를 각각 서로 바꾸는 것으로 수정된 하도구오도를 만들 수 있다. 예를 들어 Figure 6과 Figure 7의 수정된 하도구오도는 각각 Figure 14, Figure 15이다.

4) 최석정은 천수용오도(天數用五圖)와 지수용육도(地數用六圖)를 각각 하도오오도(河圖五五圖)와 하도육오도(河圖六五圖)라 하고 있지만 [1], 이들도 실제로는 하도를 반영하고 있지 않다.

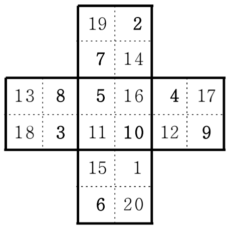

Figure 10. Hadosaodo

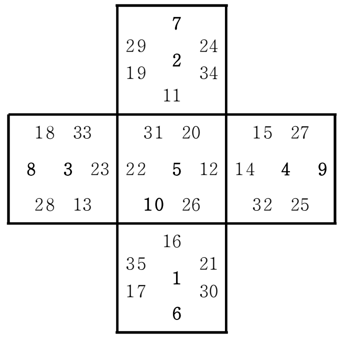

Figure 11. Hadochilodo

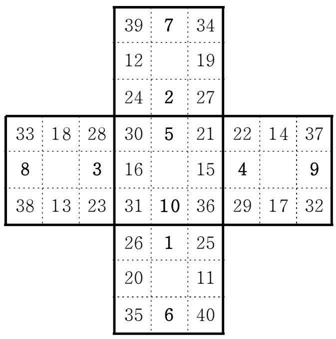

Figure 12. Hadopalodo

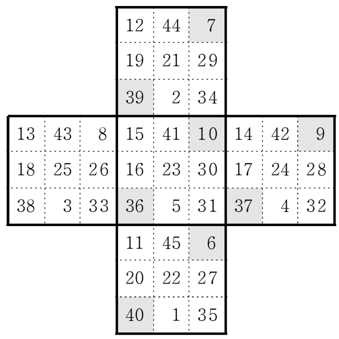

Figure 13. mHG 1

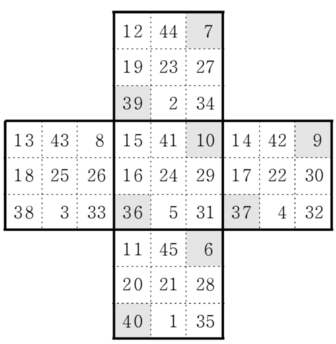

Figure 14. mHG 4

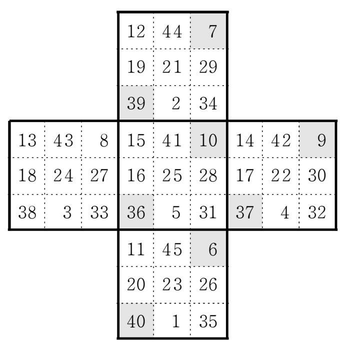

Figure 15. mHG 5

여기서도 분할 규칙을 완화해서 정사각형의 행 또는 열을 A, B, C, D, E에서 일관되게 교환하여 각 정사각형의 9개의 수의 합이 모두 207이 되도록 할 수 있다.

4 하도구오도의 개선

Figure 1의 하도구오도를 개선하여 각 정사각형의 9개의 수의 합뿐만 아니라, 가로 방향의 9개의 수의 합과 세로 방향의 9개의 수의 합도 모두 207이 되도록 만들 수 있다. 이러한 하도구오도를 '개선된 하도구오도(improved Hadoguodo, iHG)' 라고 부르기로 한다. Figure 1

에서 1~5가 있는 칸, 6~10이 있는 칸을 그대로 두고, 분할 규칙과 하도 반영 규칙을 만족하는 개선된 하도구오도를 만들 수 있다. 이때 진행 규칙은 만족하지 않는다.

각 정사각형에서 각 칸에 배치되는 수가 서로 다른 수가 되도록 수의 범위와 구체적인 수를 각각 Table 5, Table 6과 같이 지정할 수 있다. 이때 $1 \le x \le 5$, $21 \le y \le 25$이다. 이렇게 지정하면 1과 6은 A, 2와 7은 B, 3과 8은 C, 4와 9는 D, 5와 10은 E에 배치된다.

16~20	41~45	6~10
11~15	21~25	31~35
36~40	1~5	26~30

Table 5. range

$y-5$	$69-(x+y)$	$x+5$
$x+10$	y	$59-(x+y)$
$64-(x+y)$	x	$y+5$

Table 6. number

Table 6에서 $31 \le 59-(x+y) \le 35$를 만족해야 한다. 따라서 $x=1$일 때 $y \ge 23$, $x=2$일 때 $y \ge 22$, $x=3$일 때 $y \ge 21$, $x=4$일 때 $y \le 24$, $x=5$일 때, $y \le 23$이다. 그러면 각 정사각형의 9개의 수는 서로 다르고 그 합은 207이 되며, 가로의 3개의 수와 세로의 3개의 수의 합은 모두 69가 된다. 이제 x와 y의 값을 찾으면 개선된 하도구오도를 만들 수 있다. 각 정사각형의 9개의 수는 $y=23$일 때는 마방진을 이루고 $y \neq 23$일 때는 마방진을 이루지 않는다.

첫째, 23이 A에 있을 때 23을 제외한 21, 22, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형을 Table 7과 같이 찾을 수 있다. B에는 24와 25가 배치될 수 있지만, 22는 배치될 수 없다. 2, 22, 45의 합이 69가 되지만 45가 이미 A에 있기 때문이다. 같은 방법으로 C에는 22, 24, 25가, D에는 21, 22, 24가, E에는 21과 22가 배치될 수 있다. Table 7에서 21, 22, 23, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형의 조합은 다음의 2가지이다. Figure 16이 ①, Figure 17이 ②에 해당한다.

① A(1, 23, 45), B(2, 24, 43), C(3, 25, 41), D(4, 21, 44), E(5, 22, 42)

② A(1, 23, 45), B(2, 25, 42), C(3, 22, 44), D(4, 24, 41), E(5, 21, 43)

	A	B	C	D	E
21	×	×	×	(4, 21, 44)	(5, 21, 43)
22	×	×	(3, 22, 44)	(4, 22, 43)	(5, 22, 42)
23	(1, 23, 45)	×	×	×	×
24	×	(2, 24, 43)	(3, 24, 42)	(4, 24, 41)	×
25	×	(2, 25, 42)	(3, 25, 41)	×	×

Table 7. 23 is in square A

둘째, 23이 B에 있을 때 23을 제외한 21, 22, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형을 Table 8

			19	43	7			
			12	24	33			
			38	2	29			
20	41	8	17	42	10	16	44	9
13	25	31	15	22	32	14	21	34
36	3	30	37	5	27	39	4	26
			18	45	6			
			11	23	35			
			40	1	28			

Figure 16. iHG(A-①)

			20	42	7			
			12	25	32			
			37	2	30			
17	44	8	16	43	10	19	41	9
13	22	34	15	21	33	14	24	31
39	3	27	38	5	26	36	4	29
			18	45	6			
			11	23	35			
			40	1	28			

Figure 17. iHG(A-②)

과 같이 찾을 수 있다. A에는 25가, C에는 21, 24, 25가, D에는 22와 24가, E에는 21과 22가 배치될 수 있다. Table 8에서 21, 22, 23, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형의 조합은 다음의 1가지이다. Figure 18이 ①에 해당한다.

① A(1, 25, 43), B(2, 23, 44), C(3, 21, 45), D(4, 24, 41), E(5, 22, 42)

	A	B	C	D	E
21	×	×	(3, 21, 45)	×	(5, 21, 43)
22	×	×	×	(4, 22, 43)	(5, 22, 42)
23	×	(2, 23, 44)	×	×	×
24	×	×	(3, 24, 42)	(4, 24, 41)	×
25	(1, 25, 43)	×	(3, 25, 41)	×	×

Table 8. 23 is in square B

			18	44	7			
			12	23	34			
			39	2	28			
16	45	8	17	42	10	19	41	9
13	21	35	15	22	32	14	24	31
40	3	26	37	5	27	36	4	29
			20	43	6			
			11	25	33			
			38	1	30			

Figure 18. iHG(B-①)

셋째, 23이 C에 있을 때 23을 제외한 21, 22, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형을 Table 9와 같이 찾을 수 있다. A에 24가, B에는 22와 25가, D에는 21과 24가, E에는 22가 배치될 수 있다. 그러나 Table 9에서 21, 22, 23, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형의 조합은 찾을 수 없다.

넷째, 23이 D에 있을 때 23을 제외한 21, 22, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형을 Table 10

	A	B	C	D	E
21	×	×	×	(4, 21, 44)	×
22	×	(2, 22, 45)	×	×	(5, 22, 42)
23	×	×	(3, 23, 43)	×	×
24	(1, 24, 44)	×	×	(4, 24, 41)	×
25	×	(2, 25, 42)	×	×	×

Table 9. 23 is in square C

과 같이 찾을 수 있다. A에는 24와 25가, B에는 22와 24가, C에는 21, 22, 25가, E에는 21이 배치될 수 있다. Table 10에서 21, 22, 23, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형의 조합은 다음의 1가지이다. Figure 19가 ①에 해당한다.

① A(1, 24, 44), B(2, 22, 45), C(3, 25, 41), D(4, 23, 42), E(5, 21, 43)

	A	B	C	D	E
21	×	×	(3, 21, 45)	×	(5, 21, 43)
22	×	(2, 22, 45)	(3, 22, 44)	×	×
23	×	×	×	(4, 23, 42)	×
24	(1, 24, 44)	(2, 24, 43)	×	×	×
25	(1, 25, 43)	×	(3, 25, 41)	×	×

Table 10. 23 is in square D

			17	45	7			
			12	22	35			
			40	2	27			
20	41	8	16	43	10	18	42	9
13	25	31	15	21	33	14	23	32
36	3	30	38	5	26	37	4	28
			19	44	6			
			11	24	34			
			39	1	29			

Figure 19. iHG(D-①)

다섯째, 23이 E에 있을 때 23을 제외한 21, 22, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형을 Table 11과 같이 찾을 수 있다. A에는 24와 25가, B에는 22, 24, 25가, C에는 21, 22, 24가, D에는 21과 22가 배치될 수 있다. Table 11에서 21, 22, 23, 24, 25가 배치될 수 있는 정사각형의 조합은 다음의 2가지이다. Figure 20이 ①, Figure 21이 ②에 해당한다.

① A(1, 24, 44), B(2, 25, 42), C(3, 21, 45), D(4, 22, 43), E(5, 23, 41)

② A(1, 25, 43), B(2, 22, 45), C(3, 24, 42), D(4, 21, 44), E(5, 23, 41)

	A	B	C	D	E
21	×	×	(3, 21, 45)	(4, 21, 44)	×
22	×	(2, 22, 45)	(3, 22, 44)	(4, 22, 43)	×
23	×	×	×	×	(5, 23, 41)
24	(1, 24, 44)	(2, 24, 43)	(3, 24, 42)	×	×
25	(1, 25, 43)	(2, 25, 42)	×	×	×

Table 11. 23 is in square E

			20	42	7			
			12	25	32			
			37	2	30			
16	45	8	18	41	10	17	43	9
13	21	35	15	23	31	14	22	33
40	3	26	36	5	28	38	4	27
			19	44	6			
			11	24	34			
			39	1	29			

Figure 20. iHG(E-①)

			17	45	7			
			12	22	35			
			40	2	27			
19	42	8	18	41	10	16	44	9
13	24	32	15	23	31	14	21	34
37	3	29	36	5	28	39	4	26
			20	43	6			
			11	25	33			
			38	1	30			

Figure 21. iHG(E-②)

여기서도 분할 규칙을 완화해서 정사각형의 행 또는 열을 A, B, C, D, E에서 일관되게 교환하여 각 정사각형의 9개의 수의 합이 모두 207이 되도록 할 수 있다. 그뿐만 아니라 각 정사각형의 대각선을 대칭축으로 하여 대응하는 3개의 수를 일관되게 교환해도 각 정사각형의 9개의 수의 합이 모두 207이 되도록 할 수 있다. 예를 들어 Figure 16의 iHG(A-①)의 각 정사각형의 대각선을 대칭축으로 하여 대응하는 3개의 수를 일관되게 교환하면 Figure 22의 iHG(A-①-1)이 된다. 여기서 다시 2행과 3행을 교환하고, 1열과 2열을 교환하면 Figure 23의 iHG(A-①-2)가 된다. 이렇게 해서 23이 정사각형 A의 한 가운데에 위치하지 않도록 만들 수도 있다. 이러한 조작은 Figure 17~Figure 21에 대해서도 동일하게 할 수 있다.

			29	33	7			
			2	24	43			
			38	12	19			
30	31	8	27	32	10	26	34	9
3	25	41	5	22	42	4	21	44
36	13	20	37	15	17	39	14	16
			28	35	6			
			1	23	45			
			40	11	18			

Figure 22. iHG(A-①-1)

			33	29	7			
			12	38	19			
			24	2	43			
31	30	8	32	27	10	34	26	9
13	36	20	15	37	17	14	39	16
25	3	41	22	5	42	21	4	44
			35	28	6			
			11	40	18			
			23	1	45			

Figure 23. iHG(A-①-2)

5 결론

본 연구에서는 먼저 최석정이 ≪구수략≫에서 하도구오도를 만든 방법을 추정하였다. 40여 년 전에 그 한 가지 방법이 추정된 적이 있지만 [3], 여기서는 그것과는 다른 방법을 추정하였다. 다음으로 하도구오도가 실제로는 하도를 반영하고 있지 않다는 점에서 $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,8)$, $(4,9)$, $(5,10)$ 이 각각의 정사각형에 한 쌍씩 있는 하도구오도를 만들 수 있다는 것을 보였다. 마지막으로 각 정사각형의 9개의 수의 합이 207이 되는 것뿐만 아니라, 가로 방향의 9개의 수의 합과 세로 방향의 9개의 수의 합도 207이 되는 하도구오도를 만들 수 있다는 것을 보였다.

References

1. Choi Seok-Jeong, *GuSuRyak* (translated by Jeong Hae-Nam, Huh Min), Kyo-Woo-Sa, 2006. 최석정, 구수략 —조선시대 산학총서, 정해남, 허민 옮김, 교우사, 2006.
2. Jeon Yong Hun, Choi Seok-Jeong's magic squares solved after 300 years, *Science Dong-A* December (1999), 106–113. 전용훈, 300년 만에 풀린 최석정의 마법진, 과학동아 1999 12월호, 106–113.
3. Kim Yong Woon, Choi Seok Jeong's magic squares, *Journal of the Hanyang University* 8 (1974), 437–451. 김용운, 최석정의 마법진, 한양대학교 논문집 8 (1974), 437–451.
4. Kwon Gyunuk et al, A study on solutions of Jisuguimundo using the range of magic sums, *Journal for History of Mathematics* 27(2) (2014), 111–125. 권균욱 외, 합의 범위를 이용한 지수귀문도 해의 탐구, 한국수학사학회지 27(2) (2014), 111–125.
5. Song Hong-Yeop, Choi Seok-Jeong made orthogonal Latin squares at least 61 years earlier than Euler, *Newsletter of Korean Mathematical Society* September (2013), 5–12. 송홍엽, 최석정 선생, 오일러를 최소 61년 앞서 직교라틴방진을 만들다, 대한수학회 소식지 2013년 9월호, 5–12.