

MaPhiA: Mathematics, Philosophy, and Artificial Intelligence

수학, 철학, 그리고 인공지능

REE Sangwook 이상욱 KOH Youngmee* 고영미

Mathematics and philosophy are considered as ways to get knowledges and cognitions of truths. They are human thoughts and epistemes. Thinking is in fact carried out in a systematic way, which consists of sort of syntax and semantics of thinking, called logic. We observe the logic from mathematical and philosophical perspectives with layman's language. We conclude that mathematics, philosophy and logic are the abilities necessary for the human beings of the 21st century, the age of artificial intelligence.

Keywords: Mathematics, Philosophy, Artificial Intelligence, Cognition, Thinking, Logic; 수학, 철학, 인공지능, 인지, 생각, 논리.

MSC: 00A30, 03-03, 03A05, 03B10, 97R40

1 서론

「마피아(mafia)」는 불법적 합의 및 거래의 조직과 감독을 주요 사업으로 하는 신디케이트형 조직범죄 내지는 범죄조직을 이르는 말이다 [40]. 그러나 본 글의 제목으로 사용된 「마피아(MaPhiA)」는 수학(MAThematics)과 철학(PHilosophy), 그리고 인공지능(Artificial intelligence)을 아우르는 축약어로, 마피아를 흉내내어 「만들어본」 말이다. 우선 발음이 닮았고, 또 본 글이 통념적 개념과 다른 주장을 다룰 수도 있는데 그 점이 마피아의 「불법적」 행태에 비유될 수 있기 때문이다.¹⁾ 또한 Rota 와 Sharp 의 대화 [25]의 제목과 Loveland, Hodel, Sterrett 의 책 《Three Views of Logic》 [15]의 부제목²⁾을 본뜬 것이기도

*Corresponding Author.

REE Sangwook: Dept. of Data Sci., Univ. of Suwon E-mail: swree@suwon.ac.kr

KOH Youngmee: Dept. of Data Sci., Univ. of Suwon E-mail: y mkoh@suwon.ac.kr

Received on Oct. 10, 2019, revised on Oct. 20, 2019, accepted on Oct. 24, 2019.

- 1) A. Einstein 이 그의 말 “Imagination is more important than knowledge. Knowledge is limited. Imagination encircles the world. The true sign of intelligence is not knowledge, but imagination.”에서 지식보다는 상상을 강조하였듯이, 상상에 기초한 논의를 하겠다는 의미로 마피아를 흉내내어 제목을 정하였다.
- 2) [25]의 제목은 Mathematics, Philosophy, and Artificial Intelligence 이고, [15]의 부제는 Mathematics, Philosophy, and Computer Science 이다.

하다.

수학과 철학 그리고 인공지능은 인식, 인지 또는 알아차림이나 깨달음의 문제를 기저에 깔고 있는 분야이다. 우리는 인지활동이 일어나는 과정이나 현상을 「지능(intelligence)」이라고 말한다. 지능이라 함은 지식을 포함한 「인지능력」을 의미한다. 쉽게 말하자면, 「안다」라는 말로 표현되는 우리 내부의 현상, 즉 「생각」을 일컫는다. 그런데 생각은 그 기저에 일종의 규칙 내지는 체계를 담고 있다. 우리는 그것을 「사고체계」 또는 「논리」라는 말로 설명한다.

우리는 본 글에서 「생각」 또는 「논리」라는 말의 의미를 수학의 관점, 철학의 관점에서 살펴 보고, 이를 기계(컴퓨터)에 적용한 지능, 즉, 문제 상황을 기계(컴퓨터)가 인지하고 판단하는 능력을 말하는 인공지능의 논리를 알아보고자 한다.

「결과가 옳으면 옳다.」라는 말이 있다. 과연 그러한가? 옳으려면 결과를 도출하는 과정을 확인할 수 있어야 하는 것이 아닐까? 21세기는 인공지능의 시대로 변모하고 있다. 현재의 인공지능은 딥러닝(deep learning) [33]을 활용한다. 그런데 딥러닝의 효과는, 결과의 도출 과정은 이해할 수 없지만 결과적으로 좋은 결과를 낸다는 사실이다. 그렇다면 딥러닝 기반의 인공지능의 산출물을 옳은 것으로 판단해야 하나, 말아야 하나? 이를 어떻게 이해해야 할까?

우리는 무엇인가를 이해하려 할 때, 「총체적 이해」라는 말과 「단편적 이해」라는 말을 사용한다. 이 말은 「부분과 전체」라는 말에 대비되기도 하고 「총론과 각론」이라는 말에 대비되기도 한다. 예를 들어, 「수학이란 무엇인가?」라는 질문에, 수학 내용을 하나하나 예를 들어가며 설명하면 그러한 답은 수학의 부분부분에 대한 구체적 답으로 「각론」에 해당하고 「단편적 이해」를 유도하게 되는 반면, 수학 전체를 들어 방법이나 의미와 가치 등을 답하면 전체를 보고자 함이며 「총론」에 해당하고 그것으로부터 「총체적 이해」를 유도할 수 있다.³⁾

수학이 무엇인지를 총체적 관점에서 말하는 것을 「메타수학(metamathematics)」이라고 하고, 마찬가지로 인지과정에 대한 총체적 이해를 「메타인지(metacognition)」 [38]라고 한다.⁴⁾ 21세기는 가히 인공지능의 시대이다. 인공지능이 보편화되면서 인류의 지적 활동, 즉, 지능의 문제가 위태로울 수 있다는 지적 하에 사람들은 인공지능이 넘볼 수 없는 인간의 영역에 대해 관심을 갖게 되었고, 그러한 영역으로 창의력이나 메타인지가 손꼽힌다.⁵⁾ 그래서 우리는 21세기의 사회 환경에 적응하기 위해서라도 지능의 근간이 되는 인식 및 생각 또는 논리에 관한 논의가 필요하다.

「논리」 또는 「생각」을 논하려는 본 글은 Hersh의 저서 《18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics》 [11]를 근간으로 한다. 1990년대 (미국) 수학계에는, Jaffe와

3) 총체적 이해도 단편적 이해로 보충되지 않으면 그 또한 단편적 이해가 될 수 있고, 각 부분에 대한 이해가 잘 모여 전체를 형성하게 되면 그것으로부터 총체적 이해를 끌어낼 수도 있다.

4) 「메타(meta-)」는 「...에 대하여」라는 의미를 갖는 접두사이다.

5) 김은영, “인간만의 ‘메타인지’를 살려라” 2019.06.27 © ScienceTimes. [https://www.sciencetimes.co.kr/인간만의 '메타인지'를 살려라](https://www.sciencetimes.co.kr/인간만의%20메타인지%20를%20살려라)

Quinn의 논문 [12]으로 야기된 수학의 속성에 관한 활발한 논의가 있었다. Hersh는 그러한 논의 중 일부와 수학의 속성을 다룬 의미있는 글을 모아 한 권의 책 [11]으로 묶어 출판하였다. 이 책은 수학 활동을 철학적 관점에서 논하며, 사람의 인지능력, 즉, 생각과 논리에 관한 논의도 담고 있다. 또한 「4색 정리」 [35]에 관한 Appel과 Haken의 증명처럼 「컴퓨터에 의한 증명」과 같은 문제의 의미를 다루기도 한다. 본 글은 저자들이 Hersh의 책 [11]을 읽으며 떠오르는 단상을 정리해본 것이다. 특히 심도있는 학문적 논의보다는 일반인도 이해할 수 있는 쉬운 말로 수학과 철학 그리고 인공지능에 사용되는 「논리」에 관하여 간단히 논한다. 논의에 필요한 약간의 전문 용어는 주로 인터넷 백과사전 「위키백과」⁶⁾를 참조한다.

2 수학과 철학

「수학이 무엇일까?」이 질문은 누구나 쉽게 할 수 있지만, 사실 답하기는 매우 어려운 질문이다.⁷⁾ Courant과 Robbins가 1941년⁸⁾ 「What is Mathematics?」라는 제목으로 책 [5]을 썼지만, 수학이 무엇이라는 즉답을 주지는 않았다. 오히려 수학에서 다루는 내용을 구체적으로 보여줌으로써 독자가 스스로 수학에 대한 생각과 방법을 알아내기를 원했다.

반면, Hersh [10]는 Courant과 Robbins가 수학의 개별 이론에 대한 「단편적 이해」를 통해 수학 전체에 대한 이해를 유도하려 했음을 지적하며, 자신은 수학의 구체적 내용보다는 철학적 관점에서 수학 자체에 대한 존재의 의미와 역할과 가치를 설명함으로써 진정으로 수학이 의미하는 바를 설명하고자 했다. 그는 수학에 대한 「총체적 이해」를 위해 수학철학, 즉, 메타수학을 선택하였다. Gowers [8]도 수학의 핵심 문제를 「수학적 대상의 존재성 (existence of mathematical objects)」과 「수학의 진실성 (mathematical truth)」에 두었다. 그런데 이는 철학에서 말하는 존재론과 인식론의 문제이다. 실제로 Rota가 그리스시대부터 내려오는 철학의 핵심 문제로 「몸과 마음의 문제 (the mind-body problem)」와 「실존의 문제 (the problem of reality)」 둘을 꼽았는데 [24, p. 223], 이들이 곧 인식론과 존재론의 문제에 해당한다.

2.1 수학

수학이란 무엇인가? 이는 너무도 근본적인 질문이다. 하지만 답하기는 쉽지 않다. 수학은 긴 역사를 지녔고, 또 그 내용을 들여다보면 너무도 많은 특성과 내용을 담고 있기 때문이다 [26, 19]. Koh와 Ree [13]는, Keith Devlin의 설명을 예시하며, 시대의 변천에 따라 「수와 형태의 과학」에서 「정적인 셈과 측정의 기술」, 그리고 「연속적 운동과 변화에 대한 탐구」 등으로 수학에 대한 인식이 변해왔고, 1980년대 이후로 수학이 「패턴의 과학」으로 인식되어 왔음을

6) Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

7) 수학이 무엇인지에 대한 답은 다양하며 그러한 답들은 서로 상충되기도 한다 [19, p. 236].

8) 이 책은 옥스포드대학 출판부가 1941년에 초판을, 그리고 1996년에 수정판(2nd edition)을 출판하였다.

지적인 바 있다. 사회가 변하고 사회가 수학에 요구하는 내용이 달라지면 수학은 또다시 다른 무엇인가로 변화할 것이다.

그렇기에 수학은 어느 하나로 답할 수 없고 그래서 「수학이 뭘까?」라는 질문은 앞으로도 계속될 것이다. 그것은 아마도, 수학이 기초학문으로서 과학을 하기 위한 언어이기도 하고 거의 모든 학문 분야에 수학의 방법론 내지는 지식이 활용 또는 응용되기 때문일 것이다. 그러므로 수학에 대한 이해는 반복하여 제기되는 질문만큼이나 다양할 수밖에 없다. 실제로 Palacio 는 수학이 무엇인가라는 질문에 수학을 보는 관점에 따라 서로 다른, 심지어는 그 의미가 서로 배치되는 다양한 답을 제시하였다 [19].

수학에 대한 고전적 이해를 위해서는 대표적으로 Rényi 의 논문 [23]을 참조할 수 있다.⁹⁾ Rényi 는 Socrates 와 Hippocrates 의 대화 형식을 빌어 수학을 공부해야 하는 이유와 수학이 사용하는 논리, 그리고 그것의 의미와 가치 및 활용 등을 설명한다. 예를 들면, Hippocrates 는 Socrates 의 수학이 무엇이나는 질문에 「수학은 과학이며 그 중에서도 가장 정교한 과학」이라고 답한다. 그러면서 자연스럽게 수학의 대상에 대한 존재성과 형식(form)을 논하며, 수학이 사람의 생각 속에 존재하는 형식을 다루는 과학이라는 결론을 도출한다 [23].

그들은 또 수학의 대상에 대한 「발견과 발명(discovery or invention)」의 문제를 언급하며 인류의 인식에 투영된 세계가 곧 수학의 세계이고,¹⁰⁾ 수학은 인류의 사고 및 인식 내부 세계에 대한 탐구를 목적으로 삼으며,¹¹⁾ 수학은 「논리」를 사용하고 그러한 논리를 다방면으로 사용할 수 있기에 수학이 유용함을 논한다 [23, p. 16]

Rav [21]는 Socrates 와 Hippocrates 의 대화 내용을 네 개의 항목으로 간단히 요약했는데, 수학적 대상의 존재론(ontology), 수학의 진실성에 대한 인식론(epistemology), 수학 지식의 현실성(reality), 그리고 사회적 심리 효과(psychosociology) 등으로 요약하였다.

수학적 대상의 존재에 대한 인식, 즉, 존재론은, 수학에서 다루어지는 대상이 발견되는 것인지 새로이 만들어지는 것인지를 논하는 발견과 발명의 문제를 제기한다. 또한 수학의 진실성(mathematical truth)을 어떻게 알 수 있을까라는 인식론은 자연스럽게 철학과 연계된다. 그렇게 메타수학, 즉, 수학철학은 자연스럽게 생겨난다.

Hersh 도 자신의 저술 [10, 11]을 통해 수학이 무엇인지에 대한 나름의 답을 주고 있는데, 기본적으로 수학을 「인류가 성취한 하나의 문화」로 이해하였다 [10]. 그러면서 그는 수학의 다섯 가지의 특성을 지적하였다 [11]. 첫째, 수학은 인류 문화이며, 둘째, 그 내용은 수정 가능하고, 셋째, 증명이나 엄밀성도 수정될 수 있다고 했다. 또한, 넷째로 수학은 실험적 증거나

9) 이 논문은 <Alfréd RÉNYI, *Dialogues on Mathematics*, Holden-Day Inc., 1965>에 들어 있는 3개 논문 중의 첫번째 논문이다.

10) ... the world of mathematics is a reflected image of the real world in the mirror of our thinking? [23, p. 13]

11) The main aim of the mathematician is to explore the secrets and riddles of the sea of human thought. [23, p. 11]

수치 분석으로도 결과를 추론해낼 수 있으며, 마지막으로 다양한 대상을 다루는 학문이라고 설명하였다. 이러한 태도는, 수학을 영원한 진리로 여기던 고전적 이해에 어느 정도 반하는 주장이다.

수학에 대한 고전적 이해에 반하는 대표적 주장으로는 실험적 논증을 강조한 Jaffe와 Quinn [12]의 주장을 들 수 있다. 그들은 수학도 물리학처럼 이론과 실험으로 나누어 실험을 통하여 결과를 도출하고 그에 대한 논증으로 이론을 정립할 수 있다는 주장을 했다. 이는 4색 정리의 사례와 연관시켜 컴퓨터에 의한 수학 연구의 가능성을 말하는 것이었다. 1990년대에 그들의 주장에 대한 논의 및 반론이 있었는데 [8, 29, 26, 11], 그중에 Thurston [29]이 큰 호응을 받았다.

Thurston [29]은 수학을 보다 상식적 관점에서 설명하였다. 수학은 수학자가 하는 일이고, 그것은 우리가 살아가는 세상에 대한 이해 과정 및 결과라고 했다. 그래서 수학은, 우리가 이해하려는 대상에 대한 이해 방법과 과정을 알아감으로써 더욱 만족스럽고 생산적이며 행복한 삶을 추구하는 활동이라고 했다. 그는 또 수학을 언어로 설명하기도 한다. 특히 심볼의 언어, 계산과 논리의 언어로 설명한다. 그러면서 언어란 그것을 사용하는 사람이 없다면 존재할 수 없으며, 수학을 하는 사람에 의해 수학이 정의됨을 강조하였다 [29, p. 43–44].

Thurston은 사람들이 수학을 하면서 지식보다는 이해를 원한다고 했다.¹²⁾ 자신의 가설 「geometrization conjecture」¹³⁾의 연구에 관련한 예를 들면서 수학자들이 증명 자체보다는 자신의 생각을 이해하고 싶어한다고 했다. 그러면서 그는 수학 내지는 수학자들이 이루고자 하는 일은 인류의 문제해결을 위한 문제 상황을 인지할 수 있는 능력의 향상이라는 결론을 끌어낸다.¹⁴⁾ 이러한 결론은, 수학의 연구 활동이 교육은 아니지만, 교육을 더 나은 삶을 위한 수단으로 주장했던 Whitehead의 「교육의 목적」 [22]과도 부합하는 유사성을 갖는다.

수학에 대한 가장 보편적인 철학 사조로 플라토니즘과 형식주의가 있다. 그러나 이러한 사조는 점차 다양하게 변화한다. Hersh [11]가 지적하였듯이, Lakatos에 의한 수학 지식의 발전을 유도하는 인식론의 전환과 함께 수학을 함에 있어 새롭고 다양한 방법 [3]들이 채용된다. 다양한 경험과 감각이 동원되고 심지어는 실험에 의한 추론도 받아들여지게 되었는데, 특히 Atiyah,¹⁵⁾ Halmos,¹⁶⁾ Gowers [8] 등은 경험과 직관 등을 강조한다. 결국, 수학은 수학 지식을 포함하여 그러한 지식을 개발하고 확장시키기 위한 사고와 방법론, 즉, 우리의 생각을 의미한다. 그러한 생각의 발전과 확장이 궁극적으로 인류의 문명과 문화로 승화되는 것이다.

12) More than the knowledge, people wants *personal understanding*. [29, p. 51]

13) 3차원 다양체(manifold)가 공통적으로 가지는 구조가 있음을 말한 Thurston이 제시한 가설을 말한다.

14) What we are producing is human understanding. [29, p. 50]

15) M. F. Atiyah, *Mind, Matter, and Mathematics*, in Michael Atiyah's *Collected Works Volume 7: 2002–2013*, Oxford University Press, 2014, 269–281.

16) Paul R. Halmos, *Mathematics as a Creative Art*, *American Scientist* 56 (1968), 375–389. <http://math.slu.edu/~srivastava/Halmos.pdf>

2.2 철학

철학은 진리의 탐구를 의미한다. 조금 더 구체적으로 말하자면, 철학이란 지혜(sophia, 즉, wisdom)를 향한 사랑(phil, 즉, love)이라는 말로서, 존재와 지식, 가치, 마음과 언어 등에 관한 인식을 의미한다 [39]. 이를 쉽게 말하자면, 철학이란 우리가 「안다」라는 개념을 「무엇을, 어떻게 안다」라는 식으로 보다 구체적으로 이해하려는 노력으로 볼 수 있다.

철학은 다루는 내용에 따라 존재론(ontology)과 인식론(epistemology)으로 나뉜다. 때때로 방법론(methodology)이 추가되기도 하지만, 이는 인식론에 포함된다고 볼 수 있다. 존재론은 세상 만물, 심지어 개념 등을 포함한 모든 것의 존재성에 대한 인식을 말하고, 인식론이란 우리의 인식 과정에 대한 인식을 말한다. 결국 우리가 아는 그 무엇, 즉, 대상의 존재를 설명하려는 시도가 존재론이며, 우리가 아는 것의 근원, 즉, 무엇인가에 대해 어떻게 알게 되었는지의 원리나 과정 등을 설명하려는 노력이 인식론인 것이다. 철학은 결국 「안다」의 의미에 대한 구체적 인식을 의미한다.

철학은 우리가 살고 있는 세상의 실제와 삶의 의미에 대한 탐구이기도 하다 [19, p. 244]. 그래서 철학은 우리의 삶에 대한 보편적 견해를 가질 수 있도록 돕는다. 또한 어떤 한 이론을 존재론과 인식론의 관점에서 살펴보게 되면 보다 구체적으로 그 이론이 다루는 보편적 진실을 발견할 수 있다 [19, p. 244].

수학은 이미 오래 전부터 인류의 인식의 대상이었다. 그러하기에 수학은 자연스럽게 철학의 대상이 된다.¹⁷⁾ 수학이 인식의 대상이 되었을 때 존재론과 인식론의 문제도 잘 드러나 보이는데, 수학의 대상에 대한 존재성의 탐구와 수학적 진리에 대한 인식이 바로 그것이다 [11, 23, 29, 8, 24]. 수학의 대상에 대한 존재론으로는 플라토니즘(Platonism)을 들 수 있다. 이는 오래 전에 형성된 개념으로, 인식의 대상 그 자체는 우리가 인식하든 말든 상관없이 이미 존재한다는 인식을 말한다.

수학의 진실성에 관한 논의는 그리스 시대부터 끊임없이 있어왔지만 특기할 만한 결실을 보진 못했다. 그러다가 1884년 Frege가 수학에 대한 철학적 인식을 요구하는 질문을 제기 하면서 비로소 본격적인 수학철학(인식론)이 싹트게 된다 [2, p. 3-4]. 이러한 수학에 대한 인식론 논의는 Frege로부터 시작된 논리주의(logicism)와 Brouwer로 대표되는 직관주의(intuitionism), 그리고 Hilbert에 의한 형식주의(formalism)¹⁸⁾ 등을 낳게 되었고,¹⁹⁾ (서

17) HIPPOCRATES "... told me that certainty exists only in mathematics and suggested that I learn mathematics ..." [23, p. 2]

18) ... "mathematics is a game played according to certain simple rules with meaningless marks on paper" ... [21, p. 84]. ... mathematics is nothing but a few rules for replacing one system of meaningless symbols with another [8, p. 183].

19) 저자는 수학에 대한 철학적 인식을 시도하였던 Frege를 동양수학보다 서양수학이 발전할 수 있었던 근본적 중요 요인 중 하나로 꼽는다.

양의) 현대 수학의 발전의 토대가 되었다.²⁰⁾ 참고로, Gowers는 이러한 인식론에 자연주의(naturalism)를 추가하기도 했다 [8, p. 183–184].

수학에 대한 인식론은 「수학기초론(foundation of mathematics)」으로 불리는데, 수학이 발전하면서 수학을 하는 방법론에 대한 논의로 이어졌고, Hersh가 지적하듯이 [11, p. vii], 수학에 대한 인식을 바꾼 Lakatos [14]를 거쳐 다양한 방법론이 제기되었다. 예를 들면, Byers [3]가 말하듯, 모호함이나 모순 및 역설을 극복하면서 새로운 수학이 만들어진다는 인식도 생겼다.

수학이 발전을 거듭하며 그에 대한 철학 또한 복잡해졌다. 그렇지만 진리 추구의 관점에서 수학이 성공적이었던 반면, 철학은 그다지 성공적이지 않았다는 평가도 있다 [24]. 그래서인지 Hersh [11]는 딱히 결론을 낼 수 없는 기초론 논의에 매이기보다 수학 자체를 인류가 이룩한 하나의 문화 및 문명으로 이해해야 할 것이라고 주장했다.²¹⁾ 이와 같이 철학은 인류의 삶에 의미와 가치가 있다는 인식을 제공함에 있어 핵심적 역할을 담당한다는 중요한 의미를 갖는다.

3 인공지능

도구를 사용하는 능력은 인간의 특성 중의 하나이다. 도구라 함은 인간의 능력을 대신할 무엇인가를 말한다. 쟁기와 같은 농기구나 그릇같은 생활용품, 자동차와 같은 기계뿐만 아니라 불이나 석유 심지어는 약품과 같은 가공된 모든 것을 도구라고 할 수 있으며, 글자나 기호 그리고 언어까지도 도구라고 할 수 있다.

마찬가지로 논리도 하나의 도구로 볼 수 있는데, 기계적 논리나 형식논리를 포함하여 일반 사람이 사용하는 논리까지도 도구로 구현한(또는 구현하려는) 것이 인공지능이다. 다시 말해 인공지능은 사람의 생각과 판단을 대신하기 위한 도구인 것이다.²²⁾ 예를 들어, 2001년에 개봉된 Steven Spielberg 감독의 SF 영화 「A.I.」²³⁾에서도 인공지능을 「합리적인 결론을 내기 위한 추론 능력」으로 설명하고 있다. 이러한 인공지능의 개발은 몇 번의 「겨울」을 겪었지만 결국 21세기를 인공지능의 시대로 변모시키고 있다.

20) 현대 수학에 대한 철학(인식론)은 Wang [30]이나 Hersh [10], Rotman [26], Stanway [28], 또는 Aspray와 Kitcher [2]의 서문 「An Opinionated Introduction」을 참조한다. Aspray와 Kitcher는 [2]의 서문(Preface)에서, 1974년 Garrett Birkhoff의 주도로 개최되었던 「Workshop on the Evolution of Modern Mathematics」(*Historia Mathematica* 1975년 11월호)의 성공 사례를 들며, [2]에 대해서도 같은 정도의 성공을 기대하였다. 본 저자도 [11]과 함께 [2]의 일독을 권한다.

21) Instead of continuing to look in vain for foundations, of feeling disoriented and illegitimate for lack of foundations, we have tried to look at what mathematics really is, and account for it as a part of human knowledge in general. [11, p. viii]

22) 수학에서의 증명과 컴퓨터의 관계에 대한 설명으로는 [16]을 참조한다.

23) 영화 「A.I.」는 스피버그 감독의 최고작으로 평가 받고 있음. [32]

3.1 인공지능의 역사

「생각하는 기계」의 구현은 인류의 오랜 욕망이었고, 성공과 실패를 반복한 역사를 지녔다. 인공지능의 역사는 Russell 과 Norvig 의 책 《Artificial Intelligence: A Modern Approach》 [27, p. 16–28]에서 어느 정도 읽을 수 있고, 간략한 역사는 Neapolitan 과 Jiang 의 책 [18, p. 2-기]을 참조할 수 있다. 최근에는 인공지능의 역사를 읽을 수 있는 훌륭한 국내 서적도 출간되어 있다.²⁴⁾ 하지만 가장 쉽게는 위키백과 [36]를 참조한다.

인공지능을 태동시킨 초기의 노력은 심리학과 뇌과학의 영향을 받았다. 1950년대 Marvin Minsky 와 Dean Edmonds 는 뉴런의 작동 원리를 본뜬 신경망(neural network)을 이용한 컴퓨터 SNARC 를 제작한다. 그 뒤를 이은 인공지능의 개발은 인류가 사용하는 논리에 기반을 두었다. 1950년에 Alan Turing 에 의한 튜링 테스트²⁵⁾가 나오고, 1955년에는 Russell 과 Whitehead 의 저서《Principia Mathematica》에 나오는 처음 52개의 정리 중 38개를 증명할 수 있었던, Allen Newell 과 Herbert Simon 에 의한 컴퓨터 프로그램 「Logic Theorist」가 개발되었다. 그리고 1956년 Dartmouth 대학에서 개최된 워크숍을 주재했던 John McCarthy 가 처음으로 「인공지능」이란 용어를 사용하기 시작하였다.

인공지능은 1970년대에 지식 기반의 전문가 시스템(expert system)의 개발로 이어진다. 전문가 시스템은 산업에 사용되며 번창하게 된다. 그러나 컴퓨팅 환경과 재정적 제한 요인으로 인하여 인공지능의 첫 「겨울」을 맞는다.²⁶⁾ 이후 1980년대 중반부터 확률론에 기반한 인공지능의 개발로 일종의 패러다임의 변화를 겪게 된다. 그러다가 1990년을 전후하여 두번째 「겨울」을 맞이한다. 1990년대 중반부터 다시 빅데이터와 기계학습에 기반한 딥러닝 기술이 개발되었고, 2016년 인공지능 알파고(AlphaGo)와 이세돌 간의 바둑 대결에서 알파고가 승리하면서 4차 산업혁명의 영향에 힘입어 명실공히 21세기 인공지능의 시대가 시작된다.

3.2 딥러닝

딥러닝(deep learning)은 인공신경망(artificial neural network)을 기반으로 데이터를 이용한 기계학습을 통하여 인식 기능을 증강시킨 인공지능을 말한다 [33]. Rota 와 Sharp 는 인공지능의 개발에서 주목해야할 핵심 개념으로 「문맥(context)」을 들었다 [25]. 이때 문맥이라 함은 내용 및 의미의 관련 정도를 의미한다. 딥러닝은 사람의 뇌의 작용을 본따 문맥상의 관계 정도를 적용할 수 있는 방법을 채택한 인공지능이라고 할 수 있다.

지금까지 확인된 바에 따르면 딥러닝을 이용한 기계학습에 의한 인공지능의 활용 예의 경

24) 예를 들어, 「김의중, (알고리즘으로 배우는) 인공지능, 머신러닝, 딥러닝 입문, 위키북스, 2016.」

25) 1950년 Turing 이 철학 학술지 Mind에 발표한 「Computing Machinery and Intelligence」에 설명된 기계가 지능을 가졌다고 판정하기 위한 테스트를 말한다.

26) 인공지능의 개발이 멎었던 시기를 「인공지능의 겨울」이라고 한다. 1970년대 후반과 1990년을 전후한 시기가 인공지능의 1차 겨울과 2차 겨울로 기록되어 있다.

우, 결과를 도출하는 과정은 이해할 수 없지만 그 결과만큼은 훌륭했다.²⁷⁾ 하지만 상식적으로 생각했을 때, 결과를 도출하는 과정에 대한 이해 없이 딥러닝을 사용할 경우 위험이 따를 수 있다. 심지어 그 위험이 얼마나 커다란 위험인지도 가늠할 수 없다. 그러나 다행히도 최근 차츰 신경망에 의한 인공지능의 작동 및 과정의 이해를 위한 연구가 성과를 얻어가고 있다.²⁸⁾ 한 예로, 최근 구글의 연구원 김빈(Kim Been)이 설명가능한 인공지능의 연구에서 성과를 내었다고 한다.²⁹⁾

딥러닝 기술이 얼마나 발전하게 될지 지금 당장 알 수는 없지만 한 동안은 산업과 학문 분야에서도 중요한 인식 대상이 될 것이다. 뿐만 아니라 그에 사용되는 원리 및 논리의 연구가 얼마간은 주목받게 될 것이다.

4 논리

논리(logic)란 무엇일까? 우리는 「논리」라는 말을 자주 사용하지만 논리의 구체적 내용에 대해서는 그다지 확실하게 알고 있지 않다. 위키백과에 [37]에 따르면, 논리란 합당한 결론을 추론해내기 위한 체계적인 논의 과정을 의미한다.³⁰⁾ 이러한 과정은 추정(inference), 추론(reasoning), 논의(argument) 등으로 구분되기도 한다 [1, p. 61].³¹⁾

하지만 논리의 근본적 동기는 사실 「더 나은 사람이 되기 위함」이다.³²⁾ 이는, 문제 상황에 직면하였을 때 올바른 방법에 따라 올바른 결과를 도출해낼 수 있는 체계적인 사고능력을 가진 사람이 더 나은 사람이라는 의미이기 때문이다. 그러한 의미에서 논리는 올바른 인지능력과 판단능력, 다시 말해, 올바른 결과를 추론해내는 사고능력을 의미한다 [8].

논리는 인류가 능력의 향상과 효율을 높이기 위해 만들어낸 생각하는 방법이자 도구이다. 그래서 논리를 말할 때면 자연스럽게 생각을 중시하는 수학과 철학을 떠올린다. 실제로 고전 논리는 수학에서 사용하던 사고법에서 동기를 얻었다고 한다 [15, p. ix]. 또한 수학에서의 논리적 사고의 성공적 사용에 비추어 철학도 같은 형식의 논리를 추구한다. 하지만 철학은 논리의 사용에 있어 그다지 성공적이지는 않았다 [24]. 심지어 논리가 더이상 철학의 영역에

27) Machine learning works spectacularly well, but mathematicians aren't quite sure why. [6] Neural networks can be as unpredictable as they are powerful. [9]

28) Now mathematicians are beginning to reveal how a neural network's form will influence its function. [9]

29) Neural networks are famously incomprehensible — a computer come up with a good answer, but not be able to explain what led to the conclusion. Been Kim is developing a “translator for humans” so that we can understand when artificial intelligence breaks down. [20]

30) Here we have defined logic to be “the systematic study of the form of arguments”. [37]

31) Walton distinguishes between ‘inference’, defined as a set of propositions, ‘reasoning’, defined as a chain of inferences, and ‘argument’, defined as a dialogue employing reasoning. [1, p. 61]

32) The motivation for the study of logic ... is so that one may learn ... perhaps also to become a better person. [37] 참고로, 2000년대 초에는 위키백과가 「Logic is informally the way to become a better person.」이라고 기술하였었다.

속하지 않는다고도 한다.³³⁾

논리를 사용함에 있어서는 나름의 형식이 필요하다. 그러한 형식, 즉, 논리의 적용 과정에 사용되는 의미의 변환 방법으로는 연역법(deduction)과 귀납법(induction)이 있다.³⁴⁾ 수학은 연역법을 사용한다. 그러나 수학이 연역법만으로 진행되는 것은 아니다. 그렇다고 수학이 귀납적이라는 말은 결코 아니다 [29]. 수학을 함에 있어 때로는 논리적이지 않지만 직관적이고 사례로부터 읽을 수 있는 감각적 추론도 동원된다. 그러나 어떠한 결과를 수학적 사실로 받아들이기 위해서는 결국 연역법에 의한 논리적 검증이 요구된다.

우리는 수학에서 사용하는 논리를 형식논리(formal logic)라고 부른다. 하지만 대부분의 경우 형식논리가 무엇인지를 설명하지는 않는다. 「계산」은 당연히 형식논리의 가장 명징한 사례이다. 하지만 형식주의 논리가 「의미없는 심볼의 계산」이라는 말이 있듯이, 수학 논리가 진실을 다루기보다는 진실을 다루는 게임을 하는 것이란 말도 있다³⁵⁾ Gowers [8]의 말을 빌리면, 수학 명제의 진실성을 확신하기 위한 정당화 시도를 논리주의라고 하는데, 논리는 공리와 추론 과정을 통하여 연역적으로 도출되는 결과를 의미한다. 이때 우리가 전제하는 공리들은 대부분의 경우 집합론으로부터 나온다 [8, p. 183].

우리가 「안다」라는 말을 할 때, 우리의 생각 속에는 안다라는 말을 적용할 대상에 대한 인식이 있어야 한다. 그래서 논리는 「대상」과 그의 「변화」를 명확히 설명할 수 있어야 한다. 다시 말해, 논리적 사고라 함은 생각에 담긴 대상과 그의 변화를 명확히 설명할 수 있어야 하는 것이다 [26, p. 102]. 그것이 바로 논리의 핵심적 의미이며, 논리적이기 위한 대상과 그의 변화를 설명하는 체계를 논리체계라고 하는데, 그러한 체계가 현대적 의미에서 대부분 집합론에 기인한다.

형식논리에도 다양한 논리가 있고,³⁶⁾ 비형식논리도 있다.³⁷⁾ 하지만 이러한 논리들은 대개 수학이나 컴퓨터과학에 사용하기에 적합치 않다 [16]. 수학이나 컴퓨터과학, 심지어 철학에서 사용하기에 적합한 논리는 우리가 「집합론」에서 접하던 논리이다. 집합론은 명제논리만을 설명하지만, 한정사를 사용하며 자연스럽게 논리를 확장한다. 이렇게 명제논리와 함께 한정사를 사용하여 대상과 그의 변화를 설명하는 확장된 논리가 「1차논리」이다.

4.1 1차논리

1차논리는 술어논리라고 하기도 하고 1차술어계산법(calculus)이라고도 하는데, 수학, 철학, 컴퓨터과학 등에서 사용하는 형식체계(a collection of formal system)를 말한다 [34]. 1

33) Logic is nowadays no longer part of philosophy. [24, p. 222]

34) 귀류법(reduction to absurdity)을 포함시키기도 한다.

35) Mathematical logic deals not with the truth, but only with the game of truth. [24, p. 223]

36) modal logic, relevance logic, fuzzy logic 등을 들 수 있다. [1]

37) Toulmin은 데이터로부터 적절한 조건 하에 어떤 주장을 할 수 있는 비형식논리를 말하기도 했고, Walton도 다른 종류의 비형식논리를 주장한 바 있다 [1].

차논리는 양적 변수(quantified variable)를 사용하면서 그러한 변수를 포함한 명제를 다룬다. 1차논리는 한정사(quantifier)나 관계(relation)를 사용하지 않는 명제논리(propositional logic)와는 다르지만, 명제논리가 1차논리의 기본이 된다.

어떤 한 주제에 관하여 양적 변수가 나타내는 대상들의 집합(domain of discourse)과 집합을 나타내기 위한 술어, 집합들 간의 함수, 그리고 그러한 것들에 대해 성립하는 공리들과 그를 다루기 위한 1차논리를 총체적으로 일컫는 말이 「이론(theory)」이다. 쉽게는, 이론을 해당 공리와 정의로부터 정해지는 대상들과 공리로부터 유도되는 정리들의 집합으로 말할 수 있다. 이때 「유도된다」는 말에 이미 논리가 내포되어 있는데, 그 논리가 1차논리이다.

인공지능은 컴퓨터를 사용하기 때문에 컴퓨터 프로그래밍에 적용할 논리가 필요하다. 그런 논리는 대상을 정확하게 명시해야 하는데, 그를 위한 논리가 1차논리이다. 사실 대부분의 인공지능 관련 저서에는 1차논리를 다루는 장(chapter)이 포함된다. 예를 들어, Russell, Norvig의 책 [27]와 Neapolitan, Jiang의 책 [18]에도 1차논리를 다루는 장이 들어 있다. 결국 1차논리는 21세기 인공지능의 시대에 갖추어야 할 하나의 소양이 될 것이다.

4.2 알고리즘과 직관

알고리즘(algorithm)이란 주로 수학과 컴퓨터과학에서 사용되는 용어로서, 문제 해결을 위한 유한 단계의 논리적인 작업의 구체적 수행 과정을 의미한다 [31]. 이 말은, 알고리즘이 적시한 방법을 따라 작업을 수행하면 문제가 해결됨을 의미한다. 그러므로 과학의 발전이 곧 알고리즘의 발전인 것이다. 특히 컴퓨터과학 이론은 알고리즘의 이론이라고 할 수 있다.

Domingos의 책 《The Master Algorithm》 [7]에 인용된 알고리즘을 설명하는 말로, Einstein은 「연역 논리를 사용하여 많은 실험 결과를 대신할 수 있는 공리체계를 만드는 것이 과학의 목표」라고 했고,³⁸⁾ Whitehead는 「특별한 사고활동 없이 작업을 수행할 수 있게 만드는 것이 문명의 발전」이라고 했다.³⁹⁾ 2000년을 전후하여 컴퓨터과학의 급속한 발전은 인류의 노동을 대신하고, 원거리 소통을 가능케 했으며, 이제는 인류의 사고활동을 대신할 인공지능을 만들고 있다.

Thurston은 컴퓨터에 의한 수학 연구의 가능성을 주장한 Jaffe와 Quinn [12]을 반박하는 논문 [29]에서 컴퓨터와 수학에서의 엄밀성을 비교, 설명한다. 컴퓨터는 알고리즘을 실행하기 때문에 하나의 오차도 없이 엄밀해야 하며, 수학은 엄밀한 증명에 기반하지만 연구를 할 때는 논리적 엄밀성보다는 직관에 상당히 많이 의존한다는 말을 한다⁴⁰⁾ [4, p. 27].

38) The grand aim of science is to cover the greatest number of experimental facts by logical deduction from the smallest number of hypotheses or axioms. — Albert Einstein [7]

39) Civilization advances by extending the number of important operations we can perform without thinking about them. — Alfred North Whitehead [7]

40) The mathematician at work relies on surprisingly vague intuitions and proceeds by fumbling fits and starts with all too frequent reversals. [4, p. 28]

최근의 인공지능은 신경망(neural network)을 이용한 딥러닝(deep learning)을 채용하며 사람의 뇌가 작동하는 방식인, 문맥의 연관성을 인지하는 직관적 판단을 할 수 있도록 고안되었다. 뇌과학이 아직 사람 뇌의 작동 원리를 완벽하게 규명하지 못했듯이, 딥러닝을 사용한 인공지능의 작동과정에 대한 이해도 현재까지는 불분명하다. 하지만 관련 연구가 성과를 내고 있기에 [9, 20], 머지 않은 미래에 좋은 성과가 나올 수 있으리라고 기대한다.

5 결론

Hersh는 수학을 문화로 설명하였지만, 수학은 철학과 함께 우리의 인식 속에 내재하는 생각으로 이해되며, 생각은 논리라는 나뭇의 체계를 가진다. 그러한 논리체계에 기반하여 사람의 생각과 판단을 대신할 수 있는 도구가 인공지능이다.

생각은 지식과 논리로 구성된다. 그래서 올바른 생각은 올바른 지식을 올바른 논리로 사용함을 의미한다. 계산은 가장 명확한 기초 논리이며, 형식논리의 근간이다. 인공지능에 사용되는 논리는 1차논리로서 대상과 그의 변화를 명시한다. 그래서 수학과 철학은 논리의 관점에서 인공지능과 밀접히 연결되며, 논리가 인공지능의 시대를 살아갈 사회인의 소양이 될 것이다.

수학교육학에서는 지금도 수학기초론(foundation of mathematics)을 가르친다. 그러나 1930년대에 이미 수학기초론에 대한 기대는 종말을 고하였다고 평가된다 [28]. 교육은 원래 사회의 구성원이 사회가 필요로 하는 소양을 갖추게 하는 과정이다 [22]. 그래서 사회가 변하면 교육도 변해야 한다. 사회가 급변하는 인공지능의 시대에도 교육의 변화는 불가피하다. 지식보다는 사고력 증진을 위한 「논리」의 교육이 필요할지 모른다.

Koh와 Ree [13]는 학생주도 학습을 유도하여 논리의 학습과 지식의 발견, 그리고 창의력의 개발을 꾀할 수 있는 학습내용으로 세기(counting)를 강조한 집합론 교육을 주장하였다. 21세기의 사회 구성원으로 성장하려면 인공지능과 그에 관련된 논리를 이해해야 할 것이다. 이미 미국 MIT 등의 학교에서는 9세에서 14세 사이의 청소년들에게 인공지능과 알고리즘의 개념, 그리고 인공지능의 활용에 따른 윤리의식 등을 교육시키는 실험적 교과과정을 연구하고 있다고 한다.

21세기는 인공지능의 시대이다. 인공지능은 형식논리에 기반을 두고 있다. 우리는 앞으로 인공지능을 제어하며 살아야 한다. 마침, 소설가 백영옥은 인공지능보다 인간이 더 잘할 수 있는 것이 「질문」이라며, 한 노학자의 인간적인, 매우 인간적인 말을 전한다.

“말과 경주하면 인간이 집니다. 그렇기 때문에 말과 직접 경주하는 게 아니라, 말에 올라타야 이기는 거예요. 질문을 바꿔야 해요. 인간이 만든 인공지능을 인간이 과연 올라탈 수 있느냐 ... 인공지능을 컨트롤할 수 있는 사람에게 기대하는

겁니다. ... ⁴¹⁾

잘 알려진 삶과 생각에 관한 경구가 하나 있다: 「생각하며 살아라. 그렇지 않으면 살아가는 대로 생각하게 된다.」 우리가 우리 삶의 주인으로서 살아가기 위해서는 1차논리와 같은 형식 논리의 습득뿐만 아니라 나름의 전문적 직관을 갖추어 창의력을 발휘해야 할 시대가 되었다. 질문할 줄 알고, 새로운 문제를 만들 수 있으며 그러한 문제를 해결할 수 있는 창의적 능력이 필요한 시대가 되었다. 결국 수학과 철학, 그리고 논리가 더욱 필요한 시대가 된 것이다.

References

1. Andrew ABERDEIN, *The Informal Mathematical Proof, 18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 56–70.
2. William ASPRAY, Philip KITCHER (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science Vol. XI, University of Minnesota Press, 1988.
3. William BYERS, *How Mathematicians Think: Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics*, Princeton University Press, 2007.
4. Carlo CELLUCCI, “Introduction” to *Filosofia e matematica, 18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, Springer, 2006, 17–36.
5. Richard COURANT, Herbert ROBBINS, (revised by Ian STEWART), *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, 2nd edition, Oxford University Press, 1996 (originally 1941).
6. Ingrid DAUBECHIES, Big Data’s Mathematical Mysteries, *Quanta Magazine* 2015.12.03. <https://www.quantamagazine.org/big-datas-mathematical-mysteries-20151203/>
7. Pedro DOMINGOS, *The Master Algorithm: How the Quest for the Ultimate Learning Machine Will Remake Our World*, Basic Books, 2015.
8. William Timothy GOWERS, Does Mathematics Need a Philosophy?, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 182–200.
9. Kevin HARTNETT, Foundations Built for a General Theory of Neural Networks, *Quanta Magazine* 2019.01.31. <https://www.quantamagazine.org/foundations-built-for-a-general-theory-of-neural-networks-20190131>
10. Reuben HERSH, *What is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, 1997. 로이벤 허시 지음, 허민 옮김, 도대체 수학이란 무엇인가?, 경문사, 2003.
11. Reuben HERSH, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, Springer, 2006.
12. Arthur JAFFE, Frank QUINN, “Theoretical Mathematics”: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics, *Bulletin of the American Mathematical Society* 29(1)(1993), 1–13. <https://www.ams.org/journals/bull/1993-29-01/S0273-0979-1993-00413-0/S0273-0979-1993-00413-0.pdf>

41) 백영옥, 질문하는 능력, 백영옥의 말과 글, 조선일보(2019년 9월 7일), A26.

13. KOH Youngmee, REE Sangwook, Counting is an Important Ingredient of Mathematics Education, *Journal for History of Mathematics* 29(5)(2016), 267–278. <http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2016.29.5.267>
14. Imre LAKATOS, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976. 임레 라카토스 지음, 우정호 옮김, 수학적 발견의 논리, 아르케, 2001.
15. Donald W. LOVELAND, Richard E. HODEL, S. G. STERRETT, *Three Views of Logic: Mathematics, Philosophy, and Computer Science*, Princeton University Press, 2014.
16. Donald MACKENZIE, Computers and the Sociology of Mathematical Proof, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 128–146.
17. Gregory H. MOORE, The Emergence of First-Order Logic, *History and Philosophy of Modern Mathematics* (Aspray, Kitcher, eds.), Minnesota University Press, 1988, 95–135.
18. Richard E. NEAPOLITAN, Xia JIANG *Artificial Intelligence: With an Introduction to Machine Learning* (2nd ed.), CRC Press, 2018.
19. Alfonso C. Ávila DEL PALACIO, What Is Philosophy of Mathematics Looking for? *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 236–249.
20. John PAVLUS, A New Approach to Understanding How Machine Think, *Quanta Magazine* 2019.01.10. <https://www.quantamagazine.org/been-kim-is-building-a-translator-for-artificial-intelligence-20190110/>
21. Yehuda RAV, Philosophical Problems of Mathematics in the Light of Evolutionary Epistemology, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 71–96.
22. REE Sangwook, KOH Youngmee, The Aims of Education in the Era of AI, *Journal for History of Mathematics* 30(6) (Dec. 2017), 341–351. <http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2017.30.6.341>
23. Alfréd R ENYI, A Socratic Dialogue on Mathematics, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 1–16.
24. Gian-Carlo ROTA, The Pernicious Influence of Mathematics upon Philosophy, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 220–230.
25. Gian-Carlo ROTA, David SHARP, Mathematics, Philosophy, and Artificial Intelligence. . . a dialogue with Gian-Carlo Rota and David Sharp, *Los Alamos Science* (1985), 92–104. <https://permlink.lanl.gov/object/tr?what=info:lanl-repo/lareport/LA-UR-85-5072>
26. Brian ROTMAN, Toward a Semiotics of Mathematics, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 97–127.
27. Stuart RUSSELL, Peter NORVIG, *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 3rd edition, Prentice Hall, 2010. 스투어트 러셀, 피터 노빅 지음, 류광 옮김, 인공지능: 현대적 접근방식, 제3판, 제이펍, 2016.
28. Terry STANWAY, From G.H.H. and Littlewood to XML and Maple: Changing Needs and Expectations in Mathematical Knowledge Management, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 147–159.
29. William P. THURSTON, On Proof and Progress in Mathematics, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Hersh, ed.), Springer, 2006, 37–55.

30. Hao WANG, *From Mathematics to Philosophy*, Routledge & Kegan Paul Ltd, 1974.
31. Wikipedia, Algorithm. <https://en.wikipedia.org/wiki/Algorithm> (25 August 2019)
32. Wikipedia, A.I. Artificial Intelligence. https://en.wikipedia.org/wiki/A.I._Artificial_Intelligence (6 September 2019)
33. Wikipedia, Deep learning. https://en.wikipedia.org/wiki/Deep_learning (5 September 2019)
34. Wikipedia, First-order logic. https://en.wikipedia.org/wiki/First-order_logic (26 July 2019)
35. Wikipedia, Four color theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem (11 August 2019)
36. Wikipedia, History of artificial intelligence. https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_artificial_intelligence
37. Wikipedia, Logic. <https://en.wikipedia.org/wiki/Logic> (17 August 2019)
38. Wikipedia, Metacognition. <https://en.wikipedia.org/wiki/Metacognition> (21 July 2019)
39. Wikipedia, Philosophy. <https://en.wikipedia.org/wiki/Philosophy> (29 August 2019)
40. Wikipedia Korea, Mafia(마피아). <https://ko.wikipedia.org/wiki/마피아> (2019.08.11.)