

일반 공정시간과 구조를 갖는 버퍼 공유 분기-접합 생산시스템의 스프레드시트 모형 분석

서동원[†]

Spreadsheet Model Approach for Buffer-Sharing Fork-Join Production Systems with General Processing Times and Structure

Dong-Won Seo[†]

ABSTRACT

For many years, it has been widely studied on fork-join production systems but there is not much literature focusing on the finite buffer(s) of either individuals or shared, and generally distributed processing times. Usually, it is difficult to handle finite buffer(s) through a standard queueing theoretical approach. In this study, by using the max-plus algebraic approach we studied buffer-shared fork-join production systems with general processing times. However, because it cannot provide proper computational ways for performance measures, we developed simulation models using @RISK software and the expressions derived from max-plus algebra. From the simulation experiments, we compared some properties on waiting time with respect to a buffer capacity under two blocking policies: BBS (Blocking Before Service) and BAS (Blocking After Service).

Key words : @RISK, Buffer-Sharing, Blocking-Before-Service, Blocking-After-Service, Fork-Join Production System, Max-plus algebra, Waiting time

요약

분기-접합 생산시스템은 오랜 기간 동안 연구되어왔지만, 개별 또는 공유 유한 버퍼를 갖고 일반공정시간 분포를 따르는 시스템에 대한 분석은 제한적이다. 일반적으로 대기행렬 이론적 분석법은 유한 버퍼를 갖는 시스템에 대한 분석에는 어려움이 있다. 본 연구에서는 max-plus 대수적 분석법을 활용하여 일반 공정시간을 갖는 버퍼 공유 분기-접합 생산시스템을 분석하였다. 하지만, 이러한 분석법은 특성치 계산의 관점에서는 적절한 방법을 제공하지 못하기 때문에 max-plus 대수로 도출된 표현식과 @RISK 소프트웨어를 활용하여 스프레드시트 시물레이션 모형을 개발하였다. 시물레이션 실험을 통해 유한 버퍼와 두 가지 차단규칙인 BBS(통신차단)과 BAS(제조차단) 하에서 시스템 대기시간에 대한 몇몇 특성을 비교분석하였다.

주요어 : @RISK, 버퍼 공유, 분기-접합 생산시스템, 통신차단, 제조차단, max-plus 대수, 대기시간

1. 서론

분기-접합 시스템은 하나 이상의 무한 버퍼 단일서버 공정이 직렬로 연결된 분기 공정라인이 병렬로 연결되어 있는 시스템으로, 각 작업(job)은 도착 후 분기 라인의 수 만큼 분기되어 각 분기 공정라인에 있는 공정에서 선입 선출(FIFO) 규칙에 따라 상호 독립적으로 공정이 진행되는 다음, 접합공정 앞에서 동기화된 후 접합공정을 거쳐 시스템을 떠난다. 이러한 시스템은 통신시스템, 컴퓨터 시스템, 제조 시스템에서 흔히 볼 수 있으며 시스템의 체류

* 이 논문은 2016년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. NRF-2016R1D1A1B03934690).

Received: 29 August 2019, Revised: 27 September 2019, Accepted: 27 September 2019

[†] Corresponding Author: Dong-Won Seo
E-mail: dwseo@khu.ac.kr
School of Management and Management Research
Institute, Kyung Hee University

시간, 즉 도착 후 분기시점부터 모든 공정이 완료된 후 동기화되어 이탈되는 시점까지의 시간이 주요 성능 특성치로 다루어져 왔다.

분기-접합 시스템에 대한 분석은 1968년 Mandelbaum and Itzhak이 splitting and matching (SPM) 모형에 대한 분석으로 시작된 것으로 알려져 있다. 그 후 다양한 모형에 대한 많은 연구가 진행되어 왔으며, 기존 연구결과를 몇 가지만 살펴보면 다음과 같다. Flatto and Hahn(1984)은 마코비안(Markovian) 가정하에 두 개의 공정으로 이루어진 분기-접합 시스템에 대해 분석하였으며, Nelson and Tantawi(1988)는 동질(homogeneous)의 지수분포를 따르는 m 개의 공정으로 이루어진 분기-접합 시스템에 대한 평균 체류시간(mean response time)에 대한 근사치를 소개한 바 있다. Kim and Agrawala(1989)는 Erlang 공정시간을 갖는 분기-접합 모형에서 가상대기시간(virtual waiting time)을 이용하여 평균 체류시간에 대한 근사치를 유도하였다. Chen(2011)은 도착간격시간과 무한 버퍼 단일 서버의 공정시간으로 일반분포를 가정하고 FIFO K -대기열 동질 분기-접합 시스템에서의 체류시간에 대한 상한과 하한 범위에 대해 분석하였다.

앞서 소개한 분기-접합 시스템을 변형한 다양한 시스템에 대한 연구가 진행되어왔는데, 다양한 응용 및 확장 모형으로는 1) 병렬로 구성된 단일서버 공정 수의 확대, 2) 복수의 서버를 갖는 공정, 3) 개방형, 폐쇄형 또는 개방형과 폐쇄형이 혼재되어 있는 혼합형(mixed or hybrid) 분기-접합 시스템, 4) 각 공정에서의 공정시간의 일반분포화, 5) 단일 또는 복수 클래스(class)의 작업, 6) 도착과정의 일반분포화, 7) 집단(bulk) 도착과정 모형, 8) 우선순위(priority), 공정공유(process sharing), 동질 및 이질(heterogeneous) 공정 속도(시간)를 등을 고려한 다양한 서비스 규칙, 9) 접합 단계에서의 작업들의 접합 수(비율) 등이 있다. 분석 대상인 주요 성능치로는 체류시간의 평균과 분포, 대기열의 길이, 접합 단계에서 대기하는 작업들의 수와 비효율성 등이다(Thomasian, 2104). 보다 상세한 내용은 Thomasian의 조사연구(survey)와 그곳에 있는 참고문헌을 참조하기 바란다.

이렇듯 대부분의 선행연구에서는 분기된 라인에서의 공정 수가 하나인 경우와 각 공정이 무한 버퍼를 갖는 시스템을 분석 대상으로 하는 매우 제한된 환경하에서 분석이 진행되어왔다. 이러한 이유는 유한(finite) 크기의 버퍼로 인한 차단(blocking) 현상과 분기 공정라인에서의 공정 수의 증가로 인해 분석의 복잡성이 매우 증대되기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 유한 버퍼를 갖고 분기

공정라인에서의 공정의 수에 제한을 두지 않는 보다 일반적인 분기-접합 시스템을 대상으로 분석하고자 한다. 이를 위해, 보편적인 대기행렬 이론적 접근법과 달리 max-plus 대수를 활용하여 시스템 특성치에 대한 표현식을 도출하고 그 특성을 분석하고자 한다. 차단규칙으로는 통신차단으로 알려진 BBS(blocking before service)와 제조차단으로 알려진 BAS(blocking after service) 규칙, 두 가지 규칙을 고려하였다.

본 연구는 버퍼 공유 라인 생산시스템에 대해 분석한 Seo(2019)의 연구를 버퍼 공유 분기-접합 시스템으로 확장한 것으로, 구성은 다음과 같다. 2장에서는 버퍼 공유 분기-접합 생산시스템에 대해 살펴보고, 3장에서는 max-plus 대수를 활용한 각 공정에서의 공정시작시간에 대한 표현식을 소개한다. 표현식과 시뮬레이션을 통해 버퍼와 차단규칙에 따른 대기시간의 비교/분석, 안정대기시간, 접합공정 앞에서의 대기시간, 대기시간의 범위 등은 4장에 소개되어 있다. 마지막으로 결론에서는 연구의 요약과 추후 연구주제에 대해 기술하였다.

2. 버퍼 공유 분기-접합 생산시스템

본 연구에서는 유한 버퍼 공유 분기-접합 시스템에서 각 공정에서의 공정시작시점까지의 시간을 대상으로 max-plus 대수를 활용하여 성능특성치를 분석한다.

Max-plus 선형시스템에 대한 상세한 이해 없이 본 연구의 내용을 이해하는데 어려움이 없기 때문에 상세한 설명은 생략하였다. Max-plus 대수와 max-plus 선형시스템 그리고 관련 선행연구에 관한 내용은 참고문헌을 참조하기 바란다(Ayhan and Seo, 2001, 2002; Baccelli et al., 1992; Baccelli et al., 1998; Yang and Seo, 2017).

간단히 말하면, max-plus 선형시스템은 선택불가형(choice-free)이고 선입선출 규칙을 따르는 추월금지형(overtaking-free) 시스템으로 무한 버퍼를 갖는 생산시스템 뿐만 아니라 버퍼의 공유 여부와 무관하게 유한 버퍼를 갖는 생산시스템 역시 max-plus 선형시스템이므로 Petri net의 일종인 event graph로 도식화할 수 있다.

Fig. 1은 버퍼 크기 K 인 유한 버퍼를 공유하는 개방형 분기-접합 시스템의 기본 모형을 도식화한 것으로, 도착하는 작업은 도착시점에서 ℓ 개의 라인으로 분기되어 각 분기 공정라인을 따라 공정이 진행된 후 마지막 접합 시점에서 모두 결합된 후 시스템을 떠나게 된다. 모든 공정이 유한 버퍼를 공유하는 경우, 일단 시스템에 진입한 작업은 차단규칙(blocking policy)과 무관하게 차단없이 분

기된 공정라인에서의 공정순서에 따라 공정들간에 이동하게 된다. 마지막 공정인 접합공정에서 하나의 작업은 다른 분기 공정라인상에 있는 작업의 완료 시점까지 버퍼를 점유하면서 기다리게 되며 시스템을 떠날 때 점유했던 버퍼를 비우게 된다. 유한 버퍼가 모두 점유되어있는 경우에 새롭게 도착하는 작업은 시스템에 바로 진입하지 못하며 접합공정을 마친 작업이 시스템을 떠나는 시점에 점유되었던 버퍼가 비워지면 비로소 다른 작업의 진입이 허용된다. 시스템에 진입하지 못한 도착은 손실 (blocked and lost)되는 것으로 가정하였다.

3. 공정시작시점에 대한 표현식

앞 절에서 소개된 기본 모형을 Petri net으로 도식화한 다음, max-plus 대수를 활용하여 각 공정에서의 공정시작시점에 대한 표현식을 도출할 수 있다. 먼저 무한 버퍼 개방형 분기-접합 생산시스템에 대한 표현식을 소개한 후 유한 버퍼 공유 시스템에 대한 표현식을 살펴보자.

시스템의 초기 상태는 비어있는 것으로 가정하며, 무한 버퍼를 갖는 개방형 분기-접합 생산시스템의 경우에 분기 라인 $i(i=1, \dots, \ell)$ 의 공정 $j(j=1, \dots, m_i)$ 에서의 n 번째 공정시작시간 $X_n^{i,j}$ 는 다음과 같이 표현된다.

- 분기 라인 i 의 공정 j

$$X_{n+1}^{i,j} = \sigma_{n+1}^{i,j-1} \otimes X_{n+1}^{i,j-1} \oplus \sigma_n^{i,j} \otimes X_n^{i,j} \quad (1)$$
- 접합(assembly)공정
$$X_{n+1}^A = \sigma_{n+1}^{1,m_1} \otimes X_{n+1}^{1,m_1} \oplus \sigma_{n+1}^{2,m_2} \otimes X_{n+1}^{2,m_2} \oplus \dots \oplus \sigma_{n+1}^{\ell,m_\ell} \otimes X_{n+1}^{\ell,m_\ell} \oplus \sigma_n^A \otimes X_n^A \quad (2)$$

여기서 max-plus 대수 연산자인 \otimes (o-times)와 \oplus (o-plus)는 각각 합(addition)과 최대치(maximization)를 의미한다. $X_n^{i,j}$ 는 시스템의 n 번째 도착 작업이 분기 라인 i 의 공정 j 에서의 공정시작시간에 대한 절대시간을 나타낸다. 비슷하게 X_n^A 는 접합공정에서의 n 번째 공정시작시간에 대한 절대시간을 말한다. 또한, $\sigma_n^{i,j}$ 는 분기 라인 i 의 공정 j ($j \geq 1$)에서의 n 번째 공정시간이고, $\sigma_n^{i,0}$ 은 시스템 외부로부터의 $n-1$ 번째 도착과 n 번째 도착 사이의 도착 간격으로 본 연구에서는 포아송 도착과정을 가정하였으며, 각 분기 라인에서의 외부 도착시간은 모두 같으므로 모든 $i(i=1, \dots, \ell)$ 에 대해 $\sigma_n^{i,0}$ 는 같다. 초기에 시스템이 비어있는 것으로 가정하였기 때문에 모든 $j \geq 1$ 에

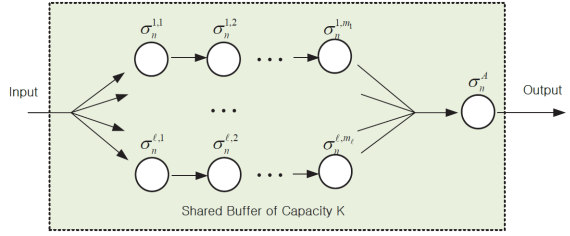


Fig. 1. Fork-Join system with a shared buffer

대해 $X_n^{i,j} = 0$ 이고, $n < 0$ 이면 $X_n^{i,j} = -\infty$ 로 가정한다. 따라서 n 번째 도착 고객이 분기 라인 i 의 공정 j 에서 공정시작시간까지 시스템에 머문 시간인 대기시간은 $X_n^{i,j}$ 에서 외부로부터의 도착 시간인 $\sigma_n^{i,0}$ 을 뺀 값으로 정의할 수 있다.

표현식에 대한 해석은 무한 크기의 버퍼인 경우 각 공정에서의 공정시작시점은 직전 공정에서의 공정시작시점에 자신의 공정시간을 더한 값과 FIFO 서비스 규칙에 따라 현 공정에서의 직전 작업의 공정 완료시점 중 큰 값으로 결정된다. 동일하게 접합 노드의 경우에는 직전 공정이 각 분기 라인의 마지막 공정이므로 이들의 공정시작시점과 공정시간의 합과 접합공정에서의 직전 작업의 공정 완료시점 중 최댓값이 됨을 알 수 있다.

앞서 기술한 것처럼 max-plus 대수를 이용한 분석에서는 각 공정에서의 공정시작시점과 도착시간의 차로 대기시간을 구하게 되는데, 유한 버퍼 생산시스템의 경우 외부로부터의 도착이 시스템에 진입하지 못하고 시스템을 떠나는 차단 현상을 반영하지 못하게 된다. 하지만 유한 버퍼인 경우 생산시스템의 맨 앞에 무한 버퍼를 갖고 공정시간이 0인 하나의 가상(dummy) 노드를 삽입하여 확장함으로써 이 문제를 해결할 수 있다(Seo et al., 2015; Yang and Seo, 2017; Seo, 2019). 다음 Fig. 2는 Fig. 1의 모형에 하나의 가상 노드(노드 d로 표기)를 공정의 맨 앞에 추가한 모형이다. 분기-접합 시스템에서 각 분기된 공정라인은 가상 노드를 포함하여 $m_i + 1$ 개의 노드로 구성된 라인 생산시스템으로 생각하면 된다. 표현의 편의를 위해 이를 다시 m_i 개 공정으로 재설정하여 표현식을 도출하였다. 이 경우 각 분기된 라인의 처음 공정을 가상 공정으로 볼 수 있다.

이렇게 확장된 분기-접합 생산시스템에서 각 분기된 공정라인 i 에서 실제 공정은 노드 2부터 노드 m_i 까지이며, 처음 공정인 가상 노드 1에서 공정이 완료된 작업이 노드 2로의 이동 시에만 유한 크기의 버퍼에 따른 차단현

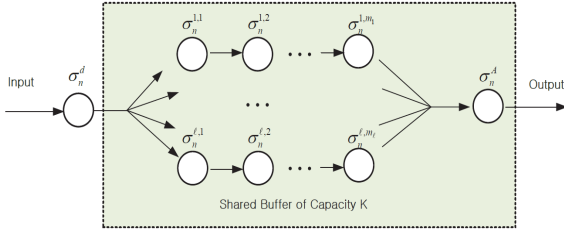


Fig. 2. Fork-Join system with a shared buffer and a dummy node

상이 발생하며, 일단 노드 2로 진입한 재공품은 모든 공정(노드 2부터 노드 m_i 까지)을 완료할 때까지 단일서버 FIFO 규칙을 갖는 무한 버퍼 시스템과 동일하게 노드 사이를 이동한다(Yang and Seo, 2017; Seo, 2019).

가상 노드에서의 공정시간은 0이므로 모든 $n \geq 0$ 에 대해 $\sigma_n^{i,1} = 0$ 이다. 따라서 시스템 대기시간에 대한 분석은 이 가상의 노드를 제외하고 분석하면 된다. 즉, 실제 라인 생산시스템의 첫 번째 공정(노드 2)에서의 공정시작 시간까지의 대기시간은 확장 시스템에서 처음 공정의 공정시간이 0이므로 두 번째 공정에서의 공정시작시간에서 가상 공정의 처음 공정에서의 공정시작시간을 빼면 된다.

유한 버퍼로 인한 차단현상을 처리하기 위한 규칙으로는 통신차단(Communication Blocking) 규칙과 제조차단(Production Blocking) 규칙을 고려하였다. 통신차단규칙과 제조차단규칙은 각각 BBS (Blocking Before Service)와 BAS (Blocking After Service)로 불리기도 한다. BBS 규칙하에서는 공정 i 에 있는 작업은 다음 공정인 공정 j 의 버퍼가 모두 점유되어있으면 공정 i 에서 자신의 공정을 시작할 수 없다. 반면에, BAS 규칙하에서는 공정 i 에서 공정을 마친 작업은 다음 공정인 공정 j 에 빈자리가 있을 경우에만 다음 공정 j 로 이동하고, 다음 공정 j 에 빈자리가 없으면 공정 i 에 머물면서 공정 i 에서의 새로운 작업의 공정 시작을 방해(차단)한다.

Fig. 3.은 하나의 공정으로 이루어진 2개의 분기 라인이 있는 단순 분기-접합 시스템을 대상으로 가상노드에 BBS 규칙을 적용한 event graph이다. 가상노드에서 각 분기 라인의 처음 공정으로 이동하는 시점에서 버퍼의 빈자리 유무를 판단하여 빈자리가 있는 경우에만 진입이 허용된다. Fig. 4.는 Fig. 3과 동일한 시스템을 대상으로 BAS 규칙을 적용한 event graph이다. 처음 가상노드의 공정을 두 단계의 transition으로 분리하여 앞의 transition은 가상 공정에서의 공정시작시점을, 뒤의 transition은 공정 완료 후 다음 공정(노드 2)로 이동하는 가상 공정의

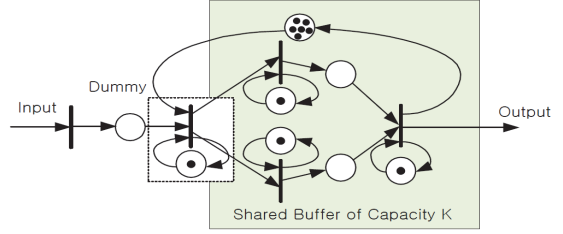


Fig. 3. A simple fork-join system with dummy under BBS

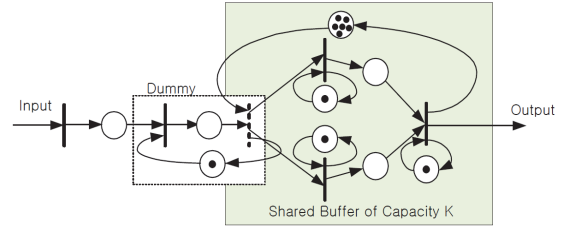


Fig. 4. A simple fork-join system with dummy under BAS

이탈시점을 표현하도록 모형화하였다. 이 가상 공정의 두 번째 transition에서의 이탈시점이 실제 시스템인 노드2로의 도착시점이 된다. 즉, BAS 규칙에 따라 가상 공정에서의 공정 후 유한 공유 버퍼의 가용 여부에 따라 차단 후 이동과 차단없는 이동이 이루어진다.

BBS 차단규칙과 BAS 차단규칙하에 앞선 Fig. 3과 4와 같은 event graph로 모형화한 후 각 공정의 공정시작시점에 대한 표현식을 정리하면 다음과 같다.

■ 통신차단(BBS) 규칙

- 1) 분기 라인 i 의 공정 $j, j = 1$

$$X_{n+1}^{i,1} = \sigma_{n+1}^0 \otimes X_{n+1}^{i,0} \oplus \sigma_n^{i,1} \otimes X_n^{i,1} \oplus \sigma_{n+1-K}^A \otimes X_{n+1-K}^A \quad (3)$$

- 2) 분기 라인 i 의 공정 $j, j \geq 2$

$$X_{n+1}^{i,j} = \sigma_{n+1}^{i,j-1} \otimes X_{n+1}^{i,j-1} \oplus \sigma_n^{i,j} \otimes X_n^{i,j} \quad (4)$$

- 3) 접합(assembly) 노드

$$X_{n+1}^A = \sigma_{n+1}^{1,m_1} \otimes X_{n+1}^{1,m_1} \oplus \sigma_{n+1}^{2,m_2} \otimes X_{n+1}^{2,m_2} \oplus \dots \oplus \sigma_{n+1}^{l,m_l} \otimes X_{n+1}^{l,m_l} \oplus \sigma_n^A \otimes X_n^A \quad (5)$$

■ 제조차단(BAS) 규칙

- 1) 분기 라인 i 의 공정 $j, j = 1$

$$X_{n+1}^{i,1} = \sigma_{n+1}^0 \otimes X_{n+1}^{i,0} \oplus \sigma_n^{i,1} \otimes X_n^{i,1} \oplus \sigma_{n-K}^A \otimes X_{n-K}^A \quad (6)$$

- 2) 분기 라인 i 의 공정 $j, j \geq 2$

$$X_{n+1}^{i,j} = \sigma_{n+1}^{i,j-1} \otimes X_{n+1}^{i,j-1} \oplus \sigma_n^{i,j} \otimes X_n^{i,j} \quad (7)$$

3) 접합(assembly) 노드

$$X_{n+1}^A = \sigma_{n+1}^{1,m_1} \otimes X_{n+1}^{1,m_1} \oplus \sigma_{n+1}^{2,m_2} \otimes X_{n+1}^{2,m_2} \oplus \dots \oplus \sigma_{n+1}^{\ell,m_\ell} \otimes X_{n+1}^{\ell,m_\ell} \oplus \sigma_n^A \otimes X_n^A \quad (8)$$

무한 버퍼인 경우와 비교하면, 유한 버퍼의 크기 K 를 무한으로 두면 앞서 $n < 0$ 이면 $X_n^{i,j} = -\infty$ 로 가정하였기 때문에 식 (3)과 (6)에서 $X_{n-K}^A = -\infty$ 이므로 식 (1)과 (3), (4) 또는 (6), (7)이 같아짐을 알 수 있다. 그러면, 식 (2)와 (5) 또는 (8)도 같아진다. 또한, $j = m_i + 1$ 인 경우, 즉, 각 분기공정라인의 마지막 공정이 접합공정이다.

4. 특성치 및 비교/분석

이론적으로 max-plus 선형시스템의 공정시작시간에 대한 표현식으로부터 대기시간에 기초한 다양한 시스템 특성치에 대한 분석이 가능하다(Baccelli et al., 1992, 1998). 다시 말하면, 이론적으로는 포아송 도착과정을 따르는 max-plus 선형시스템에서 대기시간에 대한 표현식을 도출하고, 이 표현식을 원소로 갖는 다항함수의 평균값과 포아송 도착과정의 모수로 표현된 테일러 전개식으로 대기시간의 다양한 성능 값을 계산할 수 있음이 알려져 있다(Baccelli et al., 1998). 하지만, 공정시간이 일반 분포를 따르는 경우에는 시스템 성능 값의 표현식(확률 변수들의 합과 최댓값을 원소로 갖는 다항함수의 평균값)에 대한 적절한 계산 방법을 제공하지 못한다.

상수 공정시간의 경우에는 다항식의 평균값에 대한 계산의 어려움이 제거되어 보다 간결한 표현식을 얻을 수 있다. Ayhan and Seo(2001, 2002)는 Baccelli et al. (1998)의 연구결과를 확장하여 대기시간의 고차평균, 꼬리확률에 대한 간결한 표현식을 유도하였다. 최근의 Yang and Seo(2017) 연구에서는 동일한 분석방법으로 상수 공정시간을 갖는 버퍼 공유 라인 생산시스템에서 공정시작시간에 대한 표현식을 도출하고, 대기시간에 대한 간결한 표현식을 도출하였다. 또한, Seo(2019)는 최근의 연구에서 스프레드시트 시뮬레이션 모형에 대한 분석을 통해 일반 공정시간을 갖는 버퍼 공유 라인 생산시스템을 상수 공정시간의 경우와 비교/분석하였다.

상수 공정시간이 아닌 일반 공정시간의 경우에는 대기시간에 대한 테일러 전개식의 계수 항의 계산을 위해 수치 해석적 근사해법을 이용해야 하기 때문에 간결한 분석적 결과를 얻을 수 없다. 따라서 이 절에서는 도출된 표현식에 대한 해석과 스프레드시트 시뮬레이션을 통한

비교/분석 결과를 소개하고자 한다. Max-plus 대수를 이용한 분석의 장점 중 하나는 각 공정별 대기시간을 엑셀과 같은 스프레드시트 소프트웨어를 통해 시뮬레이션 실험을 구현하고 순차적으로 계산할 수 있다는 것이다. 본 연구에서는 엑셀의 추가되는 부가기능인 스프레드시트 시뮬레이션 프로그램인 @RISK(2019)를 활용하였다.

4.1 분석모형 및 시뮬레이션 환경

분석한 시뮬레이션 모형은 다음과 같다. 도착한 작업은 3개의 분기 라인을 따라 분기된다. 첫 번째 분기 라인 은 3개, 두 번째 분기 라인은 2개, 세 번째 분기 라인은 1개의 공정으로 구성되어 있으며, 마지막 접합공정에서 3개의 분기된 공정라인을 따라 이동된 작업이 1:1:1의 비율로 접합된다. 각 공정시간은 첫 번째 공정라인에서는 평균 3, 3, 4인 지수분포, 두 번째 공정라인에서는 평균 2, 5인 지수분포, 세 번째 공정라인에서는 평균 4인 지수 분포, 접합공정은 평균 2인 지수분포를 가정하였다. 공유 유한 버퍼의 크기 K 는 모든 공정의 수보다 큰 것으로 가정하였으며(기본 모형에서 가상 노드를 포함하면 총 노드의 수가 8이므로 8이상으로 가정), 도착과정의 도착률 0.19이고 평균 공정시간의 최댓값이 5이므로 교통밀도 (traffic intensity)는 0.95(=0.19×5)이다. 기본 모형과 동일한 평균 공정시간을 갖는 공정시간 분포로 일양분포, 상수와 이산분포인 경우도 함께 고려하였다.

앞서 접합공정에서의 접합비율을 모두 1:1:1로 가정하였지만, 1:1:1이 아닌 경우에는 접합비율만큼 분기 라인을 중복시키면 된다. 예를 들어, 접합비율이 1:1:2라면 3 번째 분기 공정라인을 2개 중복시킨 모형을 만들면 된다.

엑셀과 같은 스프레드시트를 통한 시뮬레이션을 수행 하기 위해, 작업의 도착간격시간(지수분포)과 공정시간분 포에 해당하는 @RISK 분포함수를 각 셀에 입력하여 확률변량을 생성한 후, max-plus 대수를 활용하여 구한 각 공정별 시작시간의 표현식(식 (3)-(8))을 셀 참조기능과 max 함수를 이용하여 입력함으로써 각 공정별 시작시간 을 생성하였다.

안정대기시간의 분석을 위해 스프레드시트에서 각 공 정 (i,j)에 대해 $X_n^{i,j}$ 을 $n = 0, 1, \dots, 300$ 에 대해 구하고 이로부터 대기시간과 실질 대기시간의 평균을 계산하는 시뮬레이션을 1000회 반복 수행하였다. 다음으로 난수의 시퀀스에 의한 특성치의 차이를 제거하기 위해 @RISK 함수인 RISKSIMTABLE()를 사용하여 버퍼의 크기를 변화시키면서 대기시간의 영향을 분석하였다.

4.2 BBS와 BAS 차단규칙하에서의 공정시작시간

차단규칙 p 하에서 유한 버퍼의 크기가 K 인 경우에 분기 라인 i 의 공정 j 에서 n 번째 공정시작시간을 $X_n^{i,j}(p, K)$ 로 정의하였다.

앞선 표현식 (3)과 (6)로부터 모든 $n \geq K$ 에 대해서 비감소(non-decreasing) 함수인 \max 함수 \oplus 에 의해 $X_{n+1-K}^{i,1} \geq X_{n-K}^{i,1}$ 이기 때문에 BBS 규칙하에서의 공정 시작시간이 BAS 규칙하에서 보다 더 크거나 같으므로, $X_{n+1}^{i,j}(BBS, K) \geq X_{n+1}^{i,j}(BAS, K)$ 인 관계를 만족하며, 공정의 시작시간은 n 에 대해 비감소이다.

Seo(2019)에서 언급한 바와 같이, 식 (4), (5)와 (7), (8)의 해석에는 주의가 필요하다. 분기 라인 i 의 공정 j (≥ 2)에서는 차단규칙과 무관하게 버퍼 공유 생산시스템의 대기시간이 같다고 해석할 수 있지만, 동일한 K 값에 대해 차단규칙에 따라 가상 공정인 노드 1에서의 $X_n^{i,1}$ 값이 다를 수 있기 때문에 항상 같지는 않다. 이는 동일한 K 값에 대해 $X_{n+1-K}^{i,m_i} \geq X_{n-K}^{i,m_i}$ 이고, $X_{n+1}^{i,1}$ 의 값은 BBS의 경우가 항상 BAS의 경우보다 크거나 같기 때문에, $X_{n+1}^{i,j}(BBS, K) \geq X_{n+1}^{i,j}(BAS, K)$ 의 관계를 보인다. 따라서, 분기 라인 i 의 모든 공정 j (≥ 1)에 대해 $X_{n+1}^{i,j}(BBS, K) \geq X_{n+1}^{i,j}(BAS, K)$ 의 관계를 갖는다.

또한, 식 (3)과 (6)로부터 노드 1에서 크기 K 인 버퍼를 갖고 BBS 규칙하에서의 대기시간(체류시간)과 버퍼 크기 $K-1$ 를 갖고 BAS 규칙하에서의 대기시간(체류시간)은 같음을 알 수 있다. 따라서 분기 라인 i 의 모든 공정 j 에 대해 $X_{n+1}^{i,j}(BBS, K) = X_{n+1}^{i,j}(BAS, K-1)$ 가 된다.

4.3 안정대기시간

앞서 정의한 $X_n^{i,j}(p, K)$ 에서 외부로부터의 도착시간으로 $X_n^{i,0}$ 를 빼면 각 공정에서 공정시작시간까지의 대기시간이 된다. 즉, 대기시간 $W_n^{i,j}(p, K)$ 는 공유 버퍼의 크기가 K 이고 차단규칙 p 하에서 외부로부터의 도착 시점부터 노드 i 에서 n 번째 공정의 시작시점까지의 시간으로 $W_n^{i,j}(p, K) = X_n^{i,j}(p, K) - X_n^{i,0}$ 이며, 이 대기시간의 평균을 $W_{(p,K)}^{i,j}$ 로 두자. 유사하게, 가상 노드인 처음 노드(노드 d)의 대기시간을 제외한 각 노드에서의 실제 대기시간의 평균은 $W_{(p,K)}^{i,j-d} = W_{(p,K)}^{i,j} - W_{(p,K)}^d$ 로, 접합공정 앞에서 다른 공정라인의 작업 완료를 기다리는 대기시간은 $W_{(p,K)}^{A-(i,j)} = W_{(p,K)}^A - W_{(p,K)}^{i,j}$ 로 정의할 수 있다.

일단 분기 라인 i 에 진입한 작업은 접합공정 전까지는 다른 분기 라인에 있는 공정의 시작시간에 영향을 받지 않고 공정들 사이를 흐른다. 따라서 앞 절의 특성을 이용하면 $W_{n+1}^{i,j}(BBS, K) \geq W_{n+1}^{i,j}(BAS, K)$ 인 관계가 유지되고, 접합공정의 시작시간은 이들의 최댓값이기 때문에 접합공정에 대해서도 동일한 관계를 갖는다. 또한, 이러한 관계는 유한 버퍼의 크기가 증가하면 차단현상의 감소로 공정의 시작시간이 같거나 감소하기 때문에, 그리고 두 차단규칙 간에는 버퍼 크기 1만큼의 차이를 보이기 때문에, 모든 n 에 대해 다음의 관계를 만족하므로 이들의 평균에 대해서도 같은 관계가 유지됨을 알 수 있다.

$$W_{(BBS, K)}^{i,j} = W_{(BAS, K-1)}^{i,j} \geq W_{(BAS, K)}^{i,j} \quad (9)$$

Yang and Seo(2017)의 결과에 따르면 상수 공정시간을 갖는 라인 생산시스템에서 마지막 노드에서의 공정시작시간은 유한 버퍼 K 와 무관하지만, 일반 공정시간의 경우에는 그렇지 않다. 분기-접합 생산시스템에서도 동일한 결과를 확인할 수 있다. 즉, 일반 공정시간을 따르는 경우 접합공정에서의 공정시작시간은 유한 버퍼의 크기에 영향을 받는다. 조금 더 자세히 살펴보면, 공정시간이 지수분포를 따르는 경우와 상수인 경우에는 시뮬레이션 결과로 쉽게 확인할 수 있다. Table 1은 지수분포 모형에 대한 시뮬레이션 수행 결과로 각 차단규칙에 따른 95% 신뢰구간(CI)의 상한과 하한값을 보이고 있다. 동일한 크기의 K 를 갖는 경우와 버퍼의 크기가 1만큼 차이나는 경우에 대해서 두 차단규칙 하에서의 노드 i, j 에서는 대기시간에 대해 (9)의 관계를 확인할 수 있다. 상수 공정시간을 갖는 모형에 대한 시뮬레이션 결과는 Table 2에 소개되어 있는데, 지수분포인 경우와 다르게 상수 분포인 경우에는 접합 노드에서의 대기시간은 버퍼의 크기와 무관함을 알 수 있다.

하지만, 일양분포와 이산분포인 경우에는 일반화하기 어렵다. 실험결과를 모두 소개하지는 못하지만 몇 가지 경우에 대한 실험결과에 따르면 공정시간 분포의 변동계수가 1보다 매우 작은 경우($\ll 1$)에는 유의미한 차이를 보이지 않지만, 변동계수가 1에 근접한 경우(0.8 ~ 1) 유의미한 차이를 보이기도 하였다. 지수분포의 경우는 변동계수가 1이므로 유의미한 차이를 보인 것으로 이해할 수 있다. Table 3은 일양분포, Table 4는 이산분포에 대한 시뮬레이션 결과의 일부이다. 각 공정의 평균은 앞서 실험과 같도록 유지하면서 공정시간의 상한과 하한 범위를

Table 1. 95% CI for Waiting Time with Exponential processing times

| K | $W_{(BBS,K)}^d$ | $W_{(BBS,K)}^{1,1}$ | $W_{(BBS,K)}^{1,2}$ | $W_{(BBS,K)}^{1,3}$ | $W_{(BBS,K)}^{2,1}$ | $W_{(BBS,K)}^{2,2}$ | $W_{(BBS,K)}^{3,1}$ | $W_{(BBS,K)}^A$ |
|-----|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| | $W_{(BAS,K)}^d$ | $W_{(BAS,K)}^{1,1}$ | $W_{(BAS,K)}^{1,2}$ | $W_{(BAS,K)}^{1,3}$ | $W_{(BAS,K)}^{2,1}$ | $W_{(BAS,K)}^{2,2}$ | $W_{(BAS,K)}^{3,1}$ | $W_{(BAS,K)}^A$ |
| 8 | (30.7745, 34.4510) | (33.7644, 37.4554) | (39.8283, 43.5296) | (50.5341, 54.2765) | (31.7845, 35.4639) | (53.1464, 57.2325) | (38.8936, 42.6167) | (65.7473, 69.7663) |
| | (25.0512, 28.4048) | (28.1953, 31.5647) | (34.4037, 37.7845) | (45.7056, 49.1353) | (26.0951, 29.4519) | (50.0821, 53.9785) | (33.7156, 37.1258) | (62.5197, 66.3240) |
| 9 | (25.0512, 28.4048) | (28.1953, 31.5647) | (34.4037, 37.7845) | (45.7056, 49.1353) | (26.0951, 29.4519) | (50.0821, 53.9785) | (33.7156, 37.1258) | (62.5197, 66.3240) |
| | (20.9794, 24.0980) | (24.2468, 27.3812) | (30.5712, 33.7172) | (42.3726, 45.5750) | (22.0515, 25.1732) | (48.4452, 52.2466) | (30.0808, 33.2617) | (60.7366, 64.4206) |
| 10 | (20.9794, 24.0980) | (24.2468, 27.3812) | (30.5712, 33.7172) | (42.3726, 45.5750) | (22.0515, 25.1732) | (48.4452, 52.2466) | (30.0808, 33.2617) | (60.7366, 64.4206) |
| | (17.8620, 20.7869) | (21.2170, 24.1575) | (27.6158, 30.5675) | (39.8390, 42.8578) | (18.9526, 21.8801) | (47.5287, 51.2781) | (27.3112, 30.3028) | (59.6828, 63.2929) |

Table 2. 95% CI for Waiting Time with Constant processing times

| K | $W_{(BBS,K)}^d$ | $W_{(BBS,K)}^{1,1}$ | $W_{(BBS,K)}^{1,2}$ | $W_{(BBS,K)}^{1,3}$ | $W_{(BBS,K)}^{2,1}$ | $W_{(BBS,K)}^{2,2}$ | $W_{(BBS,K)}^{3,1}$ | $W_{(BBS,K)}^A$ |
|-----|------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| | $W_{(BAS,K)}^d$ | $W_{(BAS,K)}^{1,1}$ | $W_{(BAS,K)}^{1,2}$ | $W_{(BAS,K)}^{1,3}$ | $W_{(BAS,K)}^{2,1}$ | $W_{(BAS,K)}^{2,2}$ | $W_{(BAS,K)}^{3,1}$ | $W_{(BAS,K)}^A$ |
| 8 | (8.3702, 9.9506) | (9.4607, 11.0064) | (12.4607, 14.0064) | (17.5209, 19.0146) | (8.7245, 10.2930) | (28.6693, 30.7768) | (11.5209, 13.0146) | (34.0951, 36.1822) |
| | (6.8722, 8.3328) | (8.1031, 9.5286) | (11.1031, 12.5286) | (16.4592, 17.8345) | (7.2702, 8.7187) | (28.6693, 30.7768) | (10.4592, 11.8345) | (34.0951, 36.1822) |
| 9 | (6.8722, 8.3328) | (8.1031, 9.5286) | (11.1031, 12.5286) | (16.4592, 17.8345) | (7.2702, 8.7187) | (28.6693, 30.7768) | (10.4592, 11.8345) | (34.0951, 36.1822) |
| | (5.6315, 6.9736) | (6.9812, 8.2891) | (9.9812, 11.2891) | (15.5930, 16.8548) | (6.0652, 7.3954) | (28.6693, 30.7768) | (9.5930, 10.8548) | (34.0951, 36.1822) |
| 10 | (5.6315, 6.9736) | (6.9812, 8.2891) | (9.9812, 11.2891) | (15.5930, 16.8548) | (6.0652, 7.3954) | (28.6693, 30.7768) | (9.5930, 10.8548) | (34.0951, 36.1822) |
| | (4.6052, 5.8323) | (6.0563, 7.2510) | (9.0563, 10.2510) | (14.8874, 16.0421) | (5.0692, 6.2849) | (28.6693, 30.7768) | (8.8874, 10.0421) | (34.0951, 36.1822) |

Table 3. 95% CI for Waiting Time with Uniform processing times

| K | $W_{(BBS,K)}^d$ | $W_{(BBS,K)}^{1,1}$ | $W_{(BBS,K)}^{1,2}$ | $W_{(BBS,K)}^{1,3}$ | $W_{(BBS,K)}^{2,1}$ | $W_{(BBS,K)}^{2,2}$ | $W_{(BBS,K)}^{3,1}$ | $W_{(BBS,K)}^A$ |
|-----|-------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| | $W_{(BAS,K)}^d$ | $W_{(BAS,K)}^{1,1}$ | $W_{(BAS,K)}^{1,2}$ | $W_{(BAS,K)}^{1,3}$ | $W_{(BAS,K)}^{2,1}$ | $W_{(BAS,K)}^{2,2}$ | $W_{(BAS,K)}^{3,1}$ | $W_{(BAS,K)}^A$ |
| 8 | (8.9746, 10.6836) | (10.0796, 11.7538) | (13.3768, 15.0434) | (18.3812, 20.0058) | (9.3467, 11.0431) | (29.5404, 31.7814) | (12.1616, 13.7854) | (35.0391, 37.2568) |
| | (7.4092, 8.9981) | (8.6552, 10.2086) | (11.9812, 13.5269) | (17.2378, 18.7421) | (7.8269, 9.4030) | (29.5404, 31.7814) | (11.0170, 12.5208) | (35.0391, 37.2568) |
| 9 | (7.4092, 8.9981) | (8.6552, 10.2086) | (11.9812, 13.5269) | (17.2378, 18.7421) | (7.8269, 9.4030) | (29.5404, 31.7814) | (11.0170, 12.5208) | (35.0391, 37.2568) |
| | (6.0988, 7.5692) | (7.4664, 8.9020) | (10.8180, 12.2461) | (16.3024, 17.6923) | (6.5554, 8.0132) | (29.5404, 31.7814) | (10.0795, 11.4685) | (35.0391, 37.2568) |
| 10 | (6.0988, 7.5692) | (7.4664, 8.9020) | (10.8180, 12.2461) | (16.3024, 17.6923) | (6.5554, 8.0132) | (29.5404, 31.7814) | (10.0795, 11.4685) | (35.0391, 37.2568) |
| | (5.0063, 6.3612) | (6.4779, 7.7996) | (9.8518, 11.1663) | (15.5371, 16.8184) | (5.4951, 6.8380) | (29.5404, 31.7814) | (9.3134, 10.5933) | (35.0391, 37.2568) |

Table 4. 95% CI for Waiting Time with Discrete processing times

| K | $W_{(BBS,K)}^d$ | $W_{(BBS,K)}^{1,1}$ | $W_{(BBS,K)}^{1,2}$ | $W_{(BBS,K)}^{1,3}$ | $W_{(BBS,K)}^{2,1}$ | $W_{(BBS,K)}^{2,2}$ | $W_{(BBS,K)}^{3,1}$ | $W_{(BBS,K)}^A$ |
|-----|-------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| | $W_{(BAS,K)}^d$ | $W_{(BAS,K)}^{1,1}$ | $W_{(BAS,K)}^{1,2}$ | $W_{(BAS,K)}^{1,3}$ | $W_{(BAS,K)}^{2,1}$ | $W_{(BAS,K)}^{2,2}$ | $W_{(BAS,K)}^{3,1}$ | $W_{(BAS,K)}^A$ |
| 8 | (9.1361, 10.7451) | (10.3494, 11.9244) | (13.8979, 15.4630) | (19.2787, 20.8145) | (9.5837, 11.1800) | (29.8420, 31.9665) | (12.5883, 14.1249) | (35.5041, 37.5986) |
| | (7.5450, 9.0354) | (8.9035, 10.3589) | (12.4949, 13.9403) | (18.1172, 19.5349) | (8.0430, 9.5202) | (29.8420, 31.9665) | (11.4126, 12.8305) | (35.5041, 37.5986) |
| 9 | (7.5450, 9.0354) | (8.9035, 10.3589) | (12.4949, 13.9403) | (18.1172, 19.5349) | (8.0430, 9.5202) | (29.8420, 31.9665) | (11.4126, 12.8305) | (35.5041, 37.5986) |
| | (6.2128, 7.5845) | (7.6959, 9.0328) | (11.3253, 12.6523) | (17.1660, 18.4691) | (6.7535, 8.1120) | (29.8420, 31.9665) | (10.4462, 11.7495) | (35.5041, 37.5986) |
| 10 | (6.2128, 7.5845) | (7.6959, 9.0328) | (11.3253, 12.6523) | (17.1660, 18.4691) | (6.7535, 8.1120) | (29.8420, 31.9665) | (10.4462, 11.7495) | (35.5041, 37.5986) |
| | (5.1002, 6.3556) | (6.6924, 7.9145) | (10.3557, 11.5683) | (16.3865, 17.5808) | (5.6769, 6.9194) | (29.8420, 31.9665) | (9.6530, 10.8463) | (35.5041, 37.5986) |

Table 5. 95% CI for Actual Waiting Time

| K | $W_{(BBS,K)}^{A-d}$ | $W_{(BBS,K)}^{A-(1,3)}$ | $W_{(BBS,K)}^{A-(2,2)}$ | $W_{(BBS,K)}^{A-(3,1)}$ |
|----|---------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | $W_{(BAS,K)}^{A-d}$ | $W_{(BAS,K)}^{A-(1,3)}$ | $W_{(BAS,K)}^{A-(2,2)}$ | $W_{(BAS,K)}^{A-(3,1)}$ |
| 8 | (34.9199, 35.3683) | (11.1232, 11.5794) | (7.4061, 7.7282) | (22.7512, 23.2524) |
| | (37.406, 37.9818) | (12.7128, 13.2896) | (7.2142, 7.5683) | (24.6927, 25.3099) |
| 9 | (37.406, 37.9818) | (12.7128, 13.2896) | (7.2142, 7.5683) | (24.6927, 25.3099) |
| | (39.684, 40.3958) | (14.2535, 14.9558) | (7.0417, 7.4233) | (26.5357, 27.2794) |
| 10 | (39.684, 40.3958) | (14.2535, 14.9558) | (7.0417, 7.4233) | (26.5357, 27.2794) |
| | (41.7373, 42.5893) | (15.7218, 16.5566) | (6.8805, 7.2878) | (28.2418, 29.1201) |

평균에서 ± 1 로 가정한 일양분포와 이 상한과 하한 값을 각각 0.5의 확률로 갖는 이산분포를 가정하였다. 이 경우에 공정시간의 변동계수가 각각 0.12~0.3와 0.2~0.5가 되며, 접합 노드에서의 대기시간이 버퍼의 크기와 무관한 결과를 보이고 있다. 일부 공정시간의 변동계수를 증대시킨 실험결과에서는 차이를 보이는 경우도 있었지만, 모든 조합에 대해 시뮬레이션을 실행할 수 없기에 일반화하지 못하였다.

4.4 접합공정 앞에서의 대기시간

먼저 도착 후 접합공정에서의 공정시작시점까지의 실제 대기시간을 살펴보자. 상수 공정시간의 경우 접합공정에서의 공정시작시간이 버퍼의 크기와 무관하기 때문에 처음 공정한 가상 공정에서의 대기시간이 더 긴 BBS 규칙이 더 짧은 실질 대기시간을 가짐을 쉽게 알 수 있다. Table 5의 첫 번째 열에 소개된 시뮬레이션 결과를 통해 공정시간이 일반분포인 경우를 살펴보면 라인 생산시스템의 경우와 마찬가지로 BAS 규칙이 더 긴 실질 대기시간을 보임을 알 수 있다.

$$W_{(BBS,K)}^{A-d} \leq W_{(BAS,K)}^{A-d}$$

이는 차단규칙의 정의에 따라 BAS 규칙은 BBS 규칙과 달리 일단 시스템에 진입한 후 차단 여부를 판단함에 따라 시스템 내에서 머무르는 실질 시간이 더 길어지는 것으로 이해할 수 있다.

다음으로 분기-접합 생산시스템의 특성상 하나의 분기 라인 공정을 완료한 작업이 다른 분기 라인의 작업이 완료될 때까지 기다려야 하므로 접합공정 앞에서의 대기시간을 살펴보면 다음과 같다. Table 5는 지수분포인 경우에 접합공정까지의 실제 대기시간과 각 분기 라인의 마

지막 공정을 완료한 후 접합공정의 시작시점까지의 대기시간으로 다른 분기 라인의 작업 완료를 기다리는 시간과 접합공정에서의 대기시간의 합을 의미한다. 시뮬레이션 결과로부터 다음의 관계를 알 수 있다. (예제 모형에서는 병목공정이 두 번째 분기 라인에 포함되어 있다.) 지수분포 외의 상수, 이산분포, 일양분포의 경우에 대한 시뮬레이션 결과는 생략하였지만, 동일한 관계를 보인다.

- 병목공정이 포함된 분기 라인 i 에 대해

$$W_{(BBS,K)}^{A-(i,m_i)} \geq W_{(BAS,K)}^{A-(i,m_i)}$$

- 병목공정이 포함되지 않은 분기 라인 i 에 대해

$$W_{(BBS,K)}^{A-(i,m_i)} \leq W_{(BAS,K)}^{A-(i,m_i)}$$

4.5 대기시간의 범위

Shaked and Shanthikumar(1994)에 소개된 일변량 확률변수(Theorem 2.A.9)와 다변량 확률변수(Theorem 5.A.5)에 대한 확률적 순서(stochastic order)의 결과를 응용하면 일반분포를 갖는 시스템에서의 대기시간에 대한 범위를 구할 수 있다.

간단히 소개하면, finite support인 확률변수 X 의 평균값을 $E(X)$, X 의 하한값과 상한값을 각각 l_X 와 u_X 로 두고, 이산확률변수 Z 를 다음과 같이 정의하자.

$$Z = \begin{cases} l_X & w.p. (u_X - E(X)) / (u_X - l_X) \\ u_X & w.p. (E(X) - l_X) / (u_X - l_X) \end{cases}$$

위와 같이 정의된 일변량 확률변수는 다음의 cx (convex order)관계를 만족한다.

$$E(X) \leq_{cx} X \leq_{cx} Z$$

또한, $X_j \leq_{cx} Y_j (j=1, \dots, m)$ 관계를 만족하는 확률 변수들은 component convex function $g(\cdot)$ 에 대해 다음의 icx (increasing convex order) 관계를 만족한다.

$$g(X_1, \dots, X_m) \leq_{icx} g(Y_1, \dots, Y_m)$$

앞서 소개한 대기시간에 대한 표현식이 확률변수들의 합과 최댓값의 함수로 정의되므로 증가 볼록함수 (increasing convex function)이다. 따라서 확률변수 X 에 대해 상수 $E(X)$ 와 이산확률변수 Z 를 정의하면 대기시간의 범위를 구할 수 있다. 시뮬레이션 실험을 통해 살펴 보면, 일양분포 공정시간을 갖는 시스템의 대기시간에 대한 하한값은 공정시간의 평균을 상수값으로 갖는 시스템, 상한값은 이산분포 공정시간을 갖는 시스템으로부터 구할 수 있다. 각각의 시뮬레이션 결과는 Table 3, Table 2와 Table 4에 소개되어 있다.

4.6 그 외의 성능특성치

이 외에 Seo(2019)에 소개된 바와 같은 방법으로 차단 확률을 구하거나 차단확률에 대한 조건을 만족하면서 대기시간(체류시간)을 최소로 하는 유한 버퍼의 크기를 결정하는 최적화 모형을 분석할 수 있다. 분석방법이 선행 연구와 같기 때문에 시뮬레이션 실험결과는 생략하였다.

가상노드의 공정시간이 0이므로 가상노드에서의 대기시간이 0이상인 경우는 차단현상이 발생한 경우를 말한다. 따라서 스프레드시트 시뮬레이션 모형에서 차단규칙 p 하에서 $W_{(p,K)}^d$ 를 계산한 후, COUNTIF)문을 이용하여 차단현상의 발생 비율인 $E_K(M/G/1)$ 모형에서 도착 고객이 K 명 이상을 볼 확률)를 구하고, 이 E_K 와 교통밀도 ρ 를 잘 알려진 $P_B = (1-\rho)E_K / (1-\rho E_K)$ 결과에 대입하면 차단확률을 구할 수 있다(Takagi, 1993; Seo et al. 2015). 또한, 평균 실질 대기시간, 버퍼 크기 그리고 평균 차단확률을 각각 목표셀, 조정셀로, 제약조건을 설정한 후 목표 셀의 값을 최소화하는 최적화 문제를 @RISK의 시뮬레이션 기반 최적화 기능인 RISKOptimizer 모듈을 통해 분석할 수 있다.

5. 결론

BBS와 BAS 차단규칙하에서 일반공정시간을 갖는 유한 버퍼 공유 분기-접합 생산시스템을 max-plus 대수를 활용하여 비교/분석하였다. 일반공정시간으로 인한 복잡

성으로 인해 해석적 분석보다는 스프레드시트 시뮬레이션 모형을 통해 대기시간과 관련된 시스템 특성치를 분석하였다. 분석결과에 따르면 두 차단규칙하에서 버퍼 공유 라인 생산시스템과 같은 특성을 보임을 확인할 수 있었으며(Seo, 2019), 병목공정의 위치에 따라 접합공정에서의 대기시간에 대한 대소 비교가 서로 다른 경향을 보임을 알 수 있었다. 또한, 확률적 순서(stochastic order) 이론의 결과를 활용하여 대기시간에 대한 상한 범위와 하한 범위를 도출하였다.

Max-plus 대수를 활용한 분석은 BBS와 BAS 외의 다양한 차단규칙과 서로 다른 차단규칙이 혼재된 시스템, 버퍼 부분 공유(partial buffer sharing) 시스템과 같은 재공품 재고 통제 시스템에 대한 분석도 가능할 것으로 생각된다. 특히, 상수 공정시간의 경우 표현식에 대한 상세한 분석을 통해 대기시간의 특성치에 대한 간결한 표현식의 도출도 흥미로운 연구주제가 될 것이다.

References

@RISK (2019) <http://www.palisade.com/risk> (Accessed January 21, 2019).

Ayhan, H. and D.-W. Seo (2001) "Laplace transform and moments of waiting times in Poisson driven (Max,+) linear systems", *Queueing Systems*, Vol. 37, No. 4, pp. 405-438.

Ayhan, H. and D.-W. Seo (2002) "Tail probability of transient and stationary waiting times in (Max,+) linear systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 47, No. 1, pp. 151-157.

Baccelli, F., G. Cohen, G. J. Olsder and J-P. Quadrat (1992) *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley and Sons.

Baccelli, F., S. Hasenfuss and V. Schmidt (1998) "Expansions for steady state characteristics in (Max,+) linear systems", *Stochastic Models*, Vol. 14, pp. 1-24.

Chen, R. J. (2011) "An Upper Bound Solution for Homogeneous Fork/Join Queueing Systems", *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, Vol. 22, No. 5, pp. 874-878.

Flatto, L and S. Hahn (1984) "Two parallel queues created by arrivals with two demands I," *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 44, pp. 1041-1053.

- Kim, C., and A. K. Agrawala (1989) "Analysis of the Fork-Join Queue", IEEE Transactions on Computers, Vol. 38, No. 2, pp. 250-255.
- Nelson, R. and A. N. Tantawi (1988) "Approximate Analysis of fork/Join Synchronization in Parallel Queues," IEEE Transactions on Computers, Vol. 37, No. 6, pp. 739-743.
- Seo, D.-W., J. Lee and B.-Y. Chang (2015) "An Approximation Method for Blocking Probabilities in $M/D/1/K1 \rightarrow \cdot /D/1/K2$ Queues", Asia-Pacific Journal of Operational Research, Vol. 32, No. 3, 1550017(12 pages).
- Seo, D.-W. (2019) "Spreadsheet Model Approach for Buffer-Sharing Line Production Systems with General Processing Times", Journal of the Korea Society for Simulation, Vol. 28, No. 2, pp. 119-129.
- (서동원 (2019) "일반 공정시간을 갖는 버퍼 공유 라인 생산시스템의 스프레드시트 모형 분석", 한국시물레이션학회 논문지, 제28권, 제2호, 119-129)
- Shaked, M. and J. G. Shanthikumar (1994) Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press.
- Takagi, H. (1993) Queueing Analysis, in: Finite Systems, vol. II, North-Holland.
- Thomasian, A. (2014) "Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems", ACM Computing Surveys, Vol. 47, No. 2, Article 17, January 2015, Article No. 17.
- Yang, D. and D.-W. Seo (2017) "Closed-form formulae for moment, tail probability, and blocking probability of waiting time in a buffer-sharing deterministic system", Operations Research Letters, Vol. 45, pp. 403-408.



서 동 원 (dwseo@khu.ac.kr)

1991 성균관대학교 산업공학과 학사
1996 성균관대학교 대학원 산업공학과 석사
2002 Georgia Institute of Technology, 산업시스템공학 박사
2003~ 현재 경희대학교 경영대학 경영학과 교수

관심분야 : 확률과정론, Series Expansion, (Max,+)-algebra, 시물레이션 응용