한국시뮬레이션학회 논문지
Vol. 28, No. 3, pp. 49-56 (2019. 9)

http://doi.org/10.9709/JKSS.2019.28.3.049
ISSN 1225-5904

채권 옵션의 가격결정을 위한 이자율 모형의 관계에 대한 알고리즘과 몬테 카르로 시뮬레이션

이광연 · 박기섭[†]

The Monte Carlo Simulation and Algorithm on the Relationship Interest Rate Models for the Pricing of Bond Options

Gwangyeon Lee · Kisoeb Park[†]

ABSTRACT

In this paper, we deal with two pricing of bond options using the relationship between the forward rate model and the Libor rate model. First, we derive a formula for obtaining discounted bond prices using the restrictive condition of the Ritchken and Sankarasubramanian (RS), and then use the volatility function relationship of the forward rate and the Libor rate models to find the analytic solution (AS) of bond options pricing. Second, the price of the bond options is calculated by simulating several scenarios from the presented condition using Monte Carlo Simulation (MCS).

Comparing the results of the implementation of the above two pricing methods, the relative error (RE) is obtained, which means the ratio of AS and MCS. From the results, we can confirm that the RE is around 3.9%, which means that the price of the bond options can be predicted very accurately using the MCS as well as AS.

Key words : Forward Rate model, Libor Rate model, Bond Options, Analytic Solution (AS), and Monte Carlo Simulation (MCS)

요 약

본 논문에서는 선도이자율 모형과 리보이자율 모형 사이의 관계를 이용하여 채권 옵션의 해석적인 해(Analytic Solution; AS)와 몬테 카르로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation; MCS)을 이용한 가격 결정을 다룬다. AS를 이용한 채권 옵션 가격 결정은 Ritchken and Sankarasubramanian (RS)의 제한 조건을 이용하여 할인된 채권 가격을 구하는 공식을 유도하고, 선도이자율과 리보이자율 모형의 변동함수 사이의 관계를 활용한다. MCS을 이용한 채권 옵션 가격 결정은 MCS을 이용하여 제시된 조건으로부터 여러 가지 예정된 전개의 시뮬레이션을 활용한다.

AS와 MCS을 이용한 가격 결정 방법을 실행하여 얻은 가격을 비교하면 AS와 MCS의 상대오차(Relative Error; RE)를 구할 수 있다. 이때 본 연구의 결과로부터 RE가 약 3.9%가 됨을 확인할 수 있다. 이것은 AS뿐만 아니라 MCS을 이용해도 채권 옵션의 가격을 매우 정확하게 예측할 수 있음을 의미한다.

주요어 : 선도이자율 모형, 리보이자율 모형, 채권 옵션, 해석적인 해, 몬테 카르로 시뮬레이션

* 이 논문은 2017년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2017R1E1A1A03070225)

Received: 18 July 2019, **Revised**: 19 September 2019, **Accepted**: 23 September 2019

† **Corresponding Author**: Kisoeb Park
E-mail: kisoeb@gmail.com
Dept. of Mathematics, Incheon National University, Korea

1. 서론

금융공학자들은 채권의 가격을 구하는 여러 가지 방법에 대한 이자율의 표준 모형을 얻기 위해 끊임없이 노력해오고 있다. 표준 모형을 얻는데 기초가 되는 것은 이자율의 기간구조이다. 제시된 조건이 모두 같을 때, 어떤 일정 시점에서 채권 만기까지의 기간과 채권 수익률 사

이의 관계를 채권 수익률의 기간구조(term-structure of bond yields) 또는 이자율의 기간구조(term-structure of interest rates)라 한다. 또 이자율의 기간구조를 그래프로 나타낸 것이 수익률곡선(yield curve)이라 하며, 수익률 곡선은 채권투자에 있어서 모든 분석의 기초가 된다.

투자금을 모으기 위해 정부, 금융기관, 기업 등이 발행하는 채권은 종류에 따라 수익률과 가격이 달라지며, 채권의 가격은 채권의 기간과도 밀접한 관련이 있다. 이때, 이자율의 기간구조를 파악하면 채권의 만기 또는 잔존기간별로 채권 수익률을 측정할 수 있게 되어 만기별 채권의 예상은 물론 채권 발행자가 자금을 조달하기 위하여 채권을 발행할 때 발행할 채권의 수와 가격을 정할 판단 기준을 세울 수 있다. 또 투자자는 만기가 같거나 다른 채권 사이의 수익률을 비교하고 예측할 수 있게 됨으로써 채권을 적기에 운용하여 이익을 창출할 기회를 얻게 된다. 이자율 기간구조는 은행의 VaR(Value at Risk) 시스템구축을 위해서 뿐만 아니라 채권의 가치평가, 채권투자의 성과평가, 자산-부채 관리, 이자율 예측, 이자율 관련 파생상품의 가격결정 등에 필수 불가결한 정보임에도 불구하고 우리나라의 경우에 이자율 기간구조에 대한 연구가 충분히 이루어져 있지 않다. 그래서 본 논문에서는 주어진 조건에서 가장 합리적인 이자율 기간구조의 모형을 정하는데 유용한 정보를 제공하고자 한다.

복잡한 금융시장에서 채권 옵션 가격결정은 매우 중요하기 때문에 이자율 기간구조에 대한 모형은 여러 연구에서 매우 중요하게 다루어지고 있다(Das and Foresi, 1996; Andrea and Alexei, 2007; Hainaut, 2016; Zhang, et al., 2018). 이자율 기간구조에 대한 모형의 선구자는 Vasick(1977), Brennan and Schwartz(1979)와 Cox, Ingersoll and Ross(1985)라 할 수 있으며, 이들이 제시한 모형은 투자자의 예상으로 채권 수익률이 결정되는 균형 모형(equilibrium models)에 기초하고 있다. Ho and Lee(1986), Hull and White(1990), Black, Derman and Toy(1990)와 Heath, Jarrow and Morton (HJM) (1992)는 균형 모형에서 나타나는 현재의 이자율 기간구조와 불일치하는 문제를 해결하기 위하여 무차익 모형(arbitrage-free models)을 기반으로 한 모형을 연구하였다. HJM 모형은 선도이자율(forward rate)의 확률과정을 가정하고 있으며, 무차익 조건만을 이용하여 도출했기 때문에 오늘날 가장 일반적인 이자율 기간구조에 대한 모형으로 여겨지고 있다. 하지만 HJM 모형은 무차익 조건을 이용한 대부분의 모형과 마찬가지로 관찰 불가능한 시장위험가격(market price of risk)을 활용하고, 시장위험가격은 측정하기 어려운 투자자의 효용함수를 활용하기 때문에 실증분석에 유용하지는 못한 것으로 알려져 있다. 일반적으로 시장위험가격은 투자자의 효용함수에 의존하기 때문에 측정이 더욱 어렵다. 또 HJM 모형에서 표현된 이자율 기간구조가 마코비안(Markovian) 속성을 갖지 못한다. 이 속성은 이자율의 동태적 변화가 경로 의존적(path-dependent)이며, 선도이자율의 모든 역사적 값들에 의존하여 실증적 검증을 어렵게 만든다. 이와 같이 다양한 문제점을 극복하기 위해 많은 학자들은 다양한 방법을 적용하여 이자율 기간구조에 대한 모형을 연구하고 있다(Hull and White, 1993; Carverhill, 1994; Ritchken and Sankarasubramanian, 1995; Bühler et al., 1999).

본 논문에서는 선도이자율에 대한 확률과정을 가정한 HJM 모형과 선도 리보이자율(forward Libor rate)에 기초하여 모형화한 Brace-Gatarek-Musiela (BGM)(1997) 모형과의 관계를 이용하여 채권 옵션 가격결정을 보다 쉽고 정확하게 결정할 수 있는 새로운 방법을 제시하고자 한다. BGM 모형은 HJM 모형의 부분집합이라고 할 수 있을 만큼 무차익 조건(Musiela and Rutkowski, 2005)도 자동적으로 만족한다. 그래서 선도이자율 모형과 리보이자율 모형과의 관계를 이용하면 채권 옵션 가격의 해석적인 해(Analytic Solution; AS)를 구할 수 있다. 또, 몬테카르로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation; MCS)을 이용하여 여러 가지 예정된 전개의 시뮬레이션으로 채권 옵션의 가격을 결정할 수 있다. 가격결정 방법의 실행결과를 비교하여 AS와 MCS의 상대오차(Relative Error; RE)를 구할 수 있다. 이때 얻은 RE로부터 AS와 MCS을 이용한 채권 옵션의 가격이 어느 정도 정확하게 예측되었는지 판단할 수 있는 근거를 얻을 수 있다.

본 논문에서는 선도이자율 모형의 기본적인 개념들을 소개하고, 선도이자율 모형과 리보이자율 모형사이의 관계를 이용하여 채권 옵션 가격결정의 AS과 MCS을 이용하여 여러 가지 예정된 전개의 시뮬레이션으로 채권 옵션의 가격을 결정할 수 있는 구체적인 시뮬레이션 과정에 대한 알고리즘을 제시한다.

2. 본론

2.1 선도이자율 모형의 기본적인 개념

이자율 기간구조 모형은 만기가 서로 다른 만기수익률(yield-to-maturity)의 동태적 현상을 설명하며, 만기수익률사이의 관계를 나타내거나 무이표채(zero-coupon bond)

의 가격, 또는 선도이자율의 만기와의 관계로 표시된다. 즉, 만기가 T인 무이표채의 t시점에서의 가격을 $B(t,T)$라 하고, 이 채권의 선도이자율을 $f(t,T)\,(T \geq t)$라 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right) \tag{1}$$

시간 t에서 현물이자율(spot rate) $r(t)$는 선도이자율의 극한을 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$r(t) = \lim_{T \to t} f(t,T) = f(t,t) \tag{2}$$

만기가 T일 때, 확률적 요소를 선도이자율로 가정한 HJM 모형의 일반적인 확률미분방정식(Stochastic Differential Equation; SDE)은 다음과 같다.

$$df(t,T) = \mu_f(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f_i}(t,T)dW_i(t) \tag{3}$$

여기서 $\mu_f(t,T)$는 기대 수익률, $\sigma_{f_i}(t,T)$은 변동성, 그리고 $W_i(t)$는 n개의 독립적인 위너과정(Wiener process)을 갖고 n 차원 벡터로 선도이자율이 n개의 확률변수에 의해 결정됨을 의미한다.

HJM 모형에서는 무차익 조건을 이용하여 다음의 관계를 만족할 때만이 유일한 위험중립 확률측도(risk-neutral probability measure)가 존재함을 보였다.

$$\mu_f(t,T) = -\sum_{i=1}^{n} \sigma_{f_i}(t,T)\left(\lambda_i(t) - \int_t^T \sigma_{f_i}(t,s)ds\right) \tag{4}$$

여기서 $\lambda_i(t)$는 i번째 확률변수 $W_i(t)$에 대한 시장위험가격으로 만기 T에 대하여 독립이다.

Equation (3)에 무차익 조건인 Equation (4)를 대입하고, Girsanov의 정리(Girsanov, 1960)를 이용하여 위험중립측도(risk-neutral measure) Q하에서 선도이자율이 한 개의 확률 변수에 의해 변화하는 경우를 가정하면 명확하게 나타낼 수 있다. 즉, 단일 확률 변수에 의해 움직이는 경우 Equation (3)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$df(t,T) = \sigma_f^*(t,T)dt + \sigma_f(t,T)dW^Q(t) \tag{5}$$

여기서 $\sigma_f^*(t,T) = \sigma_f(t,T)\int_t^T \sigma_f(t,s)ds$이고, $dW^Q(t) = dW(t) + \lambda(t)dt$는 위험중립측도 Q에 의해 생성된 표준 위너과정이다.

한편, Equation (5)에 대한 확률적분방정식(stochastic integral equation)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(t,T) - f(0,T) \\ = \int_0^t \sigma_f^*(s,T)ds + \int_0^t \sigma_f(s,T)dW^Q(s) \end{aligned} \tag{6}$$

이때, 선도이자율에 대한 조건부 기댓값과 분산은 정규분포를 따르므로 다음과 같다.

$$f(t,T) \sim \mathrm{N}\left(f(0,T) + \int_0^t \sigma_f^*(s,T)ds, \int_0^t \sigma_f^2(s,T)ds\right)$$

2.2 선도이자율 모형과 리보이자율 모형사이의 관계

채권 옵션 가격을 결정하는 방법을 알아보기 전에 BGM 모형에 대하여 간단히 알아보자. 미래 시간구간 $[T, T+\delta]$에 대하여 시간 t에서의 선도 δ-리보이자율(forward δ-Libor rate) $L(t,T)$은 선도 마팅게일 측도(forward martingale measure)에서 로그노말분포(lognormal distribution)를 따른다. Equation (1)로 부터 선도 δ-리보이자율 $L(t,T)$에 대한 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$1 + \delta L(t,T) = \frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}$$

여기서 양수 $\delta(\delta = 0.25, 0.5, ...)$를 리보(Libor)의 테너(tenor)[1]라고 한다.

이제 채권 옵션 가격을 결정하기 위하여 Equation (6)의 양변에 t부터 T까지의 적분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t,s)ds &= \int_t^T f(0,s)ds \\ &+ \int_0^t \int_t^T \sigma_f^*(u,s)duds \\ &+ \int_0^t \int_t^T \sigma_f(u,s)dsdW^Q(u) \end{aligned} \tag{7}$$

1) 금융상에서 테너는 채무발생일로부터 만기일까지의 기한이다.

이때, Equation (7)을 Equation (1)에 대입하면 다음과 같은 무이표채 방정식을 얻을 수 있다.

$$B(t,T)=\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\left(-\int_0^t\int_t^T\sigma_f^*(u,s)dsdu + \int_0^t\int_t^T\sigma_f(u,s)dsdW^Q(u)\right) \quad (8)$$

한편, Equation (2)로부터 현물이자율은 선도이자율의 특별한 형태임을 알 수 있다. 즉, Equation (6)에서 시간 $T=t$이면 현물이자율 $r(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r(t)=f(0,t) + \int_0^t\sigma_f^*(s,T)ds+\int_0^t\sigma_f(s,T)dW^Q(s) \quad (9)$$

Equation (9)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\int_0^t\sigma_f(s,T)dW^Q(s) = r(t)-f(0,t)-\int_0^t\sigma_f^*(s,T)ds \quad (10)$$

Equation (10)을 Equation (8)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 무이표채에 대한 방정식을 얻을 수 있다.

$$B(t,T)=\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp(-\frac{1}{2}\Gamma^2\Psi - \Gamma[f(0,t)-r(t)]) \quad (11)$$

여기서 $\Gamma=\frac{\int_t^T\sigma_f(t,s)ds}{\sigma_f(t,T)}$, $\Psi=\int_0^t\sigma_f^2(s,t)ds$.

Equation (11)로부터 무이표채의 가격은 두 개의 상태변수인 현물이자율 $r(t)$과 선도이자율의 누적분산 Ψ로 나타낼 수 있으며, 이들은 현재 가치에만 의존하기 때문에 마코비안 속성을 갖게 됨을 알 수 있다. 따라서 두 상태변수의 값을 알면 모든 채권의 가격을 구할 수 있다.

이것을 구하기 위해 선도이자율 모형의 변동함수 $\sigma_f(t,T)$와 리보이자율 모형의 변동함수 $\gamma(t,T)$를 이용하자. 위험중립측도 Q하에서 동적인 선도 δ-리보이자율에 대한 BGM 모형의 SDE는 다음과 같다.

$$dL(t,T)=L(t,T)\gamma(t,T)(\sigma_f(t,T)dt+dW^Q(t)) \quad (12)$$

Equation (12)을 변동함수 $\gamma(t,T)$에 관해 다시 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\gamma(t,T)=\frac{1+\delta L(t,T)}{\delta L(t,T)}\int_T^{T+\delta}\sigma_f(t,u)du \quad (13)$$

마지막으로, 선도이자율 $f(t,T)$와 선도 δ-리보이자율 $L(t,T)$의 관계에 대하여 알아보자.

Equations (5)와 (12)의 양변에 적분을 취하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int_0^T\sigma_f(s,T)dW^Q(s) = r(T)-f(0,T)-\int_0^T\sigma_f^*(s,T)ds \quad (14)$$

$$\int_0^T\gamma(s,T)dW^Q(s)=\ln L(T,T) - \ln L(0,T)-\int_0^T\gamma(s,T)\sigma_f(s,T)ds \quad (15)$$

여기서 $r(T)=f(T,T)$이므로, Equation (15)에 Equation (13)을 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\int_0^T\sigma_f(s,T)dW^Q(s) = \frac{\ln L(T,T)-\ln L(0,T)-\int_0^T\gamma(s,T)\sigma_f(s,T)ds}{\int_T^{T+\delta}\frac{1+\delta L(t,u)}{\delta L(t,u)}du} \quad (16)$$

또, Equation (14)에 Equation (16)을 대입하여 정리하면 선도이자율 $f(t,T)$와 선도 δ-리보이자율 $L(t,T)$에 대한 SDE로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$f(0,T)=r(T)-\int_0^t\sigma_f^*(s,T)ds - \frac{\ln L(T,T)-\ln L(0,T)-\int_0^T\gamma(s,T)\sigma_f(s,T)ds}{\int_T^{T+\delta}\frac{1+\delta L(t,u)}{\delta L(t,u)}du} \quad (17)$$

여기서 선도이자율은 정규분포를 따른다.

2.3 채권 옵션의 가격결정의 해석적인 해를 구하는 알고리즘과 몬테 카르로 시뮬레이션

이 절에서는 채권 옵션의 가격결정을 위한 AS를 구하는 알고리즘과 MCS을 제시한다. 이때 알고리즘 실행과 시뮬레이션의 결과는 Mathematica[2]를 이용한다. Ritchken and Sankarasubramanian (RS)(1995)는 무이표채 가격이 경로 비의존적이기 위해서는 선도이자율의 변동함수가 임의의 함수 $a(s)$에 대해 Equation (11)의 관계를 만족할 경우 이자율 기간구조는 두 개의 상태변수를 갖는 마코프과정으로 표시될 수 있음을 보였다. 따라서 선도 이자율과 리보 이자율의 관계를 이용하여 채권 옵션 가격의 AS를 얻는 알고리즘은 다음과 같다.

[1] 채권 옵션 가격결정의 AS를 구하는 알고리즘

① 선도이자율의 변동함수를 다음과 같이 가정한다.

$$\sigma_f(t,T)=\sigma_r(t)\exp\left(-\int_t^T a(s)ds\right) \qquad (18)$$

② Equations (17)과 (18)을 Equation (11)에 대입하여 정리하여 무이표채 가격을 구하는 공식을 얻는다.

③ 행사가격(exercise price) K인 할인된 채권의 만기가 T_B 이고 옵션의 만기 $T(<T_B)$일 때, 콜옵션(call option)의 가격 $C(t,T)$과 풋옵션(put option)의 가격 $P(t,T)$를 다음과 같이 정의한다.

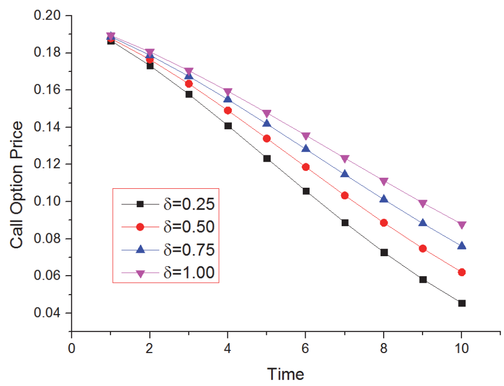
$$C(t,T)=B(t,T_B)\Phi(d_1)-KB(t,T)\Phi(d_2),$$
$$P(t,T)=B(t,T_B)(K\Phi(-d_2)-\mathrm{E}[\overline{B}]\Phi(-d_1)) \qquad (19)$$

여기서 $d_1=\dfrac{\ln([\mathrm{E}[\overline{B}]]/K)+\sigma_B^2/2}{\sigma_B}$, $d_2=d_1-\sigma_B$, $\mathrm{E}[\bullet]$는 무위험 측도를 대표하는 기댓값 연산자, $\Phi(\bullet)$는 누적표준정규분포함수, $\mathrm{E}[\overline{B}]=B(t,T_B)/B(t,T)$, $\mathrm{Var}[\ln\overline{B}]=\mathrm{Var}[\ln B(T,T_B)]=\sigma_B^2$이다.

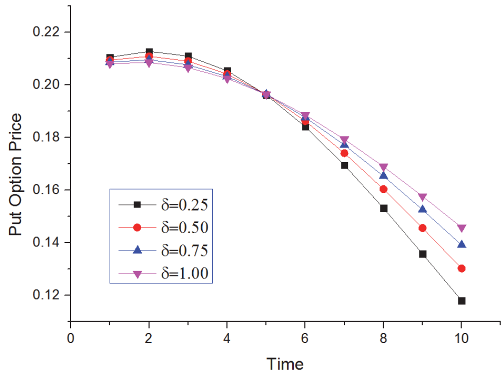
④ 모수의 값 r_0, a, L_0, t_0, t, T, T_B, 와 행사가격 K를 정하여 알고리즘을 실행한다.

예를 들어 위의 알고리즘에서 모수의 값을 각각 $r_0=0.058$, $a=0.046$, $L_0=0.0219$, $t_0=0$, $t=0.05$, $T=T_B-0.5$, $T_B=1,\ldots,10$으로 가정하고 $C(t,T)$과 $P(t,T)$의 행사가격을 각각 $K=0.8$과 $K=1.2$라 놓으면 Figures 1과 2와 같은 결과를 얻는다.

2) Mathematica는 수학용 컴퓨터 프로그램이다.



(a) Call Option

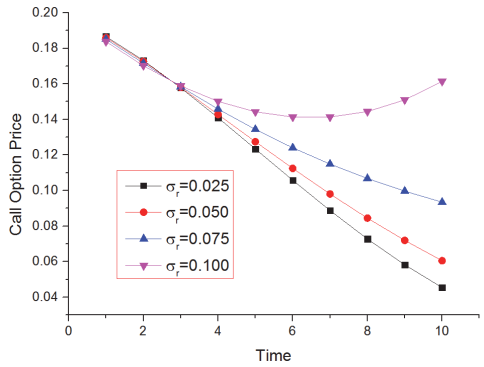


(b) Put Option

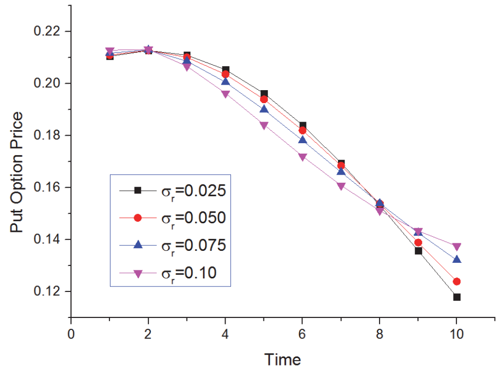
Fig. 1. Bond Options Price(δ: tenor, $\sigma_r=0.025$)

Figure 1은 δ의 영향에 대한 4가지 종류의 채권 옵션 가격 곡선이다. 여기서 이자율의 변동성을 $\sigma_r=0.025$라고 가정하자. Figure 1의 특성은 곡선의 접선의 기울기가 음으로 옵션가격과 시간(만기)은 역관계가 되어 기간이 증가하면 옵션가격은 낮아짐을 의미한다. 특히, Figure 1b의 네 개의 곡선은 만기가 5년일 때 거의 같은 점을 통과하는데, 이때 풋옵션의 가격은 약 0.196이다. 이 점을 기점으로 하여 곡선이 하향하는 정도는 δ에 따라 달라진다. Figure 2는 $\delta=0.25$일 때, σ_r이 증가함에 따른 4가지 종류의 채권 옵션 가격 곡선을 보여준다.

Figure 2a의 특성은 $\sigma_r=0.1$일 때, 콜옵션의 그래프는 만기가 6년 이후부터 현재가치가 증가하여 험프(hump)가 생기는 모양이라는 것이다. 또한, Figure 2b의 곡선은 거의 동일한 두 개의 점을 통과하는데 만기가 2년과 8년일 때 풋옵션의 가격이 각각 약 0.213과 0.153이 됨을 알 수 있다. Figures 1과 2로부터, δ와 σ_r이 증가함에 따라 그래프의 접선의 기울기가 급하게 변한다면, δ와 σ_r이



(a) Call Option



(b) Put Option

Fig. 2. Bond Options Price
(σ_r: volatility of interest rate, $\delta = 0.25$)

증가할수록 가격 대비 만기의 민감도가 높아짐을 알 수 있다.

이제 MCS의 알고리즘에 대하여 알아보자. MCS은 랜덤 샘플링을 기초로 한 수치 적분으로 표현할 수 있으므로, MCS을 이용하여 여러 가지 예정된 전개의 시뮬레이션으로 채권 옵션의 가격을 결정할 수 있다. 채권 옵션 가격 결정에 대한 구체적인 시뮬레이션 과정은 다음과 같다.

[2] 채권 옵션 가격에 대한 MCS

① 구간 $[t,T]$을 m개로 나눈 각 구간 Δt에 대하여, Equation (5)를 이산적으로 다음과 같이 나타낸다.

$$f_j = f_{j-1} + \sigma_f(t,T)\int_t^T \sigma_f(t,s)\,ds\,\Delta t + \sigma_f(t,T)\epsilon_j\sqrt{\Delta t} \quad (20)$$

여기서 선도이자율의 변동함수는 Equation (18)이고, $\epsilon_j (j=1,2,\cdots,m)$는 표준정규분포를 따르고 $\epsilon_j \sim N(0,1)$로 나타낸다.

② Equation (20)과 n개의 선도이자율의 샘플링을 통하여 무이표채 가격을 다음식으로부터 얻는다.

$$B(t,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}\Delta t\right) \quad (21)$$

여기서 f_{ij}는 $t+i\Delta t$에서 j번째 시나리오에 대한 선도이자율의 가치이다.

③ 채권 옵션 가격을 결정하기 위하여 Δt에 대하여 콜옵션과 풋옵션 Equation (19)을 다음과 같이 이산적으로 나타낸다.

$$C(t,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}\Delta t\right)\max\left(B_i(t,T_B)-K,0\right),$$

$$P(t,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}\Delta t\right)\max\left(K-B_i(t,T_B),0\right)$$

여기서 $B_i(t,T_B)$는 Equation (21)에 의해서 얻은 채권 가격을 의미하고, $0<t<T<T_B$이다.

④ MCS의 결과가 예리하게 예측되었는지를 확인하기 위한 평균 가치평가의 예리한 측정의 하나인 평균제곱오차(mean squared error; MSE)를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{MSE} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad 또는 \quad n = \frac{s^2}{\mathrm{MSE}^2}$$

여기서 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\exp\left(-\sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}\Delta t\right)\Phi_i\right]^2$ 이고

Φ_i는 $\max(B_i(t,T_B)-K,0)-C(t,T)$ 또는 $\max(K-B_i(t,T_B),0)-P(t,T)$이고, 채권 옵션 가격의 분산 추정치로써 선도이자율의 n 샘플 경로로부터 얻는다.

⑤ 평균의 정밀도(precision; PCS)를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{PCS}(\%) = 1.96 \times \mathrm{MSE} \times 100 \quad (22)$$

Equation (22)에서 PCS의 값이 작을수록 MCS의 결과가 예리하게 평가되었음을 의미한다.

⑥ 시뮬레이션을 n번 시행한다.

예를 들어 시간구간 1년에 대하여 $m=100$, $n=1000$, $\Delta t = (T-t)/m$, $t=0$과 $T=1$로 하고, 알고리즘 [1]에서 가정한 모수의 값을 이용하여 MCS을 시행하면 Table 1과 같은 결과를 얻는다.

또 알고리즘 [1]과 [2]를 실행하여 얻은 두 가지 채권 옵션 가격결정 방법의 결과를 비교하기 위하여, AS의 값과 MCS의 값의 비율인 다음과 같이 정의되는 상대오차(Relative Error; RE)를 이용할 수 있다.

$$RE(\%) = \frac{|AS - MCS|}{AS} \times 100$$

Table 1. Bond Options Price using MCS ($\delta = 0.25,\ \sigma_r = 0.025$)

	Call Option	Put Option
AS	0.188809	0.210507
MCS	0.179294	0.213714
|AS-MCS|	0.00731476	0.00320749
PCS(%)	0.00517877	0.00662881
RE(%)	3.91983	1.5237

Table 1로부터 MCS을 통해서 얻는 채권의 콜옵션과 풋옵션 가격의 PCS의 값이 상당이 작다는 것을 알 수 있으며, 이는 매우 예리하게 채권 옵션 가격이 결정되었음을 입증한다. 또 RE가 각각 약 3.9%와 1.5%가 됨을 확인할 수 있는데, 이것은 AS뿐만 아니라 MCS을 이용해도 채권 옵션의 가격을 매우 정확하게 예측할 수 있음을 의미한다.

3. 결론

본 연구에서는 선도이자율과 리보이자율 모형사이의 관계를 이용하여 채권 옵션의 가격을 추정하였다. 선도이자율을 이용하여 기간구조를 추정하는 HJM 모형의 추정은 현물시장과 선물시장간의 관계를 이해하는데 도움이 될 수 있으며 양 시장의 효율성을 평가하는 잣대로 활용될 수 있는 이점이 있다. 하지만 선물시장이 활성화되어 있지 않고 경로 의존적이라는 단점을 가지고 있기 때문에 채권 옵션의 가격을 성공적으로 추정하는 데에는 많은 어려움이 있다. 이런 어려움을 해결하기 위하여 RS의 제한 조건과 HJM과 BGM 모형의 변동함수 관계를 이용하여 마코비안 속성을 갖게 하여 그 어려움을 해결하여 무이표채 가격을 결정하였다. 이 결과를 이용하여 채권 옵션 가격의 AS을 구하는 알고리즘 [1]을 제시하였다. 이 알고리즘을 이용하여 δ와 σ_r의 영향에 대해 각각 4가지 종류의 채권 옵션 가격과 만기와의 관계를 곡선으로 표현하였다. 이 곡선의 기울이가 음이라는 것은 채권 옵션 가격과 만기는 역관계를 갖는다는 것이고, 곡선의 기울기가 급하다는 것은 채권 옵션 가격 대비 만기의 민감도가 크다는 것을 의미한다. 또한, 위너 과정을 따르는 SDE의 이산 방정식에 대한 MCS을 통하여 채권 옵션 가격을 알고리즘 [2]를 시뮬레이션하여 구하였다. Table 1에서 알 수 있듯이 MCS을 이용한 채권의 콜옵션과 풋옵션 가격의 PCS이 각각 약 0.005%와 0.006%로 상당이 작다는 것을 알 수 있었고, 이는 매우 예리하게 평가되었음을 의미한다. 두 가지 가격결정 방법의 실행 결과를 비교하기 위하여 RE를 이용하였고 채권의 콥옵션과 풋옵션 가격의 RE가 각각 약 3.9%와 1.5%가 됨을 확인할 수 있었다. 이 결과로부터 우리가 제시한 AS와 MCS을 이용한 두 가지 채권 옵션 가격결정의 알고리즘이 채권 옵션의 가격을 매우 정확하게 예측되었음을 확인하였다.

본 논문에서는 우리나라 이자율 기간구조에 대한 연구가 부족한 상황에서 이자율 모형의 관계를 이용하여 채권 옵션 가격결정을 보다 쉽고 정확하게 결정할 수 있는 새로운 방법을 제시하였다. 앞으로 제시된 조건을 약화하여 보다 일반적인 경우에 적용할 수 있는 방법으로의 연구가 더 필요하다. 아울러 채권 옵션 가격결정을 하기 위한 이와 같은 방법은 가격결정과 비슷한 변동성을 가지고 있는 고속도로의 교통량을 예측하는 데에도 활용할 수 있을 것으로 기대된다. 따라서 본 연구에서 다룬 두 가지 시뮬레이션 기법은 채권 옵션 가격결정 뿐만 아니라 다양한 분야에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

References

Andrea, B. and J. Alexei (2007) "Habit Formation and Macroeconomic Models of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 62, 3009-3063.

Ang, A. and M. Piazzesi (2003) "A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics withmacroeconomic and latent variables", *Journal of Monetary Economics*, 50, 745-787.

Black, F., E. Derman and W. Toy (1990) "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, 46, 33-39.

Brace, A., D. Gatarek and M. Musiela (1997) "The market model of interest rate dynamics", *Mathematical Finance*, 7, 127-155.

Brennan, M. and E. Schwartz (1979) "A Continuous

Time Approach to the Pricing of Interest Rates", *Journal of Banking and Fiance*, 3, 133-155.

Bühler, W., M. Uhrig-Homburg, U. Walter and T. Weber (1999) "An Empirical Comparison of Forward-Rate and Spot-Rate Models for Valuing Interest-Rate Options", *The Journal of Finance*, 54, 269-305.

Carverhill, A. (1994) "When is Spot Rate Markovian?", *Mathematical Finance*, 4, 305-312.

Chiarella, C. and O.K. Kwon (2001) "Classes of Interest Rate Models under the HJM Framework", *Asia-Pacific financial markets*, 8, 1-22.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1985) "A Theory of the Term Structure of Interest Rate", *Econometrica*, 53, 385-407.

Das, S.R. and S. Foresi (1996) "Exact solutions for bond and option prices with systematic jump risk", *Review of Derivatives Research*, 1, 7-24.

Girsanov, I.V. (1960) "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures", *Theory of Probability and Its Applications*, 5, 285-301.

Hainaut, D. (2016) "A model for interest rates with clustering effects", *Quantitative Finance*, 16, 1203-1218.

Health, D., R. Jarrow and A. Morton (1992) "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 60, 77-105.

Ho, T.S. and S. Lee (1986) "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *The Journal of Finance*, 41, 1011-1028.

Hull, J. and A. White (1990) "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, 573-592.

Hull, J. and A. White (1993) "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices", *Advances in Futures and Options Research*, 6, 1-13.

Musiela, M. and M. Rutkowski (2005) *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, 2nd Edition.

Ritchken, P. and L. Sankarasubramanian (1995) "Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure", *Mathematical Finance*, 5, 55-72.

Vasicek, O.A. (1977) "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

Zhang, X., J. Xiong and Y. Shen (2018) "Bond and option pricing for interest rate model with clustering effects", *Quantitative Finance*, 19, 969-981.

이 광 연 (gylee@hanseo.ac.kr)

1987 성균관대학교 수학과 학사
1989 성균관대학교 수학과 석사
1992 성균관대학교 수학과 박사
1996~ 1997 미국 와이오밍주립대학교 박사후과정
2004~ 2006 미국 아이오와주립대학교 방문연구교수
1992~ 현재 한서대학교 수학과 교수

관심분야 : 산업수학, 조합론, 수학사

박 기 섭 (kisoeb@gmail.com)

1999 한서대학교 수학과 학사
2001 성균관대학교 수학과 석사
2007 성균관대학교 수학과 박사
2008~ 2010 King's College London(영국) 학진해외포닥
2013~ 2016 성균대학교 수학과 초빙교수
2016~ 현재 인천대학교 수학과 객원교수

관심분야 : 산업수학, 데이터분석&시뮬레이션, 금융수학, 편미분방정식