

제어 알고리즘 구현을 위한 새로운 미분값 유도 방법

New approach method of finite difference formulas for control algorithm

김 태 엽^{*★}

Tae-Yeop Kim^{*★}

Abstract

Difference equation is useful for control algorithm in the microprocessor. To approximate a derivative values from sampled data, it is used the methods of forward, backward and central differences. The key of computing discrete derivative values is the finite difference coefficient. The focus of this paper is a new approach method of finite difference formula. And we apply the proposed method to the recursive least squares(RLS) algorithm.

요 약

마이크로프로세서를 이용한 제어알고리즘 구현에서 차분방정식이 매우 유용하게 사용된다. 샘플링 데이터로부터 미분 값을 추정하기 위해 전향, 후향 및 중심 차분 방식이 사용되어왔다. 차분 값을 계산하기 위해서는 차분계수가 매우 중요하다. 본 논문에서는 유한 차분 계수를 계산하기 위한 새로운 방식을 제시하고자 한다. 제안된 방식의 유효성을 입증하기 위해 RLS 알고리즘을 적용한 파라미터 추정에 대하여 적용하였다.

Key words : Finite difference formula, finite difference coefficient, derivative value, recursive least squares

1. 서론

마이크로 컨트롤러의 사용이 보편화되고 고성능 화됨에 따라 새롭고 지능적인 제어 전략을 개발 및 구현할 수 있게 되었다. 마이크로 컨트롤러를 사용하는 제어는 AD변환, 제어 알고리즘, PWM 등의 과정으로 구성된다.

디지털 제어에서는 A/D를 사용하며 연속시간 데이터를 이산시간으로 변환된다. 또한 미분방정식을 이산시간에 적용하기 위해 차분방정식으로 변환한다. 변환 방법은 전향, 후향 및 중앙 방식 등이 사용된다. 이러한 변환 과정은 오차를 수반하며, 오차

를 감소시키기 위해서 A/D 샘플링 주파수를 높이는 방법이 일반적으로 적용된다. 하지만 고속 샘플링은 전 값과 현재 값의 차분 값이 줄어들게 된다. 이는 제한된 A/D 분해능을 고려할 때 양자화 오차가 차분 값에 주는 영향이 커지게 되므로 적절한 샘플링 주기가 선정되어야 한다.

제어 알고리즘에서 미분값을 필요로 하는 경우 A/D 샘플링 데이터에서 차분 값을 계산하는 방법으로 근사하여 사용한다. 차분 값의 계산방법은 전향, 후향 및 중앙 방식에 많이 사용되고 있으며, 사용되는 데이터 수, 미분 차수 및 적용방식에 따른 각각의 변환 계수가 제공되고 있다^{[1][2][3]}.

* Dept. of Electrical Eng., Changwon Nat'l University

★ Corresponding author

E-mail : drkimty@naver.com, Tel : +82-55-267-1146

Manuscript received Sep. 4, 2019; revised Sep. 18, 2019; accepted Sep. 19, 2019.

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

본 논문에서는 변환계수를 쉽게 유도할 수 있는 방법을 제시하고, 1차 차분값을 이용하여 고차 차분값을 계산하는 방법 및 결과를 제시한다.

파라미터 추정 알고리즘으로 RLS(recursive least squares) 기법이 많이 사용된다^{[4][5]}. RLS 알고리즘에서 시스템 모델을 이산방정식으로 표현하여 많이 적용한다. 하지만 추정 결과는 이산 모델의 파라미터이므로 결과를 회로 설계 등에 직접 적용하는 것은 어렵다.

본 논문에서 시스템 상태방정식의 미분값을 안다고 가정하고, 선형 방정식을 이용하여 RLS 기법을 적용함으로써 회로의 파라미터가 직접 추정되는 것을 모의실험으로 확인하였다^[5].

II. 샘플링 데이터 개수 별 미분값 유도

1. 2차 샘플링 적용

데이터(y_0, y_1)를 이용한 차분값은 식(1)과 같으며, 결과 값은 샘플 시간 0.5에 근접한 차분값($\hat{y}_{0.5}$)이다. 샘플시간 0.5에서 차분값($\hat{y}_{0.5}$)과 미분값($\dot{y}_{0.5}$)의 오차(ϵ)는 식(2)와 같다.

$$\hat{y}_{0.5} = (y_1 - y_0) / t_s \tag{1}$$

$$\dot{y}_{0.5} = \hat{y}_{0.5} + \epsilon \tag{2}$$

2개의 샘플 데이터로는 시간 0, 1에 해당하는 미분값(\dot{y}_0, \dot{y}_1)을 계산할 수 없다.

2. 3차 샘플링 적용

데이터(y_0, y_1, y_2)가 3개인 경우 차분값($\hat{y}_{0.5}, \hat{y}_{1.5}$)은 식(3)와 같다.

$$\begin{aligned} \hat{y}_{0.5} &= (y_1 - y_0) / t_s = \Delta_{0.5} \\ \hat{y}_{1.5} &= (y_2 - y_1) / t_s = \Delta_{1.5} \end{aligned} \tag{3}$$

식(3)의 차분값 $\hat{y}_{0.5}, \hat{y}_{1.5}$ 의 변화량을 Δ_1^2 로 정의하고, 이는 식(4)와 같다. 식(4)는 이차 미분값이 아니므로 샘플링 시간(t_s)을 적용하지 않는다.

$$\Delta_1^2 = \hat{y}_{1.5} - \hat{y}_{0.5} \tag{4}$$

식(4)의 절반($\Delta_1^2/2$)을 식(3)에 대입하면 y_1, y_2 에 대한 미분 추정값은 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &\approx \hat{y}_{0.5} - \Delta_1^2/2 \\ \dot{y}_1 &\approx \hat{y}_{0.5} + \Delta_1^2/2 = \hat{y}_{1.5} - \Delta_1^2/2 \\ \dot{y}_2 &\approx \hat{y}_{1.5} + \Delta_1^2/2 \end{aligned} \tag{5}$$

식(5)을 샘플 데이터(y_0, y_1, y_2)에 대해 변환하면 차분값(\hat{y}_N)은 식(6)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &\approx \hat{y}_0 = (-y_2 + 4y_1 - 3y_0) / 2t_s \\ \dot{y}_1 &\approx \hat{y}_1 = (y_2 - y_0) / 2t_s \\ \dot{y}_2 &\approx \hat{y}_2 = (3y_2 - 4y_1 + y_0) / 2t_s \end{aligned} \tag{6}$$

위의 과정을 고차 샘플링 계산에 적용하기 위해 편의상 다음과 같이 치환한다. 식(3)의 차분값($\hat{y}_{0.5}, \hat{y}_{1.5}$)은 대문자(B, D, ...)으로 치환하고, 계산의 목적으로 하는 차분값($\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2$)은 소문자(a, c, e ...)로 치환한다.

샘플링 간격 1에 대하여 식(3)과 식(4)는 표 1과 같이 정리되고, 차분값의 변화량은 $\Delta_1^2 = D - B$ 이다. 2차 차분값은 $d^2y \approx \Delta_1^2/t_s$ 이고, 고차 미분값은 3장에서 정리하였다.

샘플링 간격을 0.5라고 가정하면 이에 대한 차분의 변화량($\delta_{(n)}^2$)은 표 2로 정리된다. 표 1과 2에서 차분의 변화량의 관계는 식(7)과 같다.

$$\Delta_1^2 = \delta_{0.75}^2 + \delta_{1.25}^2 \tag{7}$$

Table 1. Difference value at 3 sampled data(N).

표 1. 샘플 데이터 3개의 차분값(N)

Data	$\hat{y}_N = \Delta_N$	Δ_N^2
y_0		
	$B = \hat{y}_{0.5} = (y_1 - y_0) / t_s$	
y_1		$\Delta_1^2 = (D - B)$
	$D = \hat{y}_{1.5} = (y_2 - y_1) / t_s$	
y_2		

표 2와 식(7)에서 $\delta_{0.75}^2, \delta_{1.25}^2$ 의 분배에 대한 정보가 없으며, 이를 동일 간격으로 가정하면 $\Delta_1^2/2 \approx \delta_{0.75}^2 \approx \delta_{1.25}^2$ 이다. 3차 샘플링에서는 이에 따른 오차를 포함하게 된다. 4차 샘플링에서는 2차 차분값의 분배에 대한 정보값으로 $\delta^3 = \delta_{1.25}^2 - \delta_{0.75}^2$ 를 가지고 있어 오차를 감소시킬 수 있다. 위 가정을 확장하여 샘플링 시간 $0.5 * n$ 에 대한 각 차분이 동일한 값을 가지고 가정하면 식(8)과 같다.

$$\delta_{0.25} \approx \delta_{0.75} \approx \delta_{1.25} \approx \delta_{1.75} \approx \Delta_1/2 \quad (8)$$

Table 2. Difference value at 3 sampled data(n).

표 2. 샘플 데이터 3개의 차분값(n)

$\hat{y}_{(0.5 \cdot n)} = \delta_n$	$\delta_n^2 = \Delta_1^2/2$
$a \approx \dot{y}_0$	
	$\delta_{0.25}^2 = B - a$
$B \approx \dot{y}_{0.5}$	
	$\delta_{0.75}^2 = c - B$
$c \approx \dot{y}_1$	
	$\delta_{1.25}^2 = D - c$
$D \approx \dot{y}_{1.5}$	
	$\delta_{1.75}^2 = e - D$
$e \approx \dot{y}_2$	

표 2와 식(8)을 이용하면 식(9)로 정리된다.

$$\begin{aligned} B - a &= (D - B)/2 \\ c - B &= (D - B)/2 \\ D - c &= (D - B)/2 \\ e - D &= (D - B)/2 \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)을 정리하면 식(10)과 같다. 식(10)는 식(6)과 동일하다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 \approx a &= (-D + 3B)/2 = (-y_2 + 4y_1 - 3y_0)/2t_s \\ \dot{y}_1 \approx c &= (B + D)/2 = (y_2 - y_0)/2t_s \\ \dot{y}_2 \approx e &= (3D - B)/2 = (3y_2 - 4y_1 + y_0)/2t_s \end{aligned} \quad (10)$$

3. 4차 샘플링 적용

데이터(y_0, y_1, y_2, y_3)가 4개인 경우 3차 차분(Δ_N^3)까지 계산될 수 있으며, 샘플링 시간 1에 대한 해석은 표 3과 샘플링 시간 0.5에 대한 해석은 표 4와 같다.

표 3와 표 4의 관계는 식(11)과 같다.

$$\delta_n^3 = \Delta^3/4 \quad (11)$$

표 4와 식(11)을 이용하면 식(12)와 같다.

$$\begin{aligned} c - 2B + a &= (F - 2D - B)/4 \\ D - 2c + B &= (F - 2D - B)/4 \\ e - 2D + c &= (F - 2D - B)/4 \\ F - 2e + d &= (F - 2D - B)/4 \\ g - 2F + e &= (F - 2D - B)/4 \end{aligned} \quad (12)$$

Table 3. Difference value at 4 sampled data(N).

표 3. 샘플 데이터 4개의 차분값(N)

	Δ_N	Δ_N^2	Δ_N^3
y_0			
	B		
y_1		$\Delta_1^2 = D - B$	
	D		$\Delta_{1.5}^3 = F - 2D - B$
y_2		$\Delta_2^2 = F - D$	
	F		
y_3			

Table 4. Difference value at 4 sampled data(n).

표 4. 샘플 데이터 4개의 차분값(n)

δ_n	δ_n^2	$\delta_n^3 = \Delta^3/4$
$a = \hat{y}_0$		
	$B - a$	
$B = \hat{y}_{0.5}$		$c - 2B + a$
	$c - B$	
$c = \hat{y}_1$		$e - 2D + c$
	$D - c$	
$D = \hat{y}_{1.5}$		$F - 2e + D$
	$e - D$	
$e = \hat{y}_2$		$F - 2e + D$
	$F - e$	
$F = \hat{y}_{2.5}$		$g - 2F + e$
	$g - F$	
$g = \hat{y}_3$		

식(12)를 정리하면 식(13)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 \approx \hat{y}_0 = a &= (3F - 10D + 15B)/8 \\ \dot{y}_1 \approx \hat{y}_1 = c &= (-F + 6D + 3B)/8 \\ \dot{y}_2 \approx \hat{y}_2 = e &= (3F + 6D - B)/8 \\ \dot{y}_3 \approx \hat{y}_3 = g &= (15F - 10D + 3B)/8 \end{aligned} \quad (13)$$

4. 4차 샘플링 차분값의 오차 보정

표 3에서 샘플 0.5에서 차분값은 $\hat{y}_{0.5} = B$ 로 계산된다. 식(13)에서 계산된 차분값(\hat{y}_0, \hat{y}_1)의 평균값($\hat{y}_{0.5(av)}$)은 식(14)과 같다.

$$\hat{y}_{0.5(av)} = (a + c)/2 = (\hat{y}_0 + \hat{y}_1)/2 \quad (14)$$

식(14)의 평균값($\hat{y}_{0.5(av)}$)과 표 3의 차분값($B=\hat{y}_{0.5}$)의 차이는 식(15)와 같다.

$$\hat{y}_{0.5} - \hat{y}_{0.5(av)} = (B - (a+c)/2) \tag{15}$$

식(15)와 식(2)의 오차(ϵ)는 약 1/3의 관계를 가지고 있다. 오차 보정 값은 식(16)과 같다.

$$\epsilon = \frac{1}{3} \cdot (B - (a+c)/2) \tag{16}$$

식(16)의 오차 보정값을 추정된 차분($\hat{y}_{0.5}$)에 대입하면 미분값($\dot{y}_{0.5}$)을 계산할 수 있다. 이는 식(17)와 같다.

$$\dot{y}_{0.5} = \hat{y}_{0.5} + \epsilon = B + (B - (a+c)/2)/3 \tag{17}$$

식(17)를 확장하여 식(13)에 적용하면 식(18)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_{0.5} &= B + (B - (a+c)/2)/3 \\ \dot{y}_1 &= c + (c - (B+D)/2)/3 \\ \dot{y}_{1.5} &= D + (D - (c+e)/2)/3 \\ \dot{y}_2 &= e + (e - (D+F)/2)/3 \\ \dot{y}_{2.5} &= F + (F - (e+g)/2)/3 \end{aligned} \tag{18}$$

식(13)를 식(18)에 대입하면 각 샘플링 시간에 대한 미분값은 식(19)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= (8F - 28D + 44B)/24 \\ \dot{y}_{0.5} &= (-F + 2D + 23B)/24 \\ \dot{y}_1 &= (-4F + 20D + 8B)/24 \\ \dot{y}_{1.5} &= (-F + 26D - B)/24 \\ \dot{y}_2 &= (8F + 20D - 4B)/24 \\ \dot{y}_{2.5} &= (23F + 2D - B)/24 \\ \dot{y}_3 &= (44F - 28D + 8B)/24 \end{aligned} \tag{19}$$

식(19)를 샘플링 데이터로 정리하면 결과는 식(20)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= (8y_3 - 36y_2 + 72y_1 - 44y_0)/24t_s \\ \dot{y}_{0.5} &= (-y_3 + 3y_2 + 21y_1 - 23y_0)/24t_s \\ \dot{y}_1 &= (-4y_3 + 24y_2 - 12y_1 - 8y_0)/24t_s \\ \dot{y}_{1.5} &= (-y_3 + 27y_2 - 27y_1 + y_0)/24t_s \\ \dot{y}_2 &= (8y_3 + 12y_2 - 24y_1 + 4y_0)/24t_s \\ \dot{y}_{2.5} &= (23y_3 - 21y_2 - 3y_1 + y_0)/24t_s \\ \dot{y}_3 &= (44y_3 - 72y_2 + 36y_1 - 8y_0)/24t_s \end{aligned} \tag{20}$$

현재 마이크로프로세서는 12bit 내장 A/D를 많이 사용하고 있으며, 샘플링 주파수를 증가시켜 미분 오차를 감소시키는 방법이 많이 사용된다.

하지만 샘플링 시간이 작은 경우 차분값($\Delta_{0.5} = y_1 - y_0$)을 감소시키며 따라서 제한된 bit를 가진 A/D 변환기의 양자화 오차의 영향이 매우 커지게 된다.

만일, 샘플링 시간이 큰 경우 차분값과 실제 미분값의 계산 오차가 증가한다. 따라서 식(14)의 차분 평균값 역시 증가하게 된다. 하지만 이러한 문제는 식(16)의 오차 보정을 시행함으로써 식(17)로 계산된 미분값의 오차는 감소하게 된다.

프로그램에서 샘플된 A/D값은 노이즈를 포함하고 있으며 차분 또는 미분 계산시 노이즈분이 증폭되게 된다. 따라서 이러한 결과가 제어출력에 주는 영향을 최소화하기 위해서 필터 및 최대치를 제한하고, 물리량으로 변화하기 위해 스케일링을 수행한다. 이러한 연산 작업은 제어 1 사이클에서 수행되며, 차분값 $B, D, F \dots$ 을 각각 계산하고 버퍼에 저장한다. 이후 저장된 차분값을 식(19)에 적용하여 미분값을 계산하는 방식으로 연산량을 최적화할 수 있다.

5. 5차 샘플링 적용

데이터(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)가 5개인 경우 4차 차분(Δ_N^4)까지 계산될 수 있으며, 샘플링 시간 1(N)에 대한 해석은 표 5과 샘플링 시간 0.5(n)에 대한 해석은 표 6와 같다.

표 5와 표 6의 관계는 식(21)과 같다.

$$\delta^4 = \Delta^4/8 \tag{21}$$

Table 5. Difference value at 5 sampled data(N).

표 5. 샘플 데이터 5개의 차분값(N)

	Δ_N	Δ_N^2	Δ_N^3	Δ_N^4
y_0				
	B			
y_1		D-B		
	D		F-2D+B	
y_2		F-D		H-3F+3D-B
	F		H-2F+D	
y_3		H-F		
	H			
y_4				

Table 6. Difference value at 5 sampled data(n).

표 6. 샘플 데이터 5개의 차분값(n)

δ_n	δ_n^2	δ_n^3	$\delta_n^4 = \Delta^4/8$
a			
	$B-a$		
B		$c-2B+a$	
	$c-B$		$D-3c+3B-a$
c		$D-2c+B$	
	$D-c$		$e-3D+3c-B$
D		$e-2D+c$	
	$e-D$		$F-3e+3D-c$
e		$F-2e+D$	
	$F-e$		$g-3F+3e-D$
F		$g-2F+e$	
	$g-F$		$H-3g+3F-e$
g		$H-2g+F$	
	$H-g$		$i-2H+3g-F$
H		$i-2H+g$	
	$i-H$		
i			

표 6과 식(21)을 이용하면 식(22)와 같다.

$$\begin{aligned}
 D-3c+cB-a &= (H-3F+3D-B)/8 \\
 e-3D+3c-B &= (H-3F+3D-B)/8 \\
 F-3e+3D-c &= (H-3F+3D-B)/8 \\
 g-3F+3e-D &= (H-3F+3D-B)/8 \\
 H-3g+3F-e &= (H-3F+3D-B)/8 \\
 i-2H+3g-F &= (H-3F+3D-B)/8
 \end{aligned} \tag{22}$$

식(22)를 풀면 식(23)과 같다.

$$\begin{aligned}
 a &= (-5H+21F-35D+35B)/16 \\
 c &= (H-5F+15D+5B)/16 \\
 e &= (-H+9F+9D-B)/16 \\
 g &= (5H+15F-5D+B)/16 \\
 i &= (35H-35F+21D-5B)/16
 \end{aligned} \tag{23}$$

식(23)을 오차 보정을 결합하면 식(24)과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_{0.5} &= B+(B-(a+c)/2)/3 \\
 \dot{y}_1 &= c+(c-(B+D)/2)/3 \\
 \dot{y}_{1.5} &= D+(D-(c+e)/2)/3 \\
 \dot{y}_2 &= e+(e-(D+F)/2)/3 \\
 \dot{y}_{2.5} &= F+(F-(e+g)/2)/3 \\
 \dot{y}_3 &= g+(g-(F+H)/2)/3 \\
 \dot{y}_{3.5} &= H+(H-(i+g)/2)/3
 \end{aligned} \tag{24}$$

식(23)을 식(24)에 대입하면 식(25)와 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_0 &= (-6H+26F-46D+50B)/24 \\
 \dot{y}_{0.5} &= (H-4F+5D+22B)/24 \\
 \dot{y}_1 &= (2H-10F+26D+6B)/24 \\
 \dot{y}_{1.5} &= (0H-F+26D-B)/24 \\
 \dot{y}_2 &= (-2H+14F+14D-2B)/24 \\
 \dot{y}_{2.5} &= (-H+26F-D+0B)/24 \\
 \dot{y}_3 &= (6H+26F-10D+2B)/24 \\
 \dot{y}_{3.5} &= (22H+5F-4D+B)/24 \\
 \dot{y}_4 &= (50H-46F+26D-6B)/24
 \end{aligned} \tag{25}$$

식(25)를 샘플링 데이터로 정리하면 식(26)과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_0 &= (-6y_4+32y_3-72y_2+96y_1-50y_0)/24t_s \\
 \dot{y}_{0.5} &= (y_4-5y_3+9y_2+17y_1-22y_0)/24t_s \\
 \dot{y}_1 &= (2y_4-12y_3+36y_2-20y_1-6y_0)/24t_s \\
 \dot{y}_{1.5} &= (0y_4-y_3+27y_2-27y_1+y_0)/24t_s \\
 \dot{y}_2 &= (-2y_4+16y_3+0y_2-16y_1+2y_0)/24t_s \\
 \dot{y}_{2.5} &= (-y_4+27y_3-27y_2+y_1+0y_0)/24t_s \\
 \dot{y}_3 &= (6y_4+20y_3-36y_2+12y_1-2y_0)/24t_s \\
 \dot{y}_{3.5} &= (22y_4-17y_3-9y_2+5y_1-y_0)/24t_s \\
 \dot{y}_4 &= (50y_4-96y_3+72y_2-32y_1+6y_0)/24t_s
 \end{aligned} \tag{26}$$

6. 6차 샘플링 적용

데이터($y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$)에 대한 해석은 표 7, 8과 같다.

표 7와 표 8의 관계는 식(27)과 같다.

$$\delta^4 = \Delta_n^4/16 \tag{27}$$

Table 7. Difference value at 6 sampled data(N).

표 7. 샘플 데이터 6개의 차분값(N)

	Δ	Δ_N^2	Δ_N^3	Δ_N^4	Δ_N^5
y_0					
	B				
y_1		$D-B$			
	D		$F-2D+B$		
y_2		$F-D$		$H-3F+3D-B$	
	F		$H-2F+D$		$J-4H+6F-4D+B$
y_3		$H-F$		$J-3H+3F-D$	
	H		$J-2H+F$		
y_4		$J-H$			
	J				
y_5					

표 8과 식(27)을 이용하면 식(28)와 같다.

$$\begin{aligned}
 e-4D+6c-4B+a &= (J-4H+6F-4D+B)/16 \\
 F-4e+6D-4c+B &= (J-4H+6F-4D+B)/16 \\
 g-4F+6e-4D+c &= (J-4H+6F-4D+B)/16 \\
 H-4g+6F-4e+D &= (J-4H+6F-4D+B)/16 \\
 i-4H+6g-4F+e &= (J-4H+6F-4D+B)/16 \\
 J-4i+6H-4g+F &= (J-4H+6F-4D+B)/16 \\
 k-4J+6i-4H+g &= (J-4H+6F-4D+B)/16
 \end{aligned} \tag{28}$$

Table 8. Difference value at 6 sampled data(n).

표 8. 샘플 데이터 6개의 차분값(n)

δ_n^0	δ_n^1	δ_n^2	δ_n^3	δ_n^4	$\delta_n^5 = \Delta^5/16$
a					
	B-a				
B		c-2B+a			
	c-B		D-3c+3B-a		
c		D-2c+B			e-4D+6c-4B+a
	D-c		e-3D+3c-B		
D		e-2D+c			F-4e+6D-4c+B
	e-D		F-3e+3D-c		
e		F-2e+D			g-4F+6e-4D+c
	F-e		g-3F+3e-D		
F		g-2F+e			H-4g+6F-4e+D
	g-F		H-3g+3F-e		
g		H-2g+F			i-4H+6g-4F+e
	H-g		i-3H+3g-F		
H		i-2H+g			J-4i+6H-4g+F
	i-H		J-3i+3H-g		
i		J-2i+H			k-4J+6i-4H+g
	J-i		k-3J+3i-H		
J		k-2J+i			
	k-J				
k					

식(28)를 연립하여 풀면 식(29)과 같다.

$$\begin{aligned}
 a &= (70J-360H+756F-840D+630B)/256 \\
 c &= (-10J+56H-140F+280D+70B)/256 \\
 e &= (6J-40H+180F+120D-10B)/256 \\
 g &= (-10J+120H+180F-40D+6B)/256 \\
 i &= (70J+280H-140F+56D-10B)/256 \\
 k &= (630J-840H+756F-360D+70B)/256
 \end{aligned} \tag{29}$$

식(29)을 오차 보정을 결합하면 식(30)과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_{0.5} &= B+(B-(a+c)/2)/3 \\
 \dot{y}_1 &= c+(c-(B+D)/2)/3 \\
 \dot{y}_{1.5} &= D+(D-(c+e)/2)/3 \\
 \dot{y}_2 &= e+(e-(D+F)/2)/3 \\
 \dot{y}_{2.5} &= F+(F-(e+g)/2)/3 \\
 \dot{y}_3 &= g+(g-(F+H)/2)/3 \\
 \dot{y}_{3.5} &= H+(H-(i+g)/2)/3 \\
 \dot{y}_4 &= i+(i-(H+J)/2)/3 \\
 \dot{y}_{4.5} &= J+(J-(i+k)/2)/3
 \end{aligned} \tag{30}$$

식(29)을 식(30)에 대입하면 식(31)와 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_0 &= (76J-400H+872F-1040D+876B)/384 \\
 \dot{y}_{0.5} &= (-15J+76H-154F+140D+337B)/384 \\
 \dot{y}_1 &= (-20J+112H-280F+496D+76B)/384 \\
 \dot{y}_{1.5} &= (J-4H-10F+412D-15B)/384 \\
 \dot{y}_2 &= (12J-80H+296F+176D-20B)/384 \\
 \dot{y}_{2.5} &= (J-20H+422F-20D+B)/384 \\
 \dot{y}_3 &= (-20J+176H+296F-80D+12B)/384 \\
 \dot{y}_{3.5} &= (-15J+412H-10F-4D+B)/384 \\
 \dot{y}_4 &= (76J+496H-280F+112D-20B)/384 \\
 \dot{y}_{4.5} &= (337J+140H-154F+76D-15B)/384 \\
 \dot{y}_5 &= (876J-1040H+872F-400D+76B)/384
 \end{aligned} \tag{31}$$

식(31)를 샘플링 데이터로 정리하면 식(32)과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_0 &= (76y_5-476y_4+1272y_3-1912y_2+1916y_1-876y_0)/384t_s \\
 \dot{y}_{0.5} &= (-15y_5+91y_4-230y_3+294y_2+197y_1-337y_0)/384t_s \\
 \dot{y}_1 &= (-20y_5+132y_4-392y_3+776y_2-420y_1-76y_0)/384t_s \\
 \dot{y}_{1.5} &= (y_5-5y_4-6y_3+422y_2-427y_1+15y_0)/384t_s \\
 \dot{y}_2 &= (12y_5-92y_4+376y_3-120y_2-196y_1+20y_0)/384t_s \\
 \dot{y}_{2.5} &= (y_5-21y_4+442y_3-442y_2+21y_1-y_0)/384t_s \\
 \dot{y}_3 &= (-20y_5+196y_4+120y_3-376y_2) \\
 \dot{y}_4 &= (76y_5+420y_4-776y_3+392y_2-132y_1+20y_0)/384t_s \\
 \dot{y}_{4.5} &= (337y_5-197y_4-294y_3+230y_2-91y_1+15y_0)/384t_s \\
 \dot{y}_5 &= (876y_5-1916y_4+1912y_3-1272y_2+476y_1-76y_0)/384t_s
 \end{aligned} \tag{32}$$

III. 고차 미분값 계산 및 발생 오차

1. 고차 미분값 계산

고차 미분값을 계산하기 위해서 계산된 1차 미분값을 다시 적용하면 고차 미분값을 계산할 수 있다. 2절의 결과와 고차미분값을 계산하기 위한 계수를 정리하면 표 9, 10, 11과 같다.

Table 9. Finite difference coefficients at 4 data.

표 9. 데이터 4개 적용시 차분 변환 계수

	$dy_n = (\dots)/6t_s$				$d^2y_n = (\dots)/t_s^2$			
	y_3	y_2	y_1	y_0	y_3	y_2	y_1	y_0
$d^x y_0$	2	-9	18	-11	-1	4	-5	2
$d^x y_1$	-1	6	-3	-2	0	1	-2	1
$d^x y_2$	2	3	-6	1	1	-2	1	0
$d^x y_3$	11	-18	9	-2	2	-5	4	-1
$d^3y_{1.5} = (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)/t_s^3$								

Table 10. Finite difference coefficients at 5 data.

표 10. 데이터 5개 적용시 차분 변환 계수

	$dy_n = (\dots)/12t_s$					$dy_n^2 = (\dots)/12t_s^2$				
	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0
$d^x y_0$	-3	16	-36	48	-25	11	-56	114	-104	35
$d^x y_1$	1	-6	18	-10	-3	-1	4	6	-20	11
$d^x y_2$	-1	8	0	-8	1	-1	16	-30	16	-1
$d^x y_3$	3	10	-18	6	-1	11	-20	6	4	-1
$d^x y_4$	25	-48	36	-16	3	35	-104	114	-56	11
$d^3y_n = (\dots)/2t_s^3$										
$d^x y_0$	-3	14	-24	18	-5					
$d^x y_1$	-1	6	-12	10	-3					
$d^x y_2$	1	-2	0	2	-1					
$d^x y_3$	3	-10	12	-6	1					
$d^x y_4$	5	-18	24	-14	3					
$d^4y_2 = (y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0)t_s^4$										

Table 11. Finite difference coefficients at 6 data.

표 11. 데이터 6개 적용시 차분 변환 계수

	$dy_n = (\dots)/96t_s$						$dy_n^2 = (\dots)/12t_s^2$					
	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0
$d^x y_0$	19	-119	318	-478	479	-21	-10	61	-156	214	-154	45
$d^x y_1$	-5	33	-98	194	-105	-19	1	-6	14	-4	-15	10
$d^x y_2$	3	-23	94	-30	-49	5	0	-1	16	-30	16	-1
$d^x y_3$	-5	49	30	-94	23	-3	-1	16	-30	16	-1	0
$d^x y_4$	19	105	-194	98	-33	5	10	-15	-4	14	-6	1
$d^x y_5$	219	-479	478	-318	119	-19	45	-154	214	-156	61	-10
$d^3y_n = (\dots)/4t_s^3$												
$d^x y_0$	7	-41	98	-118	71	-17	-2	11	-24	26	-14	3
$d^x y_1$	1	-7	22	-34	25	-7	-1	6	-14	16	-9	2
$d^x y_2$	-1	7	-14	10	-1	-1	0	1	-4	6	-4	1
$d^x y_3$	1	1	-10	14	-7	1	1	-4	6	-4	1	0
$d^x y_4$	7	-25	34	-22	7	-1	2	-9	16	-14	6	-1
$d^x y_5$	17	-71	118	-98	41	-7	3	-14	26	-24	11	-2
$d^5y_{2.5} = (y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0)t_s^5$												

2. 발생 오차

표 9, 10, 11의 결과와 실제 미분값의 오차 검증하기 위해서 모의실험을 진행하였다. 사용한 함수는 $y = \sin(t)$ 으로 $y' = \cos(t)$ 의 특징을 가진다. 정현파 1주기의 샘플 수는 20개를 기준으로 수행하였고 양자화 오차는 무시하였다.

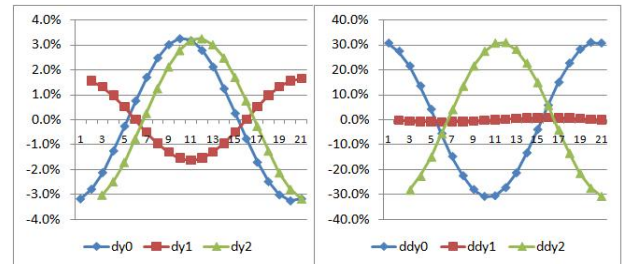


Fig. 1. Difference error at 3 data.
그림 1. 데이터 3개 적용시 미분오차

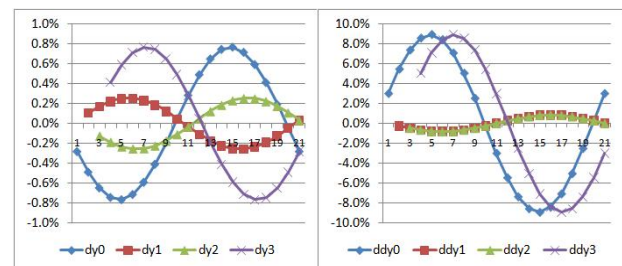


Fig. 2. Difference error at 4 data.
그림 2. 데이터 4개 적용시 미분오차

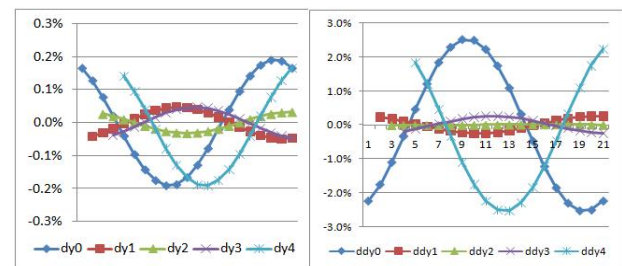


Fig. 3. Difference error at 5 data.
그림 3. 데이터 5개 적용시 미분오차

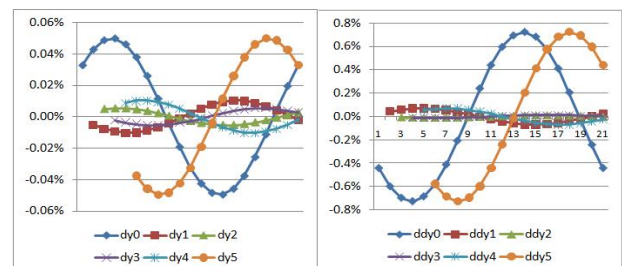


Fig. 4. Difference error at 6 data.
그림 4. 데이터 6개 적용시 미분오차

Table 12. Max error of finite difference[±%].

표 12. 차분 변환 계수 적용시 최대 오차

		$d^x y_0$	$d^x y_1$	$d^x y_2$	$d^x y_3$	$d^x y_4$	$d^x y_5$
3	dy	3.2	1.6	3.2			
	$d^2 y$	30.6	0.8	30.6			
4	dy	0.77	0.25				
	$d^2 y$	8.9	0.8	0.8	8.9		
	$d^3 y$	1.21					
5	dy	0.19	0.05	0.03	0.05	0.19	
	$d^2 y$	2.5	0.25	0.01	0.25	2.5	
	$d^3 y$	16.8	2.5	2.44	2.5	16.8	
	$d^4 y$	1.63					
6	dy	0.05	0.01	0.005	0.005	0.01	0.05
	$d^2 y$	0.73	0.07	0.011	0.011	0.07	0.73
	$d^3 y$	5.7	0.38	0.38	0.38	0.38	5.7
	$d^4 y$	27.1	8.08	1.63	1.63	8.08	27.1
	$d^5 y$	2.0					

그림 1, 2, 3, 4 및 표 12에서 샘플 데이터 시작 및 끝에 해당하는 차분값은 가장 큰 오차가 발생하고 있다. 이는 전향 및 후향 차분 방식에 해당하므로 정밀한 수치를 요구하는 응용분야에서는 이를 고려하여야 한다. 데이터 4개를 사용한 차분값은 오차 보정이 적용된 결과이므로 데이터 3개를 이용한 결과에 비해 크게 감소하게 된다.

IV. RLS 알고리즘

파라미터 추정 알고리즘 RLS은 식(33)과 같다. RLS 알고리즘은 선형방정식에 적용될 수 있으나, 데이터 샘플링 과정에서 정확한 미분값을 알 수 없으므로 선형방정식을 이산 방정식으로 변환하여 많이 적용된다^{[4],[5]}. 하지만 이산치 추정 결과가 도출되므로 회로 설계에 활용하기 어려운 단점을 가진다.

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_1 &= \hat{\theta}_0 + K_1(y_1 - \hat{y}_1) \\
 &= \hat{\theta}_0 + K_1(y_1 - x_1^T \hat{\theta}_0) \\
 K_1 &= \frac{P_0 x_1}{x_1^T P_0 x_1 + 1} \\
 P_1 &= (I - K_1 x_1^T) P_0
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

본 논문에서는 식(33)에 미분값을 안다고 가정하고 미분값을 직접 적용하는 경우 추정된 파라미터가 시스템 방정식의 파라미터로 출력됨을 모의 실험을 통해 확인하였다. 적용한 시스템은 Buck컨버터이며 그림 5와 같다.

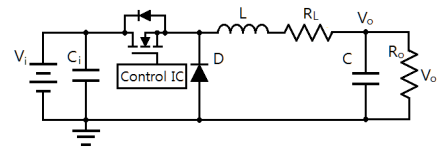


Fig. 5. Buck Converter circuit.

그림 5. 벅 컨버터 회로

그림 5에서 벅 컨버터가 인덕터 연속 구간에서 동작한다고 가정하고, 출력 필터부분을 파라미터 추정하고자 한다. 벅 컨버터의 상태방정식은 식(34)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} \tag{34}$$

식(34)를 식(33)에 적용하면 식(35)와 같다.

$$x^T = [I_L \ V_c V_{in}], \theta = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_o} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, y = [\dot{I}_L \ \dot{V}_c] \tag{35}$$

모의실험에서 사용한 파라미터는 $L=5mH$, $R_L=1\Omega$, $C=1000\mu F$, $R_o=10\Omega$, $P_0=20*[100;010;001]$ 이다.

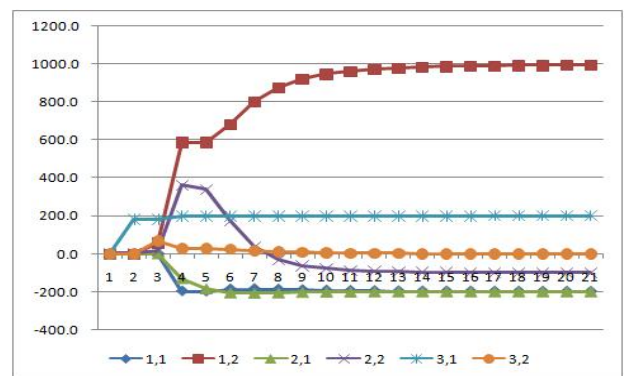


Fig. 6. Simulation result of RLS.

그림 6. RLS 알고리즘 적용 모의실험 결과

그림 6의 모의 실험 통하여 시스템 파라미터(θ)가 추정되고 있음을 보여준다. 추정된 시스템 파라미터를 이용하여 회로 소자 값을 예측할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서 샘플링 데이터를 이용하여 미분 값을 추정하는 방법에 대하여 제시하였다. 1차 미분값의 경우 데이터 수가 3~5개 까지 전향, 후향, 중앙 차분방정식과 동일한 결과를 가지며, 6개는 유사한 결과를 가졌다. 고차 미분값의 추정을 위한 변환 계수에 대한 결과를 표 12에 제시하였다. 고차 미분값의 변환 계수는 기존에 알려져 있는 값과 유사하였다.

본 논문에서는 전향, 후향, 중앙 방식에서 제공하는 변환 계수 외에도 각 샘플링 데이터 및 중간값 ($0.5N$)에 대한 변환계수를 계산하고 결과를 제시하였다.

RLS 알고리즘의 적용시 선형방정식을 적용하는 경우 회로 파라미터를 직접 추정할 수 있는 장점이 있음을 보였다^[4].

References

- [1] Bengt Fornberg, "Generation of Finit Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grides," *Mathematics of Computation*, pp.699-706, 1988.
DOI: 10.1090/S0025-5718-1988-0935077-0
- [2] Ishtiaq Rassol Khan, "New finite difference formulas for numerical differentiation," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol.126, issue 1-2, pp.269-276, 1999.
DOI: 10.1016/S0377-0427(99)00358-1
- [3] "Finite difference coefficient", https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient
- [4] *Karl J. Astrom, Bjorn Wittenmark, Adaptive Control*, Addison-Wesley, 1995.
- [5] Saher Arshad, Saima Qamar, Taybo Jabbar, Ahsan Mlik, "Parameter Estimation of a DC Motor using Ordinary Least Squares and Recursive Least Squares Algorithms," *FIT '10*, 2010.
DOI: 0.1145/1943628.1943659

BIOGRAPHY

Tae-Yeop Kim (Member)



1996 : BS degree in Electrical Engineering, Changwon National University.

1998 : MS degree in Electrical Engineering, Changwon National University.

2006 : PhD degree in Electrical Engineering, Changwon National University.

2006~2019 : CEO, Lumipower Corp.

2018~2019 : Adjunct Professor, Chagwon National University.