J. Soc. Korea Ind. Syst. Eng Vol. 42, No. 3 : 15-24, September 2019
https://doi.org/10.11627/jkise.2019.42.3.015

ISSN : 2005-0461(print)
ISSN : 2287-7975(online)

Cooperative Game Theory Application for Three-Echelon Supply Chain

Dongju Lee†

Industrial & Systems Engineering, Kongju National University

3단계 공급사슬게임을 위한 협조적 게임이론의 적용

이 동 주†

공주대학교 산업시스템공학과

Fair Allocation of profits or costs arising from joint participation by multiple individuals or entities with different purposes is essential for their continuing involvement and for their dissatisfaction reduction. In this research, fair allocation of the profits of forming a grand coalition in Three-Echelon Supply Chain (TESC) game that is composed of manufacturer, distributor and retailer, is studied. In particular, the solutions of the proportional method of profit, the proportional method of marginal profit, and Shapley value based on cooperative game theory are proved to be in the desirable characteristics of the core. The proportional method of profit and the proportional method of marginal profit are often used because of their ease of application. These methods distribute total profit in proportion to profits or marginal profits of each game participant. In addition, Shapley value can be defined as the average marginal profit when one game player is added at a time. Even though the calculation of the average of all possible marginal profits is not simple, Shapley value are often used as a useful method. Experiments have shown that the solution of the incremental method, which calculates the marginal cost of adding game players in the order of manufacturers, distributors and retailers, does not exist in the core.

Keywords : Cooperative Game Theory, Fair Allocation, Core, Supply Chain Game

1. 서 론

서로 다른 목적을 가진 다수의 개인이나 단체가 공동으로 참여하는 경우에 발생하는 이익이나 비용을 공정하게(fairly) 배분하는 것은 이들의 지속적인 참여와 불만을 줄이기 위해서는 필수적이다.

이러한 공정한 비용이나 배분에 관한 기법들은 협조적 게임이론에 기반하고 있다. 협조적 게임 이론은 많은 분야에 적용되어 오고 있다. Lee and Lee[7]는 영상확대 기법에 기존의 보간법 대신 협조적 게임 이론 중 하나인 샤플리 값(Shapley value)를 적용하였다. 제안한 기법을 적용하였을 때 기존보다 신호 대 잡음비(PSNR)가 향상되었음을 실험을 통해 입증하였다. Zhang[11]은 송전망 건설에 투입되는 비용이 발전회사와 수요자들간에 적절히 배분되게 하기 위해 Shapley값의 확장된 기법인 오만-샤플리 값(Aumann-Shapley value)을 이용하여 송전요금을 계산하고 기존의 기법들과 비교하였다. 오만-샤플리 값을 이용한 요금 산정기법은 지역 간의 발전-부하의 불균형을 적절히 반영하여 발전 측과 수요 측에 모두 합리적인 경제적 신호를 보내준다고 하였다. Kim[5]은 무선 네트워크 환경에서 요청되는 서비스에 대해 서비스 제공자들의 보상을 최대화 하는 게임이론에 기반한 무선 자원

Received 1 June 2019; Finally Revised 18 July 2019;
Accepted 19 July 2019
† Corresponding Author : djlee@kongju.ac.kr

관리방법을 제안하였다.

게임이론 기법들은 특히 다수의 참여자가 존재하는 공급사슬이나 재고문제에 적용되고 있다. Ho et al.[1]는 1명의 공급자와 2명의 소매업자가 존재하는 공급사슬에서 분배의 공정함(distributional fairness)와 동료들과의 공정함(peer-induced fairness)에 대한 관심이 있는 경우 두 번째 소매업자의 이익이 첫 번째 소매업자의 이익보다 더 적으며 분배의 공정함이 동료들과의 공정함보다 더 영향력이 크다고 하였다. 분배의 공정함이라 공급사슬의 구성원들에게 이익을 분배할 때의 공정함(여기서는 공급업자와 소매업자의 이익할당의 공정함)을 의미하며, 동료들과의 공정함이란 동료들과의 이익 할당의 공정함(즉, 소매업자들끼리의 분배의 공정함)을 의미한다. 또한, Ho and Su[2]는 1명의 선도자(leader)와 2명의 추종자(follower)가 존재하는 게임에서 동료들과의 공정함이 분배의 공정함보다 2배 더 강력하다고 하였다.

Jena and Sarmah[4]는 2명의 제조업자와 1명의 소매업자가 존재하는 공급사슬에서 새제품을 팔거나 중고품을 수집하기 위해 2명의 제조업자가 경쟁하는 경우에 대해 연구하였다. 전체 게임참가자들이 참여하는 대연합의 경우에 제조업자들이 좀 더 많은 이익을 취할 수 있는데 고객의 이익을 희생하는 단점이 있다고 하였다, 또한, 각 제조업자들이 소매업자와 각각 연합을 형성하는 경우가 개별적으로 게임에 참여하는 경우보다 더 많은 이익을 취할 수 있다고 하였다.

Zhao et al.[10]은 제조업자와 소매업자로 구성된 공급사슬에서 선택권부 계약(option contract)이 존재하는 경우 위험회피, 위험중립, 위험선호의 성향이 어떤 영향을 미치는지에 대해 협조적 게임이론 기법을 이용하여 연구하였다. 선택권부 계약이란 소매업자가 생산용량을 예약하기 위해 제조업자에게 지불하는 가격인 선택가격(option price)과 소매업자가 선택권을 실행하기 위해 구매한 제품에 대해 제조업자에게 지불하는 가격을 통해 제조업자와 소매업자의 협조를 이끌어 내는 방법이다.

Huang et al.[3]은 다수의 공급업자, 1명의 제조업자, 다수의 소매업자의 3단계로 구성된 공급사슬 모형을 제시하고 비협조적 게임이론을 적용하여 공급업자의 협조, 부품의 선택, 가격, 보충주기 등이 구성원들에게 어떤 영향을 미치는지 연구하였다. 어떤 소매업자의 시장규모를 키우면 그 소매업자와 제조업자의 이익을 증가시키며, 그 소매업자의 보충주기를 짧게 하지만, 다른 소매업자의 이익은 감소한다는 것을 실험을 통해 알아내었다.

이익할당 기법들이 가져야 할 바람직한 특성을 가진 해의 영역을 코어(Core)하고 할 수 있다. 즉, 전체 게임참가자들이 참여하는 대연합(grand coalition)을 형성할 때 생기는 총이익과 게임에 참여하는 모든 게임참가자(player)들에게 할당된 이익의 합은 동일해야 한다(파레토 최적, pareto optimality). 또한, 연합에 참가하므로써 게임참가자들에게 할당되는 이익이 연합에 참가하지 않으므로 얻게 되는 이익보다 커야 한다(합리성, rationality). 그렇지 않다면, 일부 게임참가자들은 연합이나 대연합에 참여하게 되면 이익이 줄어들어 참여하지 않으려 할 것이다.

Lee[6]는 다수의 소매점들이 공동으로 제품을 주문하고 관리하므로써, 재고관련비용을 절감할 수 있는데, 이 비용을 소매점들에게 할당하는 문제에 대해 다양한 비례기법을 적용하고 해가 코어에 존재하는지를 살펴보았다. Meca et al.[8]은 협조적 재고비용 게임문제를 제안하였다. 특히, 재고유지비용게임과 주문비용게임에서 비례기법의 해는 항상 코어에 존재한다는 것을 수학적으로 증명하였다.

Zheng et al.[12]은 제조업자, 유통업자, 소매업자로 구성된 공급사슬게임인 TESC(Three-Echelon Supply Chain) 게임을 제안하였으며, 4가지의 협력모형들을 고려하고 모든 모형을 고려한 각 연합의 최적비용을 구하였다. 또한, 여러 가지 비용배분기법들을 이용하여 구성원들에게 비용을 배분하였으나, 이들 기법들의 해가 바람직한 특성을 만족하는지에 대해서는 살펴보지 않았다.

본 연구의 목적은 TESC게임 문제에 협조적 게임이론에 기반한 이익비례기법, 한계이익비례기법, 샤플리값(Shapley Value)에서 제시한 해가 바람직한 특성인 코어에 존재하는지 여부를 살펴보는 것이다. 연구방법으로는 이들 이익할당기법들의 해가 항상 코어에 존재하는지 여부를 수학적으로 검증하도록 하겠다. 특히, 본 연구는 다양한 이익할당기법들의 해가 코어에 존재하는지 여부를 입증하고, 각 이익할당기법들의 해가 가지는 특징을 간단한 실험을 통해 보여주는데 그 의의가 있다 하겠다.

논문의 구성은 다음과 같다. 이어지는 제 2장에서는 기호 소개와 3단계 공급사슬 게임 문제에 대한 정의와 각 연합에 대한 최적이익을 소개하였다. 제 3장에서는 이익비례기법, 한계이익비례, 샤플리값의 해들이 코어에 존재하는지 살펴보았다. 제 4장에서는 간단한 예제를 통해 여러 기법들의 해가 코어에 존재하는지 살펴보았다. 마지막으로, 제 5장에서는 결론을 도출하였다.

2. 3단계 공급사슬(TESC) 게임

본 장에서는 사용되는 기호와 TESC의 4가지 모형들을 살펴보았다. 먼저 TESC의 4가지 모형들을 소개하는 그림은 <Figure 1>과 같다. 또한, 본 연구에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

• 기호

$c_n(c_r)$: 새로운(재제조된, remanufactured)제품의 단위당 생산비용

$m_n(m_r)$: 제조업자가 유통업자에 받는 새로운(재제조된) 제품의 단위당 도매가격

$w_n(w_r)$: 유통업자가 소매업자에 받는 새로운(재제조된) 제품의 단위당 도매가격

$p_n(p_r)$: 새로운(재제조된) 제품의 단위당 소매가격

$q_n(q_r)$: 새로운(재제조된) 제품의 생산량

A : 중고제품을 재활용하는데 드는 단위당 외생비용(exogenous cost)

δ : 재제조된 제품에 대한 고객의 가치 할인율

v : 새로운 제품에 대한 고객의 지불의사(willing-ness to pay)

u_R^i : 모형 i에서의 소매업자의 공정함에 대한 효용, 여기서 $i = \{DEC, MDC\}$

λ : 소매업자의 공정성 우려에 대한 매개변수. $\lambda \geq 0$은 유통업자보다 적은 소득에 대한 소매업자의 비효용의 척도.

P_j^i : 모형 i에서 연합 j의 이익 함수, 여기서 $i \in \{DEC, MDC, DRC, CEN\}$이며 j는 CEN 모형에서는 전체연합인 MDR이고, DEC 모형에서는 개별연합인 M, D, R이고, MDC 모형에서는 연합 MD, R이고, DRC 모형에서는 연합 M, DR이다.

연합과 집합을 구분하여 사용하는데, 예를들면, 제조업자와 유통업자의 연합은 MD의 형태로 집합은 {M,D}의 형태로 표현하기로 한다.

2.1 모형 DEC(DECentralized Model)

제조업자(Manufacturer, M), 유통업자(Distributor, D), 소매업자(Retailer, R)가 서로 연합을 하지 않는 분산모형(DECentralized Model)으로서 소매업자는 유통업자에 대해 공정함에 대한 우려를 가지고 있다. 제조업자가 먼저 유통업자로부터 받을 $m_n(m_r)$ 가격을 결정하면 그에 따라 유통업자는 소매업자에게 받을 $w_n(w_r)$가격을 결정한다. 마지막으로 소매업자는 고객에게 받을 $p_n(p_r)$ 가격을 결정한다. 제조업자와 유통업자는 이익을 최대화하는 반면, 소매업자는 효용을 최대화하는 것을 목적으로 한다. 이 모형은 Stackelberg 게임을 이용하여 다음과 같은 수학모형으로 표현될 수 있다.

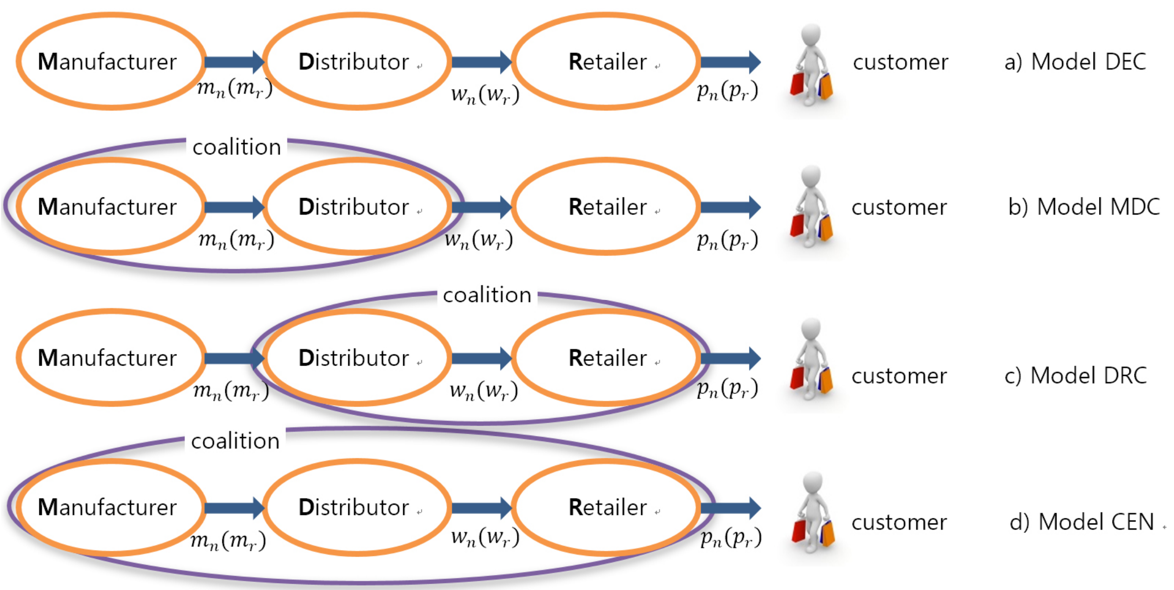
$$\max_{m_n,\, m_r} P_M^{DEC} = (m_n - c_n)q_n + (m_r - c_r - A)q_r$$

$$s.t. \quad \max_{w_n,\, w_r} P_D^{DEC} = (w_n - m_n)q_n + (w_r - m_r)q_r$$

$$s.t. \quad \max_{p_n,\, p_r} u_R^{DEC} = P_R^{DEC} - \lambda(P_D^{DEC} - P_R^{DEC})$$

2.2 모형 MDC (Manufacturer-Distributor Coalition Model)

제조업자와 유통업자가 연합을 결성하고, 소매업자는 공정함에 대한 우려를 지니고 있다. 연합 MD는 그들의 이익을 최대화하는 $w_n(w_r)$가격을 결정하면 그에 따라 소매업자는 그들의 효용을 최대화하는 $p_n(p_r)$가격을 결정한다. 이 모형은 Stackelberg 게임을 이용하여 다음과 같은 수학모형으로 표현될 수 있다.



<Figure 1> 4 Models for Three-Echelon Supply Chain

$$\max_{w_n, w_r} \; P_{MD}^{MDC} = (w_n - c_n)q_n + (w_r - c_r - A)q_r$$

$$s.t. \;\; \max_{p_n, p_r} \; u_R^{MDC} = P_R^{MDC} - \lambda(P_{MD}^{MDC} - P_R^{MDC})$$

2.3 모형 DRC(Distributor-Retailer Coalition Model)

유통업자와 제조업자가 연합을 결성한다. 유통업자와 소매업자는 금전적 거래를 하지 않으므로 소매업자는 공정함에 대한 우려가 없다. 제조업자가 리더의 역할로 m_n, m_r 가격에 대한 결정을 내리면, 연합 DR은 추종자로서 p_n, p_r 가격에 대한 결정을 내린다. 이 모형은 Stackelberg 게임을 이용하여 다음과 같은 수학모형으로 표현될 수 있다.

$$\max_{m_n, m_r} \; P_M^{DRC} = (m_n - c_n)q_n + (m_r - c_r - A)q_r$$

$$s.t. \;\; \max_{p_n, p_r} \; u_{DR}^{DRC} = (p_n - m_n)q_n + (p_r - m_r)q_r$$

2.4 모형 CEN(CENtralized Model)

제조업자, 유통업자, 소매업자는 대연합(grand coalition)을 구성하며 이들 간에는 금전적 거래는 없다. 이때의 수학모형을 나타내면 다음과 같다.

$$\max_{p_n, p_r} \; P_{MDR}^{CEN} = (p_n - c_n)q_n + (p_r - c_r - A)q_r$$

2.5 연합의 최적이익

모형 CEN에서 목적식을 최대화하는 이익은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_{MDR}^{*CEN} = \alpha \rho_j^i$$

여기서 $\alpha = \dfrac{(1-c_n)^2}{4} + \dfrac{(c_r + A - c_n\delta)^2}{4\delta(1-\delta)}$ 이며 $\rho_i^j = 1$이다. ρ_i^j는 모형 i에서 j의 이익에 관련한 값이다.

모형 DEC와 MDC의 경우에 소매업자는 공정함에 대한 우려가 존재한다.

본 연구에서 다루는 TESC게임은 [N, v]라는 쌍으로 정의될 수 있다. 여기서 게임의 참여자 집합인 $N=\{M, DR\}$의 3명의 참여자가 있으며, 특성함수 v는 연합 $S(\subseteq N)$를 연합의 이익인 $v(S)$로 대응한다. 4가지의 모형을 고려해서 각 연합에 대한 ρ_i^j를 구하면 <Table 1>과 같다[12]. 단 연합 MR의 $\rho_i^j = 0$인데 그 이유는 제조업자와 소매업자는 유통업자를 배제하고 연합할 수 없기 때문이다.

<Table 1> ρ_i^j Values for Each Coalition

Coalition	v(S)	ρ_i^j
M	P_M^{*DEC}	$\frac{1}{4}$
D	P_D^{*DEC}	$\frac{1+\lambda}{8+16\lambda}$
R	P_R^{*DEC}	$\frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}$
MD	P_{MD}^{*MDC}	$\frac{1+\lambda}{2+4\lambda}$
MR	-	0
DR	P_M^{*DRC}	$\frac{1}{4}$
MDR	P_M^{*CEN}	1

3. 기법에 의한 해들의 코어에 존재 여부

N은 게임참여자의 집합이고, v는 이익 함수라고 할 때 이익게임(profit game)은 (N, v)이다. 파레토 최적과 합리성을 만족하는 코어는 다음과 같이 정의된다.

$$V(v) = \left\{ x \in R^N \,\middle|\, \begin{array}{l} \sum_{i\in N} x_i = v(N) \text{ and } \sum_{i \in S} x_i \ge v(S) \\ \text{for } all\ S \subset N,\ S \ne \phi \end{array} \right\}$$

이익비례기법, 한계이익비례, 샤플리값의 해들이 코어에 속하는지를 알아보았다.

Theorem 1. TESC(Three-Echelon Supply Chain)게임에서 이익비례기법의 해는 항상 코어에 속한다.

Appendix에 증명 참조.

Theorem 2. TESC(Three-Echelon Supply Chain)게임에서 한계이익비례방법의 해는 항상 코어에 속한다.

Appendix에 증명 참조.

Theorem 3. TESC게임에서 샤플리값의 해는 항상 코어에 속한다.

Appendix에 증명 참조.

4. 실 험

소매업자의 공정성 우려에 대한 매개변수 λ = 1.5로 할 때 이익비례기법(Proportional to profit), 한계이익비례기법(Proportional to marginal profit), 샤플리값(Shapley value), 증분기법(Incremental Method)에 대한 이익할당액이

<Table 2> Profit Allocation by Method

Player	Proportional to profit	Proportional to marginal profit	Shapley value	Incremental Method
x_M	0.57	0.31	0.35	0.25
x_D	0.18	0.41	0.39	0.06
x_R	0.25	0.28	0.25	0.69
Total	1.00	1.00	1.00	1.00

<Table 3> ρ_i^j Values and Profit Allocation of Each Method by Coalition

Coalition	ρ_i^j	Proportional to profit	Proportional to marginal profit	Shapley value	Incremental Method
M	0.25	0.57	0.31	0.35	0.25
D	0.08	0.18	0.41	0.39	0.06
R	0.11	0.25	0.28	0.25	0.69
MD	0.31	0.82	0.59	0.61	0.94
MR	0.00	0.82	0.59	0.61	0.94
DR	0.25	0.43	0.69	0.65	0.75
MDR	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

<Table 2>에 주어져 있다. 증분기법이란 임의의 순서로 게임참여자들을 하나씩 추가하여 대연합을 이룰 때, 추가되는 게임참여자의 증분이익을 이익할당액으로 하는 것이다. 여기서는 {M} → {D} → {R}의 순서로 추가하였다.

본 실험을 통해 각 기법들이 제공하는 해들의 의미를 살펴보고, 일부 기법은 코어에 존재하지 않는 해를 제공한다는 것을 보여주고자 한다.

<Table 3>에는 각 연합에 대해 <Table 1>을 이용해 계산한 ρ_i^j값과 각 기법 별 연합에 대한 이익을 보여주고 있다. 여기서 증분기법의 경우 연합 D는 ρ_i^j = 0.08보다 적은 0.06이므로 합리성을 위반한다. 모든 기법들은 파레토 최적을 만족하고 있으며, 증분기법을 제외한 모든 기법들은 합리성도 만족한다는 것을 알 수 있다. 그러므로, 증명한 바와 같이 이익비례기법, 한계이익기법, 샤플리값의 해는 코어에 존재한다.

이익비례기법은 다른 기법들과 달리 제조업자에게 가장 많은 이익을 할당하였는데, 이는 제조업자(M)가 홀로 연합을 이루는 경우의 이익이 가장 크기 때문이다. 한계이익비례와 샤플리값의 경우에는 유통업자(D)의 이익할당액이 가장 크다. 한계이익비례의 경우에는 유통업자가 마지막으로 참여하여 대연합을 이룰 때의 한계이익이 가장 크기 때문이다. 샤플리값은 유통업자가 참여하는 경우의 추가되는 한계이익이 평균적으로 크기 때문이다. 증분기법은 소매업자(R)의 한계이익이 가장 큰데, 연합 MD에서 R을 추가하여 대연합 MDR을 이루는 경우에 이익이 0.31에서 1.00으로 가장 크게 상승하기 때문이다.

5. 결 론

본 연구에서는 제조업자, 유통업자, 소매업자로 구성된 3단계 공급사슬(TESC)게임에서 각 참여자들의 공정한 이익배분에 대해 살펴보았다. 게임의 참여자들이 모두 참여하는 공급사슬을 구성한다면 생성되는 이익이 최대가 된다. 하지만, 공동의 이익이 공정하게 배분되지 않는다면 공급사슬의 구성원들은 공급사슬에 참여하지 않으려 할 것이다. 이익배분기법들이 가져야 하는 바람직한 특성을 코어라고 하며, 특히, 협조적 게임이론에 기반한 이익배분기법인 이익비례기법, 한계이익비례기법, 샤플리 값의 해가 코어에 존재하는지 살펴보았다. 본 연구에서는 이들 3가지 기법들의 해가 모두 코어에 존재한다는 것을 입증하였다.

추후 연구과제로는 다양한 공급사슬게임에서 이익배분기법들의 해가 코어에 존재하는지에 대한 연구가 필요하다. 또한, 코어를 제외한 다른 좋은 특성에 대한 연구와 이익배분기법들의 특성들에 대한 연구가 필요하다고 할 수 있다.

References

[1] Ho, T.H., Su, X., and Wu, Y., Distributional and Peer-Induced Fairness in Supply Chain Contract Design, *Production and Operations Management*, 2014, Vol. 23, No. 2, pp. 161-175.

[2] Ho, T.H. and Su, X., Peer-Induced Fairness in Games, *American Economic Review*, 2009, Vol. 99, No. 5, pp. 2022-2049.

[3] Huang, Y., Huang, G.Q., and Newman, S.T., Coordinating pricing and inventory decisions in a multi-level supply chain : A game-theoretic approach, *Transportation Research Part E*, 2011, Vol. 47, pp. 115-129.

[4] Jena, S.K. and Sarmah, S.P., Price competition and cooperation in a duopoly closed-loop supply chain, *International Journal of Production Economics*, 2014, Vol. 156, pp. 346-360.

[5] Kim, N.S., Radio Resource Management using a Game Theoretic Approach Method in Heterogeneous Wireless Networks, *Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society*, 2015, Vol. 16, No. 3, pp. 2178-2184.

[6] Lee, D.J., The Proportional Method for Inventory Cost Allocation, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2018, Vol. 41, No. 4, pp. 220-227.

[7] Lee, H.W. and Lee, S.W., Image Magnification Algorithm Using Cooperative Game, *Journal of KIIT*, 2013, Vol. 11, No. 11, pp. 189-194.

[8] Meca, A., Timmer, J., Garcia-Jurado, I., and Borm, P., Inventory games, *European Journal of Operational Research*, 2004, Vol. 156, No.1, pp. 127-139.

[9] Shapley, L.S., A Value for n-person Games, In : Kuhn, H.W., Tucker, A.W.(Eds.), Contributions to the Theory of Games, Vol. Ⅱ, Annual Mathematics Study 28, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953. pp. 307-317.

[10] Zhao, Y., Wang, S., Cheng, T.C.E., Yang, X., and Huang, Z., Coordination of supply chain by option contracts : A cooperative game theory approach, *European Journal of Operational Research*, 2010, Vol. 207, pp. 668-675.

[11] Zhang, R., The Application of the Cooperative Game Theory in the Transmission Service Cost : The Case Study of Korean Electric Power System, *Korean Energy Economic Review*, 2015, Vol. 14, No. 3, pp. 343-382.

[12] Zheng, X.-X., Liu, Z., Li, K.W., Huang, J., and Chen, J., Cooperative Game Approaches to Coordinating a Three-echelon Closed-loop Supply Chain with Fairness Concerns, *International Journal of Production Economics*, 2019, Vol. 212, pp. 92-110.

ORCID

Dongju Lee | http://orcid.org/0000-0001-6650-9270

<Appendix> Proof

Theorem 1, 2, 3 각각에 대한 증명은 다음과 같다.

Proof of Theorem 1.

$x_i = \frac{v_i}{\sum_{i \in N} v_i} v(N)$ 이므로 $\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \frac{v_i}{\sum_{i \in N} v_i} v(N) = \frac{\sum_{i \in N} v_i}{\sum_{i \in N} v_i} v(N) = v(N)$ 이므로 파레토최적은 만족한다. 이익비례방법에 의한 이익할당액 x_M, x_D, x_R을 계산하면 다음과 같다.

$$x_M = \frac{v(M)}{\sum_{i \in N} v(i)} v(N) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1+\lambda}{8+16\lambda} + \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}}(1) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4+8\lambda+2+2\lambda+1+4\lambda}{16+32\lambda}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7+14\lambda}{16+32\lambda}} = \frac{16(1+2\lambda)}{28(1+2\lambda)} = \frac{4}{7}$$

$$x_D = \frac{v(D)}{\sum_{i \in N} v(i)} v(N) = \frac{\frac{1+\lambda}{8+16\lambda}}{\frac{1}{4} + \frac{1+\lambda}{8+16\lambda} + \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}}(1) = \frac{\frac{1+\lambda}{8+16\lambda}}{\frac{4+8\lambda+2+2\lambda+1+4\lambda}{16+32\lambda}} = \frac{\frac{1+\lambda}{8+16\lambda}}{\frac{7+14\lambda}{16+32\lambda}} = \frac{\frac{1+\lambda}{1}}{\frac{7+14\lambda}{2}} = \frac{2+2\lambda}{7+14\lambda}$$

$$x_R = \frac{v(R)}{\sum_{i \in N} v(i)} v(N) = \frac{\frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}}{\frac{1}{4} + \frac{1+\lambda}{8+16\lambda} + \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}}(1) = \frac{\frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}}{\frac{4+8\lambda+2+2\lambda+1+4\lambda}{16+32\lambda}} = \frac{\frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}}{\frac{7+14\lambda}{16+32\lambda}} = \frac{1+4\lambda}{7+14\lambda}$$

$x_M \geq v(M)$, $x_D \geq v(D)$, $x_R \geq v(R)$, $x_M + x_D \geq v(MD)$, $x_M + x_R \geq v(MR)$, $x_D + x_R \geq v(DR)$가 각각 성립하면 해가 코어에 존재한다.

$x_M = \frac{4}{7} \geq v(M) = \frac{1}{4}$ 이므로, $x_M \geq v(M)$은 성립한다.

$$\frac{2+2\lambda}{7+14\lambda} - \frac{1+\lambda}{8+16\lambda} = \frac{(2+2\lambda)(8+16\lambda)-(1+\lambda)(7+14\lambda)}{(7+14\lambda)(8+16\lambda)} = \frac{9+27\lambda+18\lambda^2}{(7+14\lambda)(8+16\lambda)} > 0$$

이므로, $x_D \geq v(D)$은 성립한다.

$$\frac{1+4\lambda}{7+14\lambda} - \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda} = \frac{(1+4\lambda)(16+32\lambda)-(1+4\lambda)(7+14\lambda)}{(7+14\lambda)(16+32\lambda)} = \frac{9+54\lambda+72\lambda^2}{(7+14\lambda)(16+32\lambda)} > 0$$

이므로, $x_R \geq v(R)$은 성립한다.

$x_M + x_D \geq v(MD)$ 임을 입증하면, $x_M + x_D = \frac{4}{7} + \frac{2+2\lambda}{7+14\lambda} = \frac{4(1+2\lambda)+2+2\lambda}{7(1+2\lambda)} = \frac{6+10\lambda}{7(1+2\lambda)}$ $v(MD) = \frac{1+\lambda}{2+4\lambda}$ 이므로 $\frac{6+10\lambda}{7+14\lambda} \geq \frac{1+\lambda}{2+4\lambda}$ 이기 위해서는 $\frac{6+10\lambda}{7(1+2\lambda)} - \frac{1+\lambda}{2(1+2\lambda)} = \frac{12+20\lambda-7-7\lambda}{14(1+2\lambda)} = \frac{5+13\lambda}{14(1+2\lambda)}$ $\lambda \geq 0$ 이므로, $\frac{5+13\lambda}{14(1+2\lambda)} \geq 0$ 이다.

$x_M + x_R \leq v(MR)$ 임을 입증하면, $x_M + x_R = \frac{4}{7} + \frac{1+4\lambda}{7+14\lambda} \geq v(MR) = 0$ 이다.

$x_D + x_R \geq v(DR)$ 임을 입증하면 $x_D + x_R = \frac{2+2\lambda}{7+14\lambda} + \frac{1+4\lambda}{7+14\lambda} = \frac{3+6\lambda}{7+14\lambda} = \frac{3}{7} \geq v(DR) = \frac{1}{4}$ 이다.

Proof of Theorem 2.

$m_i = v(N) - v(N \setminus \{i\})$라고 할 때 $x_i = \frac{m_i}{\sum_{i \in N} m_i} v(N)$이므로 $\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \frac{m_i}{\sum_{i \in N} m_i} v(N) = \frac{\sum_{i \in N} m_i}{\sum_{i \in N} m_i} v(N) = v(N)$ 이다.

$$m_M = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$m_D = 1 - 0 = 1$$

$$m_R = 1 - \frac{1+\lambda}{2+4\lambda} = \frac{(2+4\lambda)-(1+\lambda)}{2+4\lambda} = \frac{1+3\lambda}{2+4\lambda}$$

$$x_M = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+1+\frac{1+3\lambda}{2+4\lambda}}(1) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3(2+4\lambda)+4(2+4\lambda)+4+12\lambda}{4(2+4\lambda)}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{18+40\lambda}{4(2+4\lambda)}} = \frac{3+6\lambda}{9+20\lambda}$$

$$x_D = \frac{1}{\frac{3}{4}+1+\frac{1+3\lambda}{2+4\lambda}}(1) = \frac{1}{\frac{18+40\lambda}{4(2+4\lambda)}} = \frac{4+8\lambda}{9+20\lambda}$$

$$x_R = \frac{\frac{1+3\lambda}{2+4\lambda}}{\frac{3}{4}+1+\frac{1+3\lambda}{2+4\lambda}}(1) = \frac{\frac{1+3\lambda}{2+4\lambda}}{\frac{18+40\lambda}{4(2+4\lambda)}} = \frac{2+6\lambda}{9+20\lambda}$$

$x_M \geq v(M)$, $x_D \geq v(D)$, $x_R \geq v(R)$임을 보이기 위해 $x_M = \frac{3+6\lambda}{9+20\lambda} \geq v(M) = \frac{1}{4}$는 성립한다. 왜냐하면,

$$\frac{3+6\lambda}{9+20\lambda} - \frac{1}{4} = \frac{4(3+6\lambda)-(9+20\lambda)}{4(9+20\lambda)} = \frac{3+4\lambda}{4(9+20\lambda)} > 0$$

$$x_D = \frac{4+8\lambda}{9+20\lambda} \geq v(D) = \frac{1+\lambda}{8+16\lambda}$$

$$\frac{4+8\lambda}{9+20\lambda} - \frac{1+\lambda}{8+16\lambda} = \frac{(4+8\lambda)(8+16\lambda)-(1+\lambda)(9+20\lambda)}{(9+20\lambda)(8+16\lambda)} = \frac{32+128\lambda+128\lambda^2-9-29\lambda-20\lambda^2}{(9+20\lambda)(8+16\lambda)}$$

$$= \frac{23+99\lambda+108\lambda^2}{(9+20\lambda)(8+16\lambda)} > 0$$

$\lambda \geq 0$이므로 성립한다.

$$x_R = \frac{4+8\lambda}{9+20\lambda} \geq v(R) = \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}$$

$$\frac{4+8\lambda}{9+20\lambda} - \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda} = \frac{(4+8\lambda)(16+32\lambda)-(1+4\lambda)(9+20\lambda)}{(9+20\lambda)(16+32\lambda)} = \frac{64+256\lambda+256\lambda^2-9-56\lambda-80\lambda^2}{(9+20\lambda)(16+32\lambda)}$$

$$= \frac{55+200\lambda+176\lambda^2}{(9+20\lambda)(16+32\lambda)} > 0$$

$x_M + x_D \geq v(MD)$, $x_M + x_R \geq v(MR)$, $x_D + x_R \geq v(DR)$이 성립함을 보이기 위해서는

$$x_M + x_D = \frac{3+6\lambda}{9+20\lambda} + \frac{4+8\lambda}{9+20\lambda} \geq v(MD) = \frac{1+\lambda}{2+4\lambda}$$

$$\frac{3+6\lambda}{9+20\lambda} + \frac{4+8\lambda}{9+20\lambda} - \frac{1+\lambda}{2+4\lambda} = \frac{7+14\lambda}{9+20\lambda} - \frac{1+\lambda}{2+4\lambda} = \frac{(7+14\lambda)(2+4\lambda)-(1+\lambda)(9+20\lambda)}{(9+20\lambda)(2+4\lambda)}$$

$$= \frac{14+56\lambda+56\lambda^2-9-29\lambda-20\lambda^2}{(9+20\lambda)(16+32\lambda)} = \frac{5+27\lambda+36\lambda^2}{(9+20\lambda)(16+32\lambda)} > 0$$

$x_M + x_R = \frac{3+6\lambda}{9+20\lambda} + \frac{2+6\lambda}{9+20\lambda} \geq v(MR) = 0$은 성립한다.

$x_D + x_R = \frac{4+8\lambda}{9+20\lambda} + \frac{2+6\lambda}{9+20\lambda} \geq v(DR) = \frac{1}{4}$임을 보이면 된다.

$$\frac{4+8\lambda}{9+20\lambda} + \frac{2+6\lambda}{9+20\lambda} - \frac{1}{4} = \frac{6+14\lambda}{9+20\lambda} - \frac{1}{4} = \frac{4(6+14\lambda)-(9+20\lambda)}{4(9+20\lambda)} = \frac{15+36\lambda}{4(9+20\lambda)} > 0$$

그러므로 해는 항상 코어에 존재한다.

Proof of Theorem 3.
샤플리값은 각 게임참여자에 대해 다음과 같은 이익할당을 한다[9].

$$x_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \sum_{S \subseteq N:\, i \in S, |S| = s} v(S) - v(S\{i\})$$

게임 참여자 M, D, R에 대해 이익 할당을 하면 다음과 같다.

$$x_M = \frac{2}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6} \times \left[\left(\frac{1+\lambda}{2+4\lambda} - \frac{1+\lambda}{8+16\lambda}\right) + \left(0 - \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}\right)\right] + \frac{2}{6} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{8(1+\lambda)-2(1+\lambda)-(1+4\lambda)}{16+32\lambda}\right)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5+2\lambda}{16+32\lambda}\right) = \frac{2(16+32\lambda)+(5+2\lambda)}{6(16+32\lambda)} = \frac{37+66\lambda}{96+192\lambda}$$

$$x_D = \frac{2}{6} \times \left(\frac{1+\lambda}{8+16\lambda}\right) + \frac{1}{6} \times \left[\left(\frac{1+\lambda}{2+4\lambda} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}\right)\right] + \frac{2}{6} \times (1-0)\}$$
$$= \frac{2}{6} \times \left(\frac{1+\lambda}{8+16\lambda}\right) + \frac{1}{6} \times \left(\frac{1+\lambda}{2+4\lambda} - \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}\right) + \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{4(1+\lambda)+8(1+\lambda)-(1+4\lambda)+2(16+32\lambda)}{16+32\lambda}\right)$$
$$= \frac{1}{6} \times \left(\frac{4+4\lambda+8+8\lambda-1-4\lambda+32+64\lambda}{16+32\lambda}\right) = \frac{43+72\lambda}{96+192\lambda}$$

$$x_R = \frac{2}{6} \times \left(\frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}\right) + \frac{1}{6} \times \left[\left(0 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1+\lambda}{8+16\lambda}\right)\right] + \frac{2}{6} \times \left(1 - \frac{1+\lambda}{2+4\lambda}\right)$$
$$= \frac{2}{6} \times \left(\frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}\right) + \frac{1}{6} \times \left[-\frac{1+\lambda}{8+16\lambda}\right] + \frac{2}{6} \times \left(\frac{1+3\lambda}{2+4\lambda}\right) = \frac{2}{6} \times \left(\frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}\right) + \frac{1}{6} \times \left[-\frac{2(1+\lambda)}{2(8+16\lambda)}\right] + \frac{2}{6} \times \left(\frac{8(1+3\lambda)}{8(2+4\lambda)}\right)$$
$$= \frac{2}{6} \times \left(\frac{1+4\lambda-1-\lambda+8+24\lambda}{16+32\lambda}\right) = \frac{16+54\lambda}{96+192\lambda}$$

$$x_M + x_D + x_R = \frac{37+66\lambda}{96+192\lambda} + \frac{43+72\lambda}{96+192\lambda} + \frac{16+54\lambda}{96+192\lambda} = 1$$

그러므로, 파레토 최적은 만족한다.

$x_M \geq v(M), x_D > v(D), x_R \geq v(R)$ 임을 보이기 위해

$$x_M = \frac{37+66\lambda}{96+192\lambda} \geq v(M) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{37+66\lambda}{96+192\lambda} - \frac{1}{4} = \frac{4(37+66\lambda)-(96+192\lambda)}{4(96+192\lambda)} = \frac{52+72\lambda}{4(96+192\lambda)} > 0$$

$$x_D = \frac{43+72\lambda}{96+192\lambda} \geq v(D) = \frac{1+\lambda}{8+16\lambda}$$

$$\frac{43+72\lambda}{96+192\lambda} - \frac{1+\lambda}{8+16\lambda} = \frac{43+72\lambda-12-12\lambda}{96+192\lambda} = \frac{31+60\lambda}{96+192\lambda} > 0$$

$$x_R = \frac{16+54\lambda}{96+192\lambda} \geq v(R) = \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda}$$

$$\frac{16+54\lambda}{96+192\lambda} - \frac{1+4\lambda}{16+32\lambda} = \frac{16+54\lambda-6-24\lambda}{96+192\lambda} = \frac{10+30\lambda}{96+192\lambda} > 0$$

$x_M + x_D \geq v(MD),\ x_M + x_R \geq v(MR),\ x_D + x_R \geq v(DR)$ 이 성립함을 보이기 위해서는

$$x_M + x_D = \frac{37+66\lambda}{96+192\lambda} + \frac{43+72\lambda}{96+192\lambda} \geq v(MD) = \frac{1+\lambda}{2+4\lambda}$$
$$\frac{37+66\lambda}{96+192\lambda} + \frac{43+72\lambda}{96+192\lambda} - \frac{1+\lambda}{2+4\lambda} = \frac{80+138\lambda-48-48\lambda}{96+192\lambda} = \frac{32+90\lambda}{96+192\lambda} > 0$$

$$x_M + x_R = \frac{37+66\lambda}{96+192\lambda} + \frac{16+54\lambda}{96+192\lambda} \geq v(MR) = 0$$

$$x_D + x_R = \frac{43+72\lambda}{96+192\lambda} + \frac{16+54\lambda}{96+192\lambda} \geq v(DR) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{43+72\lambda}{96+192\lambda} + \frac{16+54\lambda}{96+192\lambda} - \frac{1}{4} = \frac{4(59+126\lambda)-96-192\lambda}{4(96+192\lambda)} = \frac{140+312\lambda}{4(96+192\lambda)} > 0$$

그러므로 샤플리값은 항상 코어에 속한다.