한국초등수학교육학회지 *23*(1) 43-57. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* *23*(1) 43-57.
2019. 2. 28 *February 28. 2019.*

초등학교 수학에서 0의 의미와 성질에 대한 고찰[1]

백대현[2]

초등학교 1학년 수학에서 '아무것도 없음'을 나타내는 수 0은 '1 보다 1작은 수'의 의미로 도입된다. 또한 1, 2학년 수학에서 처음 제시되는 0의 성질은 0을 더하고, 빼고, 곱하는 예시적인 상황으로 설명된다. 그러나 이후 학습에서는 0의 의미와 성질을 더 이상 명시적으로 다루지 않는다. 본 연구에서는 초등학교 학생들이 0의 의미와 성질을 이해하는 데 도움을 주기 위하여 초등학교 수학 교과서에 제시된 0의 도입 방식과 계산식을 해결하는 과정에서의 0의 성질의 적용 방안에 대하여 논의하고자 한다. 이를 통해 초등학교 수학에서 0의 의미와 성질에 관한 교육적 시사점을 도출하고자 한다.

주제어: 0의 성질, 0에 관한 덧셈, 0에 관한 뺄셈, 0에 관한 곱셈, 0에 관한 나눗셈, 초등학교 수학 교과서

Ⅰ. 서 론

'2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서(이하 교과서)'에서 0은 1부터 9까지의 수를 학습하고, 1 큰 수와 1 작은 수의 의미를 학습한 다음 '아무것도 없는 것'을 나타내는 수로 도입된다(교육부, 2017a). 또한 '교사용 지도서(이하 지도서)'는 0을 1보다 1작은 수의 의미로 도입하도록 설명한다(교육부, 2017d). 초등학교 수학에서 0의 성질은 1, 2학년 수학에서만 명시적으로 다루고 있다. 1학년 교과서(교육부, 2017a)에서는 0을 더하거나 빼는 예시적인 계산식을 통하여 0+(어떤 수)=(어떤 수), (어떤 수)+0=(어떤 수), (어떤 수)−0=(어떤 수), (어떤 수)−(어떤 수)=0의 상황을 이해하게 하고, 2학년 교과서(교육부, 2017c)에서는 0을 곱하는 예시적인 계산식을 통하여 0×(어떤 수)=0, (어떤 수)×0=0의 상황을 이해하게 한다. 그러나 0에 관한 나눗셈의 경우는 0÷(어떤 수)=0의 상황이 전혀 제시되지 않았다. 그리고 3학년 이후 수학에서는 0의 성질을 더 이상 명시적으로 다루지 않기 때문에 초등학교 1, 2학년 수학에서 다룬 예시적인 계산 상황을 통하여 학습자가 0의 성질을 명확하게 이해하기는 쉽지 않다.

초등학교 수학에서 0이 수로 도입되었지만, 0을 수로 인식하지 못하는 중학생과 예비교사들이 여전히 있다는 사실은 초등학교 수학에서 0의 개념을 명확하게 이해할 수 있는 충분한 기회를 제공하지 못했다는 것을 의미한다. 김수미(2004)는 교육대학교 4학년 예비교사 35명 중 8명, 박지현(2007)은 중학교 3학년 영재학생 20명 중 7명과 사범대 4학년 예

---

1) 본 연구는 2018학년도 부산교육대학교 연구년 교수 지원 연구비에 의해 수행되었음.
2) 부산교육대학교, 교수

비 교사 16명 중 2명이 0을 수로 인지하지 못하였다고 밝혔다. 이와 같은 사례는 학생들과 예비 교사의 0의 개념에 대한 이해가 부족하다는 것을 보여주는 동시에 초등학교 수학에서 0에 대한 구체적인 지도가 필요하다는 점을 시사한다. 최근 장혜원, 최민아, 임미인(2014)은 '아무것도 없는 것'으로서의 0의 도입이 비어 있는 자리수를 나타내기 위해 사용되는 기호로서의 역할과 어떻게 연계되어야 하는지에 대한 검토가 필요하다고 언급하였다. 따라서 교과서에 0이 처음 도입될 때, 0의 의미와 성질을 충분히 경험할 수 있는 기회를 제공해야 한다. 그러나 제7차 교육과정, 2007년 개정 및 2009년 개정 교육과정, 현행 2015 개정 교육과정에 이르기까지 교육과정에 따른 교과서(교육과학기술부, 2009; 교육부 2016a; 교육부 2017a)에 제시된 0의 의미와 성질의 지도에 대한 본질적인 변화를 찾기가 어렵다. 단지, 2015 개정 교육과정에서 0의 도입 시기가 십진기수법에서 0의 역할을 고려하여 9까지의 수를 학습한 이후로 늦추어진 정도이다. 또한 지도서에도 0과 관련된 지도에 대한 체계적인 설명도 부족한 실정이다.

수학에서 0의 중요성은 근본적으로 위치적 기수법에서의 자리 기호 역할에 있지만, 교과서에서는 십진기수법에서 0의 역할을 명시적으로 다루지 않는다. 수로서 0과 관련된 계산에 대하여 김수미(2006)는 명시적이고 체계적인 방법으로 0과 0이 포함된 계산을 지도할 필요성을 강조하고, 당시 교과서에서는 0에 관련된 덧셈, 뺄셈, 곱셈에서 $0+0=0$, $0-0=0$, (어떤 수)−(어떤 수)$=0$, $0\times 0=0$은 다루어지지 않았다고 지적하였다. 또한 학생들이 나눗셈에서 $0\div$(어떤 수)$=0$을 제대로 처리하지 못한 것으로 인한 오류 가능성을 언급하고, $0\div$(어떤 수)$=0$을 명시적으로 지도할 것을 제안하였다. 이와 관련하여 장혜원, 최민아, 임미인(2014)은 2007개정 교육과정의 교과서는 $0+0=0$, $0-0=0$, (어떤 수)−(어떤 수)$=0$을 다루지만 $0\times 0=0$은 다루지 않고, 2009년 개정 교육과정의 교과서는 $0+0=0$, $0-0=0$을 덧셈구구표와 뺄셈구구표에서, (어떤 수)−(어떤 수)$=0$은 마무리 활동으로, $0\times 0=0$은 $0\times$(어떤 수)에서 찾을 수 있는 규칙의 하나로 제시되었다고 언급하였다. 그러나 $0\div$(어떤 수)$=0$은 2007 및 2009 개정 교육과정의 교과서에 여전히 제시되지 않았다고 밝혔다. 따라서 교육과정에 따라 교과서에 0의 성질을 다루는 방식에는 일관성이 결여되었음을 알 수 있다. 특히, 장혜원, 최민아, 임미인(2014)은 많은 학생들이 0이 포함된 계산을 일반적인 사칙 계산과 다른 것으로 간주하기 때문에 0과 관련된 사칙 계산은 기본적이고 중요한 연산으로 다루어져야 하며, 이에 대한 의도적인 지도를 강조하였다.

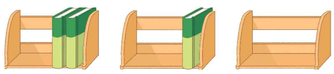
한편, 0의 성질은 중등학교 수학에서도 효과적인 문제 해결 전략으로 사용될 수 있다. 예를 들어, 일차방정식 $x+4=6$를 풀 때, $x+4-4=6-4$로 나타낸 다음, 0의 성질을 적용하면 $x+0=2$가 되고, 다시 0의 성질에 의하여 $x=2$를 구하게 된다. Sprows(2016)는 이차방정식 $x^2+6x=1$의 해를 구할 때 등식의 좌변에 $9-9$ 형태의 0을 더하면 $x^2+6x+9-9=1$이 되어 근의 공식을 사용하지 않고 $(x+3)^2=10$에서 $x=-3\pm\sqrt{10}$을 구할 수 있다고 언급하였다. 또한 미분가능한 두 함수 f와 g에 대하여 함수 fg의 도함수를 구하기 위해서는 $\dfrac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$의 분자에 $f(x+\Delta x)g(x)-f(x+\Delta x)g(x)$ 형태의 0을 더하는 단계가 필요하다. 따라서 초등학교 수학의 계산식에서 0의 성질을 적용하는 경험은 이후 중등학교 수학에서 이를 활용하고 이해하는데 도움을 줄 수 있다.

이와 같은 0과 관련된 계산에 대한 논의를 바탕으로 본 연구에서는 초등학교 학생들이 0의 의미와 성질을 이해하는 데 도움을 주기 위하여 초등학교 수학 교과서에 제시된 0의 도입 방식과 계산식을 해결하는 과정에서의 0의 성질의 적용 방안에 대하여 논의하고, 이를 통해 0의 성질에 관한 교수·학습의 시사점을 도출하고자 한다.

Ⅱ. 교과서에서 0의 의미와 성질에 대한 문제점

1. 0의 의미

교과서에서 0은 1부터 9까지의 수, 1 큰 수와 1 작은 수를 학습하고 난 후, [그림 1]과 같이 '아무것도 없음'을 나타내는 수로 제시되었다. 지도서에는 0을 '1보다 1작은 수'의 의미로 도입되고 학습자가 이해할 수 있도록 다양한 구체물을 활용하도록 서술되었다.



[그림 1] 0의 도입(교육부, 2017a, p. 24)

교과서에서 '1 큰 수와 1 작은 수'를 학습한 다음 0을 1보다 1작은 수로 도입되고, 이후에 두 수의 크기를 비교하는 활동이 처음 제시된다. 그런데 한 수가 다른 수보다 얼마나 큰지 또는 작은지를 학습하는 것보다 먼저 두 수의 크기를 비교하는 학습이 이루어지는 것이 적절하다. 따라서 0의 도입 방식에 대한 논의가 필요하다.

한편, 이화영(2018)은 제5차 교육과정부터 2015 개정 교육과정에 따른 모든 교과서의 가르기와 모으기에서 0을 다루지 않았지만, 2007 및 2015 개정 교육과정에 따른 지도서에는 학생 수준에 따라 0을 다룰 수도 있다고 명시되어 0의 지도에 대한 일관성이 결여되었음을 지적하였다. 구체적으로 지도서(2017d)에는 '5를 0과 5로 가르는 것은 부자연스럽고 추상적인 사고를 요구하기 때문에 다루지 않는 것이 바람직하지만, 학생이 0과 5로 가르기를 한 경우 정답으로 인정한다.'고 서술되어 0에 관한 지도 방침이 명확하지 않다는 것이다.

이제 교과서에 자리 기호로서 0의 역할이 어떻게 제시되었는지 살펴보자. 자리 기호로서 0의 역할은 2학년 교과서에서 세 자리 수를 학습한 후 십진기수법에서 자릿값을 알아보기 위한 활동에서 처음 나타난다. 2009 개정 교육과정의 교과서(교육부, 2016b)의 경우 자릿값을 알기 위한 활동으로 125만 제시하였지만, 현행 교과서에서는 435의 각 자리 숫자의 자릿값을 설명하고 627, 555, 730을 추가로 제시하여 자릿값의 개념을 확인시킨다. 그러나 자리 기호로서 0의 역할이 명확하게 드러나는 수는 730 하나만 제시되었다.

2. 0의 성질

학생들이 0과 관련된 계산에서 어려움을 겪는 근본적인 이유 중의 하나는 주어진 계산식을 학생들이 이해할 수 있는 실생활적 상황이나 구체물로 나타낼 수 없기 때문이다. 이런 관점에서, 예를 들어, Reys et al.(2015)은 0을 더하는 것은 아동들이 가장 이해하기 어려운 전략 중의 하나라고 언급하였다. 또한 교과서에서 0의 성질을 적용할 수 있는 상황을 명시적으로 다루지 않은 것도 원인이 될 수 있다. 김수미(2006)는 제7차 교육과정에 따른 교과서에 제시된 0과 관련된 덧셈과 뺄셈의 세로셈에서 $0+0=0$, $0-0=0$, (어떤 수)−(어떤 수)=0가 이용되지만, 교과서는 이러한 0의 성질을 다루지 않았다고 지적하였다. 또한 교과서에서 0×2와 3×0과 같은 곱셈의 경우는 예시적인 상황으로 도입하였고, $0\times0=0$의 경우는 전혀 다루지 않았지만 익힘책에서 곱셈표를 채우는 과정에 $0\times0=0$의

결과를 쓰게 한다고 언급하였다. 특히, 30×40의 세로셈에서는 $0\times0=0$, $4\times0=0$, $0\times3=0$이 이용되지만 교과서는 30×4에서 유추하여 0을 붙이도록 지도하도록 한다. 한편, 나눗셈의 경우는 표준 알고리즘으로 문제를 해결하는 경우에 필연적으로 $0\div$(어떤 수)의 상황에 부딪히게 되지만 교과서는 이런 상황을 다루지 않는다고 지적하였다.

2007 개정 교육과정의 교과서는 $0+0=0$과 $0-0=0$을 다루었지만, 2009 개정 교육과정에서는 $0+0=0$과 $0-0=0$이 익힘책에만 제시되고 교과서에서는 덧셈구구표와 뺄셈구구표에서 연산의 규칙을 확인하는 정도로 제시되었다. 그리고 $0\times0=0$은 2007 개정 교육과정의 교과서에는 제시되지 않았지만 2009 개정 교육과정의 교과서에는 $0\times$(어떤 수)를 0×0, 0×1, 0×2, …로 나타내는 문제 상황에서 곱셈 결과의 규칙을 찾도록 제시되었다(장혜원, 최민아, 임미인, 2014).

한편, 교과서에서 0의 성질은 1, 2 학년 수학에서 $0+3=3$, $3+0=3$, $3-0=3$, $3-3=0$, $0\times2=0$, $3\times0=0$과 같이 특정한 수와 관련된 계산식의 형태로 나타나지만, 3학년 이후의 학습에서 이러한 성질을 명시적으로 다루지 않는다. 또한 $0+0=0$, $0-0=0$, $0\times0=0$은 명시적으로 다루지 않지만, $0\times0=0$의 경우는 곱셈표를 만드는 활동에서 아무런 언급 없이 곱셈표에 채워져 있다. 그리고 $0\div$(어떤 수)는 지난 교육과정의 교과서와 마찬가지로 전혀 다루지 않는다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 0의 도입

0을 도입하는 단계에서 '아무것도 없음'을 나타내는 수로서의 0의 의미와 십진기수법에서 자리 기호로서 역할의 의미에 대한 서술 방식을 분석한다. 이를 위하여 교과서에 제시된 0의 도입 방식을 2007 및 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에 제시된 0의 도입 방식과 비교・분석한다. 또한 외국 초등학교 수학 교과서의 참고 사례로 Altieri et al.(2009a)에 제시된 0의 도입 방식을 분석한다. 끝으로 교과서에 제시된 0의 도입 방식의 문제점을 해결할 수 있는 방안을 모색한다.

2. 0에 관한 사칙 계산

연구 대상은 교과서에 제시된 0이 포함된 계산식과 0의 성질을 적용할 수 있는 계산식이다. 0이 포함된 계산식은 $30+20=50$과 같은 식으로 세로셈으로 해결할 때 $0+0=0$과 같은 0의 성질이 필요한 계산식을 의미한다. 그리고 0의 성질을 적용할 수 있는 계산식은 $27-3$과 같은 식으로 계산식에 0이 포함되어 있지 않지만 계산 과정에 $27-3=24+3-3=24+0=24$와 같이 '$3-3=0$'과 '$24+0=24$'과 같은 0의 성질을 적용할 수 있는 계산식을 의미한다. 이와 같이 0의 성질이 필요한 계산식과 0의 성질을 적용할 수 있는 계산식을 분석하기 위한 단계는 다음과 같다.

- 0이 포함된 계산식을 0에 관한 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈으로 분류하여 계산 과정에 필요한 0의 성질을 살펴본다.
- 0의 성질을 적용할 수 있는 계산식을 0에 관한 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈으로 분류하

여 계산 과정에 적용할 수 있는 0의 성질을 살펴본다. 단, 이와 같은 계산식이 제한적인 경우 0의 성질을 이해할 수 있는 방안을 제시한다.

덧셈에 대한 항등원으로서 0의 성질은 이제 고등학교 수학에서도 다루어지지 않는 상황을 고려하면 초등학교 수학의 계산식에서 0의 성질과 관련된 논의는 학습자의 이해 수준에 적합하도록 접근해야 한다. 따라서 0의 성질은 선행 연구에서 논의된 문제점의 범주 안에서 논의하는 것이 바람직하다. 그러므로 본 연구에서 0의 성질은 0과 0이 아닌 어떤 수에 대하여 $0+0=0$, $0-0=0$, $0\times0=0$과 $0+$(어떤 수)=(어떤 수), (어떤 수)$+0=$(어떤 수), (어떤 수)$-0=$(어떤 수), (어떤 수)$-$(어떤 수)$=0$, (어떤 수)$\times0=0$, $0\times$(어떤 수)$=0$, $0\div$(어떤 수)$=0$에 국한하기로 한다. 또한, 초등학교 수학에서는 음수를 다루지 않기 때문에 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에서 다루는 수는 범자연수와 양의 유리수 및 양의 소수에 한정하기로 한다. 한편, 교과서의 0에 관한 계산에서 필요한 0의 성질이 명시적으로 제시되지 않는 경우, Altieri et al.(2009a)와 Andrews et al.(2009) 등의 관련 내용을 참고하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 0의 도입

역사 발생적 관점에서 보면 0의 역할은 수라기 보다는 위치적 기수법에 따라 수를 표기하기 위해 비어있는 자리를 채우기 위한 자리 기호였다(장혜원, 최민아, 임미인, 2014). 이와 같이 0은 먼저 기호로 받아들여졌기 때문에 처음에는 수직선에서 자리가 없었지만 수로서의 의미는 수직선 위에서 다른 수와 크기를 비교하는 0의 위치에서 비롯되었다(Seife, 2000). 교과서에서는 '아무 것도 없음'을 나타내는 수로 제시된 0의 의미를 전달하기 위하여 1 큰 수와 1 작은 수를 학습한 다음에 0을 '1보다 1작은 수'의 의미로 도입하고 있다. 그러나 교과서에서 두 수의 크기를 비교하는 활동은 0을 도입한 이후에 제시되기 때문에 0을 1보다 1작은 수의 의미로 이해하는 것에 대한 논의가 필요하다. 뺄셈에서 2가 3보다 1 작은 수라는 것을 $2=3-1$으로 표현하는 것과 같이 0과 1보다 1 작은 수의 관계를 뺄셈으로 나타내면 $0=1-1$로 표현할 수 있다. 따라서 뺄셈을 아직 학습하지 않은 단계에서 0을 1보다 1 작은 수로 도입하는 것은 재고할 필요가 있다. 따라서 '아무 것도 없음'을 나타내는 수로서 0의 도입 방식을 네 가지 관점에서 논의한다.

첫째, 뺄셈을 학습한 이후에 0을 도입하는 방법이 있다. 이는 0을 '1보다 1작은 수'로 도입하는 교과서의 서술 방식에 부합된다. 따라서 뺄셈 이후에 학습하는 50까지의 수에서 0을 도입한다면, 김수미(2006)의 지적처럼 자리 기호로서 0의 역할도 강조할 수 있다. 또한 구체물을 사용하여 $3-3$의 상황을 제시하고 이를 나타내는 수로 0을 도입할 수 있다.

둘째, 뺄셈을 학습하기 전에 일대일 대응의 개념을 학습하고 나서 0을 도입하는 방법이 있다. Norwood et al.(2009)은 0을 도입하기에 앞서 구체물을 제시하고 일대일 대응을 이용하여 두 개를 '세 개보다 한 개 더 적은'으로 설명하고 있다. 이와 같은 관점에서 한 개를 '두 개보다 한 개 더 적은'으로 설명한 후 '아무 것도 없음'을 '한 개보다 한 개 더 적은'의 상황으로 유추하게 할 수 있다. 따라서 1보다 1작은 수로 표현하지 않고 구체물의 개수를 비교하는 활동으로 '아무것도 없음'의 개념을 전달하는 것이다. 한편

교과서는 일대일 대응을 명시적으로 다루지 않지만 [그림 2]와 같이 뺄셈 상황에서 암묵적으로 제시되었다. 교과서에서 다루는 1 큰 수와 1 작은 수를 알아보기 위하여 버스 수만큼 수판위에 검은 바둑돌과 흰 바둑돌을 놓고 비교하는 활동을 한다. 따라서 이 활동을 일대일 대응으로 나타내고, 이를 이용하여 0을 위에서 언급한 방식으로 도입할 수 있다.

[그림 2] $8-5=3$(교육부, 2017a, p. 75)

셋째, 0을 1보다 먼저 도입하는 방법이 있다. 이 방법은 [그림 3]에 제시되었다. Altieri et al. (2009a)은 구체물이 하나씩 증가하는 활동을 통하여 먼저 '아무것도 없음' 상황에서 0을 제시하고, 다음으로 빨간 사과 한 개를 1로 제시하고, 그 다음으로 푸른 사과 두 개를 2로 제시하는 방법으로 0을 도입한다. 특히 [그림 3]은 0부터 10까지의 범자연수를 제시하여 자리 기호로서 0의 역할도 강조할 수 있는 기회를 제공한다. 현대 수학에서 범자연수를 정의할 때 0에서 시작하는 Peano 공리와의 연계성을 고려하면 이와 같은 방식으로 0을 1보다 먼저 도입할 수 있다.

A **number** tells how many.

See	Name	Number
	zero	0
	one	1
	two	2

[그림 3] 0의 도입(Altieri et al., 2009a, p. 23)

한편 [그림 3]은 1에 대응하는 사과와 2에 대응하는 사과의 색깔을 다르게 하여 집합수로서의 의미가 강조되었다.

넷째, 0을 1보다 1작은 수의 의미로 도입하지 않고 교과서에 제시된 삽화를 재구성하는 방법이 있다. [그림 1]의 상황에서 예를 들어, 책꽂이를 없애고 귤 세 개, 사과 두 개, 바나나 한 개, 그리고 빈칸으로 구성하고, 대응되는 수를 각각 3, 2, 1, 0으로 제시하는 방법이다.

이제 자리 기호로서 0의 역할에 대하여 살펴보자. 2007 및 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 1부터 5까지의 수를 학습하고, 구체물을 이용하여 하나 더 많은 것과 하나 더 적은 것을 학습한 후 '하나 더 적은 것'이라는 학습 결과를 이용하여 0을 도입한다. 이에 대하여 김수미(2006)는 5까지의 수만 도입된 단계에서 십진기수법에서의 낱개가 없음을 나타내는 기호로서의 0의 역할은 제시하기가 어렵다고 지적하였다. 한편 교과서에서는 1부터 9까지의 수를 학습하고 10을 배우는 단계에서 0을 도입하였지만 십진기수법에서의 0의 역할은 강조되지 않고 있다. 2007 및 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에도 이와 같은 방식으로 20을 10개씩 2묶음으로 제시하고 있다(교육과학기술부, 2009; 교육부, 2016a). 또한 현행 교과서에서도 20을 10개씩 묶음 2개로 제시하고 있다. 이와 관련하여 김수미(2006)는 십진기수법에서 0의 역할을 지도할 시점은 두 자리수를 10개씩 묶음과 낱

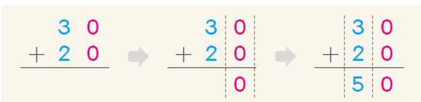
개로 나타낼 때라고 지적하고 십진기수법에서의 0의 역할을 강조하기 위한 방안으로 10을 '10개씩 묶음 1개와 낱개가 0인 수'로 제시할 것을 주장하였다. 참고로 Norwood et al.(2009)은 10을 '1 ten and 0 ones'로, 100을 '10 tens and 0 ones'로 표현하였다. 또한 자리 기호로서 0의 역할을 강조하기 위하여 2학년 교과서에서 자릿값의 개념을 설명할 때 자리 기호로서 0의 역할이 명확하게 드러나는 수를 다양하게 제시할 필요가 있다.

2. 0에 관한 사칙 계산

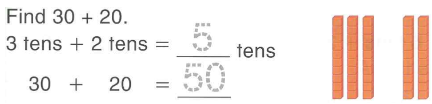
초등학교 수학에서 다루는 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 계산은 세로셈으로 형식화되어 있다. 특히 세로셈은 0이 포함된 계산식에서 0의 성질이 필요하다는 사실을 단적으로 보여준다. 김수미(2006)는 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 세로셈에서 $0+0$, $0-0$, 0×0과 같은 0의 성질이 필요하지만 교과서에서는 이를 명시적으로 다루지 않는다고 지적하였다.

가. 0에 관한 덧셈

교과서의 0이 포함된 계산식에서 $0+0=0$이 필요한 상황을 살펴보자. [그림 4]와 같은 $30+20$의 세로셈에서 $0+0=0$이 명확하게 필요하며, 4학년 교과서(교육부, 2018d, p. 66)의 소수의 덧셈 $0.67+0.14$을 세로 형식으로 계산할 때에도 $0+0=0$이 필요하다.



[그림 4] 30+20(교육부, 2017b, p. 39)



[그림 5] 30+20(Altieri et al., 2009b, p. 485)

한편, 1학년 학생들의 수준에서 $30+20$을 [그림 5]와 같이 계산할 수 있다. 이와 같은 계산의 원리는 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이다.

즉, $30+20=3\times 10+2\times 10=(3+2)\times 10=5\times 10$을 학습자의 이해 수준에 적합하게 표현한 것이다. 지도서에서도 [그림 5]와 같은 방식으로 $60+10$을 10개씩 묶음이 몇 개인지 질문한다. 이러한 대안적인 방법이 있지만 교과서에서 형식화된 세로셈을 강조하기 때문에 $0+0=0$을 명시적으로 다루어야 한다. 1학년 수학에서 처음 나타나는 덧셈에 대한 0의 성질은 $0+7=7$, $7+0=7$이다. 이와 같은 성질은 이후 $42+50$과 $20+35$의 세로셈(교육부, 2017b, p. 41)에서 경험할 수 있다.

이제 0의 성질을 적용할 수 있는 덧셈식을 살펴보자, 이와 같은 덧셈식은 2, 3학년 수학에서 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수), (두 자리 수)+(두 자리 수), (세 자리 수)+(세 자리 수)에서 찾을 수 있으며 전형적인 사례는 다음과 같다.

- $15+6=15+6+0=15+6+4-4=15+10-4=25-4=21$.
- $35+95=35+95+0=35+95+5-5=35+100-5=135-5=130$.
- $935+186=935+186+0=935+186+14-14=935+200-14=1135-14=1121$.

위의 계산 과정에서 알 수 있듯이 공통적으로 (어떤 수)−(어떤 수) 형태의 0을 더하여 받아내림이 없는 뺄셈으로 나타낸다. 따라서 이와 같은 덧셈식에 적용할 수 있는 0의 성

질은 (어떤 수)+0=(어떤 수)와 (어떤 수)−(어떤 수)=0이다. 4학년 수학의 분수와 소수의 덧셈에서도 다음과 같이 0의 성질을 적용할 수 있다.

- $2\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}+0=2\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}+2-\frac{1}{3}=4\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=4\frac{1}{3}$.
- $2.5+3.7=2.5+3.7+0=2.5+3.7+0.3-0.3=2.5+4-0.3=6.5-0.3=6.2$.

덧셈식에서 0의 성질을 적용하는 근본적인 이유는 0의 성질을 이해하기 위한 것이기 때문에 형식화된 세로셈과는 별개로 의도적으로 지도할 필요가 있다. 따라서 학습자가 어느 정도 계산에 능숙한 상황에서 이와 같은 계산을 지도하는 것이 바람직하다.

나. 0에 관한 뺄셈

먼저 교과서의 0이 포함된 계산식에서 $0-0=0$이 필요한 상황을 살펴보자. 1학년 수학에서 $20-10$의 세로셈과 4학년 수학에서 소수의 뺄셈 $0.94-0.78$을 세로셈으로 계산할 때 $0-0=0$이 필요하다. 1학년 수학에서 처음 나타나는 뺄셈에 대한 0의 성질은 $7-7=0$, $7-0=7$이다. 이와 같은 성질은 이후 $57-7$과 $87-50$의 세로셈(교육부, 2017b, pp. 47-51)에서 경험할 수 있다.

다음으로 0의 성질을 적용할 수 있는 뺄셈식은 1, 2, 3학년 수학에서 (한 자리 수)−(한 자리 수), (두 자리 수)−(한 자리 수)와 받아내림이 있는 (두 자리 수)−(두 자리 수), (두 자리 수)−(두 자리 수)의 뺄셈으로 다음과 같다.

- $7-5=2+5-5=2+0=2$.
- $27-3=24+3-3=24+0=24$.
- $34-26=8+26-26=8+0=8$ 또는 $34-26=4+30-26=4+4+26-26=8+0=8$.
- $802-345=402+400-345=402+55+345-345=402+55+0=402+55=457$.

위의 계산 과정에서 알 수 있듯이 공통적으로 피감수를 어떤 수와 감수의 합으로 나타내어 받아올림이 없는 덧셈으로 계산한다. 따라서 이와 같은 뺄셈식에 적용할 수 있는 0의 성질은 (어떤 수)−(어떤 수)=0과 (어떤 수)+0=(어떤 수)이다. 한편, $34-26$과 $802-345$의 계산에 0의 성질을 적용하는 방법이 효율적이지는 않지만, 학습자에게 0의 성질을 이해할 수 있는 의도적인 환경을 제공한다. 4학년 수학의 분수의 뺄셈에서도 다음과 같이 0의 성질을 적용할 수 있다. 그러나 덧셈식과 마찬가지로 학습자가 어느 정도 계산에 능숙한 상황에서 이와 같은 계산을 지도하여야 한다.

- $3\frac{4}{5}-2\frac{2}{5}=3-2+\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=1+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=1+\frac{2}{5}+0=1+\frac{2}{5}=1\frac{2}{5}$.
- $1.5-0.7=0.8+0.7-0.7=0.8+0=0.8$.

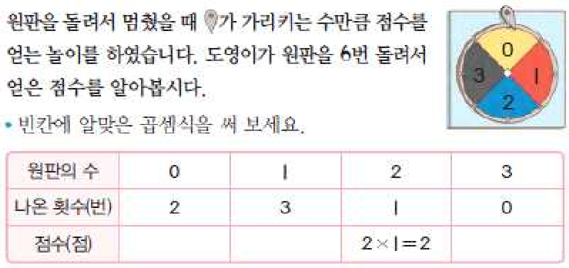
다. 0에 관한 곱셈

교과서의 0이 포함된 계산식에서 $0\times0=0$이 필요한 상황을 살펴보자. $0\times0=0$은 2학년 수학에서 곱셈구구를 학습한 후 곱셈표를 만드는 활동에서 아무런 설명 없이 제시되었다.

[그림 7]과 같은 20×30의 세로셈에서 $0\times0=0$이 명확하게 필요하다. 2학년 수학에서 처음 나타나는 곱셈에 대한 0의 성질은 [그림 6]과 같이 $0\times2=0$과 $3\times0=0$이다. 이와 같은 성질은 [그림 7]의 20×30의 세로셈에서 경험할 수 있다. 3학년 수학에서 0의 성질을 적용할 수 있는 전형적인 곱셈식은 다음과 같다.

- $53\times29=(50+3)\times(20+9)=50\times20+50\times9+3\times20+3\times9.$

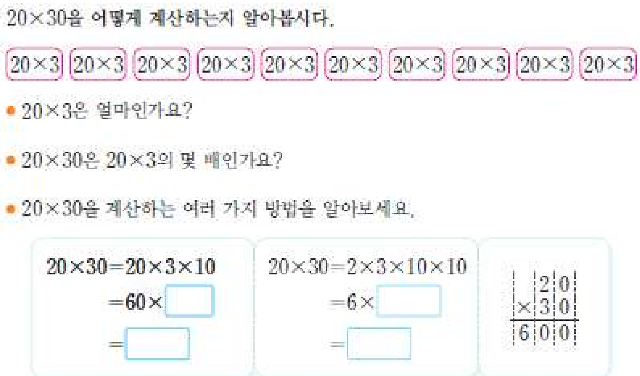
물론 교과서에는 위와 같이 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 적용하여 등식으로 제시하지 않는다. 대신 모눈종이를 이용하여 분배법칙을 암묵적으로 사용하고 있다. 덧셈과 뺄셈의 경우와는 다르게 곱셈에서 0의 성질을 적용할 수 있는 계산식은 제한적이었다. 따라서 이제 곱셈식에서 0의 성질을 어떻게 이해할 수 있는지 살펴보자. $0\times2=0$과 $3\times0=0$을 도입하는 [그림 6]의 문제 상황은 인위적인 측면이 있다. 이와 관련하여 Altieri et al.(2009b)에는 8×0을 나타내는 상황을 이해시키기 위하여 'How many legs do 8 snakes have?' 또는 'How many legs do 15 fish have?' 와 같은 문제를 제시하고 있다. 또한 Andrews et al.(2009)에는 'Lilly saw 4 doghouses. There were 0 dogs in each doghouse. How many dogs were there in all?' 을 제시하여 $4\times0=0$의 상황을 설명하고 있다. 이를 참고하면 교과서에서도 원판을 돌리는 것보다 좀 더 자연스러운 상황을 제시할 수 있을 것이다.


원판을 돌려서 멈췄을 때 가 가리키는 수만큼 점수를 얻는 놀이를 하였습니다. 도영이가 원판을 6번 돌려서 얻은 점수를 알아봅시다.

• 빈칸에 알맞은 곱셈식을 써 보세요.

원판의 수	0	1	2	3
나온 횟수(번)	2	3	1	0
점수(점)			$2\times1=2$	

[그림 6] 0의 곱(교육부, 2017c, p. 49)


20×30을 어떻게 계산하는지 알아봅시다.

20×3 20×3 20×3 20×3 20×3 20×3 20×3 20×3 20×3 20×3

• 20×3은 얼마인가요?

• 20×30은 20×3의 몇 배인가요?

• 20×30을 계산하는 여러 가지 방법을 알아보세요.

$20\times30=20\times3\times10$
$=60\times\square$
$=\square$

$20\times30=2\times3\times10\times10$
$=6\times\square$
$=\square$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 30 \\ \hline 600 \end{array}$$

[그림 7] 20×30(교육부, 2018b, p. 16)

김수미(2006)는 30×40의 세로셈은 $0\times0=0$, $4\times0=0$, $0\times3=0$가 이용되지만 교과서는 30×4에서 유추하여 30×4의 계산 결과에 0을 붙이도록 지도한다고 지적하였다. 이와 같은 지도 방법과 함께 2007 개정 교육과정의 교과서(교육과학기술부, 2010)는 30×4를 10번 더하는 활동을, 2009 개정 교육과정의 교과서(교육부, 2015a)는 30×4를 10번 더하는 활동과 세로셈을, 현행 교과서에서는 [그림 6]와 같이 20×3을 10번 더하는 활동, 세로셈을 제시하였다. 그러나 53×29와 같이 0이 포함되지 않은 곱셈식은 유추하여 계산하기 어렵기 때문에 실질적으로 세로셈 계산이 편리하다. 따라서 30×40의 세로셈에서 처음 부딪히는 $0\times0=0$을 명시적으로 제시할 필요가 있다.

한편, 학습자 수준에서 0×2를 동수누가로 이해하면 $0\times2=0+0$이 되고, 0의 성질에 의하여 $0\times2=0$이 된다. 그리고 3×0은 교과서에서 암묵적으로 다루는 곱셈의 교환법칙을 적용하여 0×3으로 이해하면 $3\times0=0\times3=0$임을 알 수 있다. 사실 다음과 같이 분배법칙과 0의 성질을 이용하여 $3\times0=0$을 보일 수 있는 사실은 잘 알려져 있다(Seife, 2000). 먼저 $0=0+0$과 분배법칙에 의하여 $3\times0=3\times(0+0)=3\times0+3\times0$이 된다. 이 등식의 양변에 각각 3×0을 빼면 $3\times0-3\times0=3\times0+3\times0-3\times0$이 되고 0의 성질에 의하여 $0=3\times0+0$이 된다. 따라서 다시 0의 성질에 의하여 $3\times0=0$이 된다. 마찬가지로 $0\times3=0$과 $0\times0=0$이 성립함을 보여줄 수 있다. 곱셈에 대한 0의 성질이 중요한 이유 중의 하나는 중등학교 수학에서 다루는 방정식을 해결할 때 사용되기 때문이다. 초등학교 수학에서 다룬 곱셈에 대한 0의 성질을 확장하면 '$a\times b=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이다.'는 정리를 얻는다. 예를 들어, 이차방정식 $x^2-3x=0$을 풀 때, 이 정리를 적용하면 $x(x-3)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$을 구하게 된다(Newman, 1967).

라. 0에 관한 나눗셈

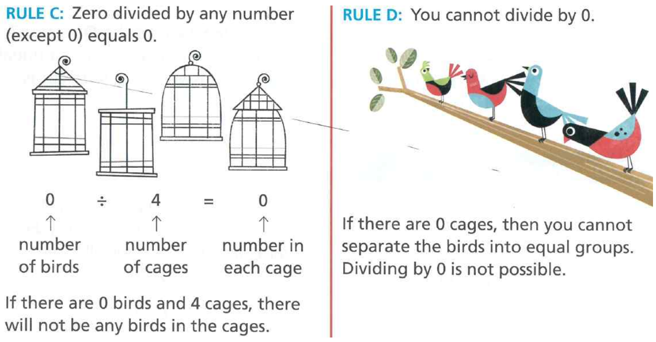
교과서의 0이 포함된 나눗셈에서 $0\div$(어떤 수)$=0$이 필요한 상황을 살펴보자. 3학년 수학에서 $60\div3$, $300\div3$, $560\div4$, $405\div4$ 등을 나눗셈 알고리즘으로 계산하는 과정에 $0\div3=0$과 $0\div4=0$이 필요하다. 따라서 교과서에서 $0\div$(어떤 수)$=0$을 명시적으로 다루어야 한다. 다음으로 3학년 수학에서 0의 성질을 적용할 수 있는 전형적인 나눗셈은 다음과 같다.

- $275\div5=(270+5)\div5=270\div5+5\div5=54+1=55.$

물론 교과서에서는 '덧셈에 대한 나눗셈의 우분배법칙(the right distributive property of division over addition)'을 명시적으로 다루지 않는다. 그러나 5학년 수학(교육부, 2015b)에서 (자연수)÷(자연수)를 분수로 고쳐서 계산하는 원리를 학습한 이후에 $275\div5=\frac{275}{5}=\frac{270+5}{5}=\frac{270}{5}+\frac{5}{5}=270\div5+5\div5$로 이해할 수 있다. 따라서 $0\div$(어떤 수)$=0$을 적용할 수 있는 나눗셈은 학습자가 이러한 원리를 적용할 수 있는 5학년 이후의 수학에서 다룰 수 있다. 곱셈과 마찬가지로 나눗셈에서 0의 성질을 적용할 수 있는 계산식은 제한적이었다. 따라서 이제 나눗셈에서 0의 성질을 어떻게 이해할 수 있는지 살펴보자.

먼저 4학년 수학에서 분수의 뺄셈을 다룰 때, 예를 들어, $0\div4=0$대신 0의 성질을 적용하여 $\frac{0}{4}=0$을 이해할 수 있는 방법이 있다. 예를 들어, $0=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1-1}{4}=\frac{0}{4}$와 같이 뺄셈

에 대한 0의 성질을 반복하여 적용하면 된다. 다음으로 초등학교 저학년 학생 수준에서 0÷(어떤 수)=0을 이해할 수 있는 방법은 Andrews et al. (2009)을 참고할 수 있다. [그림 8]은 0÷4를 '4개의 새장에 새가 한 마리도 없다면, 각 새장에는 새가 한 마리도 없다.'는 상황으로 설명한다. 또한, 나눗셈에서 0으로 나눌 수 없는 이유도 설명한다.



[그림 8] 0에 관한 나눗셈(Andrews et al., 2009 p. 306)

V. 결 론

본 연구에서는 0의 의미와 성질을 이해하기 위하여 교과서에 제시된 0의 도입 방식과 계산식을 해결하는 과정에 0의 성질을 어떻게 적용할 수 있는지를 논의하였다. 먼저 0의 도입 방식에 대한 분석 결과를 바탕으로 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, '아무 것도 없음'을 의미하는 수 0을 1보다 1 작은 수'의 의미로 도입할 때 뺄셈에 대한 이해가 필요하다. 따라서 뺄셈을 학습한 다음, 예를 들어, 3−3의 상황을 나타내는 수로 0을 도입할 수 있다. 둘째, 뺄셈을 학습하기 전에 일대일 대응의 개념을 학습하고 나서 구체물을 이용하여 0을 '한 개보다 한 개 더 적은' 상황으로 도입할 수 있다. 셋째, Altieri et al.(2009a)을 참고하여 집합수의 개념으로 0을 1보다 먼저 도입할 수 있다. 넷째, 교과서에 제시된 삽화를 재구성하여 0의 도입 상황을 설명할 수 있다.

이러한 0의 도입 방식과는 달리 교과서에서 자리 기호로서 0의 역할은 강조되지 않고 있다. 따라서 김수미(2006)의 제안처럼, 예를 들어, 20을 10개씩 2묶음과 낱개가 0인 수로 제시하여 십진기수법에서 0의 역할을 강조할 수 있다. 또한 2학년 수학에서 자릿값의 개념을 설명할 때 자리 기호로서 0의 역할이 명확하게 드러나는 수를 다양하게 제시할 필요가 있다.

다음으로 사칙 계산에서 0이 포함된 계산식과 0의 성질을 적용할 수 있는 계산식을 분석하여 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 교과서에서 0이 포함된 계산식을 해결할 때 필요한 0의 성질을 명시적으로 다루어야 한다. 예를 들어 30+20의 세로셈, 20−10의 세로셈, 30×40의 세로셈, 560÷4의 계산과정에 각각 0+0=0, 0−0=0, 0×0=0, 0÷(어떤 수)=0이 필요하다.

둘째, 덧셈에서 적용할 수 있는 0의 성질은 (어떤 수)+0=(어떤 수)와 (어떤 수)−(어떤 수)=0이었다. 예를 들어, 받아올림이 있는 덧셈 15+6에서 이러한 0의 성질을 적용하면 15+6=15+6+0=15+6+4−4=15+10−4=25−4=21과 같이 받아내림이 없는 뺄셈으로

계산할 수 있다.

셋째, 뺄셈에서 피감수를 어떤 수와 감수의 합으로 나타낸 후 (어떤 수)−(어떤 수)$=0$과 (어떤 수)$+0=$(어떤 수)와 같은 0의 성질을 적용할 수 있었다. 예를 들어, $27-3$을 $27-3=24+3-3=24+0=24$와 같이 계산할 수 있다.

넷째, 곱셈과 나눗셈에서 0의 성질을 적용할 수 있는 계산식이 거의 없었다. 따라서 학습자의 이해 수준에서 (어떤 수)$\times 0=0$과 $0\div$(어떤 수)$=0$을 나타내는 문제 상황을 제시할 필요가 있었다. 예를 들어, Altieri et al.(2009b)와 Andrews et al.(2009)에 서술된 문제를 참고할 수 있다.

이와 같은 결론에 기초하여 도출한 시사점은 다음과 같다.

첫째, 1학년 수학에서 0의 도입과 연계하여 후속 학습에서 0의 성질을 다양하게 경험할 수 있는 활동이 제시되어야 한다. 이는 초등학교 수학뿐만 아니라 중등학교 수학의 원리를 이해하는 데 도움이 되기 때문이다.

둘째, 학습자들이 계산식을 해결할 때 사용할 수 있는 여러 가지 문제 해결 전략 중의 하나로 0의 성질을 적용하는 경험을 제공할 수 있는 의도적인 지도가 필요하다.

셋째, 교과서에서 세로셈에 필요한 0의 성질을 명시적으로 다루는 것도 중요하지만, 계산 과정에 0의 성질을 어떻게 적용할 수 있는지에 대한 이해도 강조해야 한다.

넷째, 학습자를 대상으로 사칙 계산에 적용할 수 있는 0의 성질에 대한 의도적인 지도를 통해 학습자가 실제로 0의 성질을 이해하는 데 얼마나 도움이 되는지 검증할 수 있는 후속 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2009). **수학 1-1.** ㈜두산.

교육과학기술부 (2010). **수학 3-2.** ㈜두산.

교육부 (2015a). **수학 3-2.** ㈜천재교육.

교육부 (2015b). **수학 5-2.** ㈜천재교육.

교육부 (2016a). **수학 1-1.** ㈜천재교육.

교육부 (2016b). **수학 2-2.** ㈜천재교육.

교육부 (2017a). **수학 1-1.** ㈜천재교육.

교육부 (2017b). **수학 1-2.** ㈜천재교육.

교육부 (2017c). **수학 2-2.** ㈜천재교육.

교육부 (2017d). **수학 1-1 교사용지도서.** ㈜천재교육.

교육부 (2018a). **수학 3-1.** ㈜천재교육.

교육부 (2018b). **수학 3-2.** ㈜천재교육.

교육부 (2018c). **수학 4-1.** ㈜천재교육.

교육부 (2018d). **수학 4-2.** ㈜천재교육.

김수미 (2004). 고대 수학자와 현대 예비교사들의 영(zero) 처리 오류 및 교수학적 시사점. 경인교육대학교 **과학교육논총 16,** 87-106.

김수미 (2006). 0처리 오류의 기원 및 0의 지도. **학교수학 8**(4), 397-415.

박지현 (2007). 중학교 영재학생과 예비교사의 영(0)에 관한 인식과 오류. **학교수학 46**(4), 357-369.

이화영 (2018). 가르기와 모으기에서의 0의 취급에 대한 고찰. **한국초등수학교육학회지 22**(2), 183-198. 교육부

장혜원, 최민아, 임미인 (2014). 0처리 오류에 기초한 교과용 도서 분석 및 활동 구성. **한국초등수학교육학회지 18**(2), 257-278.

Altieri, M. B., Balka, D. S., Day, R., Gonsalves, P. D., Grace, E. C., Krulik, S. et al. (2009a). *Math connects 1,* Volume 1, Macmillan /McGraw-Hill.

Altieri, M. B., Balka, D. S. Day, R., Gonsalves, P. D., Grace, E. C., Krulik, S. et al. (2009b). *Math connects 3,* Macmillan/McGraw-Hill.

Andrews, A. G., Luckie, L., Scheer, J. K., Dixon, J. K., Wright, D. G., Newman, V. et al. (2009). *HSP Math Grade 3,* Harcourt.

Newman, C. M. (1967). The importance of definitions in mathematics: zero. *The Arithmetic Teacher 14*(5), 379-382.

Norwood, K. S., Roby, T., Mendoza Epperson, J. A. Dixon, J. K., Scheer, J. K., Wright, D.

G et al. (2009). *HSP math grade 1.* Harcourt School Publishers.

Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2015). *Helping children learn mathematics.* Wiley.

Seife, C. (2000). *Zero the biography of a dangerous idea*, Penguin Books.

Sprows, D. (2016). When it doubt, add zero and multiply by one. *Mathematics and Computer Education, 50*(2), 106-108.

<Abstract>

Some Notes on the Meaning and the Properties of Zero in Elementary School Mathematics

Paek, Dae Hyun[3]

The meaning of zero as a number signifying nothing is introduced as a number 1 less than 1 in the first grade mathematics textbook. In addition, the first appearance of the properties of zero are described by exemplary situations of adding zero, subtracting zero, and multiplying by zero in the first and second grade mathematics textbooks. The meaning and the properties of 0, however, are not explicitly dealt with any longer in the follow-up learning. In this study, we discuss the way of introducing zero and the applications of the properties of zero for solving number sentences so that they could help elementary school students understand the meaning and the properties of zero. Based on these results, we suggest some educational implications on teaching and learning mathematics of zero.

Key words: properties of zero, adding zero, subtracting zero, multiplying by zero, zero divided by a nonzero number, elementary school mathematics textbooks

논문접수: 2019. 01. 15
논문심사: 2019. 01. 30
게재확정: 2019. 02. 14

3) paek@bnue.ac.kr