한국초등수학교육학회지 *23*(3) 323-345.
2019. 8. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea *23*(3) 323-345.
August 31. 2019.

초등학교 수학 교과서의 분수 도입 방법에 대한 고찰: 단위 조정 단계를 중심으로

이지영[1)]

본 연구에서는 분수 학습에서 단위 조정 단계를 강조한 선행 연구를 중심으로 3학년 수학 교과서의 분수 도입 단원을 고찰하고, 교사가 교과서를 활용하여 분수에 대한 학생들의 이해를 자연스럽게 발달시킬 수 있도록 돕는 발문 및 추가 활동 등을 제시하였다. 연구 결과, 교과서의 분수 도입 단원은 단위 조정 단계와 관련하여 더 확장된 분수 스킴을 구성할 수 있도록 돕는 활동들이 잘 배열되어 있었다(즉, 부분-전체 분수 스킴 → 분할 단위분수 스킴 → 분할 분수 스킴). 그러나 각각의 활동들은 단위 조정의 각 단계에서 다음 단계로 발달하는 데 핵심이 되는 조작을 더욱 명시적으로 강조하여 등분할 스킴과 스플리팅 스킴을 구성하도록 도울 필요가 있었다. 또한 가분수를 이해하는 데 핵심이 되는 반복 분수 스킴을 구성하도록 돕는 활동까지 확장될 필요가 있었다. 이에 단위 조정 단계와 관련하여 교사가 각 차시에서 무엇에 초점을 두어야 하는지를 정리하였고 이를 보완할 수 있는 발문이나 활동 등을 제시하였다. 본 연구 결과를 토대로 교사 및 교과용도서 개발자에게 단위 조정 단계를 중심으로 분수를 도입하는 것과 관련된 시사점을 제공하고자 하였다.

주제어: 단위 조정 단계, 세 가지 수준의 단위 구조, 조작, 분할 스킴, 분수 스킴, 교과서 분석

Ⅰ. 서 론

분수는 학생들이 수학 학습 전반에 걸쳐서 지속적으로 경험하는 수학 개념이다. 하지만 학생들은 초등학교에서부터 분수를 어려워하고, 분수에 대한 이해 부족으로 인해 학년이 올라가면서 분수 이외의 다른 수학 주제에서도 여러 어려움을 복합적으로 겪는다. 최근 한국교육과정평가원에서 초·중학교 학습부진학생 50명을 대상으로 진행한 연구에서 해당 학생들은 공통적으로 초등학교에서 처음 배운 분수에서 수학과 관련된 첫 번째 좌절을 경험하였다고 이야기하였다. 이에 연구자들은 학생들이 분수를 자연스럽게 학습할 수 있는 인지적 발달 단계를 재고할 필요가 있다고 하였다(김태은, 오상철, 우연경, 권서경, 2018). 즉, 학생들의 수준을 고려하여 분수 관련 주제의 도입 시기, 계열, 제시 방법 등에 대해 구체적으로 논의할 필요가 있다.

현행 교육과정에서 학생들은 초등학교 3학년에서 분수를 처음 경험한다. 학생들은 이제

1) 송신초등학교, 교사

까지 자연수에서 학습한 여러 개념이나 원리를 분수에 그대로 적용하면서 많은 오류를 범한다. 예를 들면 자연수의 크기 비교에서 2가 3보다 작기 때문에 분수의 크기 비교에서도 $\frac{1}{2}$이 $\frac{1}{3}$보다 작다고 생각하거나(Hackenberg, Norton, & Wright, 2016), $\frac{2}{6}$와 $\frac{1}{4}$을 6개 중에 2개와 4개 중의 1개인 상황으로 인식하여 이러한 이유로 $\frac{2}{6}$가 $\frac{1}{4}$보다 더 크다고 생각하기도 한다(김유경, 방정숙, 2012). 분수에 대한 이해를 확장하기 위해서는 분수 상황에서 드러나는 여러 가지 단위 사이의 관계를 파악하고 이를 적절히 활용하여 문제를 해결하는 것이 필수적이다(이지영, 방정숙, 2014; Barnett-Clarke et al., 2010; Lamon, 2012; Steffe & Olive, 2010).

단위에 대한 다양한 경험은 학생들이 자신이 알고 있는 것을 재조직화하면서 새로운 내용을 자연스럽게 학습하는 데 매우 결정적인 역할을 한다. Hackenberg 외(2016)는 Hackenberg(2013), Norton 외(2015), Steffe & Olive(2010) 등의 여러 연구를 바탕으로 학생들이 다루는 단위 수준의 개수(즉, 1의 단위, 단위의 단위, 단위의 단위의 단위)에 따라 단위 조정 단계(Stages of units coordination)를 3가지로 구분하였고 분수에 대한 이해가 어떻게 발달해 나가는지를 설명하였다. 단위에 대한 이해와 여러 단위들을 조정하는 것은 분수뿐만 아니라 수세기, 자연수의 곱셈 및 나눗셈, 분수의 연산, 비와 비례 등 각각의 수학 주제에서 결정적인 역할을 하며, 여러 주제들의 핵심적인 아이디어를 연결할 수 있기 때문에 매우 중요하다(신재홍, 이수진, 2019; 이지영, 방정숙, 2016a,b; Boyce & Norton, 2017; Steffe & Olive, 2010). 이는 분수 도입에서부터 단위 조정 단계를 고려하여 분수에 대한 이해를 발달하도록 지원하는 것이 필수적이라는 것을 시사한다. 특히, 학교 수학에서 절대적인 위치를 차지하고 있는 교과서에 이러한 내용이 반영될 필요가 있다.

초등학교 수학 교과서에서 분수 도입 방법과 관련하여 많은 연구가 이루어졌지만 대부분은 여러 나라 수학 교과서의 분수 도입 방법을 비교하거나(예, 강흥규, 2005; 정은실, 2009; 조형미, 강완, 2015), 분수 개념 도입의 전개에 대해 전반적으로 탐색하였다(예, 강완, 2014). 교과서의 분수 도입과 관련하여 학생들의 관점에서 학생들이 참여하는 단위 수준이나 조작, 분할 및 분수 스킴의 발달과 연결하여 구체적으로 탐색한 연구는 거의 없다.

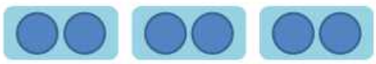
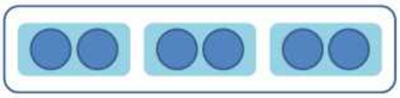
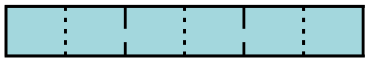
이에 본 연구는 초등학교 수학 교과서의 분수 도입 단원에 제시된 내용을 Hackenberg 외(2016)가 강조한 단위 조정 단계에 따라 고찰하고 교사가 현행 교과서를 최대한 활용하면서 학생들의 분수에 대한 이해를 발달시키도록 돕기 위해서 어떤 발문이나 과제를 제시할 수 있는지를 탐색하였다. 이를 통해 초등학교에서 분수를 도입할 때 교사 또는 교과용도서 개발자가 단위 조정 단계와 관련하여 무엇을 강조해야 하는지에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 세 가지 수준의 단위 구조와 단위 조정 단계

본 장에서는 여러 연구자들이 자연수와 분수 학습에서 강조하고 있는 세 가지 수준의 단위 구조와 단위 조정 단계를 살펴본다(예, Hackenberg, 2013; Hackenberg et al., 2016; Hackenberg & Tillema, 2009; Norton et al., 2015; Steffe & Olive, 2010). 자연수와 분수에서 나타나는 세 가지 수준의 단위 구조를 정리하면 <표 1>과 같다. 각 단위들은 서로 곱셈적 관계를 이루고 있다. 즉 단위의 단위 구조에서 기본 단위 1이 2개 모여 다시 하나의

합성 단위를 이룰 때, 합성 단위는 기본 단위의 2배이다. 단위의 단위의 단위 구조에서는 합성 단위의 3배인 양이 다시 하나의 단위를 이룬다. 이는 합성 단위가 기본 단위의 2배이므로 기본 단위의 2배에 다시 3배를 한 양이다. Hackenberg & Tillema(2009)는 자연수 곱셈 개념이 세 가지 수준의 단위에 따라 발달한다는 것을 밝혔으며, Hackenberg(2013)는 위의 연구 결과를 바탕으로 자연수 곱셈 개념과 분수 스킴을 연결하였다. 또한 Hackenberg 외(2016)는 세 가지 수준의 단위를 중심으로 단위 조정 단계를 제시하면서 학생들이 다루는 단위의 구조가 확장되면서 분수에 대한 이해가 발달해간다고 보았다.

<표 1> 자연수와 분수에서 나타나는 세 가지 수준의 단위 구조

단위의 구조	자연수	분수
단위	 1 (예, 1이 6개)	 1
단위의 단위	 1이 2개 모여서 하나의 단위(합성 단위)를 구성(예, 2씩 3묶음)	 $\frac{1}{3}$을 3번 반복하여 1을 구성
단위의 단위의 단위	 1이 2개로 이루어진 합성 단위가 3개 모여서 다시 하나의 단위를 구성(예, 2씩 3묶음당 1봉지)	 $\frac{1}{6}$을 2번 반복하여 구성된 $\frac{1}{3}$을 3번 반복하여 1을 구성

Hackenberg 외(2016)가 제시한 단위 조정 단계는 <표 2>와 같다. 단위 조정 단계는 학생들이 다루는 단위 수준의 개수에 따라 구분된다. 즉, 학생들이 조정하는 단위의 수준이 1의 단위인지, 단위의 단위인지, 단위의 단위의 단위인지에 따라 구분된다. 특히 단위를 조정할 때 활동을 통해 단위를 조정하는가(in activity), 아니면 구체적인 활동을 하지 않아도 해당 단위의 구조를 주어진 것(as given)으로 보고 문제를 해결할 수 있는가에 초점을 둔다. <표 2>에서 알 수 있듯이, 단위 조정 단계를 설명하기 위해서는 여러 조작(operation)이나 스킴(scheme)에 대한 설명이 필요하다. 단위 조정 단계와 직접적으로 관련되는 몇 가지 용어에 대해서 신재홍, 이수진(2019)이 제시한 내용을 그대로 인용하면 다음과 같다.

> 조작이란 물리적 행동이 내재화된 정신 행동이며, 스킴이란 어떤 목표를 달성하고자 조직된 일련의 조작들이다(p. 229).
> 분할(partitioning)이란 전체를 같은 크기를 가진 몇 개로 나누는 것이고, 분리(disembedding)란 분할된 전체에서 전체를 훼손하지 않으면서 한 부분을 떼어내는 조작이며, 반복(iterating)은 분리된 일부를 반복하여 전체를 구성하는 것이다(p. 233).
> 스플리팅(splitting) 조작이란 전체를 몇 개의 부분으로 나누는 분할 조작과 역으로 분할 조작의 결과인 부분을 반복하여 전체를 구성하는 반복 조작이 동시에 수행되는 조작이다(p. 237).

<표 2> 단위 조정 단계(Hackenberg, 2013, p. 541; Hackenberg et al., 2016, pp. 22-23; Hackenberg & Tillema, 2009, pp. 3-4)

<table>
<tr><th>단위 조정 단계</th><th>자연수 곱셈 개념 수준</th><th>학생들의 단위 구조</th><th>조작</th><th>분할 스킴</th><th>분수 스킴</th></tr>
<tr><td>1단계</td><td>첫 번째 곱셈 개념 (MC1)</td><td>한 가지 수준의 단위를 주어진 것으로 이용할 수 있고, 활동을 통해 두 가지 수준의 단위들을 조정함.</td><td>분할</td><td>동시 분할 스킴</td><td>전체 안의 부분 분수 스킴</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2단계</td><td rowspan="3">두 번째 곱셈 개념 (MC2)</td><td rowspan="3">두 가지 수준의 단위를 주어진 것으로 이용할 수 있고, 활동을 통해 세 가지 수준의 단위들을 조정함.</td><td>분할 분리</td><td>-</td><td>부분-전체 분수 스킴</td></tr>
<tr><td rowspan="2">분할 분리 반복</td><td rowspan="2">등분할 스킴</td><td>분할 단위분수 스킴</td></tr>
<tr><td>분할 분수 스킴</td></tr>
<tr><td>3단계</td><td>세 번째 곱셈 개념 (MC3)</td><td>세 가지 수준의 단위를 주어진 것으로 이용할 수 있고, 세 가지 수준의 단위들을 유연하게 변환할 수 있음.</td><td>스플리팅 분리</td><td>스플리팅 스킴</td><td>반복 분수 스킴</td></tr>
</table>

이러한 용어는 Steffe & Olive(2010)의 연구에 구체적으로 제시되어 있다. Steffe & Olive(2010)는 학생들을 대상으로 수십년동안 실시한 일련의 연구들을 종합한 것이다. Steffe & Olive(2010)는 어른들의 개념과 구분되는 학생들의 개념을 설명하기 위해서 일반적으로 사용하는 용어와 다른 다양한 용어를 사용한다. 예를 들어 연구자들은 학생들이 어떠한 조작을 수행하여 분할하는가에 따라 동시 분할(simultaneous partitioning), 등분할(equi-partitioning), 스플리팅(splitting) 스킴 등으로 구분한다.

동시 분할 스킴을 구성한 학생들은 주어진 전체를 부분으로 분할하고, 그 부분들 중에서 몇 개의 부분을 색칠하여 표현한다. 학생들은 대부분 주어진 전체를 앞에서부터 자르기 때문에 각 부분들의 크기가 같지 않은 경우가 많고, 더 중요한 것은 부분과 전체의 크기를 비교하기 위해서 부분을 분할된 전체에서 떼어내지 못한다. 다시 말하면 동시 분할 스킴은 분할 조작만 수행하는 것으로, 분리 조작은 아직 포함되어 있지 않다.

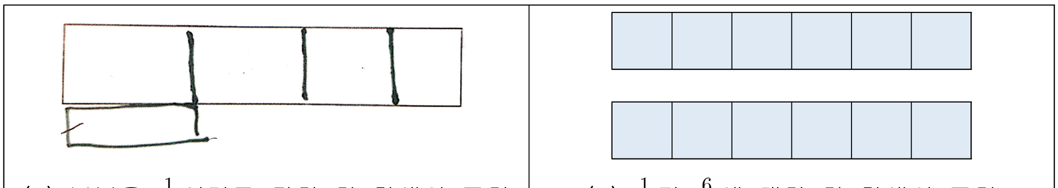
등분할 스킴을 구성한 학생들은 분할과 분리뿐만 아니라 반복 조작을 수행한다. 전체를 분할하여 똑같은 크기의 부분들을 만들고, 이것이 등분할한 결과임을 보이기 위해서 분할된 부분 중 어느 하나의 부분을 반복하여 전체를 재구성할 수 있다.

스플리팅 스킴을 구성한 학생들은 분할과 반복 조작이 한꺼번에 일어나는 스플리팅 조작을 수행한다. 대표적으로 스플리팅 조작은 주어진 막대가 구하고자 하는 막대의 5배일 때, 구하고자 하는 막대를 만드는 과정에서 수행된다(Hackenberg, 2013). 학생이 이러한 여러 과제를 해결하기 위해서 스플리팅 조작을 수행해야 한다는 것을 예상하고, 이러한 조작을 지속적으로 수행하면 이 학생은 스플리팅 스킴을 구성한 것으로 볼 수 있다. 즉 스플리팅 스킴을 구성한 학생들은 위의 문제에서 구하고자 하는 막대를 만들기 위해서 주어진

막대를 5번 반복하는 것이 아니라 5등분해야 한다는 것을 시행착오를 거치지 않고 바로 인식한다. 이는 주어진 막대를 5등분하여 나온 하나의 막대를 다시 5번 반복하면 주어진 막대를 만들 수 있다는 것을 동시에 파악해야 가능한 것으로 분할, 반복 조작을 동시에 수행한 것으로 볼 수 있다.

이러한 분할 스킴(partitioning scheme)의 차이는 학생들이 서로 다른 분수 스킴(fraction scheme)을 구성하는 것과 연결된다. 각각의 분수 스킴에 해당하는 예는 <표 2>의 단위 조정 단계와 관련하여 더욱 구체적으로 설명한다.

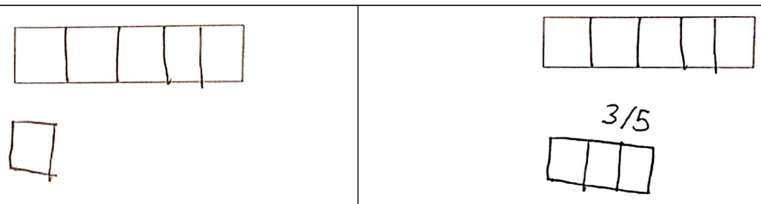
단위 조정 1단계에 해당하는 학생들은 동시 분할 스킴과 전체 안의 부분 분수 스킴(Parts within wholes fraction scheme)을 구성한 경우이다. 1단계의 학생들에게 $\frac{3}{5}$을 만들도록 하면, 분할 조작을 통해 전체를 5개의 부분으로 분할하고 그 중 3개의 부분을 색칠하여 나타낼 수 있지만, 3개의 부분이 5개의 부분안에 포함되어 있는 것으로만 생각한다(즉, 동시 분할 스킴). 학생들은 부분인 $\frac{3}{5}$과 전체를 비교하기 위해 전체를 그대로 유지하면서 전체에서 $\frac{3}{5}$을 떼어내지 못한다(즉, 전체 안의 부분 분수 스킴). 이 단계의 학생들은 활동을 통해서 기본 단위와 합성 단위(즉, 분할된 전체)를 조정하지만 두 가지 수준의 단위를 주어진 것으로 이용할 수 없고 분할 조작은 수행하지만, 분리 조작은 수행하지 못한다. 이로 인해 [그림 1]과 같은 다양한 오류를 보인다. [그림 1]의 (a)는 막대를 4명이 똑같이 나눠갖는 과제에서 한 학생이 표현한 그림이다. 이 학생은 그림의 아래에 자신이 제시한 한 부분의 크기를 나머지 3조각 중에서 1조각의 크기에 해당한다고 보고 $\frac{1}{3}$이라고 답하였다. 다른 예는 [그림 1]의 (b)와 같이 $\frac{1}{6}$과 $\frac{6}{6}$ 모두를 6개로 분할된 전체로 인식하는 경우이다. 이 학생은 $\frac{1}{6}$을 6등분된 전체에서 분리해 낸 하나의 부분으로 인식하지 못한다.



(a) 부분을 $\frac{1}{3}$이라고 답한 한 학생의 표현 | (b) $\frac{1}{6}$과 $\frac{6}{6}$에 대한 한 학생의 표현

[그림 1] 전체 안의 부분 분수 스킴을 구성한 학생들의 다양한 반응(Hackenberg et al., 2016, pp. 58-59)

단위 조정 2단계에 해당하는 학생들은 부분-전체 분수 스킴(Part-whole fraction scheme), 더 나아가 등분할 스킴과 분할 단위분수 스킴(Partitive unit fraction scheme), 분할 분수 스킴(Partitive fraction scheme)을 구성한다. 부분-전체 분수 스킴은 $\frac{3}{5}$을 5개의 부분 중에서 3개의 부분으로 보는 것으로, 이때 [그림 2]와 같이 5개로 분할된 전체를 그대로 유지하면서 등분할된 5개의 부분 중에서 3개의 부분을 정신적으로 분리해 낼 수 있다. 이러한 분할과 분리를 모두 포함하는 조작은 두 가지 수준의 단위 구조를 명시적으로 드러내기 때문에 단위 조정 2단계로 발달하는 데 결정적인 역할을 한다.



(a) 주어진 케익의 $\frac{1}{5}$에 대한 표현 (b) $\frac{3}{5}$을 5개의 부분에 대한 3개의 부분으로 표현

[그림 2] 부분-전체 스킴을 구성한 한 학생의 $\frac{1}{5}$과 $\frac{3}{5}$에 대한 표현(Hackenberg et al., 2016, p. 60)

단위 조정 2단계에서는 단위분수를 반복하여 전체를 재구성할 수 있다는 것을 알고 이를 통해 분수를 구성하는 것으로 나아간다. 학생들은 전체를 5등분하고 이 중에서 하나의 부분을 5번 반복하여 다시 전체를 재구성할 수 있다는 것을 인식한다(즉, 등분할 스킴). 이는 먼저 분할 단위분수 스킴과 연결된다. 분할 단위분수 스킴을 구성한 학생들은 전체를 등분할하여 $\frac{1}{5}$을 만들고 이것이 등분할한 결과임을 보이기 위해서 $\frac{1}{5}$을 5번 반복하여 전체를 재구성할 수 있다. 따라서 이 학생들은 단위분수만큼의 양이 제시되었을 때 전체의 양을 만드는 과제를 단위분수를 분모의 크기만큼 반복하여 해결할 수 있다. 분할 분수 스킴은 분할 단위분수 스킴이 진분수 상황으로 일반화된 것으로, 역시 분할, 분리, 반복 조작을 순서대로 수행한다. 분할 분수 스킴을 구성한 학생들은 $\frac{3}{5}$을 만들기 위해서 전체를 5등분하고 $\frac{1}{5}$을 3번 반복한다. 하지만, $\frac{3}{5}$의 의미가 여전히 전체에 대한 부분에서 기인한다고 생각하고, $\frac{3}{5}$을 $\frac{1}{5}$의 3배인 '하나의 수'로 보지는 못한다.

단위 조정 3단계에 해당하는 학생들은 단위분수와 전체 1의 곱셈적 관계를 동시적으로 파악하면서 주어진 분수를 하나의 수로 인식한다. 즉, 세 가지 수준의 단위를 조정한다. 이는 스플리팅 스킴과 반복 분수 스킴(Iterative fraction scheme)을 구성한 경우에 해당한다. 학생들은 분할, 반복 조작을 한꺼번에 수행하여 $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{5}$ 세 가지 단위를 주어진 것으로 보고 문제를 해결할 수 있다. 반복 분수 스킴을 구성한 학생들은 $\frac{1}{5}$을 7번 반복한 양을 가분수인 $\frac{7}{5}$로 이해할 수 있고, 동시에 $\frac{7}{5}$을 이루는 7개의 $\frac{1}{5}$ 중에서 어떤 하나의 $\frac{1}{5}$을 5번 반복해서 전체를 재구성할 수 있다는 것을 안다. 이는 단위 조정 2단계의 분할 분수 스킴보다 더 확장된 분수 스킴이다. 분할 분수 스킴을 구성한 학생들은 $\frac{1}{5}$을 7번 반복한 양을 가분수인 $\frac{7}{5}$로 파악하지 못하고, $\frac{7}{7}$이라고 생각할 수 있다(Hackenberg, 2007). 왜냐하면 전체를 등분할하여 분수를 구성하는 분할 분수 스킴으로는 전체보다 큰 부분을 자연스럽게 받아들이지 못하기 때문이다. 이 경우는 7개의 부분들이 하나의 전체를 이룬 것으로 보고, $\frac{1}{5}$을 7번 반복한 양을 전체를 똑같은 7개의 부분들로 나눈 것 중에서 7개의 부분에

해당하는 양(즉, $\frac{7}{7}$)으로 인식한다. 따라서 가분수를 이해하기 위해서는 반복 분수 스킴을 구성하는 것까지 확장될 필요가 있다.

요약하면 Hackenberg 외(2016)가 분수에서 강조하는 단위 조정 단계는 학생들이 조작을 통해 조정할 수 있는 단위 수준의 개수가 늘어나면서 학생들의 분수에 대한 이해가 발달한다는 것이다. 이는 분수를 도입할 때부터 학생들이 단위 조정 단계를 발달해나갈 수 있도록 지원하는 것이 매우 중요하다는 것을 시사한다. 따라서 다음 장에서는 교과서에서 분수를 어떻게 도입하고 있는지를 단위 조정 단계를 중심으로 고찰하고 이에 대한 대안을 탐색한다.

Ⅲ. 단위 조정 단계에 따른 교과서 분석 및 대안 탐색

1. 교과서 분석의 개요

본 장에서는 2장에서 살펴본 단위 조정 단계와 연결하여 초등학교 수학 교과서에서 어떠한 방법으로 분수를 도입하는지를 살펴본다. 이를 위해 2015 개정 수학과 교육과정에 의한 수학 교과서 및 교사용 지도서를 살펴보았다. 구체적으로 3학년 1학기 6. 분수와 소수 단원의 학습차시에 해당하는 2차시에서 6차시까지(교육부, 2019a,b), 3학년 2학기 4. 분수 단원의 학습차시 중 일부인 5차시에서 7차시까지(교육부, 2018a,b)를 분석 범위로 하였다. 3학년 2학기 4. 분수 단원의 2차시부터 4차시는 본 연구의 초점에서 다소 벗어나는 내용이기 때문에 분석 범위에 포함하지 않았다[2].

분석틀은 <표 2>에 제시된 단위 조정 단계를 중심으로 하였다. 단위 조정 단계와 함께 각 차시의 활동과 관련된 조작, 분할 스킴, 분수 스킴을 살펴보았는데, 이때 “관련”이라는 표현을 사용한 이유는 실제 학생들의 머릿속에서 일어나는 정신적인 행동을 가리키는 용어인 조작 및 스킴과 교과서에 표면적으로 드러나는 활동을 구분할 필요가 있기 때문이다. 즉 활동에 참여하는 것만으로 학생들이 해당 조작이나 스킴을 구성한다고 보는 것이 아니라, 이러한 활동이 조작이나 스킴을 경험하고 구성하는 데 도움이 될 수 있다는 것을 설명하기 위함이다. 예를 들어, 부분-전체 분수 스킴을 구성한 학생들은 단위 조정 2단계에 해당하지만(<표 2> 참고), 교과서 분석에서는 해당 활동이 부분-전체 분수 스킴을 구성하도록 도울 수 있다 하더라도 구체적인 활동을 통해서 이루어진다면 여전히 단위 조정 1단계에 해당한다고 보았다.

분수를 도입하고 지도하는 방법은 관점에 따라 다양할 수 있다. 현행 교과서는 단위 조정 단계를 고려하여 분수 도입 차시를 구성한 것이 아니기 때문에 교과서 내용을 비판하기 보다는 대안을 탐색하는 것에 초점을 두었다.

2. 교과서 분석 및 대안 탐색

단위 조정 단계에 따라 교과서 활동을 분석한 결과는 <표 3>과 같다.

---

2) 해당 차시들에서는 이산량 맥락에서의 전체-부분으로서의 분수를 다루고 있는데, 이는 단위 조정 단계뿐만 아니라 합성 단위를 등분할하고 결과를 분수와 자연수로 모두 해석하는 것 등을 고려해야 하기 때문에 본 연구의 초점에서 다소 벗어난다.

<표 3> 단위 조정 단계에 따른 교과서 분석

단원	차시	교과서 활동	관련 조작	관련 분할 스킴	관련 분수 스킴	단위 조정 단계
3-1-6. 분수와 소수	2차시	· 구체물이나 그림을 이용하여 등분할하기 · 여러 가지 방법으로 색종이를 등분할하기	분할	동시 분할 스킴	-	1단계
	3차시	· 등분할을 통해 전체에 대한 부분의 크기로서의 분수 이해하기 · 분수 쓰고 읽기	(분할)* (분리)	-	부분-전체 분수 스킴	1단계
	4차시	· 전체와 부분의 관계를 분수로 표현하기 · 부분을 알 때 전체를 그림으로 나타내기	(분할) (분리) 반복	등분할 스킴	분할 단위분수 스킴	1단계
	5차시	· 동분모 분수의 크기를 그림 등을 이용하여 다양한 방법으로 비교하기 · 진분수와 단위분수의 관계를 이용하여 동분모 분수의 크기 비교하기	(분할) 분리 반복	등분할 스킴	분할 분수 스킴	2단계
	6차시	· 단위분수의 크기를 그림 등을 이용하여 다양한 방법으로 비교하기 · 단위분수를 수직선에 나타내어 크기를 비교하기	분할 (분리)	-	부분-전체 분수 스킴	1단계
3-2-4. 분수	5차시	· 진분수, 가분수, 자연수를 알아보기 · 진분수와 가분수를 분류하고 여러 가지 진분수와 가분수 만들기	(분할) (분리) 반복	등분할 스킴	분할 분수 스킴	2단계
	6차시	· 대분수 알기 · 대분수를 가분수로, 가분수를 대분수로 나타내고 방법 이야기하기	(분할) (분리) 반복	등분할 스킴	분할 분수 스킴	2단계
	7차시	· 동분모 가분수의 크기 비교하기 · 동분모 대분수의 크기 비교하기 · 동분모 가분수와 대분수의 크기 비교하기	(분할) (분리) 반복	등분할 스킴	분할 분수 스킴	2단계

* 괄호로 제시된 것은 학생들이 직접 참여한 것이 아니라 활동에 암묵적으로 포함되어 있는 것을 의미한다.

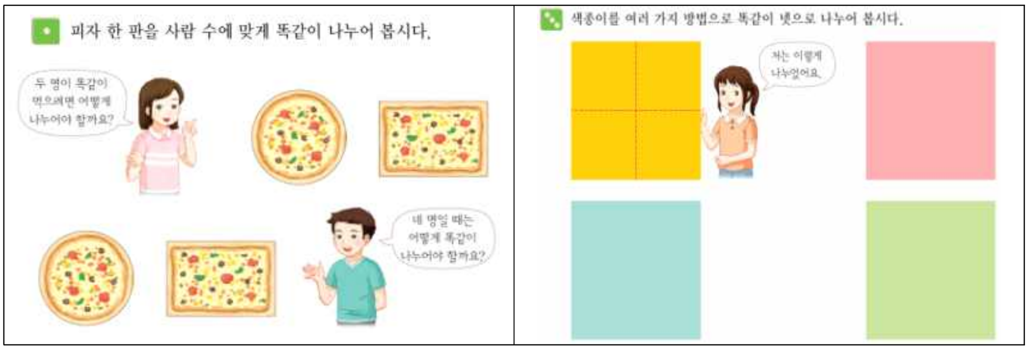
교사용 지도서의 3학년 1학기 6. 분수와 소수 단원에서는 전체가 1인 연속량을 등분할하는 맥락에서 부분과 전체의 크기 사이의 관계를 나타내는 활동으로 분수를 도입한다(교육부, 2019b). 3학년 2학기 4. 분수 단원에서는 진분수, 가분수, 대분수 등 여러 가지 분수를 알아보고 가분수를 대분수로, 대분수를 가분수로 변환하도록 한다. 또한 여러 가지 종류의 동분모 분수의 크기를 비교한다(교육부, 2018b).

단위 조정 단계에 따라 교과서를 분석한 결과, 교과서의 각 차시 순서는 전반적으로 잘

구성되어 있다는 것(즉, 부분-전체 분수 스킴 → 분할 단위분수 스킴 → 분할 분수 스킴)을 알 수 있다. 그러나 세부 활동과 관련하여 교사가 그 중요성이나 의도를 제대로 파악할 수 있도록 세심한 안내가 필요한 부분들이 있었다. 또한, 3학년 2학기에서 가분수를 구성하는 데 중요한 반복 분수 스킴을 구성할 수 있도록 이와 관련된 활동을 더욱 강조할 필요가 있었다. 따라서 본 연구에서는 교과서 활동을 비판하고 전반적으로 수정하는 방안을 탐색하기 보다는 현행 교과서를 최대한 활용하면서 학생들이 분수를 보다 자연스럽게 학습하도록 돕기 위해 교사가 어떠한 발문과 과제를 제시할 수 있는지에 대해 탐색하는 것을 목적으로 하였다.

가. 3-1-6단원 2차시 등분할하기

2차시에서는 분수를 도입하기에 앞서 [그림 3]과 같이 주어진 양을 분할하는 활동으로 시작한다. 학생들은 주어진 도형에 2등분 또는 4등분을 직접 표시하면서 전체를 여러 가지 방법으로 분할한다. 이는 분할 조작만 이루어지는 동시분할 스킴과 관련된다. 또한 2차시에서는 분할한 결과를 분수로 나타내는 것까지 확장되지 않기 때문에 전체 안의 부분분수 스킴과 연결되지는 않는다. 정리하면, 2차시 활동들은 단위 조정 1단계와 관련된다.



[그림 3] 수학 교과서의 3-1-6단원 2차시 활동(교육부, 2019a, pp. 112-113)

교과서와 교사용 지도서에서는 2차시의 활동에서 등분할을 강조하고 있지만 이는 단위 조정 단계의 등분할 스킴과는 차이가 있다. 등분할 스킴은 분할뿐만 아니라 분리와 반복 조작을 모두 수행하는 것으로 분수를 이해하는 데 있어서 결정적이다. 전체를 분할하여 단위분수를 만들고 이 단위분수를 반복하여 진분수를 구성할 수 있기 때문이다. Steffe & Olive(2010) 역시 여러 분수 스킴 중에서도 등분할 스킴과 관련된 분할 분수 스킴부터 진정한 분수 스킴으로 보았다. 동시분할 스킴에서 등분할 스킴으로 확장하기 위해서 학생들은 분할뿐만 아니라 분할된 부분 중 하나를 분리해내고 이를 반복하여 원래의 전체와 똑같은 크기의 분할된 전체를 재구성할 수 있다는 것을 경험해야 한다. 그러나 해당 활동과 관련하여 교사용 지도서(교육부, 2019b)에 제시된 설명을 보면 “나누어진 조각의 크기가 같으므로 똑같이 나누어진 도형입니다(p. 300).” 또는 “학생들이 실제 사각형 모양 종이를 접고 자르는 활동을 통하여 등분을 경험할 수 있도록 수업을 진행하는 것이 바람직하다(p. 301).” 등과 같이 분할 조작에만 초점을 두고 분리 및 반복 조작은 강조하지 않고 있다는 것을 알 수 있다.

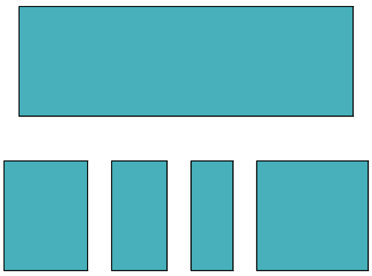
따라서 본 연구에서는 분할을 처음 경험하는 2차시에서부터 등분할 스킴을 구성할 수

있도록 돕는 발문 및 활동을 제공할 것을 제안한다. 구체적으로 색종이를 여러 가지 방법으로 똑같이 넷으로 나누어 보는 활동 에서 시각적 모델에 분할을 직접 표시해보는 활동에 그치지 않고, “전체가 똑같이 넷으로 나누어졌는지를 어떻게 알 수 있는지 즉, 등분할되었다는 것을 어떻게 알 수 있는지”를 질문하여 학생들에게 등분할의 의미에 대해 탐색해보는 경험을 제공할 수 있다. 이를 통해 학생들은 전체를 등분할하였다는 것은 분할된 부분 중 어느 하나를 반복하여도 전체와 똑같은 크기를 재구성할 수 있다는 것을 의미함을 이해할 수 있을 것이다.

등분할 스킴에서 중요한 역할을 하는 반복 조작을 의도적으로 경험하도록 하기 위해 [그림 4]와 같은 과제를 추가로 제시할 수도 있다. 학생들이 교과서에 제시된 것과 같은 다양한 분할 활동에 참여한 후에, [그림 4]와 같은 과제에도 참여한다면, 분할뿐만 아니라 분리 및 반복 조작도 함께 경험할 수 있을 것이다. 6명에게 똑같이 나눠줄 수 있는 조각 케익의 크기를 알아보기 위해서는 각 조각 케익을 반복해서 전체를 재구성하는 활동에 참여해야 하고, 이러한 활동을 통해 6번 반복하여 전체를 재구성한 조각이 전체를 6등분한 조각이라는 것을 알 수 있다.

직사각형 모양의 케익이 있습니다. 아래에 있는 조각 케익들은 위와 똑같은 크기의 케익을 잘라서 나온 것입니다. 위의 직사각형 모양의 케익을 6명에게 똑같이 나눠주려고 합니다.

1. 6명에게 나눠준 케익의 크기는 이 조각 케익들 중에서 무엇일까요?
2. 똑같이 나눠줄 수 있다는 것을 어떻게 알았나요?



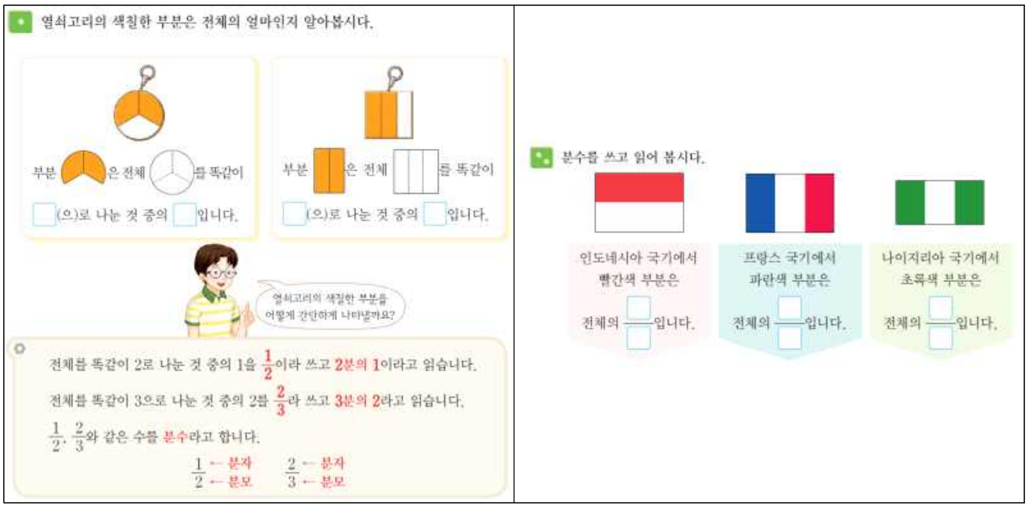
(주어진 조각들은 각각 전체 케익의 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$이다. 문제에는 각 조각에 단위분수가 표시되어 있지 않고, 크기 순서대로 배열되어 있지 않다.)

[그림 4] 등분할 스킴 및 반복 조작에 참여하도록 돕는 활동(Hackenberg, 2013)

나. 3-1-6단원 3차시 전체에 대한 부분의 크기로서의 분수 개념 이해하기

3차시는 분수를 처음 도입하는 차시로, [그림 5]와 같이 분수를 ‘전체를 똑같이 몇으로 나눈 것 중의 몇’이라는 표현을 사용하여 도입한다. 활동 은 비록 학생들이 모델에 직접 분할을 표시하는 것은 아니지만 앞에서 경험한 분할에 분리 조작까지 경험하도록 돕고 있다는 점에서 주목할 만하다. 구체적으로 전체에서 분리된 2개의 부분과 3등분 표시가 되어 있는 전체를 함께 그림으로 제시하여 부분과 전체의 크기를 비교할 수 있도록 하였다. 이러한 활동을 통해서 학생들은 분수를 전체 중에서 부분으로 인식하는 부분-전체 분

수 스킴으로 나아갈 수 있다. 이 활동은 부분과 전체에 동시에 초점을 두면서 두 가지 수준의 단위를 조정하도록 하지만, 아직 활동을 통해 이루어진다는 점, 그리고 학생들이 직접 분리 조작을 수행한 것은 아니라는 점에서 단위 조정 1단계에 해당한다.

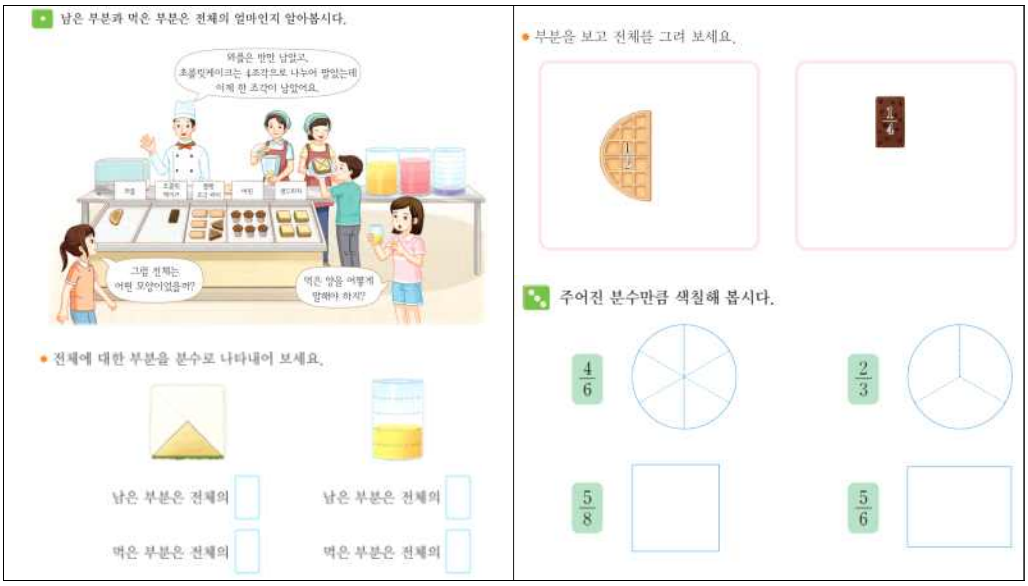


[그림 5] 수학 교과서의 3-1-6단원 3차시 활동(교육부, 2019a, p. 115)

따라서 본 차시에서 교사는 2차시에서와 같이 하나의 부분을 분리하여 반복하는 등분할 스킴과 연결하여 분리 조작에 학생들이 직접 참여할 수 있도록 도와야 한다. 구체적으로 활동 에서 '프랑스 국기에서 전체는 파란색 부분, 하얀색 부분, 빨간색 부분으로 이루어져 있으므로 파란색 부분은 나머지 부분과 비교해서 전체의 $\frac{1}{2}$로 나타낼 수 있다.'와 같은 의견에 대해서 어떻게 생각하는지 학생들에게 발문할 수 있다. 이러한 발문을 통해서 학생들은 전체-부분으로서의 분수에서는 3등분된 온전한 전체와 전체에서 분리해 낸 파란색으로 색칠되어 있는 1개의 부분 사이의 관계에 초점을 맞추어야 한다는 것을 인식할 수 있을 것이다.

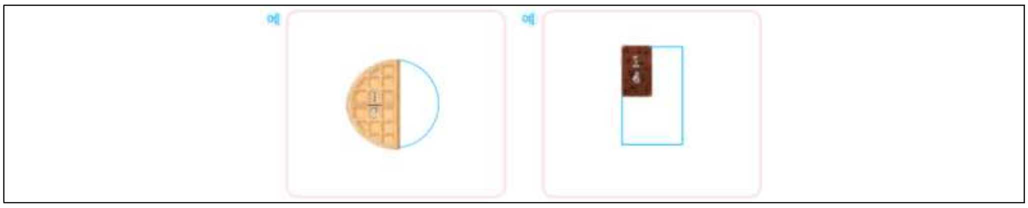
다. 3-1-6단원 4차시 전체와 부분의 관계를 분수로 표현하기

4차시에서는 [그림 6]과 같이 그림을 보고 전체와 부분의 관계를 분수로 표현하게 하고 부분을 알 때 전체를 그림으로 나타내는 활동 등을 한다. 주목할 만한 활동은 활동 에서 단위분수에 해당하는 부분만 제시된 상황에서 전체를 재구성해보도록 하는 것이다. 이는 두 가지 수준의 단위를 활동을 통해 조정하는 것이므로 단위 조정 1단계에 해당한다. 비록 학생들이 분할과 분리 조작을 직접 수행한 것은 아니지만 3차시에 경험한 분할, 분리 조작을 바탕으로 단위분수를 반복하여 분할된 전체를 재구성해보는 활동에 참여할 수 있다. 이는 등분할 스킴 및 분할 단위분수 스킴과 직접적으로 관련되는 매우 중요한 활동이다.



[그림 6] 수학 교과서의 3-1-6단원 4차시 활동(교육부, 2019a, pp. 116-117)

하지만 아쉬운 점은 교사용 지도서에 제시된 그림과 설명 등을 살펴보면 등분할 스킴과 분할 단위분수 스킴을 명시적으로 강조하고 있다고 보기 어렵다는 것이다. 교사용 지도서에서 답안으로 제시된 그림은 [그림 7]과 같이 단위분수를 반복하여 1을 구성한 것이라기보다는 부분의 크기에 상대적인 전체의 크기를 어림하여 나타내고 있는 것으로 보인다. 또한 활동에 대한 설명에서도 "와플은 반(또는 $\frac{1}{2}$)이 남았으므로 똑같이 반을 그리면 됩니다. 초콜릿케익은 4조각 중에서 1조각이 남았다고 했으므로 지금 조각과 똑같은 조각이 3조각 더 있어야 합니다. 초콜릿케익은 $\frac{1}{4}$만큼 남아 있으므로 $\frac{3}{4}$을 더 그려야 합니다.(교육부, 2019b, p. 304)" 로 제시하여 전체를 색칠한 부분과 색칠하지 않은 부분의 합으로만 다루고 있다는 것을 알 수 있다. 이는 활동 의 첫 번째 하위 활동에서 전체에서 남은 부분과 먹은 부분을 분수로 나타내는 활동과 연결된 것이라고 볼 수 있다.



[그림 7] 3-1-6단원 4차시 활동 과 관련된 지도서 답안(교육부, 2019b, p. 305)

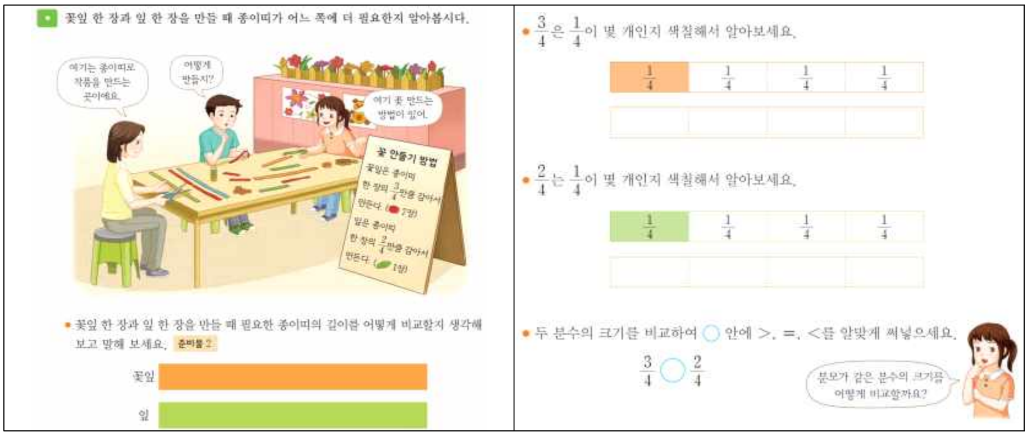
분할 단위분수 스킴에서 핵심이 되는 반복 조작은 부분을 분리하여 그것을 분모의 크기만큼 반복하는 것으로 이를 통해 단위분수와 전체 1, 즉 두 가지 단위를 조정한다. 즉 분할 단위분수 스킴은 단위분수 $\frac{1}{4}$을 전체를 4등분하여 나온 결과뿐만 아니라 $\frac{1}{4}$을 전체에서 분리하고 이것을 4번 반복하면 1을 재구성할 수 있는 양으로 보는 것이다. 이러한 곱

셈적 사고가 중요한 이유는 단위 조정 1단계와 2단계의 차이가 이 지점에서 발생하기 때문이다. 단위 조정 2단계에서 학생들은 분할, 분리, 반복 조작을 순서대로 수행하여 단위분수 $\frac{1}{4}$과 전체 사이의 곱셈적 관계를 알고 문제를 해결할 수 있다.

따라서 본 차시에서 교사는 두 가지 단위 사이의 관계를 탐색해 볼 수 있는 경험을 제공할 필요가 있다. 먼저 교사는 학생들이 주어진 전체를 분할하여 단위분수를 구성하는 활동에 직접 참여하도록 해야 하며, 분리 및 반복 조작을 통해 단위분수와 전체 사이의 곱셈적 관계에 대해 설명할 기회를 제공해야 한다. 예를 들어, 활동 ▣의 [그림 7]에 대한 교사용 지도서 설명에서 '$\frac{1}{2}$을 2번 반복하면 전체의 크기와 같습니다. $\frac{1}{4}$을 4번 반복하면 전체의 크기와 같습니다.' 등도 추가하여 이를 강조할 필요가 있다. 또한 Hackenberg(2013)에서 제시한 [그림 4]와 같은 과제를 등분할 스킴뿐만 아니라 분할 단위분수 스킴과 관련하여 재탐색해보게 하는 것도 도움이 될 것이다. 아래의 조각 케잌 각각을 반복하여 전체를 재구성하도록 하고, 이를 단위분수로 표현하게 한다면 분할 단위분수 스킴을 구성하도록 도울 수 있을 것이다. 이러한 활동은 5차시에서 단위분수를 반복하여 진분수를 구성하는 분할 분수 스킴으로 나아가는 데 반드시 필요하다.

라. 3-1-6단원 5차시 동분모 분수의 크기 비교하기

5차시에서는 [그림 8]과 같이 진분수와 단위분수의 관계를 이용하여 동분모 분수의 크기를 비교한다. 즉 $\frac{3}{4}$을 $\frac{1}{4}$이 3개인 분수로, $\frac{2}{4}$를 $\frac{1}{4}$이 2개인 분수로 보고 $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{4}$를 비교한다. 이는 전체와 단위분수 사이의 관계를 통해 진분수를 구성하는 분할 분수 스킴과 관련된 것으로 두 가지 수준의 단위를 주어진 것으로 보고 이를 이용하여 문제를 해결하기 때문에 단위 조정 2단계에 해당된다.



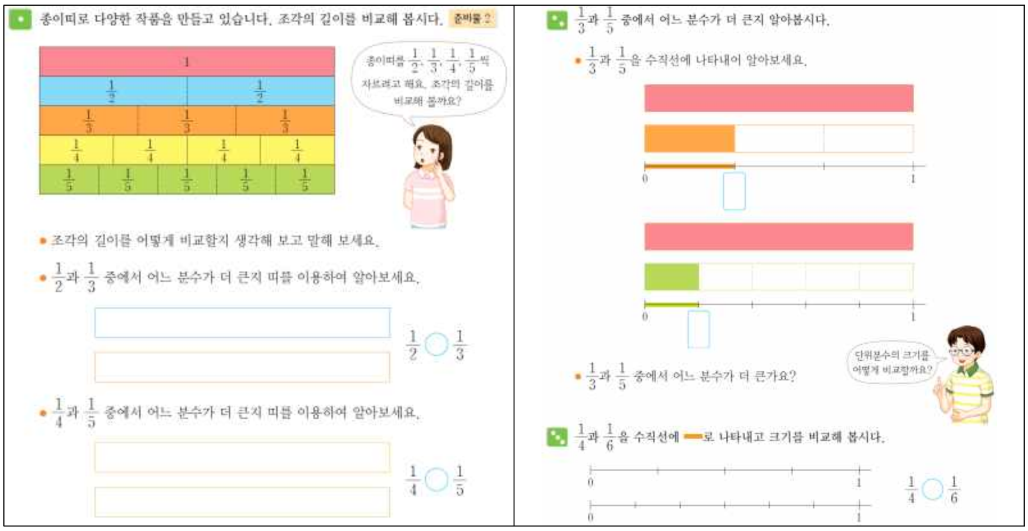
[그림 8] 수학 교과서의 3-1-6단원 5차시 활동(교육부, 2019a, pp. 118-119)

학생들은 활동 ▣의 첫 번째 하위 활동에서 분수를 어떻게 비교할지 생각하면서 전체를 4등분하는 분할 조작에 직접 참여할 수 있고 두 번째 하위 활동에서 $\frac{1}{4}$을 전체에서 분리하여 아래에 색칠하고, 이를 3번 반복하여 $\frac{3}{4}$을 구성할 수 있다. 즉 해당 활동은 분할, 분

리, 반복 조작을 순서대로 경험할 수 있다는 점에서 분할 분수 스킴과 관련하여 주목할 만하다. 따라서 해당 차시에서 교사는 교과서에 제시된 활동을 충분히 활용하고, 앞 차시에서 다루는 분할 단위분수 스킴과 관련하여 학생들이 직접 분할, 분리, 반복 조작에 참여하여 자연스럽게 분할 분수 스킴으로 나아갈 수 있도록 도울 수 있을 것이다.

마. 3-1-6단원 6차시 단위분수의 크기 비교하기

6차시는 [그림 9]와 같이 단위분수의 크기를 비교하는 활동을 한다. 이 활동은 단위분수의 크기를 비교하는 활동을 통해 부분의 크기와 부분의 개수 사이의 관계까지 살펴보고 두 가지 단위 사이의 곱셈적 관계를 의도적으로 강조할 수 있다는 점에서 매우 중요하다. 즉 여전히 단위 조정 1단계에 남아있는 학생들을 두 가지 단위 사이의 관계를 살펴보게 하면서 단위 조정 2단계로 나아가도록 도울 수 있다. 단위분수의 크기를 비교할 때, 단위분수를 이용하여 전체를 만드는 활동과 연결하면 $\frac{1}{2}$은 2번, $\frac{1}{3}$은 3번, $\frac{1}{4}$은 4번, … 반복하여 전체를 구성하기 때문에 부분의 크기와 부분의 개수 사이의 역관계뿐만 아니라 단위분수와 전체 사이의 곱셈적 관계를 명시적으로 강조할 수 있다.



[그림 9] 수학 교과서의 3-1-6단원 6차시 활동(교육부, 2019a, pp. 120-121)

그러나 교과서에서는 단위분수의 크기를 시각적으로 비교하는 것에 더 비중을 두고 있다. 물론 교사용 지도서에는 [그림 10]과 같이 시각적인 비교뿐만 아니라 부분의 크기와 부분의 개수 사이의 역관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는 발문(즉, “색칠하거나 수직선으로 나타내지 않고 단위분수의 크기를 어떻게 비교하면 좋을까요?”)을 제시하고 있다. 하지만 “분모가 크면 똑같이 나눈 것 중 하나는 더 작아지므로 단위분수는 분모가 클수록 더 작습니다(교육부, 2019b, p. 309).” 와 같이 두 가지 단위 사이의 곱셈적 관계를 분명하게 언급하고 있지는 않기 때문에 분할 및 분리 조작, 부분-전체 분수 스킴과 관련된다고 볼 수 있다. 따라서 단위 조정 2단계까지 확장된 활동이라고 보기는 어렵다.

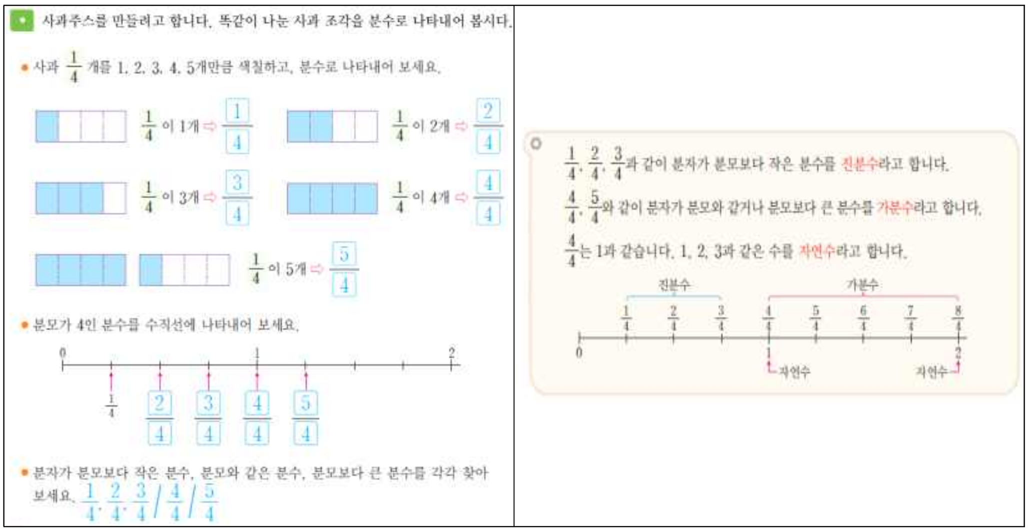
> • 색칠하거나 수직선으로 나타내지 않고 단위분수의 크기를 어떻게 비교하면 좋을까요?
> – 분모가 크면 똑같이 나눈 것 중 하나는 더 작아지므로 단위분수는 분모가 클수록 더 작습니다.
> – 분모가 큰 단위분수일수록 더 작습니다.

[그림 10] 3-1-6단원 6차시 활동과 관련된 교사용 지도서 설명(교육부, 2019b, p. 309)

따라서 본 차시에서 교사는 부분의 크기와 부분의 개수 사이의 역관계를 이용하여 단위분수의 크기를 비교하는 것까지 나아가도록 도와야 한다. 구체적으로 활동 에서 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{5}$ 중에서 어느 분수가 더 큰지를 알아보는 활동에만 그치지 않고 “색칠하거나 수직선으로 나타내지 않고 단위분수의 크기를 어떻게 비교할 수 있을까요?” 에 “다양한 방법으로 설명해 보세요” 라는 발문을 추가하여 반복 조작까지 나아가도록 도와야 한다. 이러한 질문에 답하기 위해 어떤 학생은 시각적으로 보았을 때 $\frac{1}{3}$이 $\frac{1}{5}$보다 크다고 설명할 수 있고, 다른 학생은 $\frac{1}{3}$은 전체를 3등분한 것 중에 하나이고, $\frac{1}{5}$은 전체를 5등분한 것 중에 하나이므로 전체를 더 잘게 쪼개서 나온 $\frac{1}{5}$의 크기가 더 작다고 설명할 수 있을 것이다. 나아가 일부의 학생들은 반복 조작을 이용하여 전체를 만들기 위해서 $\frac{1}{3}$은 3번만 반복하면 되지만, $\frac{1}{5}$은 5번 반복해야 하기 때문에 $\frac{1}{3}$의 크기가 더 크다는 것을 설명할 수 있을 것이다.

바. 3-2-4단원 5차시 진분수, 가분수, 자연수 알기

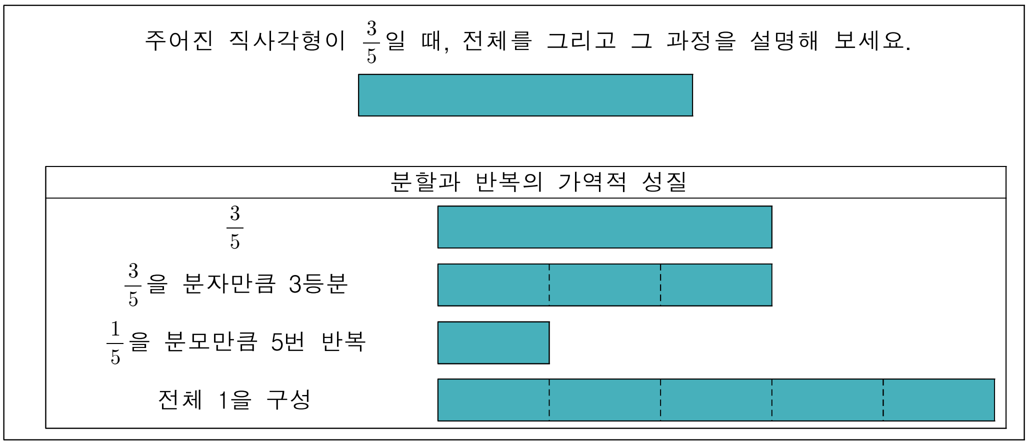
3학년 2학기 4단원의 5차시는 [그림 11]과 같이 진분수에 한정되어 있는 분수 개념을 가분수로 확장한다. 가분수를 구성하는 데 가장 중요한 역할을 차지하는 것은 스플리팅 조작이고 단위 조정 3단계에서 사고하는 것이다. 즉 $\frac{5}{4}$를 구성하기 위해서는 $\frac{1}{4}$과 1의 관계를 분할, 반복을 동시적으로 조작함으로써 한번에 파악할 수 있어야 하고 이를 통해 $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{4}(=1)$, $\frac{5}{4}$ 세 가지 단위를 조정할 수 있어야 한다. 다시 말하면 $\frac{5}{4}$를 $\frac{1}{4}$과 $\frac{4}{4}(=1)$ 두 가지 수준의 단위를 포함하고 있는 하나의 단위(즉, 세 가지 수준의 단위 구조)로 볼 수 있어야 한다. 이러한 스플리팅 조작이 결여되어 있는 경우에 학생들은 분할 분수 스킴을 통해 $\frac{1}{4}$을 5번 반복할 수 있지만 결과로 나온 양을 $\frac{5}{4}$로 보기 보다는 $\frac{5}{5}$로 해석할 가능성이 크다. 이러한 학생들은 활동 에서 수직선을 2까지 제시하였을 때 작은 눈금 한 칸을 $\frac{1}{4}$보다는 $\frac{1}{8}$로 볼 가능성이 있다. 따라서 가분수를 구성할 때 학생들은 스플리팅 조작을 수행하는 활동에 참여할 필요가 있다. 그러나 교과서에서는 이러한 활동이 명시적으로 강조되고 있지는 않기 때문에 분할, 분리, 반복 조작을 통한 분할 분수 스킴과 관련되고, 단위 조정 2단계에 해당한다고 볼 수 있다.



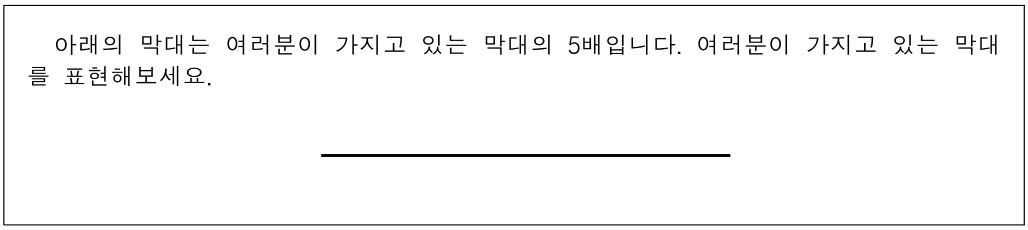
[그림 11] 수학 교과서의 3-2-4단원 5차시 활동(교육부, 2018a, pp. 84-85)

스플리팅 조작은 분할과 반복의 가역적 관계와 직접적으로 관련되므로 본 차시에서 교사는 먼저 학생들이 분할과 반복의 가역적 추론을 할 수 있도록 도와야 한다. 이와 관련된 활동으로 Hackenberg(2010)는 [그림 12]와 같이 진분수(예, $\frac{3}{5}$)를 제시하고 전체를 구성하도록 하는 과제를 제시하였다. 학생들은 $\frac{3}{5}$을 구성할 때 분모만큼 5등분하고 분자만큼 3번 반복하였다. 하지만 해당 과제를 해결하기 위해서는 이와 반대로 분자만큼 3등분하고 분모만큼 5번 반복해야 함을 인식해야 한다. 이는 활동을 통해 세 가지 수준의 단위를 조정하게 하는 것이므로(즉, $\frac{3}{5}$을 하나의 단위로 보고 해당 단위를 3등분 → $\frac{1}{5}$을 다른 하나의 단위로 보고 5번 반복하여 세 가지 수준의 단위 1을 재구성), 이러한 경험이 쌓이면서 학생들은 스플리팅 조작 및 스킴을 구성할 수 있다.

이러한 활동을 한 이후에 교사는 스플리팅 조작 및 스킴과 직접적으로 관련된 Hackenberg(2007)와 Steffe(2002)의 스플리팅 과제를 제시할 수 있다([그림 13] 참고). 주어진 막대가 구하고자 하는 막대의 5배일 때 구하고자 하는 막대를 그리기 위해서는 주어진 막대를 5등분해야 한다. 그러나 이 연구에서 많은 학생들은 주어진 막대를 5배하여 구하고자 하는 막대를 그렸다. 연구자는 이 과제에서 시행착오를 거치지 않고 바로 주어진 막대를 5등분하는 학생들은 분할과 반복 조작이 동시에 이루어지는 스플리팅 조작을 하였다고 보았으며 이러한 활동이 가분수를 구성하는 것과 직접적으로 관련된다는 점을 강조하였다.



[그림 12] 스플리팅 조작으로 나아가도록 돕는 활동(Hackenberg, 2010)



[그림 13] 스플리팅 과제(Hackenberg, 2007; Steffe, 2002)

그러나 Steffe(2002)에서는 4학년 학생들이 [그림 13]과 같은 스플리팅 과제를 해결하는 데 어려움을 겪고 가분수를 스스로 구성하는 데 실패하였음을 보고하였으며, Hackenberg(2007)에서는 6학년 학생들 중 몇 명의 학생들은 세 가지 수준의 단위를 주어진 것으로 여기지 못하여 가분수를 구성하는 데 있어서 어려움을 겪었다는 점을 지적하였다. 즉, 스플리팅 스킴과 반복 분수 스킴, 단위 조정 3단계로 나아가는 것은 가분수를 구성하는 데 핵심이지만, 이러한 활동이 3학년 학생들의 인지적 수준에 적합한지는 의문이다. 따라서 가분수 구성과 관련된 단원은 몇 학년에서 어떻게 다루어야 하는지, 가분수와 관련된 학습을 한 단원에서 완료해야 하는지 아니면 여러 단원에서 제시해야 하는지 등에 대한 논의가 더 필요할 것으로 보인다.

사. 3-2-4단원 6, 7차시 대분수와 가분수를 상호 변환하기, 크기 비교하기

6차시는 5차시에서 학습한 내용을 바탕으로 대분수를 알아보고 대분수와 가분수를 그림에 표현하여 상호 변환하는 활동을 한다. 7차시는 이러한 활동을 바탕으로 하여 동분모 가분수끼리, 동분모 대분수끼리, 동분모 가분수와 대분수를 서로 비교하는 활동을 한다. 이는 5차시에서 다루는 활동과 크게 차이가 없으므로 단위 조정 2단계에 해당한다. 앞에서 설명한 바와 같이 이 활동에서 핵심은 스플리팅 조작에 참여해야 한다는 것이다. 따라서 앞차시에서 가분수를 구성할 때 [그림 12], [그림 13]과 같은 과제를 통해 스플리팅 조작을 충분히 경험하도록 도와야 한다.

이상으로, 초등학교 수학 교과서에서 분수를 도입할 때 단위 조정 단계를 고려하여 초점을 두어야 할 조작, 분할 스킴, 분수 스킴 등을 정리하면 〈표 4〉와 같다.

<표 4> 교과서의 각 차시에서 초점을 두어야 할 조작, 분할 스킴, 분수 스킴

<table>
<tr><th colspan="2">단원</th><th>강조 사항</th><th>조작</th><th>분할
스킴</th><th>분수
스킴</th><th>단위
조정
단계</th></tr>
<tr><td rowspan="5">진분수
구성과
관련된
단원</td><td>1</td><td>· 구체물이나 그림을 이용하여 분할 활동에 직접 참여하도록 하고, 등분할의 의미에 대해 생각할 기회를 제공하기</td><td>분할</td><td rowspan="5">등분할
스킴</td><td>-</td><td rowspan="5">2
단계</td></tr>
<tr><td>2</td><td>· 전체-부분으로서의 분수는 전체를 등분할하여 나온 부분을 전체에서 따로 떼어내고, 해당 부분을 등분할된 전체와 비교한 것임을 이해하도록 돕기</td><td>분할
분리</td><td>부분
-전체
분수
스킴</td></tr>
<tr><td>3</td><td>· 부분을 반복하여 전체를 재구성하고 해당 부분을 단위분수로 나타내도록 돕기</td><td rowspan="3">분할
분리
반복</td><td>분할
단위분수
스킴</td></tr>
<tr><td>4</td><td>· 단위분수를 반복하여 진분수를 나타내고 이러한 관계를 이용하여 동분모 분수의 크기 비교하도록 돕기</td><td rowspan="2">분할
분수
스킴</td></tr>
<tr><td>5</td><td>· 부분의 크기와 부분의 개수 사이의 관계를 통해 단위분수의 크기 비교하도록 돕기</td></tr>
<tr><td rowspan="2">가분수
구성과
관련된
단원</td><td>1-2</td><td>· 단위분수와 전체 사이의 관계를 한번에 파악하고 이를 통해 전체보다 더 큰 양을 가분수와 대분수로 나타낼 수 있음을 알도록 돕기</td><td rowspan="2">스플리팅
분리</td><td rowspan="2">스플리팅
스킴</td><td rowspan="2">반복
분수
스킴</td><td rowspan="2">3
단계</td></tr>
<tr><td>3</td><td>· 스플리팅 조작을 수행하여 가분수와 대분수의 크기 비교하도록 돕기</td></tr>
</table>

여기서 주의해야 할 것은 각각의 분할 스킴이나 분수 스킴은 어느 한 시점에서 한 가지 활동만으로 구성되는 것은 아니라는 점이다. 즉, 〈표 4〉에 제시된 조작, 분할 스킴, 분수 스킴, 단위 조정 단계는 각 차시에서 지향해야 하는 바이지만, 각 차시가 끝났다고 해서 학생들이 각각의 스킴을 구성하고 해당 단계에 도달하는 것은 아니다. 해당 스킴을 구성하는 것은 학생들마다 모두 다르기 때문에 각 차시에서는 해당 스킴을 구성하도록 돕는 경험을 충분히 제공해야 한다.

따라서 분수 개념에서 매우 중요한 역할을 차지하는 등분할 스킴과 스플리팅 스킴을 구

분하여 진분수 구성과 관련된 단원과 가분수 구성과 관련된 단원으로 학년 및 단원을 다르게 하여 구분할 필요가 있다. 현행 교과서의 3학년 1학기 6단원과 같이 진분수의 구성과 관련된 단원에서는 등분할 스킴을 구성할 수 있도록 돕는 다양한 활동들을 단원 전반에 걸쳐 지속적으로 제시할 필요가 있다. 또한 이를 분수 개념과 연결할 때에는 분할과 분리 조작을 수행할 수 있도록 활동을 제시하여 부분-전체 분수 스킴을 구성하도록 도와야 하고, 나아가 반복 조작을 수행할 수 있는 활동을 의도적으로 제시하여 분할 단위분수 스킴, 분할 분수 스킴으로 자연스럽게 확장해나갈 수 있도록 도와야 한다. 현행 교과서의 3학년 2학기 4단원과 같이 가분수의 구성과 관련된 단원에서는 스플리팅 스킴을 구성할 수 있도록 스플리팅 조작을 지속적으로 수행할 기회를 제공해야 하며 이를 통해 반복 분수 스킴을 구성하도록 도와야 한다.

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 우리나라 교과서에서 분수를 도입하는 방법을 단위 조정 단계에 따라 면밀하게 탐색하고 대안을 제시하였다. 연구 결과를 정리하면, 단위 조정 단계와 관련하여 우리나라 교과서의 분수 도입 단원은 학생들이 점차적으로 더 확장된 분수 스킴을 구성하도록 돕는 활동들이 잘 배열되어 있었다(즉, 부분-전체 분수 스킴 → 분할 단위분수 스킴 → 분할 분수 스킴). 그러나 각 단계에서 다음 단계로 발달하는 데 핵심이 되는 조작 및 분할 스킴(즉, 등분할 스킴과 스플리팅 스킴)이 명시적으로 드러나지 않았으며, 분수 스킴 역시 가분수 구성에서 핵심이 되는 반복 분수 스킴까지 확장되지 않았다. 이에 이를 보완하기 위한 구체적인 대안을 제시하였다.

본 연구 결과를 토대로 단위 조정 단계를 고려하여 분수를 도입하는 것에 대한 시사점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 진분수를 다루는 분수 도입 단원에서는 분할, 분리, 반복 조작을 통해 등분할 스킴을 구성할 수 있도록 지속적인 경험을 제공해야 하며 궁극적으로 분할 분수 스킴까지 확장할 수 있도록 도와야 한다. Steffe & Olive(2010) 역시 진정한 분수 스킴이 시작되는 것을 분할 분수 스킴으로 보고 있으므로 3학년 1학기 분수 단원에서는 [그림 4]와 같이 등분할 스킴 및 분할 분수 스킴과 관련된 활동을 강조해야 한다. 이를 위해 분수 상황에서 두 가지 수준의 단위 구조를 주어진 것으로 인식하고 문제를 해결할 수 있도록 도와야 하며 두 가지 단위 사이의 곱셈적 관계에 초점을 맞추도록 하는 것이 중요하다.

둘째, 가분수를 다루는 단원에서는 스플리팅 조작과 스플리팅 스킴을 구성할 수 있도록 여러 차시에 걸쳐 지속적인 경험을 제공해야 한다. Hackenberg(2007)는 학생들이 가분수를 구성하는 데 스플리팅 조작과 세 가지 수준의 단위 구조의 내면화가 중요하다는 것을 강조하였다. 그러나 교과서에서 스플리팅 조작과 관련된 활동이 이루어지지 않고 있기 때문에 [그림 12], [그림 13]과 같은 과제를 제시하여 학생들이 스플리팅 조작에 직접적으로 참여할 수 있도록 해야 한다. 이를 통해 학생들은 반복 분수 스킴을 구성할 수 있을 것이다. 반복 분수 스킴은 이후의 분수 연산에서 매우 결정적인 역할을 하므로 중요하다(Steffe & Olive, 2010). 구체적으로 분수의 곱셈에서 주어진 $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{5}$를 곱하였을 때 각각의 $\frac{1}{3}$을 5등분하고 다시 더 작은 단위를 각각 4번 반복하려면 $\frac{2}{3}$가 $\frac{1}{3}$이 2번 반복된 하나의 단위라는

것을 알아야 하며, 분수의 곱셈 결과로 나온 양을 해석하기 위해서는 다시 1을 기준으로 삼아야 하기 때문에 1이 세 가지 수준의 단위 구조를 가지고 있다는 것을 인식해야 한다.

그러나 앞에서 설명한 바와 같이 스플리팅 조작과 세 가지 수준의 단위 구조를 조정하는 것이 3학년 학생들의 인지적 수준에 적합한지에 대해서 더욱 면밀하게 살펴볼 필요가 있다. Steffe(2002)와 Hackenberg(2007)의 연구에서 각각 4학년 학생들과 6학년 학생들 중 몇 명의 학생들이 가분수를 구성하는 데 어려움을 겪었으므로 이와 관련된 교수 실험 및 실제적인 연구를 추가적으로 진행하여 가분수 구성과 관련된 단원은 몇 학년에서 어떻게 다루어야 하는지 등에 대해 탐색할 필요가 있다.

셋째, 분수 교수·학습은 수학적 개념이 아니라 학생들의 분수 지식을 중심으로 이루어져야 하며 이를 위해 단위 조정 단계를 고려할 필요가 있다. Steffe & Olive(2010)는 수십년 동안 여러 학생들을 대상으로 교수실험을 수행하였고, 이를 통해 학생들의 분수 스킴을 전체 안의 부분 분수, 부분-전체 분수, 분할 단위분수, 분할 분수, 반복 분수 스킴 등으로 세밀하게 구분하였다. 이는 학생들이 하나의 분수를 구성하기 위해 수행하는 조작이나 분할 스킴에서 차이가 발생하기 때문이며, 이러한 차이는 분수를 이해하는 데 있어서 매우 결정적인 역할을 한다. 예를 들어, 학생들은 $\frac{2}{3}$를 3개로 분할된 것 안에 있는 2개의 부분으로, 전체 3개의 부분 중에서 2개의 부분으로, $\frac{1}{3}$이 2번 반복된 양으로, $\frac{1}{3}$이 2번 반복되어 다시 하나의 단위가 되는 양으로 매우 다양하게 인식할 수 있다. 이는 분수와 관련된 대부분의 연구(예, Barnett-Clarke et al., 2010; Lamon, 2012)에서 분수의 수학적 개념을 전체-부분, 측정, 몫, 비율, 연산자로서의 의미로 구분하고 있는 것과 상당한 차이가 있다. <표 2>의 단위 조정 단계와 관련된 학생들의 분수 스킴은 전체-부분으로서의 분수와 측정으로서의 분수와 연결되지만 그보다 훨씬 복잡하다. 따라서 분수의 교수·학습에서는 수학적 개념으로서의 분수가 아닌 학생들이 정신적인 조작을 통해 인식하고 있는 분수에 초점을 두어야 한다.

본 연구는 학생들의 분수 지식과 관련하여 여러 연구에서 제시한 조작, 분할 스킴, 분수 스킴 및 단위 조정 단계를 중심으로 교과서를 분석하고 대안을 제시하였다. 이를 통해 초등학교에서 분수를 도입할 때 교사 또는 교과용도서 개발자가 무엇을 강조해야 하는지에 대한 시사점을 제공하고자 하였다.

참 고 문 헌

강완(2014). 분수 개념 지도 내용과 방법 분석. **수학교육학연구, 24**(3), 467-480.

강흥규(2005). 분수 개념과 알고리듬 지도 양상 비교: McLellan, MiC, 한국의 교재를 중심으로. **수학교육학연구, 15**(4), 375-399.

교육부(2018a). **수학 3-2**. 서울: 천재교육.

교육부(2018b). **교사용 지도서 수학 3-2**. 서울: 천재교육.

교육부(2019a). **수학 3-1**. 서울: 천재교육.

교육부(2019b). **교사용 지도서 수학 3-1**. 서울: 천재교육.

김유경, 방정숙(2012). 3학년 학생들의 전체-부분으로서의 분수에 대한 이해 분석. **수학교육학연구, 22**(3), 311-329.

김태은, 오상철, 우연경, 권서경(2018). **초중학교 학습부진학생의 성장 과정에 대한 연구(II)** (연구보고 RRI 2018-4). 충북: 한국교육과정평가원.

신재홍, 이수진(2019). 비례 관계를 이용한 미지값 문제해결과정에 대한 개념적 분석. **수학교육학연구, 29**(2), 227-250.

이지영, 방정숙(2014). 분수의 다양한 의미에서 단위에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해 실태 조사. **수학교육학연구, 24**(1), 83-102.

이지영, 방정숙(2016a). 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육 재고. **학교수학, 18**(3), 625-645.

이지영, 방정숙(2016b). 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어에 대한 초등학교 5학년 학생들의 이해. **학교수학, 18**(4), 793-818.

정은실(2009). 싱가포르와 우리나라 교과서의 비교 분석을 통한 분수 개념 지도 방안 탐색. **수학교육학연구, 19**(1), 25-43.

조형미, 강완(2015). 한국, 대만, 중국의 초등학교 수학교과서에 나타난 분수 개념 지도 방법. **학교수학, 17**(4), 571-591.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Boyce, S., & Norton, A. (2017). Dylan's units coordinating across contexts. *Journal of Mathematics Behavior, 45*, 121-136.

Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematics Behavior, 26*, 27-47.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction, 28*(4), 383-432.

Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *Journal of Mathematics Behavior, 32*, 538-563.

Hackenberg, A. J., Norton, A., & Wright, R. J. (2016). *Developing fractions knowledge*. Thousand Oaks: Sage.

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematics Behavior, 28*, 1-18.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3th ed.). New York: Routledge.

Norton, A., Boyce, S., Ulrich, C., & Phillips, N. (2015). Students' units coordination activity: A cross-sectional analysis. *Journal of Mathematics Behavior, 39*, 51-66.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 267-307.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

<Abstract>

A Study on Introducing Fractions in Mathematics Textbooks: Focused on Stages of Units Coordination

Lee, Jiyoung[3)]

This study examines the introduction of fractions in the third grade mathematics textbooks focusing on stages of units coordination and suggests alternative activities to help students develop their understanding of fractions. As results, the sessions of introduction units in textbooks was well organized to allow students to construct more extensive fraction schemes (i.e., Part-whole fraction scheme → Partitive unit fraction scheme → Partitive fraction scheme). However, most of the activities in textbooks were related to stages 1 and 2 of units coordination. In particular, the operations and partitioning schemes (i.e., equi-partitioning and splitting schemes), which are key to the development of students' fraction knowledge, were not explicitly revealed. Fraction schemes also did not extend to the Iterative fraction scheme, which is central to the construction of improper fractions. Based on these results, this study is expected to provide implications for the introduction of fractions in textbooks focusing on stages of units coordination to teachers and textbook developers.

Key words: stages of units coordination, three levels of unit structure, operations, partitioning scheme, fraction scheme, analysis of textbooks

논문접수: 2019. 07. 22
논문심사: 2019. 08. 08
게재확정: 2019. 08. 22

3) ez038@naver.com