Journal for History of Mathematics
Vol. 32 No. 3 (Jun. 2019), 97–108
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2019.32.3.097

Gugo Wonlyu of Jeong Yag-yong

정약용의 구고원류

Kim Young Wook* 김영욱

This paper is an outgrowth of a study on recent papers and presentations of Hong Sung Sa, Hong Young Hee and/or Lee Seung On on Gugo Wonlyu which is believed to be written by the famous Joseon scholar Jeong Yag-yong. Most of what is discussed here is already explained in these papers and presentations but due to brevity of the papers it is not understood by most of us. Here we present them in more explicit and mathematical ways which, we hope, will make them more accessible to those who have little background in history of classical Joseon mathematics. We also explain them using elementary projective geometry which allow us to visualize Pythagorean polynomials geometrically.

Keywords: Jeong Yag-yong, Gugo Wonlyu, Pythagorean polynomials, order structure, lexicographic order; 丁若鏞(1762–-1836), 勾股源流, 피타고라스 多項式, 順序構造, 사전배열 순서.

MSC: 01A13, 01A55, 01A70, 26C05

1 서론

배경이 되는 내용은 홍성사 등의 논문 [1, 2]와 홍성사, 홍영희의 쿄토 학술대회 발표내용 [3, 4]를 참조하면 좋다. 그 내용은 대체적으로 구고원류에 나타나는 다항식들의 사전배열식 순서, 기본이 되는 인수 다항식, 항등식과 피타고라스 항등식과 구고원류에서 합진(合盡)의 개념, 피타고라스 조건에 따른 다항식 구조, 구고원류에 보이는 절대부등식과 피타고라스 부등식의 취급 등이다.

이 논문에서는 특별히 勾股源流에 나타나는 다항식의 사전배열(lexicographic) 순서와 위에서 설명된 다항식 구조를 조금 쉽게 설명하고 이 책의 내용의 특징 내지는 용도 두 가지 정도를 짚어보려고 한다.

---

*Corresponding Author.
Kim Young Wook: Dept. of Math., Korea Univ. E-mail: ywkim@korea.ac.kr
Received on Jun. 12, 2019, revised on Jun. 25, 2019, accepted on Jun. 27, 2019.

2 勾股源流에 대한 간략한 설명

勾股源流의 내용 분석 및 해설은 이미 홍성사 교수님 등의 논문 [1, 2]에 자세히 소개되어 있다. 이 절에서는 이 내용 가운데서 추려서 간단히 줄여 배경만 삼는다.

2.1 정약용

勾股源流의 표지 및 첫 쪽에 저자로 기록되어 있는 丁若鏞은 아마도 우리에게 가장 잘 알려진 선현 가운데 하나일 것이다. 그의 일반적 사항은 여기서 논하지 않으며 수학과 관련된 꼭 필요한 내용만을 간략히 정리하면 다음과 같다.

1. 정약용 (丁若鏞, 1762–1836)은 字 美鏞, 號 茶山·俟菴·菜山·籜翁·苔叟·紫霞道人·鐵馬山人·門巖逸人, 堂號 與猶堂 등을 가지고 있다.

2. 그는 조선의 正祖(통치 시기는 1776–1800)代의 인물로서 과학 부문에서는 서양 과학, 수학 및 기술의 도입에 적극적이었다.

3. 1801년에 西學 특히 기독교를 탄압하는 辛酉邪獄에 휘말려 귀양을 갔으며 시골과 섬에서 1818년까지 18년동안 流配생활을 했다.

2.2 勾股源流의 구성과 내용

한편 勾股源流의 책 구성을 보면 다음과 같은 특징을 가진다.

1. 이 책의 현존하는 본은 두 개가 있다. 하나는 國立中央圖書館 所藏本이고 또 다른 하나는 個人 所藏本이다.

2. 이 책은 현재 총 4卷 3冊으로 이루어져 있다. 그런데 國立中央圖書館 소장본이 제대로 묶여져 있지 않고 잘못된 순서로 되어 있어서 원래 3책이었다고 추정될 뿐 확실히 알 수는 없다. 또 다른 본은 확인하지 못하였으나 與猶堂全書의 影印本으로 미루어 보아 3책이었을 가능성이 크다. 본 논문에서는 이 세 책을 각각 A, B, C로 표시하고 이 안의 문제는 순서에 따라 번호를 붙여서 나타내기로 한다. 즉 책 A의 15번째 문제는 A-15와 같이 나타낸다.

3. 이 책은 맨 처음에 『勾股弦和較相求法』이라는 章으로 시작된다. 이 제목은 數理精蘊의 제목을 그대로 따온 것이고 앞부분의 쉬운 내용을 정리해 놓았다. 이로부터 이 저자는 數理精蘊을 읽고 참조했다는 것을 알 수 있다.

4. 勾股源流의 대부분을 이루고 있는 2–4卷의 章 제목은 『勾股弦冪積相求法』이다. 이 부분은 약 1700개 정도의 공식집이라고 볼 수 있다. 다시 말하면 이것은 구고현에

대한 2차 다항식의 변환공식집(conversion table)이라 하겠다. 여기서 다루는 2차 다항식은 모두 다음 절에서 정의한 일차다항식 s_i 및 a, b, c 들의 상호곱으로 만들어진 2차식 두 개의 합 꼴이다.

5. 어떤 변환 공식은 구고현의 관계식($a^2 + b^2 = c^2$)을 써서 변환하고 있으므로 직각삼각형에 대해서만 성립하는 등식이다. 이런 등식을 우리는 피타고라스 항등식(*Pythagorean Identity*, Pid)이라고 부른다.

6. 다수의 공식은 이러한 관계식을 사용하지 않으므로 모든 삼각형에 대해서 성립하는 항등식(*Universal Identity*, Uid)이다.

7. 五和 및 五較 10개와 a, b, c를 기본 요소로 사용하고 있다. 이 기본요소들은 a, b, c 세 원소의 선형결합으로 이루어져 있으므로 이 요소들은 3차원 공간의 원소이다.

8. 그런데 弦和和, 弦和較, 弦較和, 弦較較 (또는 10개의 和較 전부)는 a, b, c의 선형결합이므로 이들은 선형종속이다. 따라서 이것들로 표현된 다항식을 다른 방법으로 나타내는 방법의 수는 무한히 많다. 정약용은 문제에 따라 그 가운데 1–3개 정도를 보여주고 있다.

9. 정약용이 등식을 연구하는 과정에서 구고다항식을 우선 정구고(正勾股)인 $(3, 4, 5)$를 기준으로 생각하고, 그 다음에는 정구고가 만족시키는 선형방정식 몇 개를 기본으로 삼고 있다고 보았다. 이 기본 방정식들은 다음과 같다:

$$2b = a + c, \quad 2c = 2a + b, \quad 3a = b + c, \quad 3c = a + 3b.$$

이 등식은 흡진(恰盡, qiajin)이 되는 경우로 예를 들면 각각 문 B-66, C-123, C-262 등에 나타난다.

흡진이라은 용어에서 진(盡)은 계산에서 남는 것이 없이 떨어진다는 뜻으로 오래 전부터 쓰였으나, 이 글자가 흡(恰)자와 함께 쓰인 것은 산학계몽이 처음이라고 하며 이 용어가 나타난 예로는 개방석쇄문의 첫번째 문제 풀이(術) 끝에서「…除實恰盡合問」이라는 표현으로 나타난다. 진구소는 이와 유사한 표현으로「適盡」이라는 표현을 사용하기도 했다. 이 용어는 수리정온에 다시 나타난다. 구고원류에서 흡진이 나타내는 뜻은 적어도 하나의 피타고라스 수 (a, b, c)에 대해서 주어진 등식이 성립할 때를 말한다. 따라서 이것은 이 등식의 해 가운데 피타고라스 수가 적어도 하나 이상 존재한다는 뜻이다 [3].

3 勾股源流의 다항식

3.1 구고술의 10개의 和較들

동양의 구고술은 직각삼각형 문제의 계산 과정에서 가장 자주 나타나는 중요한 표현들로서 구고현의 선형결합 가운데 기본 10개를 뽑아 이름을 붙였다. 정약용은 이들과 구고현들로 이루어진 두 항짜리 이차식을 모두 공부하면서 이를 자기만의 순서로 배열하였다. 이를 쉽게 알아보려면 이들 10개 和較(五和 및 五較)들에 적절한 기호를 부여하여 사용하면 편할 듯하다. 여기서는 다음과 같은 부호를 붙였다. 이 모든 것을 정약용의 순서대로 s_0에서 s_9까지로 나타내는 방법이 있고 이 가운데 구고현이 모두 나타나는 4개는 s_0에서 s_3로, 그리고 구고현 가운데 2개만 나타나는 6개는 t_0에서 t_5로 나타내는 방법을 생각할 수 있다. 그러면 $t_k = s_{k+4}$가 된다. 이 밖에 자주 나오는 勾股積(삼각형의 넓이) $ab/2$는 S로 나타내기로 하자. 정약용은 勾股積을 ab와 구분하기 위하여 ab는「勾股相乘積」등으로 불렀다. 우리는 이 논문에서 단순히 s_i만을 사용하는 방법을 채택했으며 따라서 우리가 다루는 변수들은 순서대로 $s_0, \ldots, s_9, a, b, c$와 A이다. (Table 1)

3.2 勾股源流의 이차다항식 리스트와 그 순서

이제 이렇게 이름붙인 기호들을 사용해서 勾股源流가 계산하려는 다항식들 즉 구고원류가 주는 등식의 좌변들만 적어보되 勾股源流에 나타나는 순서대로 적어보면 Table 2와 같다.

이 리스트를 순서대로 보면 이 나열순서가 $s_is_j - s_ks_l$이라는 다항식을 4글자 단어인 $s_is_js_ks_l$를 사전배열 방식으로 나열한 것과 같은 순서임을 알아볼 수 있다. 단 맨 첫번째 다항식처럼 $s_i^2 + s_i^2 = 2s_i^2$와 같이 같은 다항식의 합인 경우에는 단순히 한 항인 s_i^2만을 계산했다. 여기서 각 문자의 순서는 앞절에서 소개한 순서대로 五和와 五較를 늘어놓고 맨 뒤에 a, b, c를 놓는 순서를 따랐다. 즉 13개의 알파벳을 다음 순서로 늘어놓은 것이다:

$$s_1, s_2, \ldots, s_9, a, b, c.$$

이렇게 다항식을 늘어놓는 순서에 사전배열식 순서를 차용한 것이 대단해 보이지 않을

Table 1. Five types of sums and differences. We order them following Jeong and assign symbols to each; 五和 및 五較에 순서를 주고 기호로 나타냈다.

弦和和	$a+b+c$	s_0	勾股和	$a+b$	$t_0 = s_4$
弦和較	$a+b-c$	s_1	勾股較	$-a+b$	$t_1 = s_5$
弦較和	$-a+b+c$	s_2	勾弦和	$a+c$	$t_2 = s_6$
弦較較	$a-b+c$	s_3	勾弦較	$-a+c$	$t_3 = s_7$
勾	a	s_{10}	股弦和	$b+c$	$t_4 = s_8$
股	b	s_{11}	股弦較	$-b+c$	$t_5 = s_9$
弦	c	s_{12}	勾股積	$ab/2$	S

Table 2. List of quadratic polynomials: Each one in the lines denoted as "Pid" is a Pythagorean identity. Otherwise is a universal identity; 이차다항식 리스트: 본 도표에서 "Pid"라고 표시된 줄의 등식은 Pythagorean identity이다. 이런 표시가 없는 것은 항등식이다.

II-6	$(a+b+c)^2$	s_0^2	Pid
7	$(a+b+c)^2 \pm (a+b+c)(a+b-c)$	$s_0^2 \pm s_0 s_1$	
8	$(a+b+c)^2 \pm (a+b+c)(-a+b+c)$	$s_0^2 \pm s_0 s_2$	
9	$(a+b+c)^2 \pm (a+b+c)(a-b+c)$	$s_0^2 \pm s_0 s_3$	
10	$(a+b+c)^2 \pm (a+b+c)(a+b)$	$s_0^2 \pm s_0 s_4$	+:Pid
	$-(a+b+c)^2 + 2(a+b+c)(a+b)$	$-s_0^2 + 2s_0 s_4$	Pid
11	$(a+b+c)^2 \pm (a+b+c)(b-a)$	$s_0^2 \pm s_0 s_5$	
12	$(a+b+c)^2 \pm (a+b+c)(a+c)$	$s_0^2 \pm s_0 s_6$	+:Pid
	$-(a+b+c)^2 + 2(a+b+c)(a+c)$	$-s_0^2 + 2s_0 s_6$	Pid
13	$(a+b+c)^2 \pm (a+b+c)(c-a)$	$s_0^2 \pm s_0 s_7$	
14	$(a+b+c)^2 \pm (a+b+c)(b+c)$	$s_0^2 \pm s_0 s_8$	+:Pid
	$-(a+b+c)^2 + 2(a+b+c)(b+c)$	$-s_0^2 + s_0 s_8$	Pid
15	$(a+b+c)^2 \pm (a+b+c)(c-b)$	$s_0^2 \pm s_0 s_9$	
16	$(a+b+c)^2 \pm (a+b-c)^2$	$s_0^2 \pm s_1^2$	+:Pid
17	$(a+b+c)^2 \pm (a+b-c)(-a+b+c)$	$s_0^2 \pm s_1 s_2$	?
18	$(a+b+c)^2 \pm (a+b-c)(a-b+c)$	$s_0^2 \pm s_1 s_2$	?
	$\cdots$		
Last	$(a+b+c)(c-b) \pm (c-b)^2$	$s_0 s_9 \pm s_9^2$	
III-1	$(a+b-c)^2$	s_1^2	Pid
2	$(a+b-c)^2 \pm (a+b-c)(-a+b+c)$	$s_1^2 \pm s_1 s_2$	
	$\cdots$		
Last	$(a+b-c)(c-b) \pm (c-b)^2$	$s_1 s_9 \pm s_9^2$	
IV-1	$(-a+b+c)^2$	s_3^2	Pid
2	$(-a+b+c)^2 \pm (-a+b+c)(a+b)$	$s_3^2 \pm s_3 s_4$	
	$\cdots$		
	$(b+c)(c-b) \pm (c-b)^2$	$s_8 s_9 \pm s_9^2$	
	$(c-b)^2$	s_9^2	
Last	a, b, c's		

수도 있다. 그러나 정약용이 이 책을 쓰던 시기까지는 이런 식으로 늘어놓은 예를 별로 보기 어려웠을 것으로 추측된다. 사전배열식 순서를 사용할 아이디어를 산학에서는 처음 사용한 것이라고 보면 이런 순서를 써서 늘어놓는 아이디어를 어디서 얻었는지 궁금하지 않을 수 없다. 우선 중국의 字典은 아마도 글자만을 순서지었지 두 글자를 순서지은 것이 있었을지 알 수 없다. 그렇다고 해도 이는 새로운 아이디어라고 할 수밖에 없다. 이것은 한문학이나 서지학의 도움을 받을 필요가 있으며 추후 연구가 필요한 문제이다. 한편 서양의 사전류가 당시에 들어와 있었을지도 궁금하다.

이런 사항을 확인하여 이런 류의 사전을 본 적이 있다고 하더라도 이런 순서를 다항식에 적용해 볼 생각을 해내는 것은 결과를 보고 이야기하는 것처럼 쉬운 일은 결코 아니다.

4 구고 다항식과 부등식의 기하학적 해석

4.1 현대 대수의 기호

구고원류의 변환식을 등식으로 이해하고, 또 그 표현 방식에 따라 부등식으로 이해할 수 있음을 홍성사 등의 논문에서 잘 해설하였다. 이 논문에서는 정약용이 구고원류의 내용을 준비할 때 아마도 몇 개의 점, 즉 피타고라스쌍 (a, b, c) 몇 개를 잡아서 거기서 값을 계산해 비교해 보았을 것으로 추정하고 있다. 이에 대해 이견은 없지만 이 다항식을 연구하는 우리는 그런 방법과 함께 현대 수학의 방법을 사용하면 여러 점에서 도움이 된다.

예를 들어 [3]에 "구고원류의 문 D-169에 나오는 다음 등식

$$2c(b-a)+a(a+b-c)-b^2=0$$

은 흡진이 된다고 하였는데 이것이 구고원류에 나타나는 4개의 1차다항식으로 정구고에서 흡진이 되는 경우에 해당하는지?" 라고 질문하였다. 이에 대해 우리는 다음에 설명하는 방식과 같은 현대수학의 도움을 받으면 좋다고 생각된다.

우선 피타고라스 수(Pythagorean triple)는 (a, b, c)로 나타낸다. 구고원류에서 나타나는 등식의 형태는 일반적으로 $P \pm Q = \sum_i R_i$ 꼴이다. (여기서 P, Q는 $s_i s_j$ 꼴의 2차식이다.) 우리는 특히 $P - Q = \sum R_i$ 꼴의 등식에 관심이 더 간다. 이러한 식은 다음 3가지 경우로 나뉜다: 즉, $P - Q > 0$, $P - Q \geq 0$ 또는 P와 Q가 비교불가능한 경우. 우리는 피타고라스 수에 대해서만 부등식을 생각하기로 한다. 구고원류에서는 구분하지 않았지만 실제로는 부등식 $P - Q > (\geq) 0$이 모든 삼각형에 대해서 성립할 때와 직각삼각형에서만 성립할 때로 나뉘는 점도 생각해야 한다.

우리 상황은 대수적으로는 동차인 등식

$$p(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

을 보는 것에 해당한다. 그런 경우 잘 사용되는 방법이 동차좌표이다. 즉 (a, b, c)가 (1)을 만족시키면 당연히 모든 순서쌍 $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$도 이 방정식을 만족시킨다. 따라서 동차다항 방정식의 해집합은 원점에 꼭지점을 가지는 뿔(cone) 형태를 띈다. 즉 그림을 그려보면 Figure 1의 왼쪽 그림과 같다. 이제 $\lambda \neq 0$일 때 $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$라고 정의하면 관계 "$\sim$"은 동치관계이고 이에 의한 상공간 $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim = \mathbb{RP}^2 (= \mathbb{P}^2)$은 보통 사영평면이라고 부르는 공간이다. 이 공간에서 점 (x, y, z)의 동치류를 $[x, y, z]$로 나타낸다.

이 공간을 쉽게 보기 위하여 예를 들어 (1)의 해집합에서 $z \neq 0$인 점들만 가지고

$$[x, y, z] = \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right] \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = (X, Y)$$

로 바꾸면, (1)로 정의된 뿔은 평면 $z = 1$ 위에 중심사영되어 $\mathbb{R}^2$의 graph로 볼 수 있다.(Figure 1의 오른쪽 그림) 특히 정구고를 나타내는 점은

$$[3, 4, 5] = [6, 8, 10] = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right] \mapsto \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

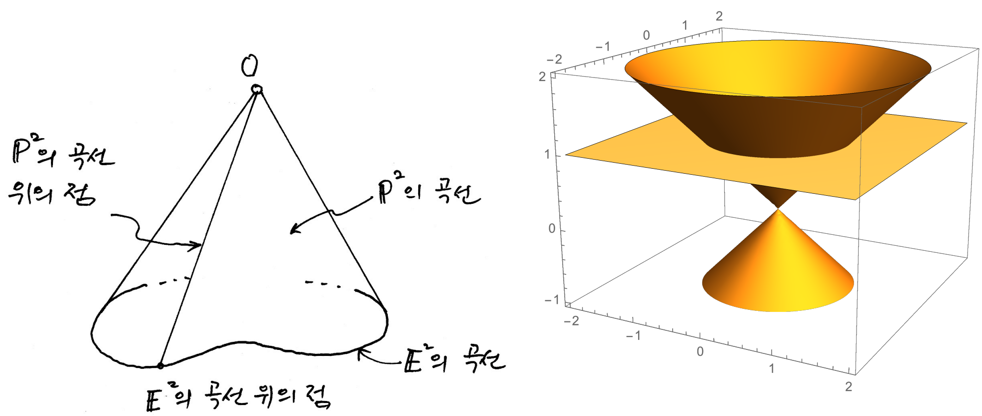

Figure 1. Left: Relation between the graph of a homogeneous equation in euclidean plane and projective plane. Right: Projection of a curve in projective plane onto the plane $z = 1$; 동차방정식의 그래프를 유클리드 평면과 사영평면에서 비교한 그림. 오른쪽: 사영평면의 곡선을 평면 $z = 1$ 위에 사영한 그림

로 사상된다. 따라서 닮음인 삼각형의 세 변의 크기는 모두 같은 점으로 대응된다. 한편 예를 들어 공간의 동차방정식은 평면 위의 방정식으로

$$2(y-x)+x(x+y-z)-y^2=0 \quad \mapsto \quad 2(Y-X)+X(X+Y-1)-Y^2=0$$

와 같이 대응된다.

이제 평면의 삼각형의 세 변의 크기 순서쌍을 이런 방법으로 평면으로 옮겨보자. 즉 $0 \le a \le b \le c$라 하고 이를 평면에 나타내 보면 $(A = a/c, B = b/c)$라는 점으로 나타나게 된다. 따라서 모든 삼각형을 이렇게 나타내 보면 Figure 2에 색칠해서 나타낸 영역 안의 한 점에 대응된다. 이 한 점은 이 삼각형과 서로 닮음인 모든 삼각형을 대표하는 것이다.

그러면 $\mathbb{R}^3$의 cone들은 $\mathbb{R}^2$의 곡선이 되게 되며, $x^2+y^2=z^2$은 $X^2+Y^2=1$이 돼서 단위원으로 그릴 수 있다. 이 곡선 위의 점 $(3,4,5)$는 단위원 위에서는 $(3/5,4/5)$가 된다. 그리고 점 $(3,4,5)$를 지나는 평면이나 이차곡면은 점 $(3/5,4/5)$을 지나는 직선이나 이차곡선으로 나타나게 된다.

주어진 동차식이 1차식의 곱으로 분해되는가? 정약용은 $(3,4,5)$를 근으로 가지는 여러 개의 2차 다항식을 연구했다. 이 가운데 몇 개는 $(3,4,5)$를 근으로 가지는 두 1차 다항식의 곱으로 인수분해되는 것이며 다른 것은 인수분해되지 않아서 그렇게 나타낼 수 없는 것이다. 이제 주어진 다항식 $p(x,y,z)$이 어떤 쪽인지 알아보려면 방정식 $p(x,y,z)=0$의 그래프를 그려봐서 이것이 두 평면으로 이루어져 있는지 아니면 2차곡면인지를 보면 된다.

앞의 질문인 문 D-169에서 정약용은 $P-Q=R$ 꼴의 등식을 얻었고 여기서 $(3,4,5)$는 $R=0$을 만족시킨다. 그러면 "이 다항식 R의 인수 가운데 $(3,4,5)$에서 0이 되는 일

차식이 있는가?" 하는 것이고 다음 예에서 보듯이 그림을 그려보면 해결된다: 예를 들어 다항방정식

$$2c(b-a)+a(a+b-c)-b^2=0$$

의 사영곡선을 원 $a^2+b^2-c^2=0$ 즉 $A^2+B^2=1$과 함께 그려보면 Figure 3과 같다. 그런데 이 다항식이 두 1차식의 곱으로 쓰여진다면 그 방정식의 그래프는 두 직선으로 나타날 것이다. 따라서 이 다항방정식은 두 개의 1차식으로 분해될 수 없음을 쉽게 알 수 있다.

4.2 $[3,4,5]$에서 恰盡이 되는 다항식들

그림 4는 정약용의 구고원류에 나타나는 것으로 $[3,4,5]$에서 恰盡이 되는 몇 개 다항식의 그래프를 그린 것이다. 이것들이 정구고 점에서 0이 되며 다른 점에서는 그렇지 않음을 주의하여 보자.

(i) $2z(y-x)+x(x+y-z)-y^2=0 \quad\to\quad 2(Y-X)+X(X+Y-1)-Y^2=0$

(ii) $(x+y-z)(z-y+x)-(z+x)(z-y)=0 \quad\to\quad (X+Y-1)(1-Y+X)-(1+X)(1-Y)=0$

(iii) $(x+y+z)(z+y-x)-(x+y)^2=0 \quad\to\quad (X+Y+1)(1+Y-X)-(X+Y)^2=0$

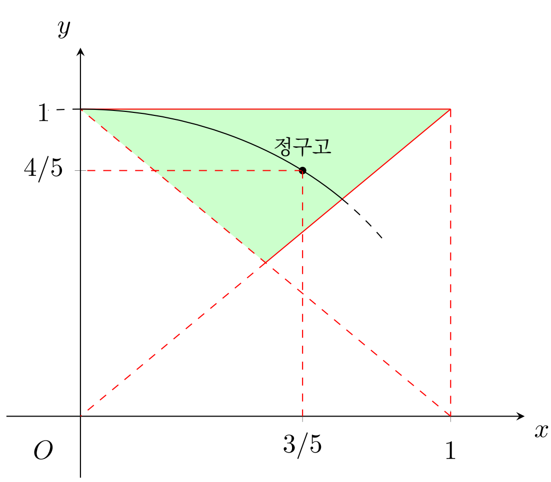

Figure 2. In this diagram the points on the unit circle inside the triangle represents right triangles, lines $Y=1$ and $Y=X$ represents isocles with $b=c$ and $a=b$ respectively. The points on the line $X+Y=1$ corresponds to the condition $a+b=c$ which represents degenerate triangles; 단위원 위의 점은 직각삼각형들이고, 직선 $Y=1$과 $Y=X$는 각각 $b=c$와 $a=b$에 해당하는 이등변 삼각형들이며, 직선 $X+Y=1$ 부분은 $a+b=c$가 되어 삼각형이 선분으로 degenerate한 경우를 나타낸다.

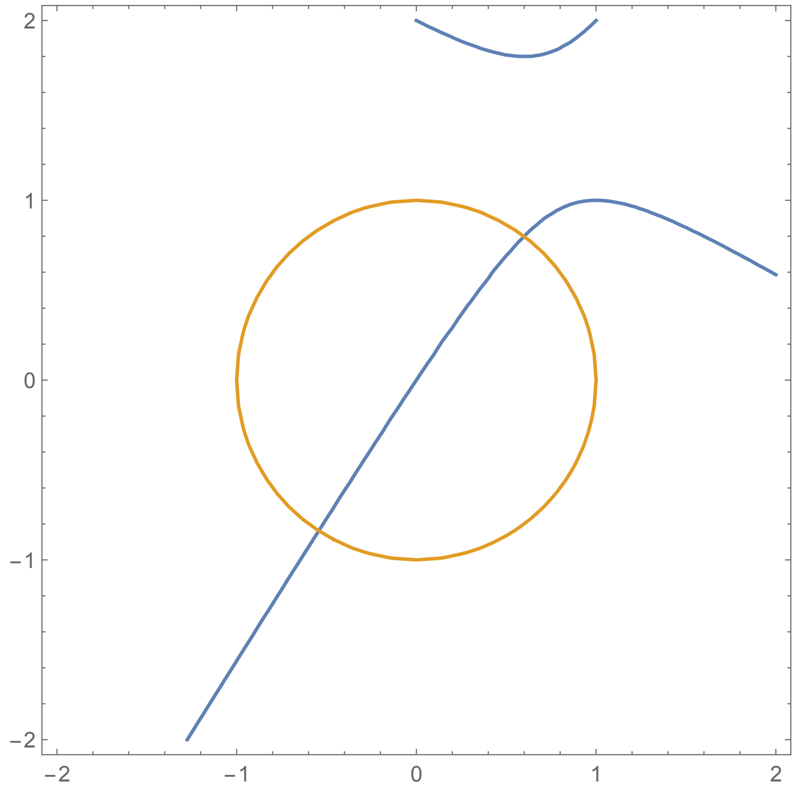

Figure 3. The graph of $2(B-A)+\ldots.$ which is the projection of the homogeneous equation $2c(b-a)+\ldots.$ on to the plane $c=1$; 동차방정식 $2c(b-a)+a(a+b-c)-b^2=0$을 평면 $c=1$ 위에 사영한 곡선인 $2(B-A)+A(A+B-1)-B^2=0$의 그래프

5 부등식

구고원류에 나타나는 부등식은 구체적으로 부등식임이 명시되어 있지는 않지만 저자가 굳이 변환된 식을 五和 및 五較의 곱의 합으로 나타낸 것은 이것이 양수가 되는가를 확인해 본 것이라고 추측된다. 이를 뒷받침하는 것이 다음과 같은 몇 개의 등식이다. 제2권(권 B)의 초반 몇 문제를 보면 다음과 같이 減의 경우에 두 가지 減을 한 것이 눈에 띈다. 우리는 여기서 문 B-10, B-12, B-14를 주목해 보며, 다른 곳에도 유사한 예가 많은 것으로 보인다.

문 B-10에서는 두 2차식의 차를 우선 계산하여

$$s_0^2 - s_0 s_4 = c s_0 > 0$$

를 얻었고 이는 두 양수의 곱으로 이루어졌으므로 당연히 양수임을 알 수 있다. 저자는 무슨 이유에서인지 두 번째 항의 두 배를 빼 보았고 그 결과는 음수임을 알았다. 그래서 얻은 변환식에서 이의 부호를 바꿔서 두 번째 항의 두 배에서 첫번째 항을 뺀 결과가 양수임을 보여주는 결과를

$$2s_0 s_4 - s_0^2 = 2ab > 0$$

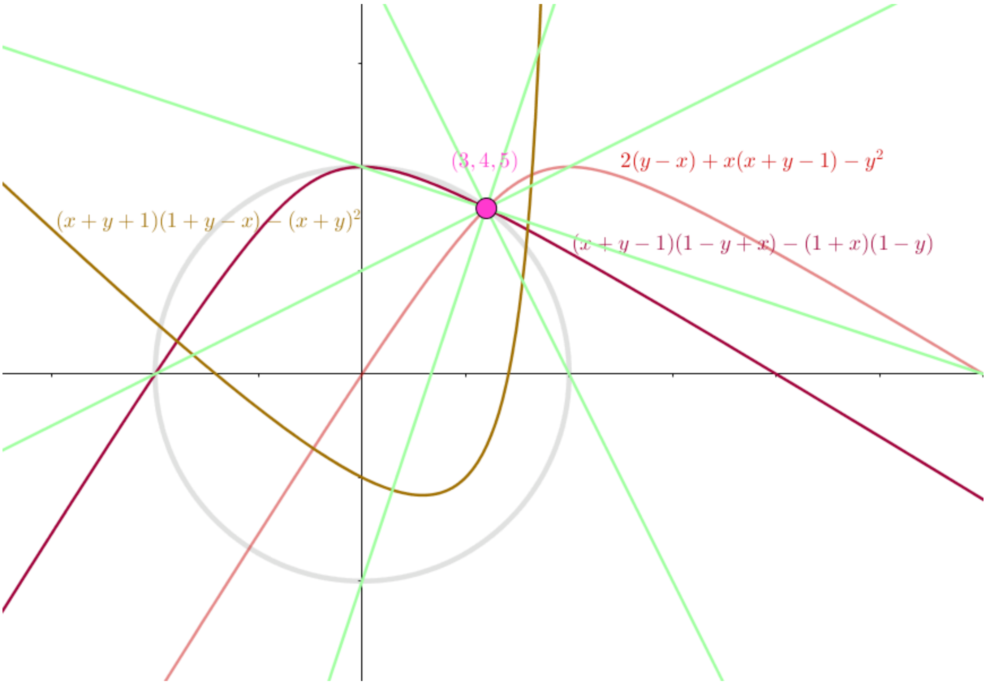

Figure 4. Graphs of the equations which become qiajin at $[3, 4, 5]$; $[3, 4, 5]$에서 흡진이 되는 여러 방정식의 그래프들

와 같이 기록했다. 이를 해석하면 저자는 다음과 같은 부등식을 얻고 있는 것이며 이차식 P를 다른 이차식 $2Q$와 Q로 위, 아래로 감싸고 있다. 즉,

$$s_0s_4 < s_0^2 < 2s_0s_4$$

라는 上限과 下限을 얻고 있는 것이다. 마찬가지로 문 B-12에서도 두 부등식

$$s_0^2 - s_0s_6 = bs_0 > 0, \quad 2s_0s_6 - s_0^2 = 2as_6 > 0$$

에서 上, 下限

$$s_0s_6 < s_0^2 < 2s_0s_6$$

을 얻고 있으며 문 B-14에서도 마찬가지 방법으로

$$s_0^2 - s_0s_8 = as_0 > 0, \quad 2s_0s_8 - s_0^2 = 2bs_8 > 0$$

에서

$$s_0s_4 < s_0^2 < 2s_0s_4$$

을 얻었다.

6 線形**인** 恰盡

구고원류에서 恰盡이 나타나는 경우 가운데 다수가 그 결과가 선형인 恰盡 다항식을 인수로 가지고 있기 때문임을 알 수 있다. 구고원류에서 3 : 4 : 5(정구고)에서 恰盡이 나타

나는 경우에 사용된 선형 恰盡 다항식은 다음 네 개이다:

$$2b = a + c, \quad 2c = 2a + b, \quad 3a = b + c, \quad 3c = a + 3b.$$

실제로 3 : 4 : 5에서 恰盡이 되는 선형다항식은 무한히 많으며 정수계수를 가지는 것만 보아도 무한히 많을 수밖에 없다. 이 가운데 계수인 정수의 크기가 크지 않은 것만을 보면 개수가 줄어들게 되어 세 계수의 절대값이 모두 1 또는 2 또는 3인 경우는 위의 네가지 밖에 없다. 구고원류에서 恰盡인 경우는 인수로 이 네 가지 등식을 갖는 것이 모두 나타난다.

실제로 3 : 4 : 5에서 恰盡이 되는 선형 恰盡 다항식으로 계수가 크지 않은 것을 컴퓨터의 도움으로 찾아보면 다음과 같다. (손으로 계산해도 별로 어렵지 않다.) 여기서는 계수가 7 이하인 것만 나타내었다.

$\lvert$계수$\rvert \le 3$인 경우:	$\lvert$계수$\rvert \le 7$인 경우(추가분):
I. $a + c = 2b$	$a + 5c = 7b$
II. $2a + b = 2c$	$5a + 5b = 7c$
III. $3a = b + c$	$6a + 2c = 7b$
IV. $a + 3b = 3c$	$7a = 4b + c$
$\lvert$계수$\rvert \le 5$인 경우(추가분):	$7a + b = 5c$
$3a + 4b = 5c$: tangent	—
$5a + c = 5b$	—

7 결론

이렇게 구고원류의 내용을 분석해보면 저자가 구고원류를 저술한 목적을 일부분 추측해 볼 수 있다. 여러 관점 가운데 다음과 같은 몇 가지를 지적해 둔다.

우선 이 책의 용도는 무엇보다로 변환공식이다. 즉 저자는 구고술을 사용하면서 여러 경우에 나타나는 두 2차식을 다른 형태로 쉽게 빨리 변환할 필요가 있었다고 보인다. 이 책은 이를 적어놓고 빨리 찾아 사용할 수 있게 만든 공식 사전집의 일종이라고 판단된다. 이를 보면 이 저자는 천원술 및 구고술에 능한 중인 산학자는 아닐 것으로 추정된다. 홍정하, 이상혁 등의 경우에 알 수 있지만 구고술 문제를 많이 다룬 중인산학자는 천원술/4원술이나 그 밖의 방법을 써서 다항식 계산을 마스터하였다고 보이며 이러한 문제가 나타나면 즉시 문제를 해결할 수 있었다고 보인다. 그러나 이 저자에게는 이러한 변환이 까다롭게 느껴졌으며 이는 홍정하와 같은 현장 문제의 마스터 산학자는 아니라는 뜻이다.

이 책의 저자가 스스로 구고술의 계산 방법을 마스터하지 못했다는 증거는 이 책을 전부 분석하면 나온다. 이 책을 분석하면 시작부분에 비해서 뒷부분으로 가면서 계산이 발전되고 오류가 적어진다는 것을 알 수 있다. 즉 저자는 이 책을 저술하는 동안에 구고술을 익혀가고 있었다.[1] 이를 볼 때 저자는 사대부로서 산학을 사용하는 주변에서 구고술을

사용하는 것을 많이 보고 스스로도 해 보았지만 마스터할 정도의 연습은 부재한 사람이며, 주변의 여러 초보자들이 산학가의 도움 없이 이런 문제를 해결할 수 있도록 2차식의 변환 공식집을 만들면 좋겠다는 생각을 한 학자라고 판단된다.

한편 저자는 이런 문제를 다루는 과정에서 계산된 식이 양수인지 음수인지를 알아보고 싶은 필요성을 느꼈다고 보이며 이를 반영하여 여러 경우에 두 이차식의 차가 양수 모양으로 써진다는 것을 확인하였다고 추측된다.[2] 이러한 것도 수학을 구조적으로 판단하는 관점을 가지고 있지만 구체적인 계산법에는 익숙하지 않은 사람이고 산학의 전체적인 필요성을 느낀 학자였다고 판단할 수 있다. 그러므로 화성의 축조 같은 큰 프로젝트를 지휘하면서 여러 상황에서 구고술을 다루는 것을 보고 또 그것을 스스로도 때때로 해야 했던 정약용 같은 학자일 가능성이 높다고 보인다.

한편 이 책을 쓴 저자는 정구고에서 恰盡이 되어 두 2차식의 차가 0이 되는 그런 경우를 많이 찾았으며 그 과정에서 1차식으로서 恰盡이 되는 경우를 4가지 확인하였다. 이 4가지 경우는 정구고가 만족시키는 1차다항식으로서 계수가 간단히 되는 것을 모두 찾은 것이다. 조금 정확히 이야기하면 a, b, c의 정수 계수 선형결합 가운데 $3:4:5$에서 값이 0이 되는 그런 다항식으로 계수의 절대값이 모두 1 또는 2 또는 3인 것을 다 찾은 것이다. 이런 형태를 恰盡으로 따로 분류하여 놓음으로써 Pythagorean polynomial의 구조를 나름대로 밝힌 것이 되며, 전체적으로 근대 대수학의 기호 없이 대수적 구조를 일부 서술하는 성과를 보였다고 하겠다.[2]

References

1. Hong Sung Sa, Hong Young Hee and Lee Seung On, Mathematical Structures of Jeong Yag-yong's Gugo Wonlyu, *Journal for History of Mathematics* 28(6) (2015), 301–310. 홍성사, 홍영희, 이승온, 丁若鏞의 算書 勾股源流의 數學的 構造, *Journal for History of Mathematics* 28(6) (2015), 301–310.
2. Hong Sung Sa, Hong Young Hee and Lee Seung On, Mathematical Structures of Polynomials in Jeong Yag-yong's Gugo Wonlyu, *Journal for History of Mathematics* 29(25) (2016), 257–266. 홍성사, 홍영희, 이승온, 丁若鏞의 算書 勾股源流의 多項式의 數學的 構造, *Journal for History of Mathematics* 29(25) (2016), 257–266.
3. Hong Sung Sa, "Solutions of Equations in East Mathematics", presented at ISHMEA Conference Kyoto (Nov. 10–16, 2013).
4. Hong Young Hee, "Polynomials and Polynomial Functions", presented at ISHMEA Conference Kyoto (Nov. 10–16, 2013).