한국금형공학회지, 제13권 제2호, 2019
J. Korea Society of Die & Mold Engineering, Vol.13 No.2, 2019 ISSN 2092-9692

복잡한 3차원 곡면을 가지는 플라스틱 사출 성형품을 위한 진원도의 수학적 모델링

윤선진†
㈜디팜스테크†

Mathematical Modeling of the Roundness for Plastic Injection Mold Parts with Complicated 3D curvatures

Seon Jhin Yoon†
DPAMSTECH Co., Ltd.†

(Received April 30, 2019 / Revised June 26, 2019 / Accepted June 30, 2019)

Abstract: In this study, we constructed the mathematical model to evaluate the roundness for plastic injection mold parts with complicated 3D curvatures. Mathematically we started off from the equation of circle and successfully derived an analytical solution so as to minimize the area of the residuals. On the other hand, we employed the numerical method the similar optimization process for the comparison. To verify the mathematical models, we manufactured and used a ball valve type plastic parts to apply the derived model. The plastic parts was fabricated under the process conditions of 220-ton injection mold machine with a raw material of polyester. we experimentally measured (x, y) position using 3D contact automated system and applied two mathematical methods to evaluated the accuracy of the mathematical models. We found that the analytical solution gives better accuracy of 0.4036 compared to 0.4872 of the numerical solution. The numerical method however may give adaptiveness and versatility for optional simulations such as a fixed center.

Key Words: Curvatures, Injection Mold, Modeling, Plastics, Roundness

1. 서 론

자동차용 유체 제어 밸브는 자동차 엔진 주위의 공간적 한계로 인하여 한 개의 유체 밸브가 여러 개의 흡입구와 배출구를 통제하는 매우 복잡한 구조를 가지고 있다(Fig. 1). 자동차용 유체 제어 밸브의 두드러진 특징은 중앙부 중심축을 가지되 3~4개의 볼 밸브가 연결된 구조를 가지고 있으며, 각 볼 밸브 또한 유체의 유입과 유출을 통제하는 많은 수의 홀, 타원형 윈도우, 서지 제어를 위한 틈 등 매우 복잡한 구조를 가지고 있다.

과거 자동차 기술에서는 유체 제어 밸브가 현재와 같은 매우 복잡한 유체 공급 제어 기능을 요구하지 않았으므로 유체 제어 밸브 전체가 스테인리스 스틸의 가공품을 사용한 적도 있었으나, 자동차 내부의 구성 모듈(히터, 터보차저, 라디에이터, 쿨링 재킷 등)들이 다양해짐에 따라 매우 섬세한 유량제어를 요구하면서 그 구조가 점차 매우 복잡해지고, 자동차 경량화, 내 부식성, 원가 등의 문제로 인하여 최근 플라스틱 사출성형 제품으로 전폭 교체가 되었다.

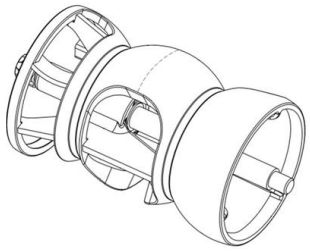

Fig. 1 Illustration of fluid control valve for automobiles

1,† 교신저자: ㈜디팜스테크 기술연구소
E-mail: sjyoon@dpamstech.co.kr

그러나 유체 제어 밸브는 현재도 구, 홀, 틈 등의 매우 복잡하고 정밀한 설계 요소들을 가지고 있고 사출성형 후 변형에 의한 평면도, 진원도 등의 정밀도를 맞추는 것이 점점 더 어려워지고 있으며 금형 설계 및 가공뿐만 아니라 성형, 측정 기술에서도 매우 높은 난이도의 기술 수준을 요구하고 있다.

자동차 유체 제어 밸브와 같은 유량 제어 부품은 그 자체로는 사용을 할 수가 없고, 밸브 주위에 실링을 덧댄 상태에서 중심축을 회전시켜 차량의 운전 모드에 맞게 원하는 차량 모듈(히터, 터보차저, 라디에이터, 쿨링 재킷 등) 쪽으로 보내야 하는데, 정밀도가 하락을 하게 되면 조립성, 어셈블리 움직임, 유체가 사이드 틈을 타고 흐르면서 원하는 밸브 성능 구현을 하지 못하는 신뢰성 문제가 발생한다. 이러한 신뢰성 측면 오동작을 사전에 방지하기 위해서는 사전에 기구 설계를 통하여 철저한 공차 설계를 하고 금형을 정밀하게 제작하여 제조 단계에서 부터 고 정밀도 밸브를 제작하여야 하고 이와 더불어 유체 제어 밸브를 구성하는 많은 구 형상을 정밀하게 측정 평가할 수 있는 기술이 필요하다.

자동차 부품의 사출 후 변형을 평가하는 것은 매우 중요한데 통상 시제품 정밀도로서 통칭되며, 평면도와 진원도를 중심으로 연구가 이루어져왔다. 이전의 연구에서[1] 본 저자들은 자동차용 조향장치에 대하여 정밀한 평면도 측정 및 계산을 위한 모델을 제안하였다. 연구에서 측정 시편은 경사도, 기준점, JIG 등의 사용 유무에 무관히 (즉, 정반이나 시편의 경사정도를 정밀하게 맞추지 않아도) 정밀한 평면도를 구할 수 있는 방법을 제안하였으며, 이와 더불어 향후 연구에서 원주 방향에 대한 정밀도(진원도)를 정밀하게 측정 및 계산할 수 있는 연구에 대한 제안을 하였다.

상기의 진원도 연구의 필요성과 더불어 현재 산업계 전반에 정밀도 평가를 위하여 사용되는 측정 방법도 여전히 많은 연구 개선점을 가지고 있다고 보인다. 보편적으로 많이 사용되는 접촉식 측정방법은 구형을 가지는 탐침봉의 접촉 방식과 경로 프로그래밍, 측정 데이터의 처리 방법에 따라 ㎛단위의 측정 오차를 가능성을 여전히 가지고 있으며 실험적인 분석과 더불어 수학적인 모델링은 통한 정량적인 검증역시 필요하다.

본 연구에서는 자동차용 유체 제어 밸브와 같이 표면이 복잡한 구형 형상을 많이 포함하는 사출물의 진원도 평가를 위하여 2가지 수학적 모델을 제안하고, 사출 공정에 의해 제작된 시편을 이용한 실측정을 통하여 그 유효성을 검증하였다. 수학적 모델은 먼저 원의 방정식으로 부터 잔차(residual)을 최소화하는 원리를 이용하여 분석적인 최소자승법에 의한 절대해(exact solution)를 구하는 방법과 수치해석에 의한 두 가지 방법으로 구하였다. 시편의 진원도 측정에 있어서는 종래 측정방법이 가지고 있는 잠정적인 문제를 검토하였으며, 개발된 수학적 모델에 대하여 측정된 값들을 적용하여 장단점을 평가하였다.

2. 이 론

Fig. 2는 도면 기호를 이용하여 진원도를 설명한 도해이다. 진원도는 이전 연구의 평면도와 유사하게 설계자의 의도에 따라 다르게 정의 (예. 최대-최소, 편차, 최대-평균 등) 될 수 있으나, 보편적으로 원 또는 구면을 기준면으로 설계된 반경에서 벗어난 편차 정밀도로서 정의된다. 이는 선 또는 평면을 기준면으로 벗어난 편차를 정밀도로 하는 평면도와 다른 진원도이다. 본 파트에서는 진원도를 계산하기 위하여 측정되어진 데이터 포인트로 출발한 진원도 계산 모델을 제안한다.

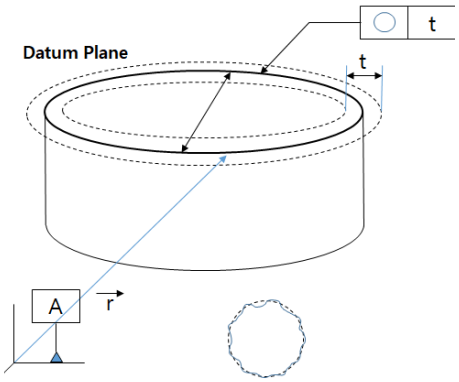

Fig. 2 Illustration of roundness for mechanical drawings

Method 1. 진원도의 모델링은 측정데이터 $\{(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le n\}$ 으로부터 회귀되는 곡선을 찾는 것으로 정의된다. 이는 수학적으로

$$\text{Find } \boldsymbol{u} \text{ such that } \textit{Minimize } S(u) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f_i^2}(\boldsymbol{u}) \qquad (1)$$

을 만족하는 회귀변수 해(solution) $\boldsymbol{u}$를 찾는데 있다[2].

이는 기존의 최소자승법(Least Square Method)으로 알려진 방법[3]을 원의 방정식에 대하여 행렬의 형태로 유도하는 것을 의미하며

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{u}} = 0 \tag{2}$$

을 만족하는 **u**를 찾는 문제로 정의 된다. 예를 들어 반경 R을 가지는 곡면의 표면을 접촉식 측정기로 부터 측정되어진 유한개의 측정데이터 $\{(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le n\}$가 회기함수

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{3}$$

으로 정의되는 경우, 회기함수의 잔차(residual)는

$$f = R^2 - (x-a)^2 + (y-b)^2 \tag{4}$$

이며 이후 잔차의 합은 (5)로 정리된다.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[R^2 - (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 \right]^2 \tag{5}$$

우변을 풀어서 정리하면 (6)과 같이 정리된다.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[c^2 + 2ax_i + 2by_i - x_i^2 - y_i^2 \right]^2 \tag{6}$$

여기서 $\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{u}} = 0,\ c^2 = R^2 - a^2 - b^2$ (7)

를 만족하는 $u = \{a, b, R^2\}$ 벡터를 구하면 (8)로 정의된다.

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sum x_i^2 & 2\sum x_i y_i \\ Sym. & 2\sum y_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sum x_i^3 + \sum x_i y_i^2 \\ \sum y_i^3 + \sum x_i^2 y_i \end{Bmatrix} \tag{8}$$

식 (6)은 평균값 $(\overline{x}, \overline{y})$을 중심점으로 가지는 원의 반경과 그 중심 좌표를 얻는데 매우 유용한 식이다. 그러나 원의 반경뿐만 아니라 중심의 위치 또한 같이 최적화가 진행되므로 2~3개의 진원도를 평가할 때 반경과 중심위치가 혼합되어 나타나는 단점이 있다.

Method 2. 반경이나 원의 중심을 제한된 조건에 의해 초기값을 주고 구하는 방식으로 수치 해석적인 방법이 있다. 이는 측정된 데이터 포인트를 회기하는 함수***f(u)*** 를 찾아내는 알고리즘을 이용하여 잔차값 ***S*** 를 최소화하는

$$\text{Find } \boldsymbol{u} \text{ such that } \textit{Minimize } S(u) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f_i^2}(\boldsymbol{u}) \tag{9}$$

변수 **u**를 찾아내는 것으로 정의될 수 있다[4-5]. 이 알고리듬은 Gauss-Netwon 최적화 방법으로 널리 알려진 방법으로서 최적화 해 **u**는 수학적으로

$$\boldsymbol{u_{s+1}} = \boldsymbol{u_s} - \left(\nabla^2 \boldsymbol{f} \right)^{-1} \nabla \boldsymbol{f} \tag{10}$$

를 반복 계산함에 의해서 얻어진다. 이를 행렬로 표기하면

$$\boldsymbol{u_{s+1}} = \boldsymbol{u_s} - \left(\nabla \boldsymbol{F} \nabla \boldsymbol{F^T} \right)^{-1} \nabla \boldsymbol{F} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \tag{11}$$

으로 정의된다. F는 함수 f의 벡터 함수, T는 전치행렬을 의미한다. 예를 들어 측정기로 부터 얻어진 유한개의 측정데이터 $\{ (xi, yi) \mid 1 \le i \le n \}$가 회기함수

$$f = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 \tag{12}$$

을 가진다고 할 때

$$\boldsymbol{F} = \begin{Bmatrix} (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - R_1^2 \\ (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 - R_2^2 \\ \cdots \\ (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 - R_n^2 \end{Bmatrix} \tag{13}$$

로서 표현되며

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ R \end{Bmatrix}_{s+1} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ R \end{Bmatrix}_{s} + \left(\nabla F \nabla F^T \right)^{-1} \nabla F \bullet F \tag{14}$$

$$\nabla \boldsymbol{F^T} = \begin{bmatrix} \partial f / \partial u_1 \\ \partial f / \partial u_2 \\ \cdots \\ \partial f / \partial u_n \end{bmatrix} \tag{15}$$

으로부터 $u = \{a, b, R\}$ 벡터를 구할 수 있다.

식 (15)는 원의 중심과 반경값을 설정한 상태에서 반복계산에 의한 최적화를 할 수 있는 장점이 있으나 알고리즘의 특성상 직교 좌표상에서 회귀 데이터 포인트의 위치가 원점으로 부터 매우 멀어지는 경우 최적화 알고리즘의 안정도가 떨어지는 단점이 있다 (Fig. 3).

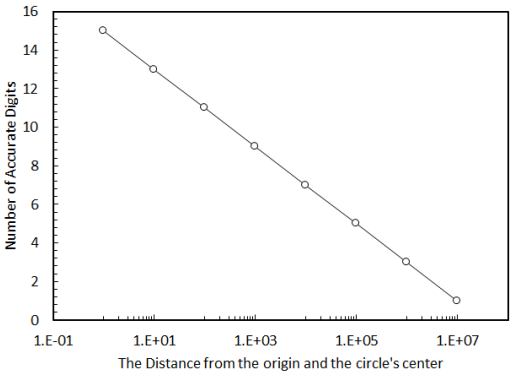

Fig. 3 The degradation of accuracy by numerical method

3. 실 험

Fig. 4는 본 연구에서 진원도 평가를 위하여 금형 설계 및 제작, 시사출을 통하여 제작되어진 유체 제어 밸브를 보여주고 있다. 해당 유체 제어 밸브는 (주)Sodick 220톤 사출기를 이용하여 폴리에스테르를 재료로 사용하여 제조하였다.

Fig. 4 Image of the manufactured fluid control valve

Fig. 5 Measurement of the roundness of fluid valve

Fig. 5는 Mitutoyo Strato-Apex 접촉식 측정기와 측정 지그를 이용하여 유체 제어 밸브의 (x_i, y_i) 측정을 하는 이미지이다. 진원도 측정은 이미지에 보여지는 바와 같이 원의 중심선을 최대한 근접하여 원의 접선 방향에 수직하게 탐침봉이 접촉이 이루어지도록 프로그래밍 하였다. 수학적 해의 적합성 검증의 경우 유체 제어 밸브는 정밀도가 너무 우수하여 편차가 너무 작거나, 사출 성형 후 국소 변형이 매우 심하게 발생하여 반올림 오차에 의해 오차가 발생할 가능성이 있으므로, 이론적해의 검증은 편차를 가지는 구 형상에 대하여 검증을 한 후 유체 제어 밸브의 진원도를 평가하였다.

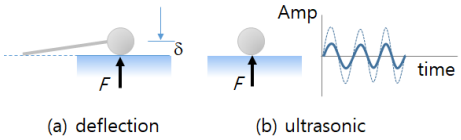

Fig. 6 Concepts of 3d contact measurements

이러한 접촉 방식 측정에 사용되는 방식은 Fig. 6에 보이는 탐침봉의 변위를 탐지하는 방식과 초음파의 변조를 감지하는 방식(본 연구개발)이 있고, 좀 더 세밀하게 이들은 탐침봉의 직경, 최소 접촉력의 크기 등에 좌우되기에 이에 대한 고찰을 Fig. 7과 같이 할 필요가 있다.

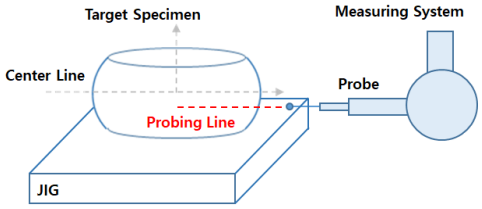

Fig. 7 Targeting of the center line by 3d probing system

Fig. 7은 3차원 접촉식 측정기를 이용하여 중립축을 찾는 과정을 보여주고 있으며, 여기서 유체 제어 밸브와 같이 많은 수의 곡면을 가지는 시제품의 곡률반경을 평가할 때 볼 밸브의 정확한 중심을 측정기 상에서 실험적인 조준을 통하여 단번에 찾는 다는 것은 매우 어려운 작업이다. Fig. 8은 중립축을 찾기 위하여 곡면의 형상을 타고 마치 표면 스캐닝을 하는 것처럼 곡면의 궤적을 찾아서 최대값을 주는 위치를 찾는 과정을 도해로 보여주고 있다.

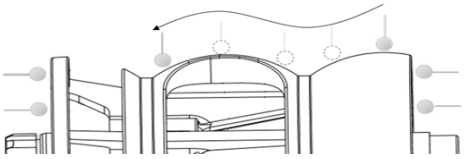

Fig. 8 Contouring of the surface of fluid control valve

그러나 이러한 표면 스캐닝도 매우 신중한 프로그래밍 설계가 필요한데 접촉식 방식에서 실제적으로 곡면을 타고 가면서 측정을 할 수는 없다. 즉, 실제 곡면을 타고 측정을 하는 경우 접촉력이 발생하기 때문에 측정값에 오버슈팅되는 오차가 발생하며 이를 해결하기 위하여 접촉력이 0되는 위치로 이동한 후 표면에 수직한 방향으로 단일 움직임에 의해 접근하여 위치를 측정하고 이후 접촉력이 0(zero)되는 위치로 후퇴하고, 다시 옆 위치로 이동한 후 측정하는 것을 반복해야 한다. 경사진 면에 일정 각도를 가지고 측정이 이루어지는 경우 탐침봉과 샘플사이의 갭에 의한 오차가 발생할 수 있다(Fig. 9).

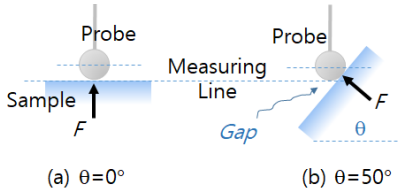

Fig. 9 Illustration of error occurrence by geometry

본 연구개발에서는 접촉 방식에 의한 오차를 최소화하기 위하여 하기와 같이 볼 밸브를 예상되는 중심선 근처의 형상을 최대한 반영하여 프로그래밍하고, 또 원주 방향에 대하여 그 위치를 반복 측정하여 반경값이 최대가 되는 지점을 중심선으로 결정하였다. 이와 같이 중심선을 찾는 과정은 매우 많은 수의 측정을 요구하는 단순하면서도 오차를 줄이기가 어려운 작업인데 이를 개선하는 방법은 추후 별도의 연구 결과를 발표하도록 한다.

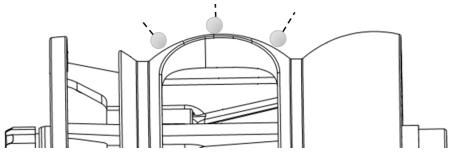

Fig. 10 Image of manufactured fluid control valve

4. 결과 및 고찰

Table 1은 식 (8), (15) 수학적 해의 적합성 검증을 위하여 사용한 구형 형상의 입력 변수 (x_i, y_i)값을 요약한 것이다.

Table 1 Input values for verification (unit: ㎜)

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
xi	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0
yi	0.00	0.25	1.00	2.25	4.00	6.25	9.00

Table 2는 Table 1 의 입력변수를 대입하여 계산한 결과 값이다. Method 1과 Method 2 (x_o, y_o, R)값은 동일하게 나왔으나, 편차의 경우 Method 1이 Method 2에 비하여 약 66.1%가 우수하게 나왔다. Method 2는 Method 1이 대수학에 근거한 절대해로서 편차가 상대적으로 크게 나타났다. Method 1은 매우 정확한 수학적 해를 제시하나 변수를 한 번에 역행렬을 계산하는 방식이므로 원의 중심을 고정시킨 상태에서 R값을 따로 계산하거나, R값을 고정시키고 원의 중심을 찾는 제한조건을 가진 연산을 수행하기는 어렵다. 이는 동일한 형태의 여러 개의 시편이 있다고 할 때 로트간 편차로 인한 진원도를 평가하는 경우 변형상태에 따라서 R값 및 원의 중심 (x_i, y_i)이 최적화과정에서 연계되어 계속 변하므로 R값에 의존한 진원도의 도출에 오차 문제가 발생할 수도 있게 된다. Method 2는 반올림 오차로 인한 정확도의 하락이 발생하나 그 오차수준이 높지 않아서 여전히 정밀한 결과를 주고 있고 대용량의 데이터를 처리하거나, 수학적 모델링(예. 3D 확장)이 간단하여 여러 형태로 변형이 가능하다는 효율적 측면 장점이 있다.

Table 2 Calculated results for verification (unit: ㎜)

	Method 1	Method 2
xo	3.161	3.1607
yo	8.446	8.4464
R	14.686	14.686
Deviation	0.0523	0.1544
Max-Min	0.1580	0.3431

Table 3는 접촉식 3차원 측정기를 이용하여 유체 제어 밸브의 표면 곡면을 따라서 측정한 (x_i, y_i) 측정값으로 이를 Method 1,2의 수학적 해에 입력하기 위하여 정리한 값이다.

Table 3 Measured (xi, yi) of fluid control valve (unit: ㎜)

xi	yi	xi	yi
222.512	199.977	222.535	200.012
227.954	216.512	227.977	183.488
230.762	219.627	230.774	180.373
236.204	223.803	236.227	176.161
239.012	225.216	239.035	174.808
247.239	227.35	247.227	172.65
250.012	227.477	249.989	172.477
255.535	226.957	255.512	173.068
260.977	225.192	260.954	174.808
266.524	221.988	266.512	178.012
269.262	219.651	269.239	180.338
276.149	208.575	276.137	191.39
277.477	199.977	277.512	205.012

Table 4는 앞서 측정되어진 유체 제어 밸브의 표면 곡면 측정값 (x_i, y_i)을 제시되어진 2가지 수학적 해에 대입하여 계산한 결과 값이다. Method 1과 Method 2 (x_o, y_o, R)값은 유사한 수준으로 나왔으나

Method 2가 Method 1에 비하여 높은 수치를 보이고 있고 이는 지적한 바와 같이 반올림 값에 의한 수치적 오차로 사료된다. 편차의 경우 Method 1이 Method 2에 비하여 약 15%가 우수하게 나왔으나, 앞서 지적된 바와 같이 Method 2의 경우 효율성이 매우 우수하기에 Method 2를 동일한 알고리즘으로 유지하는 경우에 샘플 간 진원도 비교는 유효하다고 할 수 있다.

Table 4 Calculated results of fluid control valve (unit: ㎜)

	Method 1	Method 2
xo	250.044	250.040
yo	200.007	200.010
R	27.5160	27.5170
Deviation	0.0759	0.08918
Max-Min	0.4036	0.4872

4. 결 론

본 연구에서는 유체 제어 밸브의 개발을 위하여 시편의 형상을 고려한 진원도를 정밀하게 계산할 수 있는 수학적 모델을 제안하며, 실험 샘플 제작과 측정을 통하여 그 유효성을 평가하였고 다음과 같은 결과를 얻었다.

1) 진원도를 구하기 위하여 원의 방정식으로 부터 출발한 잔차값을 최소화하는 회귀변수를 분석적 최소자승법과 수치적인 2가지 방법을 이용하여 유도하였다.

2) 유도된 회귀변수를 역대입하는 방법을 통하여 원의 진원도를 계산하여 검증하였으며 그 장단점에 대하여 조사를 하였다.

3) 진원도를 구하는 알고리즘의 실험적 검증을 위하여 금형 설계 및 제작을 통하여 유체 제어 밸브 시제품을 제작하여 진원도를 도출하였고 그 정밀도 편차는 분석적 방법이 0.1580, 수치적 방법이 0.3431로 성공적으로 계산되었다.

4) 곡면이 많은 복잡한 3차원 형상을 가지는 유체 제어 밸브의 진원도의 정확도에 영향을 미치는 인자를 검토하였다. 유체 제어 밸브에 대하여 분석적 방법이 0.4036, 수치적 방법이 0.4872로 계산되었다.

5) 유체 제어 밸브로 부터 계산된 진원도 결과로 부터 최소자승법에 의한 방법은 정확도 면에서 수치해석법은 제한조건이 부가된 상태에서 계산 효율성이 우수한 장점이 있음을 확인하였다.

후기

본 연구는 산업기술평가관리원 우수기술연구센터사업(10077292)의 지원으로 진행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1) Sean Jhin Yoon, Yong Moo Cho, , “Study on the Flatness of Automotive Torque-Angle Sensors”, J. Korea Society of Die & Mold Engineering Vol. 12, No2, pp. 11-15, 2018.
2) Stoer J. and Burlirsch R., “Introduction to Numerical Analysis”, Springer-Verlag Publishers, Second Edition, pp. 58-71, 1992.
3) Tobias M. J., “Matrices in Engineering Problems”, Morgan & Claypool Publishers, pp. 96-101, 2011.
4) Burden R. and Douglas Faires J., “Numerical Analysis”, Brooks and Cole Publishers, Ninth Edition, pp. 106-172, 2011.
5) Chasnov J. R., “Introduction to Numerical Methods”, The Hong Kong University of Science and Technology, pp. 27-34, 2012.