

불확실한 순궤환 비선형 계통에 대한 스위칭 미분기를 이용한 상태궤환 백스테핑 제어기

State-Feedback Backstepping Controller for Uncertain Pure-Feedback Nonlinear Systems Using Switching Differentiator

박 장 현*[★]

Jang-Hyun Park*[★]

Abstract

A novel switching differentiator-based backstepping controller for uncertain pure-feedback nonlinear systems is proposed. Using asymptotically convergent switching differentiator, time-derivatives of the virtual controls are directly estimated in every backstepping design steps. As a result, the control law has an extremely simple form and asymptotical stability of the tracking error is guaranteed regardless of parametric or unstructured uncertainties and unmatched disturbances in the considered system. It is required no universal approximators such as neural networks or fuzzy logic systems that are adaptively tuned online to cope with system uncertainties. Simulation results show the simplicity and performance of the proposed controller.

요 약

불확실한 순궤환 비선형 계통에 대한 스위칭 미분기 기반의 새로운 백스테핑 제어기를 제안한다. 제안된 제어기에서는 점근적 추종 특성을 갖는 스위칭 미분기를 사용하여 백스테핑 제어기의 매 설계 단계마다 가상 제어항이 직접 근사된다. 그 결과 제어식이 매우 단순화되고 계통에 내재된 파라미터 및 구조적 불확실성과 외란이 존재함에도 불구하고 계통의 출력이 원하는 출력을 점근적으로 추종함을 증명한다. 또한 신경망이나 퍼지시스템 같은 계통의 구조적인 불확실성에 적응적으로 실시간 보상하기 위한 범용 근사기가 불필요하다. 모의실험을 통해서 제안된 제어기의 성능과 간결함을 보인다.

Key words : switching differentiator, asymptotic stability, approximation-free, pure-feedback system

1. 서론

순궤환(pure-feedback) 비선형 계통은 다양한 실제 계통을 기술할 수 있다. 따라서 최근에 구조적인 혹은 인 파라미터에 불확실성이 있는 순궤환 비선

형 계통의 제어기 설계에 대한 다양한 연구가 수행되었는다.[1-14] 전형적인 접근법은 전통적인 백스테핑(backstepping) 제어 기법에 신경망(neural network)이나 퍼지 시스템(fuzzy system)과 같은 범용 근사기(universal approximator)를 도입하여 그 파라미

* Dept. of Electrical and Control Engineering, Mokpo National University

★ Corresponding author

E-mail : jhpark72@mokpo.ac.kr

※ Acknowledgment

This Research was supported by Research Funds of Mokpo National University in 2018.

Manuscript received Jun. 5, 2019; revised Jun. 26, 2019; accepted Jun. 27, 2019.

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

터들을 온라인으로 학습시키면서 계통에 내재된 불확실성을 상쇄하는 적응 제어기법이다. 하지만 이 방법은 시스템 차수가 늘어나면서 제어기의 동적 차수와 학습시킬 파라미터의 개수의 증가에 의해서 제어식의 복잡도가 기하급수적으로 증가한다는 단점이 있다. 따라서 이를 보완하기 위하여 DSC (dynamic surface control) 기법을 백스테핑 알고리즘에 적용하여 제어식의 복잡도를 낮추거나[6, 11, 14], 백스테핑을 회피하거나[1, 15], 최근에는 아예 범용 근사기가 필요 없는 알고리즘[16] 등이 발표되고 있는 추세이다.

본 논문에서 제안하는 제어기의 핵심 아이디어는 최근에 발표된 스위칭 미분기(switching differentiator, SD)[17]를 이용하여 백스테핑 설계의 각 단계에서 필요한 가상 제어항의 시간 도함수를 직접 근사하는 방법을 사용한다는 점이다. 그리고 제어기 설계의 마지막 단계에서는 필터링된 제어 입력과 가상 제어항으로 구성된 신호의 미분을 추정하는 새로운 방법으로 상태 궤환 제어기를 설계한다. 본 논문에서 제시하는 방법의 장점은 제어 대상 계통에 내재한 비구조화된 불확실성에도 불구하고 제어식을 구성하는데 범용 근사기가 필요 없다는 것이다. 이로서 전체 제어식의 동적 차수가 상대적으로 현저히 작아진다. 또한, 가상 제어항의 미분을 직접 SD로 근사화하므로 시스템의 차수가 증가하더라도 제어식의 복잡도가 증가하지 않는다. 페루프 계통의 안정도 증명도 기존의 방법들에 비해서 상대적으로 간결하며 추종오차의 점근적인 안정도를 증명할 수 있다. 2차 계통에 대한 모의실험 결과를 제시하여 제안된 제어기의 간결함과 성능을 보인다.

II. 문제 정의

본 논문에서는 다음과 같은 불확실한 순계환 비선형 계통을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i, x_{i+1}, d_i(t)), \quad i=1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f_n(x_n, u, d_n(t)) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 x_i 는 상태변수이고, $\mathbf{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$ 로 정의되는 상태변수벡터이고, u 와 y 는 각각 계통의 입력과 출력이고, f_i 는 미지의 함수이고, $d_i(t)$ 는

미지의 외란이다. 고려하는 계통에서 외란은 계통에 비선형적으로 영향을 미치는 경우도 모두 포함하며 이는 기존 논문들에서 고려하는 계통보다 더 일반적인 계통이다. 모든 상태변수는 측정가능하다고 가정한다. 제어 목표는 모든 시변 신호는 유계를 유지하면서 출력 y 를 원하는 출력 y_d 에 추종시키는 것이다.

어떤 시변 신호 $a(t)$ 가 있을 때 다음과 같은 SD[17]는 그 시간 도함수를 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= ke_\alpha + \sigma \\ \dot{\sigma} &= L \operatorname{sgn}(e_\alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $e_\alpha = a - \alpha$ 이고 k 와 L 은 양의 설계 상수이다.

보조정리 1 [17]: 만약 $\dot{a}(t)$ 가 Lipschitz 상수 $L^* > 0$ 을 가지고 $L > L^*$, $k \gg 0$ 이 만족된다면 SD (2)의 $\sigma(t)$ 는 $\dot{a}(t)$ 를 점근적으로 추종한다.

이러한 장점을 가지는 SD가 백스테핑 제어기 설계의 매 단계마다 가상 제어항을 직접 추정하는데 사용된다.

III. 제어기 설계 및 안정도 증명

본 절에서는 계통에 내재된 미지의 항들을 추정할 범용 근사기가 필요치 않은 동적인 제어식을 도출하는 체계적인 설계법을 제시한다.

1. 첫 번째 단계

첫 번째로 출력 추종 오차를 $z_1 = x_1 - y_d$ 로 정의한다. 전술한 바대로 핵심적인 아이디어는 SD에 z_1 신호를 인가하여 \dot{z}_1 를 직접 추정하는 것이다.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= k_1 e_{\alpha 1} + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 &= L_1 \operatorname{sgn}(e_{\alpha 1}) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $e_{\alpha 1} = z_1 - \alpha_1$ 이고 σ_1 이 \dot{z}_1 의 추정값이다. 상태변수 x_2 를 위한 가상제어항 v_2 는 다음과 같이 결정된다.

$$v_2 = -\sigma_1 - c_1 z_1 + \dot{z}_1 \quad (4)$$

여기서 $c_1 > 0$ 은 설계상수이다. \dot{z}_1 은 다음과 같
이 다시 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{z}_1 + v_2 - v_2 \\ &= (z_1 - \sigma_1) - c_1 z_1 + x_2 - v_2 \\ &= \tilde{\sigma}_1 - c_1 z_1 + z_2\end{aligned}\quad (5)$$

여기서 $\tilde{\sigma}_1 = \dot{z}_1 - \sigma_1$ 은 SD의 추정 오차이고
 $z_2 = x_2 - v_2$ 이다. 보조정리 1에 의해서 $\tilde{\sigma}_1$ 는 점근
적으로 0으로 수렴한다. 첫 번째 리아프노브 함수
는 $V_1 = z_1^2/2$ 로 정의되며 그 시간 미분은 다음과
같다.

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 \tilde{\sigma}_1 + z_1 z_2 \quad (6)$$

여기서 마지막 항인 $z_1 z_2$ 는 다음 단계에서 상쇄
된다.

2. i 번째 단계 ($i = 2, \dots, n-1$)

직전의 $i-1$ 번째 단계에서 $z_i = x_i - v_i$ 가 정의되
었으며 이전과 같이 z_i 의 시간 도함수가 다음과 같
은 SD를 이용하여 추정된다.

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_i &= k_i e_{\alpha i} + \sigma_i \\ \dot{\sigma}_i &= L_i \operatorname{sgn}(e_{\alpha i})\end{aligned}\quad (7)$$

여기서 $e_{\alpha i} \equiv z_i - \alpha_i$ 이고 σ_i 가 \dot{z}_i 의 추정값이다.
가상제어항 v_{i+1} 은 다음과 같이 결정한다.

$$v_{i+1} = -\sigma_i - c_i z_i - z_{i-1} + x_{i+1} \quad (8)$$

여기서 c_i 는 설계상수이다. 시간 도함수 \dot{z}_i 는 다
음과 같이 기술될 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \dot{z}_i + v_{i+1} - v_{i+1} \\ &= (z_i - \sigma_i) - c_i z_i - z_{i-1} + x_{i+1} - v_{i+1} \\ &= \tilde{\sigma}_i - c_i z_i + z_{i+1}\end{aligned}\quad (9)$$

여기서 $\tilde{\sigma}_i \equiv \dot{z}_i - \sigma_i$ 은 SD의 추정 오차이고
 $z_{i+1} \equiv x_{i+1} - v_{i+1}$ 이다. i 번째 리아프노브 함수를
 $V_i = V_{i-1} + z_i^2/2$ 로 정의하면 그 도함수는 다음과
같이 유도된다.

$$\dot{V}_i = \sum_{k=1}^i \{-c_k z_k^2 + z_k \tilde{\sigma}_k\} + z_i z_{i+1} \quad (10)$$

여기서 마지막 항인 $z_i z_{i+1}$ 는 다음 단계에서 상
쇄된다.

3. 마지막 n 번째 단계

마지막 단계에서는 직전에 정의된 z_n 을 이용하
여 다음과 같은 새로운 신호 $a(t)$ 를 정의한다.

$$\dot{w}(t) = -c_w w(t) + u(t) \quad (11)$$

$$a(t) \equiv z_n(t) - w(t) \quad (12)$$

여기서 $c_w > 0$ 은 설계상수이고 $w(t)$ 는 제어 입
력을 저역 필터링(low-pass filtering)한 신호이다.
이제 $a(t)$ 신호의 시간 미분을 다음과 같은 SD를
이용하여 직접 추정한다.

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_n &= k_n e_{\alpha n} + \sigma_n \\ \dot{\sigma}_n &= L_n \operatorname{sgn}(e_{\alpha n})\end{aligned}\quad (13)$$

여기서 $e_{\alpha n} \equiv a - \alpha_n$ 이고 σ_n 이 $\dot{a}(t)$ 의 추정값이
다. 제어 입력식은 다음과 같이 결정한다.

$$u = -\sigma_n - c_n z_n - z_{n-1} - \operatorname{sgn}(z_n) c_w w \quad (14)$$

제어 입력식 (14)를 이용하여 z_n 의 시간 도함수
는 다음과 같이 재기술될 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{z}_n &= \dot{z}_n - u + u \\ &= (z_n - w) - c_w w + u \\ &= \dot{a} - \sigma_n - c_n z_n - z_{n-1} - c_w w - \operatorname{sgn}(z_n) c_w w \\ &= \tilde{\sigma}_n - c_n z_n - z_{n-1} - c_w w - \operatorname{sgn}(z_n) c_w w\end{aligned}\quad (15)$$

여기서 $\tilde{\sigma}_n \equiv \dot{z}_n - \sigma_n$ 이다. 최종적인 리아프노브
함수는 $V = V_{n-1} + z_n^2/2$ 로 정의되고 그 시간 도함
수는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{k=1}^{n-1} \{-c_k z_k^2 + z_k \tilde{\sigma}_k\} + z_{n-1} z_n + z_n \dot{z}_n \\ &= \sum_{k=1}^n \{-c_k z_k^2 + z_k \tilde{\sigma}_k\} - z c_w w - |z| c_w w \\ &\leq \sum_{k=1}^n \{-c_k z_k^2 + z_k \tilde{\sigma}_k\} \\ &= -c |z|^2 + \frac{|z|^2}{4} + |\tilde{\sigma}|^2\end{aligned}\quad (16)$$

여기서 $z \equiv [z_1, \dots, z_n]^T$, $\tilde{\sigma} \equiv [\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_1]^T$, 그리고
 $c = \min_k c_k$ 이다. 이 부등식으로부터 다음 조건이
만족될 때 \dot{V} 가 음수가 됨을 알 수 있다.

$$|z| > \frac{|\tilde{\sigma}(t)|}{c-0.25} \tag{17}$$

더욱이, 보조정리 1에 의하면 $|\tilde{\sigma}(t)|$ 는 시간이 지남에 따라서 점근적으로 0에 수렴한다. 따라서 리아프노브함수 V 에 대해서 점근적으로 지수적 안정도가 달성됨을 알 수 있다.

IV. 모의실험

제안된 제어기의 성능과 간결성을 보여주기 위해 다음과 같은 2차 비선형 계통에 대해서 모의실험을 수행한다.

$$\dot{x}_1 = 0.1x_1\cos 10t + (1+x_1^2)x_2 \tag{18}$$

$$\dot{x}_2 = x_1x_2 + u + \frac{u^3}{7} + 0.5\sin 5t \tag{19}$$

동특성식 (18)에서 외란이 곱의 형태로 포함되어 있고, (19)에서 이 계통은 제어 입력에 대해서 비어파인(nonaffine)인 순계환 계통임을 알 수 있다. 다만, 이 계통에 포함된 비선형항들과 외란에 대한 정보는 제어기에서는 사용할 수 없다고 가정한다. 즉, 포함된 비선형 동특성과 외란은 모두 미지(unknown)라고 가정한다. 계통의 초기값은 $x_1 = 0.1, x_2 = 0$ 으로 설정했다.

첫 번째 단계에서 설계된 가상 제어식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_d \\ v_2 &= -\sigma_1 - c_1z_1 + x_2 \\ \dot{\alpha}_1 &= -k_1e_{\alpha 1} + \sigma_1, e_{\alpha 1} \equiv z_1 - \alpha_1 \\ \dot{\sigma}_1 &= L_1\text{sgn}(e_{\alpha 1}) \end{aligned} \tag{19}$$

설계상수는 $c_1 = 6, k_1 = 500, L_1 = 500$ 로 정하였다. 그리고 두 번째 단계(마지막 단계)의 제어식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_2 &= x_2 - v_2 \\ u &= -\sigma_2 - c_2z_2 - z_1 - \text{sgn}(z_2)c_w w \\ \dot{w} &= -c_w w + u \\ \dot{\alpha}_2 &= -k_2e_{\alpha 2} + \sigma_2, e_{\alpha 2} = a - \alpha_2, a = z_n - w \\ \dot{\sigma}_2 &= L_2\text{sgn}(e_{\alpha 2}) \end{aligned} \tag{20}$$

여기서 설계상수는 $c_2 = 6, c_w = 1, k_2 = 300, L_2 = 30$ 으로 선택했고 (19)와 (20)에 포함된 미분

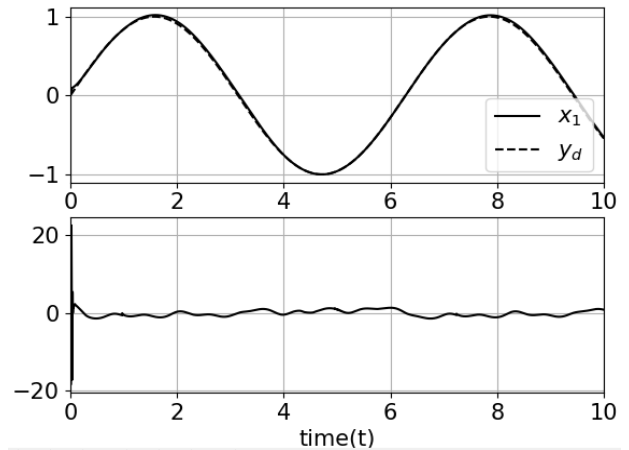


Fig. 1. Output tracking performance (a) $y(t)$ and $y_d(t)$ (b) control input u

그림 1. 출력 추종 성능 (a) y 와 y_d (b) 제어입력 u

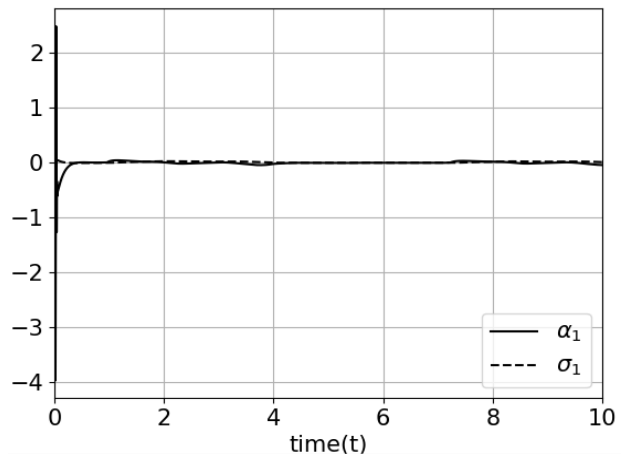


Fig. 2. Trajectories of the states of SD in (19).

그림 2. 식 (19)의 SD의 출력 변수들

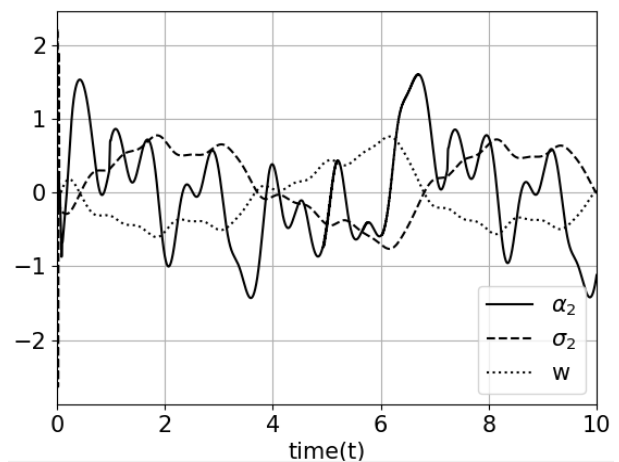


Fig. 3. Trajectories of the states of SD and w in (20).

그림 3. 식 (20)의 SD의 상태 변수들과 w 의 궤적

방정식의 모든 초기값은 0으로 설정했다. 전체 제어식의 동적 차수의 총합은 5차임을 (19)와 (20)을 통해서 알 수 있다.

모의실험 결과는 그림 1-그림 3에 도시되어 있다. 그림 1에서 알 수 있듯이 계통의 출력이 y_d 를 잘 추종함을 알 수 있다. 또한 그림 2와 그림 3에서 보면 두 SD의 상태 변수와 제어 입력을 저역 필터링한 w 등 모든 시변 신호들이 유계임을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 불확실한 순계환 비선형 계통에 대해서 SD 기반의 새로운 백스테핑 제어기를 제안하였다. 즉, 백스테핑 설계의 각 단계에서 필요한 가상 제어항의 시간 도함수를 직접 SD를 사용하여 근사하고 마지막 설계 단계에서는 필터링된 제어 입력과 가상 제어항으로 구성된 신호의 미분을 추정하는 새로운 방법으로 출력을 추종하는 제어식을 도출하였다. 본 논문에서 제시하는 방법의 장점은 제어 대상 계통에 내재한 비구조화된 불확실성에도 불구하고 제어식을 구성하는데 범용 근사기가 필요 없다는 것이다. 따라서 범용 근사기 파라미터를 갱신할 필요가 없으므로 전체 제어식의 동적 차수가 상대적으로 작아진다. 또한, 시스템의 차수가 증가하더라도 제어식의 복잡도가 크게 증가하지 않는다. 페루프 계통의 안정도 증명도 기존의 방법들에 비해서 상대적으로 간결하며 추종 오차가 점근적으로 지수적인 안정도를 회복함을 보였다.

References

- [1] J.-H. Park, S.-H. Kim and C.-J. Moon, "Adaptive neural control for strict-feedback nonlinear systems without backstepping," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol.20, no.7, pp.1204-1209, 2009. DOI: 10.1109/TNN.2009.2020982
- [2] J. Na, X. Ren, D. Zheng, "Adaptive control for nonlinear pure-feedback systems with high-order sliding mode observer," *IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems*, vol.24, no.3, pp.370-382, 2013. DOI: 10.1109/TNNLS.2012.2225845
- [3] Q. Shen, T. Zhang, and C.-C. Lim, "Novel neural control for a class of uncertain pure-feedback systems," *IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems*, vol.86, no.5, pp.912-922, 2014. DOI: 10.1109/TNNLS.2013.2280728
- [4] H. Wang, B. Chen, C. Lin, Y. Sun, "Observer-based adaptive neural control for a class of nonlinear pure-feedback systems," *Neurocomputing*, vol.171, pp.1517-1523, 2016. DOI: 10.1016/j.neucom.2015.07.103
- [5] S. S. Ge, C. Wang, "Adaptive nn control of uncertain nonlinear purefeedback systems," *Automatica*, vol.38, pp.671-682, 2002. DOI: 10.1016/S0005-1098(01)00254-0
- [6] Q. Zhao, Y. Lin, "Adaptive dynamic surface control for pure-feedback systems," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol.22, pp.1647-1660, 2016. DOI: 10.1109/TSMC.2017.2675540
- [7] G. Sun, et. al., "Robust adaptive neural control of uncertain purefeedback nonlinear systems," *Int. J. Control*, vol.86, no.5, pp.912-922, 2013. DOI: 10.1080/00207179.2013.765039
- [8] T. Zhang, X. Shi, Q. Zhu, Y. Yang, "Adaptive neural tracking control of pure-feedback nonlinear systems with unknown gain signs and unmodeled dynamics," *Neurocomputing*, vol.121, pp.290-297, 2013. DOI: 10.1016/j.neucom.2013.04.023
- [9] Z. Chen, et. al., "Adaptive neural control of mimo nonlinear systems with a block-triangular pure-feedback control structure," *IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems*, vol.25, no.11, pp.2017-2029, 2014. DOI: 10.1109/TNNLS.2014.2302856.
- [10] G.Sun, D. Wang, Z. Peng, "Adaptive control based on single neural network approximation for non-linear pure-feedback systems," *IET Control Theory and Application*, vol.6, no.15, pp.2387-2396, 2012. DOI: 10.1049/iet-cta.2011.0538
- [11] D. Wang, "Neural network-based adaptive dynamic surface control of uncertain nonlinear pure-feedback systems," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, pp. 527-541, 2011. DOI: 10.1002/rnc.1608

[12] T.-P. Zhang, Q. Zhu, and Y.-Q. Yang, "Adaptive neural control of nonaffine pure-feedback non-linear systems with input nonlinearity and perturbed uncertainties," *Int. J. Systems Science*, vol.43, no.4, pp.691-706, 2012.

DOI: 10.1080/00207721.2010.519060

[13] S. Tong, Y. Li, P. Shi, "Observer-based adaptive fuzzy backstepping output feedback control of uncertain mimo pure-feedback nonlinear systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol.20, no.4, pp.771-785, 2012. DOI: 10.1109/TFUZZ.2012.2183604

[14] Y. Li, S. Tong, T. Li, "Adaptive fuzzy output feedback dynamic surface control of interconnected nonlinear pure-feedback systems," *IEEE Trans. Cybernetics*, vol.45, no.1, pp.138-149, 2015. DOI: 10.1109/TCYB.2014.2333738

[15] J.-H. Park, S. Kim, T. Park, "Output-Feedback Adaptive Neural Controller for Uncertain Pure-Feedback Nonlinear Systems Using a High-Order Sliding Mode Observer," *IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems*, vol.30, no.5, pp.1596-1601, 2019.

DOI: 10.1109/TNNLS.2018.2861942

[16] J.-H. Park, S. Kim, T. Park, "Approximation-Free Output-Feedback Control of Uncertain Nonlinear Systems Using Higher-Order Sliding Mode Observer," *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol.140, no.12, pp.124-502, 2018.

DOI: 10.1115/1.4040664

[17] J.-H. Park, S. Kim, T. Park, "Asymptotically convergent switching differentiator," *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, vol.33, pp.557-566, 2019. DOI: 10.1002/acs.2969

[18] J. D. Hunter, "Matplotlib: A 2d graphics environment," *Computing In Science & Engineering*, vol.9, no.3, pp.90-95, 2007.

DOI: 10.1109/MCSE.2007.55

BIOGRAPHY

Jang-Hyun Park (Member)



1995 : BS degree in Electrical Engineering, Korea University.
1997 : MS degree in Electrical Engineering, Korea University.
2002 : PhD degree in Electrical Engineering, Korea University.

2003~ : Professor, Dept. of Electrical and Control Engineering, Mokpo National University