韓國數學教育學會誌 시리즈 C <初等數學教育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2019.22.2.113
2019. 4. 제 22권, 제 2호, 113-127

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
April. 2019, Vol. 22, No. 2, 113-127

초등학교 수학에서 분수 나눗셈의 알고리즘 정당화하기

박 중 규 (이리마한초등학교 교사)
이 광 호 (한국교원대학교 교수)†
성 창 근 (영천초등학교 교사)

본 연구의 목적은 자연수 나눗셈의 정의를 확장하여 분수 나눗셈에 적용함으로써 초등학교 수학에서 분수 나눗셈의 알고리즘을 정당화하는데 있다. 먼저 초등학교 수학에서 분수 나눗셈을 도입할 때 고려해야 할 준거들을 도출하여 제시하였다. 이를 바탕으로 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 유도하는 기존의 방식들이 분수 나눗셈 도입 과정에 적절한지를 고찰하였다. 또한 분수 나눗셈을 정의하였으며, 단위원 분할 모델과 정사각형 분할 모델을 통하여 구체적 조작 활동을 함으로써 등분제와 포함제 상황의 분수 나눗셈에서 표준 알고리즘을 자연스럽게 정당화하였다.

I. 서론

초등학교 수학과 교육과정에서 학생들은 자연수를 학습한 후에 분수를 배우며, 나눗셈 또한 자연수에서 먼저 도입한 후에 분수에서 도입하게 된다. 학생들이 자연수에서 뿐만 아니라 분수에서 이루어지는 나눗셈의 의미를 알고 나눗셈을 할 줄 알아야 한다면, 자연수에서 이루어지는 나눗셈의 의미 그대로가 분수로 연결될 때 분수의 나눗셈을 자연스럽게 학습할 수 있을 것이다.

나눗셈이 처음 도입되는 시기에 교사들은 나눗셈을 다음과 같이 이해하고 가르친다. 나눗셈이 이루어지는 모든 상황을 조사하고, 그것을 정리해 보면 크게 두 가지로 구분할 수 있다. 첫째는 등분제 상황이며, 둘째는 포함제 상황이다. 등분제 상황은 전체의 수와 분배할 묶음의 수를 알고 한 묶음의 크기를 구하는 나눗셈이며, 포함제 상황은 전체의 수와 한 묶음의 크기를 알고 묶음의 수를 구하는 나눗셈이다(교육부, 2018a).

자연수에서 이루어지는 나눗셈의 두 상황은 곱셈과 나눗셈의 관계에서 살펴볼 수 있다. 예를 들어, ‘한 명이 사과를 3개씩 가지고 있다면 4명이 가지고 있는 사과는 모두 12개이다.’를 곱셈식으로 나타내면, ‘3×4=12’이다. 이 곱셈식은 “곱해지는 수를 구하는 나눗셈식” ‘12÷4=3’과 “곱하는 수를 구하는 나눗셈식” ‘12÷3=4’로 만들 수 있다(교육부, 2018a, p.203). 곱해지는 수를 구하는 나눗셈식 ‘12÷4=3’은 ‘사과 12개가 있습니다. 사과를 4명에게 똑같이 나누어 준다면 한 명이 몇 개씩 가지게 됩니까?’라는 등분제 상황의 나눗셈식이며, 곱하는 수를 구하는 나눗셈식 ‘12÷3=4’는 ‘사과 12개가 있습니다. 한 명에게 3개씩 나누어 준다면 몇 명에게 나누어 줄 수 있습니까?’라는 포함제 상황의 나눗셈식이다. 이처럼 곱셈과 나눗셈의 관계를 통해 나눗셈은 두 가지 상황이 있음을 알 수 있다.

이에 따라 2015 개정 교육과정 수학과 교과서에서는 자연수 나눗셈에서 등분제와 포함제 상황 모두를 제시하고 있다(교육부, 2018a). 그러나 나눗셈의 몫으로서의 분수를 학습하는 과정에서 “1÷4”(교육부, 2015a, p.88)와 같은 자연수 나눗셈을 등분제나 포함제 상황으로 다루고 있지 않다. 또한 제수가 분수인 나눗셈에서는 포함제 상황만을 제시하고 있을 뿐 등분제 상황을 제시하지 않고 있으며, 제수의 역수를 곱한다는 분수 나눗셈의 표준 알고리즘(박교식, 2014)은 동분모 분수의 나눗셈으로 유도하여 표준 알고리즘을 이끌어낼 뿐 포함제 상황으로도 이끌어내지 못하고 있다(교육부, 2015b).

분수 나눗셈을 표준 알고리즘으로 형식화하기 위한 많은 연구들이 있다. 이 연구들에서는 자연수 나눗셈의 정의 그대로 분수 나눗셈에 적용하지 않고 분수 나

* 접수일(2019년 1월 14일), 심사(수정)일(2019년 4월 4일), 게재확정일(2019년 4월 18일)
* ZDM분류 : F42
* MSC2000분류 : 97D99
* 주제어 : 분수 나눗셈, 단위 비율법, 쌓기나무, 단위원 분할, 정사각형 분할
† 교신저자 : paransol@knue.ac.kr

눗셈을 자연수 나눗셈으로 변환하거나(신준식, 2013; Baroody & Coslick, 1998; Van de Walle, 2004), 자연수 나눗셈의 의미와 다른 방식으로 분수 나눗셈을 전개하고 있다(강흥규, 2014; 김용석, 2015; 박만구, 2002; 신준식, 2013; 임재훈, 2007; 임재훈, 2016; 임재훈·김수미·박교식, 2005; Ma, 1999; Siebert, 2002; Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002; Tirosh, 2000; Van de Walle, 2004). 이러한 연구들을 통해, '자연수 나눗셈이든 분수 나눗셈이든 같은 나눗셈의 범주에 있으면서 각각의 나눗셈의 의미가 달라져야 하는가? 그리고, 자연수 나눗셈을 하는 방법 그대로 분수 나눗셈에 적용할 수는 없을까?'라는 의문을 가지게 된다.

본 연구에서는 자연수 나눗셈의 등분제와 포함제의 의미를 재음미함으로써 이를 분수 나눗셈에도 일관되게 적용할 수 있는 정의로 확장하고, 이러한 정의가 분수 나눗셈에 어떻게 구현되는지를 알 수 있는 시각적 모델을 제시함으로써 분수 나눗셈의 표준 알고리즘 정당화 과정을 제시한다.

Ⅱ. 분수 나눗셈의 알고리즘 정당화를 위한 접근들

1. 연구 방법

분수 나눗셈의 알고리즘 정당화 방식들을 알아보기 위해 2009 개정 교육과정과 2015 개정 교육과정을 적용한 교과서(교육부, 2015a; 교육부, 2015b; 교육부, 2018b) 내용 전개 과정을 살펴보았다. 또한 학술연구정보서비스(RISS)에서 "분수 나눗셈"을 검색어로 하여 검색한 81편의 국내학술지 논문들 중에서 분수 나눗셈의 알고리즘을 직접적으로 다루고 있는 9편의 논문들(강흥규, 2014; 박교식, 2014; 박만구, 2002; 신준식, 2013; 임재훈, 2007; 임재훈, 2016; 임재훈 외, 2005; 전평국·박혜경, 2003; 조용진·홍갑주, 2013)과 그 논문들의 참고문헌들을 추적하는 방식으로 각 연구들에서 분수 나눗셈 알고리즘을 어떻게 정당화하는지 고찰하였다. 이러한 과정에서 2절에서 다룰 분수 나눗셈을 정당화하는 11가지 접근 방식들을 찾을 수 있었다.

분수 나눗셈의 알고리즘을 정당화하고 있는 많은 접근들의 적절성을 살펴보기에 앞서 분수 나눗셈을 도입할 때 고려해야할 점을 알아본다.

2. 분수 나눗셈의 도입 시 고려할 준거들

연구자들은 관련 문헌들을 고찰하고 분석하는 가운데 2009 개정 교육과정에 따른 교과서 내용 체계에 맞는 알고리즘 정당화 방식은 어떠해야 하는지 다음 4가지 준거들을 마련하게 되었다.

첫째, 표준 알고리즘 도출의 직접성이다. 이것은 표준 알고리즘을 도출하는 과정에서 최종적으로 피제수에 제수의 역수를 곱하는 결과가 곧바로 드러나야 함을 의미한다.

둘째, 제수의 역수에 대한 유의미성이다. 분수 나눗셈 도입 과정에서 제수의 역수에 대한 의미가 드러나도록 해야 한다. 분수 나눗셈의 알고리즘을 이해하는데 있어 핵심은 '제수의 역수'에 대한 의미이다(임재훈 외, 2005; 교육부, 2015c). 이러한 의미는 생활 주변에서 나눗셈이 이루어지는 상황을 제공하여 지도해야 하며, 제수의 역수에 대한 의미가 드러나는 방식을 통하여 형식화되어야 한다(교육부, 2018a).

셋째, 초등교육과정 내용의 적합성이다. 초등학교 수학과 교육과정에서 다루었던 내용을 바탕으로 분수 나눗셈을 도입하여야 한다. 분수 나눗셈의 도입은 초등교육과정에서 다루고 있지 않은 번분수나, 동분모 분수가 아닌 상황에서 분자는 분자끼리 나누고 분모는 분모끼리 나누는 방법 등을 통해서가 아닌, 자연수의 나눗셈, 분수와 분수의 덧셈, 뺄셈, 그리고 곱셈을 바탕으로 이루어져야 바람직하다고 할 수 있다.

넷째, 분수 나눗셈 전개의 체계성이다. 분수 나눗셈의 도입 과정에서 '피제수와 제수에 똑같은 분수를 곱해도 몫은 불변이다'와 같은 분수 나눗셈의 성질을 적용하는 것은 내용 체계상 맞지 않다. 분수 나눗셈을 도입하고자 할 때 분수 나눗셈의 성질을 이용하는 것은 이미 분수 나눗셈의 성질까지 알고 있는 상황에서 분수 나눗셈을 도입하게 되어 앞뒤가 뒤바뀐 상황이 되어버린다.

또한 곱셈과 나눗셈의 관계를 이용하는 것은 자연수에서 성립하는 두 연산의 관계를 분수에도 적용하는 것으로 분수 나눗셈의 도입에서 이러한 관계를 적용한 전개 방식은 적절하지 않다. 자연수에서 두 연산의 관계를 알아보는 것은 나눗셈을 학습한 이후에 이루어지

고 있기 때문이다(교육부, 2018b).

3. 분수 나눗셈의 알고리즘 도출 방식들의 적절성 고찰

분수 나눗셈 도입 시 고려할 4가지 준거를 분석틀로 사용하여 표준 알고리즘을 도출하고 있는 기존의 방식들이 적절한지를 고찰하고자 한다.

첫째, 피제수의 단위비율을 이용한 접근 방식이다(박만구, 2002; 임재훈 외, 2005; Siebert, 2002). 이 방식은 '1÷(어떤 수)' 형태의 나눗셈을 이해한 후, 1에 대한 피제수의 비례적 사고를 통해 알고리즘을 유도하고, 그 의미를 부여하고 있다(임재훈 외, 2005). 예를 들어,

> (마법 주스 문제) 마법 주스 $\frac{13}{5}$L가 있습니다. 마법 주스를 작은 병 하나에 $\frac{3}{4}$L씩 담는다면 작은 병으로 몇 병이 될까요?(교육부, 2015b, p. 52)

위 문제를 해결하기 위한 나눗셈 '$\frac{13}{5}$(L)÷$\frac{3}{4}$(L)'을 하기 위해서는, 먼저 1L 안에 $\frac{3}{4}$L가 $\frac{4}{3}$번 들어있다는 것과, $\frac{13}{5}=1\times\frac{13}{5}$이므로 $\frac{13}{5}\div\frac{3}{4}$은 $1\div\frac{3}{4}$의 $\frac{13}{5}$배가 됨을 이해하는 과정을 거치게 된다. 수식을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{13}{5}\div\frac{3}{4}=(1\times\frac{13}{5})\div\frac{3}{4}=(1\div\frac{3}{4})\times\frac{13}{5}=\frac{4}{3}\times\frac{13}{5}$$

이러한 접근 방식은 (피제수)÷(제수)가 (제수의 역수)×(피제수)가 되어, (피제수)×(제수의 역수)라는 표준 알고리즘으로 직접 이끌지 못하고 있다(임재훈 외, 2005).

둘째, 동분모를 이용한 접근 방식이다(교육부, 2015b; 임재훈 외, 2005; 전평국 외, 2003; Baroody & Coslick, 1998; Ma, 1999; Sinicrope et al., 2002). 이러한 방식은 분수 나눗셈에서 피제수와 제수의 분모를 통분함으로써 자연수 나눗셈으로 변환시켜 역수의 곱이 되는 알고리즘에 이르게 한다. 다음은 나눗셈 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}$를 하는 과정이다.

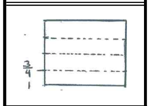
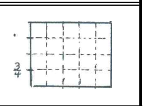
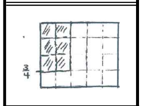
$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}=\frac{3\times7}{4\times7}\div\frac{2\times4}{7\times4}=(3\times7)\div(2\times4)$$
$$=\frac{3\times7}{2\times4}=\frac{3\times7}{4\times2}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{2}$$

위의 계산 방법은 피제수와 제수를 동분모분수로 만든 후, $\frac{3\times7}{4\times7}\div\frac{2\times4}{7\times4}$의 계산 값과 (3×7)÷(2×4)의 계산 값이 같음을 이용하여 분수 나눗셈의 알고리즘을 유도하고 있다(교육부, 2015b).

이러한 방식은 통분 과정에서 제수의 분모를 피제수에 곱하는 이유가 드러나지만, 제수의 역수 $\frac{7}{2}$을 곱하는 이유를 분명하게 드러내지 못하고 있다(임재훈 외, 2005). 즉, 동분모를 만드는 과정에서 $\frac{3}{4}$에 7을 곱하는 이유가 드러나지만, $\frac{3}{4}$에 $\frac{1}{2}$을 곱하는 상황은 계산의 절차적인 과정에서 나타날 뿐 $\frac{1}{2}$을 곱하는 이유를 드러내지 못하고 있다.

셋째, 카테시안 곱의 역을 이용한 접근 방식이다(임재훈, 2007; Sinicrope et al., 2002). 카테시안 곱의 역 상황은 바로 나눗셈 상황이 된다.

Sinicrope et al.(2002)는 카테시안 곱의 역으로 분수 나눗셈을 해석하고 있다. 예를 들어, 넓이가 $\frac{6}{20}$㎡이고 세로의 길이가 $\frac{3}{4}$m인 직사각형에서 가로의 길이를 구하기 위해, 우선 넓이가 1인 정사각형에서 세로를 4등분하여 $\frac{3}{4}$을 잡고, 한 칸의 넓이를 $\frac{1}{20}$로 하기 위해 가로를 5등분한다([그림 1]의 1, 2단계). 그 다음 넓이 $\frac{6}{20}=\frac{1}{20}\times6$이므로, 넓이가 각각 $\frac{1}{20}$인 6칸을 가로의 $\frac{2}{5}$에 표시할 수 있다(3 단계). 따라서 가로의 길이는 $\frac{2}{5}$(m)가 된다. 이러한 과정의 알고리즘은 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 나누는 알고리즘이라고 볼 수 있으며, 제수의 역수 $\frac{4}{3}$를 곱하는 과정이 나타나지 않고 있다.

1단계	2단계	3단계
		
$\frac{6}{20} \div \frac{3}{4}$	$\frac{6 \div 3}{20 \div 4}$, $\frac{6 \div 3}{5}$	$\frac{2}{5}$
세로의 길이는 $\frac{3}{4}$이다.	한 칸이 $\frac{1}{20}$이고, 20÷4=5이므로, 가로는 5등분한다.	$\frac{1}{20}$인 칸 6개는 3개씩 2줄이 된다.

[그림 1] 분수 나눗셈의 이해(Sinicrope et al., 2002, p. 160)
[Fig. 1] Interpretation of fraction division(Sinicrope et al., 2002, p. 160)

나눗셈 상황이 등분제 상황과 포함제 상황의 두 상황 밖에 없다(교육부, 2018a)는 것과 관련하여 카테시안 곱의 상황이 어떤 상황인지 좀 더 살펴보고자 한다.

카테시안 곱은 동수누가나 배와는 구분되는 상황으로 양과 양의 곱 또는 차원과 차원의 곱의 상황에 해당하는 것으로 보기 때문에 자연수 나눗셈의 등분제나 포함제 어느 상황에도 속하지 않는 것처럼 보인다. 그러나 위에서 예를 든 넓이와 가로의 길이가 주어졌을 때, 이 직사각형의 세로의 길이를 구하는 것과 같은 상황을 자세히 분석한다면, 이는 곧 자연수 나눗셈의 등분제나 포함제 어느 것에도 속하지 않는 것이 아니라, 등분제 상황으로도 볼 수 있고, 또는 포함제 상황으로도 볼 수 있게 된다. 이것은 넓이의 단위가 무엇인지를 분석하면 쉽게 알 수 있다. 예를 들어 가로의 길이가 3cm, 세로의 길이가 4cm인 직사각형의 넓이가 12㎠인 것은 가로와 세로의 길이가 각각 3cm, 4cm이기 때문이 아니라, 가로의 길이가 1cm, 세로의 길이가 1cm인 넓이 1㎠의 12배이기 때문에 이 직사각형의 넓이가 12㎠인 것이다. 여기에서 가로의 길이 3cm는 넓이의 단위를 정의하기 위해 사용된 1cm의 3배로 인식해야 하며, 세로의 길이 또한 1cm의 4배로 인식해야 올바르다고 할 수 있다. 따라서 곱셈식 3cm×4cm=12㎠는 3×4(1cm×1cm) =12(㎠)로 보아야 하며, 이 곱셈식으로부터 도출되는 나눗셈식은 양의 연산이 아닌 수의 연산으로 취급해야 한다. 따라서 이것은 Ⅲ장에서 다룰 쌓기나무 모델에서 볼 수 있는 것처럼 어느 상황으로 접근하여도 같은 결과를 얻게 되는 것이다.

넷째, 분수의 곱셈으로부터 유추하는 접근 방식이다(신준식, 2013; 임재훈 외, 2005; Ma, 1999). 이러한 접근 방식은 분수의 곱셈은 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하기 때문에 나눗셈에서도 분모끼리 나누고, 분자끼리 나누면 된다고 유추하는 것이다. 아래에서 보는 것처럼

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2 \times 7}{4 \times 2 \times 7} \div \frac{2}{7}$$
$$= \frac{3 \times 2 \times 7 \div 2}{4 \times 2 \times 7 \div 7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 2} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{2}$$

이 되어, 제수의 역수를 곱하는 결과가 되지만, 이러한 방식이 제수의 역수 그 자체의 의미를 잘 드러내지는 못한다(임재훈 외, 2005). 또한 초등학교 교육과정에서 이러한 방식을 다루고 있지 않다.

다섯째, 나눗셈을 분수 형태로 나타내는 접근 방식이다(전평국 외, 2003; Baroody & Coslick, 1998; Sinicrope et al., 2002; Tirosh, 2000). 이러한 접근 방식은 6÷2=$\frac{6}{2}$이라는 점을 이용하여(Baroody & Coslick, 1998) 피제수를 분자로 하고, 제수를 분모로 하여 분수 나눗셈을 하나의 분수(번분수)로 생각하여 분모를 1로 만드는 방식이다(전평국 외, 2003).

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}}{\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

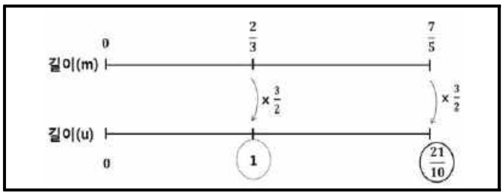
번분수로 표현되는 것은 초등학교 교육과정에서 다루고 있지 않으며(박교식, 2014), 여러 가지 절차적 지식이 뒷받침되어야 하므로(전평국 외, 2003) 이러한 방식을 표준 알고리즘을 이끌어내는데 사용하기에는 부적절하게 보인다.

여섯째, 측정접근법이다(임재훈, 2016). 임재훈(2016)은 측정접근법을 “포함제 A÷B는 A가 B의 몇 배인지를 구하는 것인데, A가 B의 몇 배인지를 구하는 기본적인 방법은 B를 단위로 하여 A를 측정하는 것(p. 528)”이라고 하였다. 나눗셈 $\frac{7}{5}$m÷$\frac{2}{3}$m를 예로 들어보자. 제수 $\frac{2}{3}$m를 나타내는 가상 단위 1u를 생각하면,

$\frac{2}{3}$m=1u라 할 때, 1m=$\frac{3}{2}$u가 된다. 그리고 m 공간의 측도를 u 공간의 측도로 바꾸기 위해서, m로 측정한 값에 제수의 역수인 $\frac{3}{2}$을 곱하고 있다. 이렇게 하여

$$\frac{7}{5}(m) \div \frac{2}{3}(m) = (\frac{7}{5} \times \frac{3}{2})(u) \div (\frac{2}{3} \times \frac{3}{2})(u)$$
$$= (\frac{7}{5} \times \frac{3}{2})(u) \div 1(u) = \frac{7}{5} \times \frac{3}{2}$$

과 같이 되므로([그림 2]), 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 얻고 있다.



[그림 2] 길이(m) 공간과 길이(u) 공간(임재훈, 2016, p.530)
[Fig. 2] Length(m) space and length(u) space(Lim, J. H., 2016, p.530)

이러한 방식은 치환의 방법을 사용함으로써 초등학교 교육과정의 내용을 벗어나고 있다.

일곱째, 제수를 1로 만드는 접근 방식이다(신준식, 2013; 임재훈 외, 2005; Ma, 1999). Ma(1999)는 나눗셈식의 피제수와 제수를 같은 수로 곱하면 몫은 변하지 않기 때문에, 다음과 같이 두 수에 $\frac{2}{1}$를 곱하면 제수가 1이 되어 기존 지식을 활용하여 분수 나누기를 할 수 있다고 하였다.

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = (1\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}) \div (\frac{1}{2} \times \frac{2}{1}) = (1\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}) \div 1$$
$$= 1\frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = 3\frac{1}{2}$$

이러한 방식은 제수를 1로 만들기 위해 자연수에서 학습한 나눗셈의 성질을 활용하고 있으나, 이것은 나눗셈의 성질이 분수에서도 성립함을 가정한 전개 방식이다. 그리고 2009 개정 교육과정에서 이러한 분수 나눗셈의 성질을 이용하여 분수 나눗셈을 해결하지도 않고 있다.

여덟째, 나눗셈과 곱셈의 관계를 이용한 접근 방식이다(박만구, 2002; 임재훈 외, 2005; Tirosh, 2000; Sinicrope et al., 2002). 이러한 접근 방식은 예를 들어, 마법 주스 문제를 "마법 주스 $\frac{3}{4}$L의 몇 배가 $\frac{13}{5}$L가 됩니까?"와 같이 변형하여 곱셈으로 나타낸 후 이를 해결하는 과정에서 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 이끌어내는 방식이다. 변형된 마법 주스 문제를 해결하기 위한 나눗셈은 $\frac{13}{5} \div \frac{3}{4}$이다. 또한 곱셈식으로 나타내면, $\frac{3}{4} \times \square = \frac{13}{5}$이므로, 등식의 성질을 이용하여 $\frac{3}{4} \times \square \times \frac{4}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{4}{3}$, $\square \times (\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}) = \frac{13}{5} \times \frac{4}{3}$, $\square = \frac{13}{5} \times \frac{4}{3}$이다. 따라서 계산 결과를 나눗셈과 비교하면 $\frac{13}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{13}{5} \times \frac{4}{3}$가 된다.

이 과정은 등식의 성질을 이용하여 표준 알고리즘을 이끌어내기는 하지만, 분수 나눗셈을 어떻게 하는지 학습하지 않은 상태에서 자연수에서 성립하는 두 연산의 관계를 분수에서도 적용하는 것은 분수 나눗셈 전개의 체계상 적절치 않다.

아홉째, 제수를 줄이고 늘이는 과정을 통한 접근 방식이다(Siebert, 2002; Van de Walle, 2004).

예를 들어, "미경이가 산책을 나가 $\frac{3}{4}$시간 동안 $2\frac{1}{2}$ km를 걸었다. 미경이가 계속 같은 속력으로 걷는다면, 1시간에 몇 km를 걸을 수 있겠는가?(Van de Walle, 2004, p.338)"라는 문제 상황을 생각해 보자. 이 문제를 해결하기 위한 나눗셈은 $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$이다. 이러한 접근 방식으로 분수 나눗셈을 해결하는 과정을 살펴보면, 제수 $\frac{3}{4}$을 $\frac{1}{4}$로 줄이고 $\frac{1}{4}$을 1로 늘이는 과정을 통해 한 단위에 해당하는 크기를 구하고 있다. 즉, $\frac{3}{4}$에 해당하는 크기가 $2\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{4}$에 해당하는 크기는 $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$이고, 1에 해당하는 크기는 $(2\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}) \times 4$가 된다. 따라서 제수를 줄이고 늘이는 과정에서 이에 해당하는 피제수 값을 구함으로써 피제수에 제수의 역수를 곱하는 표준 알고리즘을 이끌어내고 있다(Siebert, 2002).

이러한 방식은 제수가 줄어들면 이에 해당하는 피제수도 비례하여 줄어들고, 제수가 늘어나면 이에 해당하는 피제수도 비례하여 늘어나는 나눗셈의 성질을 내포하고 있다. 수식으로 표현하면 다음과 같다고 할 수 있다.

$$2\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=(2\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})\div(\frac{3}{4}\times\frac{1}{3})=(2\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})\div\frac{1}{4}$$
$$=\{(2\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})\times4\}\div(\frac{1}{4}\times4)$$
$$=(2\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})\times4=2\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}\times4)=2\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$$

결국 이러한 방식은 분수 나눗셈의 성질을 비형식적으로 사용하고 있다.

열째, 단위화 드러내기를 통한 접근 방식이다(김용석, 2015). 이러한 접근 방식은 예를 들어, “원래 종이 크기의 $\frac{3}{4}$배를 하니 $\frac{15}{24}$가 되었을 때 원래 종이 크기는 얼마인지(김용석, 2015, p. 63)”에 대한 상황을 등분제로 해결하는 과정에서 피제수를 단위화하여 분할과 반복의 방법을 사용한다.

김용석(2015)은 피제수 $\frac{15}{24}$를 $\frac{15}{24}\times1$로 표현함으로써 단위화 드러내기를 한 후, $\frac{15}{24}$를 1묶음으로 보고, 이것을 3등분으로 분할 조작한 것의 1개를 4번 반복 조작하면 $\frac{15}{24}$의 $\frac{4}{3}$로 재편되는 과정을 통해 직관적으로 표준 알고리즘을 유도하고 있다. 이러한 과정을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{15}{24}\div\frac{3}{4}=\frac{15}{24}\times1\times\frac{1}{3}(\text{분할})\div\frac{1}{4}=(\frac{15}{24}\times\frac{1}{3})\times1\div\frac{1}{4}$$
$$=(\frac{15}{24}\times\frac{1}{3})\times1\times4=\frac{15}{24}\times\frac{4}{3}$$

이러한 방식은 단위화하는 과정에서 단위로 쓰인 1이 각기 다른 크기를 나타내고 있어 원래와 다른 단위들이 드러났다 사라지는 복잡함이 있으며, 제수를 줄이고 늘이는 방식과 같이 분수 나눗셈의 성질을 비형식적으로 사용하고 있다.

열한째, 동형접근법이다(임재훈, 2016). 동형접근법은 예를 들어, 2개를 3배할 때, 2개를 3배하지 않고 2개 각각을 3배하는 것에 착안하여, 2개를 두 부분으로 생각하고, 각각을 3배하여 한 부분에 3개씩 두 부분으로 생각할 수 있으므로, 제수와 피제수가 구조적 동형이라는 점에 주목하여 나눗셈을 하는 방법이다.

예를 들어, 포함제 $\frac{7}{2}$(m)$\div\frac{4}{3}$(m)를 해결하는 과정에서 $\frac{4}{3}$를 몇 배하면 $\frac{7}{2}$이 되는지 알기 위해, $\frac{4}{3}$가 $\frac{7}{2}$이 될 때 1은 얼마가 되는지 앎으로써 나눗셈의 알고리즘에 도달하게 된다. 좀 더 자세히 말하면 $\frac{4}{3}$가 $\frac{7}{2}$이 될 때, $\frac{1}{3}$m는 $\frac{7}{2}\div4=\frac{7}{8}$(m)이 되고, 1m는 $(\frac{7}{2}\div4)\times3=\frac{7}{2}\div4\times3=\frac{7}{2}\times\frac{3}{4}$(m)가 됨을 보이고 있다.

이러한 방식은 대응 관계를 연이어 사용함으로써 나눗셈의 값을 구하고 있기 때문에 제수를 줄이고 늘이는 과정을 통한 접근 방식과 같이 나눗셈의 성질을 비형식적으로 사용하고 있다.

이상에서 살펴본 대로 분수 나눗셈이 이루어지는 다양한 맥락 속에서 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 이끌어내려는 많은 시도가 있었지만, [표 1]에서 보는 것과 같이 초등학교 수학에서 분수 나눗셈을 도입할 때 고려할 준거들을 모두 만족시키는 접근 방식은 찾아볼 수 없었다.

[표 1] 분수 나눗셈 알고리즘 접근 방식들의 한계점
[Table 1] The limitations of approach-methods for the fraction division algorithm

구분	알고리즘 도출의 직접성	제수 역수의 의미성	교육과정 적합성	분수 나눗셈의 체계성
①	×	○	○	○
②	○	×	○	○
③	○	×	○	○
④	○	×	×	○
⑤	○	○	×	○
⑥	○	○	×	○
⑦	○	○	×	×
⑧	○	○	○	×
⑨	○	○	○	×
⑩	○	○	○	×
⑪	○	○	○	×

(① 피제수의 단위비율을 이용한 접근 방식, ② 동분모를 이용한 접근 방식, ③ 카테시안 곱의 역을 이용한 접근 방식, ④ 분수의 곱셈으로부터 유추하는 접근 방식, ⑤ 나눗

셈을 분수 형태로 나타내는 접근 방식, ⑥ 측정접근법, ⑦ 제수를 1로 만드는 접근 방식, ⑧ 나눗셈과 곱셈의 관계를 이용한 접근 방식, ⑨ 제수를 줄이고 늘이는 과정을 통한 접근 방식, ⑩ 단위화 드러내기를 통한 접근 방식, ⑪ 동형접근법)

Ⅲ. 나눗셈

1. 나눗셈식의 계산 방법과 상황적 접근의 관계

나눗셈식에는 피제수, 제수, 그리고 나눈다는 기호(÷)가 있다. 나눗셈을 한다는 것은 피제수를 똑같이 제수로 나누면, 피제수가 제수의 몇 배인지를 구하는 것이다. 이 때 제수 자체를 하나의 단위로 하여 피제수가 제수의 몇 배인지를 구하는 방법과 피제수를 제수의 각 단위로 똑같이 나누었을 때 제수의 한 단위로 나누어지는 크기를 구하는 방법이 대표적인 방법이라고 할 수 있다. 왜냐하면 첫째 방법은 문제에 나와 있는 수인 제수를 곧바로 이용할 수 있고, 둘째 방법은 피제수를 제수만큼의 각 단위로 똑같이 나누었으므로 제수 각각의 단위로 나누어지는 크기를 구하는 대신 제수의 한 단위로 나누어지는 크기만을 구하면 되기 때문이다.

예를 들어, 12÷4의 나눗셈을 해 보자. 먼저, 12가 제수 자체인 4의 몇 배인지를 알아보자. 12=4+4+4=4×3이므로, 12는 4의 3배이다. 따라서 피제수를 제수 4가 포함된 곱셈으로 나타내기만 하면 된다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$12 \div 4 = (4 \times 3) \div 4 = 3$

다음으로 피제수를 제수의 각 단위로 똑같이 나누었을 때 제수의 한 단위로 나누어지는 크기를 알아보자. 피제수 12=4+4+4이므로 4를 제수 4로 각각 1씩 나누는 것을 3번 반복할 수 있다. 이러한 반복 과정을 통해 제수의 한 단위로 나누어지는 크기를 구할 수 있다. 이것을 식으로 표현하면 다음과 같다.

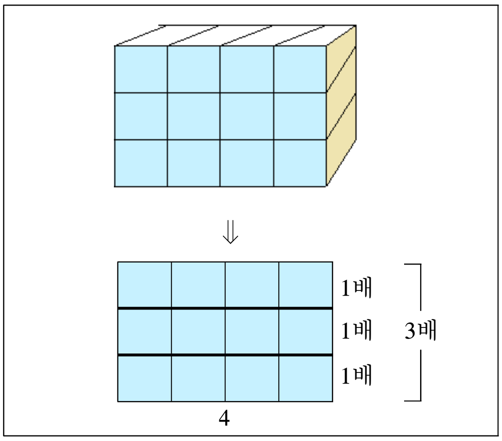
$12 \div 4 = (4 \div 4) + (4 \div 4) + (4 \div 4) = 1 + 1 + 1 = 3$

이와 관련하여 강흥규(2014)는 사과 4개를 단위로 하여 사과 12개를 측정하는 상황에서 사과 1개를 1차 단위, 사과 4개를 2차 단위라고 하였다. 즉, 제수의 한 단위를 1차 단위, 제수 전체를 하나의 단위로 한 것을 2차 단위라 부르고 있다.

이렇게 피제수를 제수의 각 단위로 똑같이 나누었을 때 제수의 한 단위로 나누어지는 크기를 구하는 방법을 '1차 단위*(강흥규, 2014) 비율법'이라 하고, 제수 자체를 하나의 단위로 하여 피제수가 제수의 몇 배가 되는지를 구하는 방법을 '2차 단위 비율법'이라 부르도록 하겠다.

나눗셈식을 1차 단위 비율법이든 2차 단위 비율법이든 어떤 방법으로 계산하여도 값은 같다. 이러한 사실을 알아보기 위해, 나눗셈식 12÷4를 '쌓기나무 모델'을 통해 해결하는 과정을 살펴보자.

2차 단위 비율법으로 해결하면, [그림 3]에서 보는 것처럼 쌓기나무 12개가 4개씩 3묶음이 되므로 4개의 3배가 된다. 이것은 쌓기나무 모델의 앞면을 보는 것처럼 제수 자체를 하나의 단위로 하여 피제수가 제수의 몇 배가 되는지를 알아보는 것과 같음을 시각적으로 확인할 수 있다.

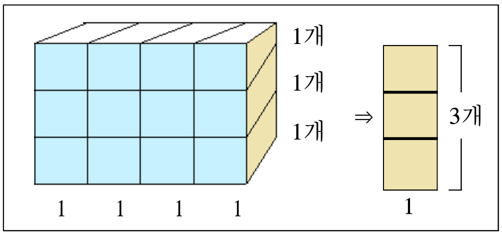


[그림 3] 쌓기나무 모델로 표현된 2차 단위 비율법
[Fig. 3] The method of scondary unit rate, expressed through building block model

1차 단위 비율법으로 해결하면, [그림 4]에서 보는 것처럼 쌓기나무 12개를 4개+4개+4개로 만들어 쌓기나무 4개를 제수 4단위로 똑같이 나누는 과정을 3번 반복함으로써, 제수의 한 단위에 나누어지는 쌓기나무는

* 강흥규(2014)는 "사과 4개를 단위로 하여 사과 12개를 측정하면 측정값은 3이 되며, 이 같은 측정과정은 곱셈 사과 4개×3=사과 12개로 나타낼 수 있다.(p.323)" 라는 예시를 통해 사과 1개를 1차 단위, 사과 4개를 2차 단위라고 하였다.

3개가 된다. 이것은 쌓기나무 모델의 옆면을 보는 것처럼 피제수를 제수의 각 단위로 똑같이 나누었을 때 제수의 한 단위로 나누어지는 크기를 구하는 것과 같음을 시각적으로 확인할 수 있다.



[그림 4] 쌓기나무 모델로 표현된 1차 단위 비율법
[Fig. 4] The method of primary unit rate, expressed through building block model

일반적으로 자연수 나눗셈뿐만 아니라 분수 나눗셈은 실생활 상황을 통해 도입된다. 하지만 실생활 문제를 해결하기 위해 문제 상황을 나눗셈식으로 나타냈다면, 나눗셈식의 계산은 제수가 피제수의 몇 배인지를 구하면 되기 때문에 1차 단위 비율법과 2차 단위 비율법 모두로 나눗셈식을 해결할 수 있다. 다시 말하면, 실생활 문제 상황이 등분제 상황이든 포함제 상황이든 나눗셈식의 해결 과정에서는 두 방법이 모두 쓰일 수 있다. 다만, 실생활 상황과 맥락을 같이하기 위해 등분제 상황의 나눗셈은 1차 단위 비율법으로, 포함제 상황의 나눗셈은 2차 단위 비율법으로 해결하는 것이 자연스럽다.

2. 분수 나눗셈의 정의

분수 나눗셈을 정의함에 있어 자연수 나눗셈의 등분제 상황과 포함제 상황을 확장하여 정의하고자 한다.

먼저, 자연수 나눗셈의 등분제 상황에 대한 확장이다. 등분제 상황에서 사용하는 묶음이라는 표현은 이산량에 적용되는 것이므로(강흥규, 2014), 이산량을 다루는 자연수 나눗셈에서는 한 묶음이라는 표현이 자연스럽다. 그러나 분수는 1보다 작은 수를 다루고 있으며, 분수 나눗셈은 이산량 뿐만 아니라 연속량을 대상으로 연산이 이루어지기 때문에 분수 나눗셈을 할 때에는 '묶음'보다는 '단위'라는 표현을 사용하는 것이 바람직하다. 따라서, 등분제의 의미는 한 묶음의 크기를 구하는 것이라기보다는 한 단위의 크기를 구하는 나눗셈으로 확장하여 연속량까지 다루는 분수 나눗셈에 적용할 필요가 있다.

다음으로, 자연수 나눗셈의 포함제 상황의 확장이다. 자연수 나눗셈에서는 동수누감과 자릿값을 이용하여 빼는 횟수를 최대 9번까지 반복하여 몫을 구할 수 있다. 예를 들어, 18÷2는 18에서 2를 9번 빼주면 된다. 그리고 180이 18의 10배이고 18÷2는 9이므로 180÷2는 90이 된다. 그러나 분수 나눗셈에서는 1보다 작은 수를 수없이 반복하여 빼야하는 경우가 있으므로 동수누감에 의한 방법으로는 몫을 구하기 쉽지 않다. 따라서 분수 나눗셈에서는 직접적으로 빼거나 덜어내는 '횟수'로 몫을 구하기보다는 우회적인 방법*을 통하여 피제수가 제수의 '몇 배'인지를 구할 수밖에 없다. 또한 곱셈과 나눗셈의 본질은 배 또는 비 개념이므로(강흥규, 2014), 곱셈과 나눗셈을 할 때 동수누가나 동수누감에 의한 방법보다는 배 개념으로 접근해야 할 것이다. 따라서 포함제 의미는 묶음의 개수를 구하는 것이라기보다는 전체량이 한 단위의 크기의 몇 배가 되는지를 구하는 나눗셈으로 정의하여 나눗셈의 특성을 드러내야 할 필요가 있다.

단위와 배 개념을 사용하여 자연수 나눗셈인 등분제와 포함제 상황의 정의를 확장한 분수 나눗셈의 정의는 다음과 같다.

등분제 상황의 분수 나눗셈은 전체량과 단위의 수를 알고 전체량을 단위의 수로 똑같이 나누었을 때, 한 단위의 크기를 구하는 나눗셈이며, 포함제 상황의 분수 나눗셈은 전체량과 한 단위의 크기를 알고 전체량을 한 단위의 크기로 똑같이 나누었을 때, 전체량이 한 단위의 크기의 몇 배가 되는지를 구하는 나눗셈이다.

3. 분수 나눗셈하기

분수 나눗셈 지도에서 중요한 점은 계산 과정이 아니라, 주어진 문제 상황이 분수 나눗셈을 이용해야 됨을 알게 하는 것과 분수 나눗셈의 알고리즘이 왜 그렇게 되는가를 의미 있게 이해시키는 것이다(조용진·홍

* 예를 들어, 피제수가 제수의 몇 배인지를 알기 위해 피제수에서 제수만큼씩 덜어내는 횟수를 구하지 않고 피제수의 단위비율을 이용하여 몫을 구하는 것과 같은 방법이다.

갑주, 2013). 그리고 분수 나눗셈에 대한 이해는 기계적인 방식으로 획득되기 보다는 개념적 이해를 바탕으로 기존 지식과 의미 있는 연결을 통해 이루어져야 오랫동안 유용하게 유지될 수 있다(전평국 외, 2003).

나눗셈이 이루어지는 상황은 등분제 상황과 포함제 상황이다(교육부, 2018a). 따라서 문제 상황이 제수의 한 단위의 크기를 구해야 하는 상황이거나, 제수가 피제수의 몇 배인지를 구해야 하는 상황이면 나눗셈으로 나타낼 수 있게 되는 것이다. 자연수의 등분제와 포함제 상황뿐만 아니라, Ⅱ장에서 소개된 분수 나눗셈의 알고리즘 도출을 위한 다양한 접근들은 위의 두 가지에 모두 포함된다.

이제 등분제와 포함제 상황의 정의에 따라 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 이끌어내기 위한 '단위원 분할 모델'과 '정사각형 분할 모델'을 제시하고자 한다.

가. 단위원 분할 모델을 통한 등분제 상황의 분수 나눗셈하기

1) 단위원 분할 모델

분모가 1인 분수는 자연수와 같기 때문에 분수 나눗셈을 이해하기 위한 모델은 자연수 나눗셈과 분수 나눗셈에 모두 적용 가능해야 한다.

초등학교 3학년 1학기 수학 교과서에서 한 단위의 크기를 나타내기 위해 바둑돌 12개를 3접시에 똑같이 나누는 활동을 한다(교육부, 2018b). 여기에서 접시는 묶음, 모둠, 명, m, kg 등과 같은 단위를 나타내는 것으로 볼 수 있다. 이와 관련하여 강흥규(2014)는 원형의 접시에 정교한 부챗살 눈금이 그려진다면 그것은 자연수뿐만 아니라 분수에도 적용 가능하다고 제안하였다.

예를 들어, 등분제 상황의 분수 나눗셈식인 (고기 $\frac{8}{15}$kg)÷($\frac{2}{3}$접시)=($\frac{4}{5}$kg)에서, '$\frac{2}{3}$접시'를 '한 접시의 $\frac{2}{3}$'로 해석하고, '$\frac{2}{3}$접시에 나누어 주는 것'을 "전체를 한 접시에 모두 주는 것으로 보고 (고기 $\frac{8}{15}$kg)÷1=($\frac{8}{15}$kg)으로 하는 것처럼, 전체를 '접시의 $\frac{2}{3}$에 모두 주는 것'으로 해석할 수 있다(강흥규, 2014, p.329)."∨ 그런데 접시가 이산량 단위이므로, 연속량 단위까지 나타낼 수 있는 원으로 제수의 한 단위를 모델화한다면, 등분제 상황의 나눗셈을 하기 위해 제수의 한 단위의 크기를 구하는 대신 한 원, 즉 '단위원(unit-circle)'에 나누어지는 크기를 구함으로써 나눗셈을 해결할 수 있게 된다. 구체적인 조작 활동 과정은 다음 절에서 다룬다.

이처럼 제수의 한 단위를 하나의 원으로 모델화하여 단위원에 나누어지는 피제수의 양을 구하는 구체적 조작 활동을 '단위원 분할 모델'이라고 하겠다.

2) 단위원 분할 모델의 적용

단위원 분할 모델을 적용하여 등분제 상황의 분수 나눗셈을 어떻게 하는지 알아보자.

예를 들어, '생크림 케이크를 만들려고 합니다. 생크림 $\frac{5}{7}$통을 사용하여 케이크 한 개의 $\frac{2}{3}$를 만들었습니다. 케이크 한 개를 만들려면 생크림은 얼마가 있어야 합니까?'라는 문제를 해결하기 위한 나눗셈식은 $\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}$로 나타낼 수 있다. 이것은 생크림 $\frac{5}{7}$통으로 케이크 한 개의 $\frac{2}{3}$를 만들었으므로, 생크림 $\frac{5}{7}$통을 똑같이 케이크 한 개의 $\frac{2}{3}$로 나눈다고 볼 수 있다.

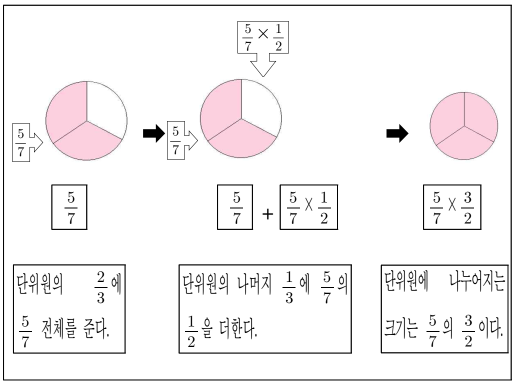
이 문제에서 케이크 한 개를 원 하나로 모델화하여 한 원에 나누어지는 생크림의 양을 구해 보자. 먼저 단위원을 3등분하면 단위원은 3칸이 된다. 단위원에 나누어지는 생크림의 양은 단위원의 2칸에 나누어진 양과 1칸에 나누어진 양을 더하면 된다. 생크림 $\frac{5}{7}$통 전체를 2칸에 주고(강흥규, 2014), 단위원의 나머지 1칸에 $\frac{5}{7}$통의 $\frac{1}{2}$을 더하면 단위원에 해당하는 생크림의 양을 구할 수 있게 된다. 따라서 단위원에 나누어지는 생크림의 양은 $\frac{5}{7}$통과 $\frac{5}{7}$통의 $\frac{1}{2}$을 합하면 된다. 이것을 식으로 나타내면,

$$\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{7}\times\frac{3}{2}$$

이 되어 분수 나눗셈의 표준 알고리즘에 이르게 된다. 여기에서 단위원의 1칸에 생크림 $\frac{5}{7}$통의 $\frac{1}{2}$에 해당되

는 것은 생크림 $\frac{5}{7}$통 전체가 2칸이므로 1칸은 $\frac{5}{7}$통 전체의 $\frac{1}{2}$이라는 분수 개념을 통해 알 수 있다.

이러한 표준 알고리즘의 정당화는 등분제 상황의 분수 나눗셈의 정의, 분수 개념, 그리고 분수의 덧셈과 곱셈만을 이용하여 표준 알고리즘을 이끌어내고 있다. 또한 단위원에 나누어지는 생크림의 양을 구하는 과정에서 제수의 역수가 나타남을 확인할 수 있다.



[그림 5] $\frac{5}{7} \div \frac{2}{3}$의 단위원 분할 모델

[Fig. 5] The unit-circle partition model of $\frac{5}{7} \div \frac{2}{3}$

나. 정사각형 분할 모델을 통한 포함제 상황의 분수 나눗셈하기

분수 나눗셈에서 피제수를 제수로 덜어내는 활동으로 피제수가 제수의 몇 배인지를 알아보는 방법을 택한다면, 나눗셈을 동수누감이라는 뺄셈적 사고에서 해결하도록 하는 결과가 된다. 나눗셈의 본질은 배 또는 비의 개념이므로(강흥규, 2014), 학생들은 나눗셈의 본질인 배 개념으로 접근하여 나눗셈을 학습할 필요가 있다.

자연수 나눗셈의 포함제 상황을 떠올려 보자. '사과 6개가 있습니다. 사과를 2개씩 포장한다면, 몇 묶음이 될까요?'라는 문제에서 우리는 문장의 의미 그대로 사과 6개를 2개씩 묶음으로써 3묶음이 됨을 확인하게 된다. 이것을 나눗셈의 본질인 배 개념으로 의미를 부여할 수 있다. 위 문제의 나눗셈식은 6(개)÷2(개/묶음)=3(묶음)이다. 이것은 피제수 6을 2×3으로 나타낼 수 있으므로, 6은 2의 3배임을 확인하게 된다. 이를 식으로 표현하면, 6÷2=(2×3)÷2=3이다.

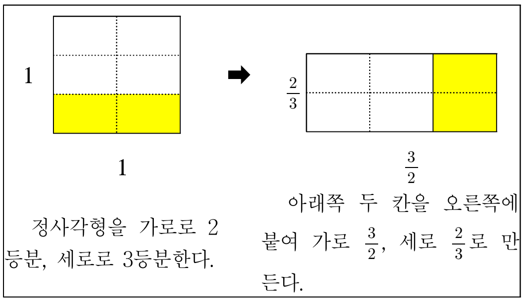
1) 정사각형 분할 모델

포함제 상황의 자연수 나눗셈에서는 피제수가 제수의 몇 배가 되는지를 알기 위해 피제수를 제수가 포함된 곱셈식으로 나타내어 제수의 몇 배인지를 알게 할 수 있다. 하지만 포함제 상황의 분수 나눗셈에서는 피제수가 제수의 몇 배인지를 피제수 자체에서 찾기가 어렵다. 따라서 '(피제수)=(피제수)×1'임을 이용하여 피제수가 제수의 몇 배인지를 알아보고자 한다.

'(피제수)×1'은 피제수의 1배를 의미하는 것으로, 1은 비율 또는 수이므로 피제수의 단위의 영향을 받지 않는다. 또한 1=1×1이므로, 이러한 계산식의 의미를 담아낼 수 있는 모델로 한 변의 길이가 1인 정사각형을 떠올리게 된다. Ⅱ장 3절에서 설명하였듯이* 길이와 넓이 사이의 관계는 비율로서 작용하기 때문에 비율인 1=1×1의 모델로서 적절하다.

정사각형에서 제수를 이끌어내기 위해 정사각형의 변을 분할해 보자. 그리고 편의상 정사각형의 한 변을 가로, 이 변에 수직인 한 변을 세로라고 하자.

예를 들어, 정사각형의 가로를 2등분, 세로를 3등분하면, 가로 한 칸은 $\frac{1}{2}$이 되고, 세로 한 칸은 $\frac{1}{3}$이 된다. [그림 6]과 같이 아래쪽 두 칸을 오른쪽에 붙여도 정사각형의 넓이는 변함이 없다. 따라서 1×1은 $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}$로 나타낼 수 있게 된다.



[그림 6] $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}$의 정사각형 분할 모델

[Fig. 6] The square partition model of $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}$

* 분수 나눗셈의 다양한 알고리즘 접근 방법 중에 카테시안 곱의 역을 이용한 접근 방식에서 다루었다.

이처럼 정사각형의 분할 과정에서 $1=1\times1=\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}$와 같은 결과를 얻게 되는 구체적 조작 활동을 '정사각형 분할 모델'이라고 하자.

정사각형 분할 모델이 Ⅱ장 3절에서 살펴보았던 피제수의 단위비율을 이용한 접근 방식과 다르지 않다고 여겨질 수 있다. 하지만, 피제수의 단위비율을 이용한 접근 방식에서의 피제수의 단위비율 1은 실제량으로 작용하며, 본 모델의 1은 피제수 전체를 의미하기도 하는 비율(수)로서 작용한다.

2) 정사각형 분할 모델의 적용

정사각형 분할 모델을 적용하여 포함제 상황의 분수 나눗셈을 어떻게 하는지 알아보자.

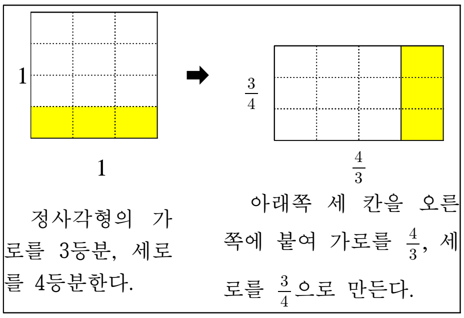
예를 들어, '우유 $\frac{17}{2}$L를 $\frac{3}{4}$L인 작은 병으로 나누어 담으려고 합니다. 작은 병은 모두 몇 병이 되겠습니까?'라는 문제를 해결하기 위한 나눗셈식 $\frac{17}{2}\div\frac{3}{4}$으로 나타낼 수 있다.

$\frac{17}{2}\div\frac{3}{4}=(\frac{17}{2}\times1)\div\frac{3}{4}$이다. 피제수의 $1=1\times1$로 나타낼 수 있으므로, 정사각형 분할 모델을 적용할 수 있다. 정사각형의 가로를 3등분, 세로를 4등분하면, 가로 한 칸은 $\frac{1}{3}$이 되고, 세로 한 칸은 $\frac{1}{4}$이 된다. [그림 7]과 같이 아래쪽 세 칸을 오른쪽에 붙임으로써, 1×1을 $\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}$으로 나타낼 수 있게 된다. 이러한 과정을 나눗셈식으로 표현하면,

$$\frac{17}{2}\div\frac{3}{4}=(\frac{17}{2}\times1)\div\frac{3}{4}=\{\frac{17}{2}\times(\frac{4}{3}\times\frac{3}{4})\}\div\frac{3}{4}$$
$$=\{(\frac{17}{2}\times\frac{4}{3})\times\frac{3}{4}\}\div\frac{3}{4}=\frac{17}{2}\times\frac{4}{3}$$

이 되어 분수 나눗셈의 표준 알고리즘에 이르게 된다. 여기에서 $\{(\frac{17}{2}\times\frac{4}{3})\times\frac{3}{4}\}\div\frac{3}{4}=\frac{17}{2}\times\frac{4}{3}$가 되는 이유는 $\{(\frac{17}{2}\times\frac{4}{3})\times\frac{3}{4}\}$이 $\frac{3}{4}$의 $(\frac{17}{2}\times\frac{4}{3})$배이기 때문이다.

이러한 표준 알고리즘의 정당화는 포함제 상황의 분수 나눗셈의 정의, 분수 개념, 그리고 분수의 곱셈만을 이용하여 표준 알고리즘을 이끌어내고 있다. 또한 정사각형을 분할하여 구체적으로 조작하는 과정에서 제수의 역수가 나타남을 확인할 수 있다.



[그림 7] $\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}$의 정사각형 분할모델

[Fig. 7] The square partition model of $\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}$

Ⅳ. 분수 나눗셈의 알고리즘 정당화하기

구체적인 예시를 통한 분수 나눗셈의 의미를 찾는 과정은 Ⅲ장에서 다루었기 때문에, 여기에서는 임의의 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 정당화하는 과정을 등분제와 포함제 상황으로 나누어 설명하고자 한다.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\ (\text{a, b, c, d는 자연수})$$

1. 단위원 분할 모델을 통한 등분제 상황의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화하기

먼저 등분제 상황의 분수 나눗셈에서 표준 알고리즘을 정당화하는 것을 단위원 분할 모델을 통해 알아보기로 하자. 제수가 진분수인 경우이다.

제수가 진분수인 경우는 $c < d$ 이다. 단위원을 d등분하면 단위원은 d칸이 되며, c칸과 (d-c)칸으로 구분할 수 있다. 단위원에 나누어진 크기는 c칸에 나누어진 크기와 (d-c)칸에 나누어진 크기를 더하면 된다. 따라서 c칸에 나누어진 크기는 $\frac{a}{b}$ 전체 즉, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{c}$이고, (d-c)칸에 나누어진 크기는 $\frac{a}{b}\times\frac{d-c}{c}$이다. 그러므로 단위원에 나누어지는 크기는

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{c} + \frac{a}{b}\times\frac{d-c}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{c+(d-c)}{c}$$
$$=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

이다. 결국, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$이 되어 분수 나눗셈의 표준 알고리즘에 이르게 된다.

또한 이러한 과정에서 등분제 상황의 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱해야 하는지에 대한 이유와 의미가 자연스럽게 드러난다. 제수의 역수를 곱하는 이유는 단위원에 해당하는 크기가 $\frac{a}{b}$의 $\frac{c}{c}$와 $\frac{a}{b}$의 $\frac{d-c}{c}$를 합한 크기이기 때문이며, 제수의 역수를 곱하는 것에 대한 의미는 단위원 즉, 제수 1에 해당하는 피제수 값을 구할 수 있도록 하는 역할이다.

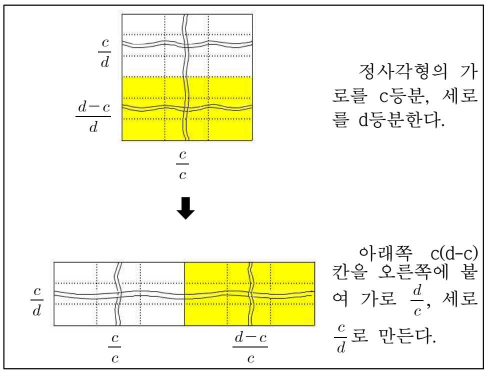
2. 정사각형 분할 모델을 통한 포함제 상황의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화하기

다음으로 포함제 상황의 분수 나눗셈에서 표준 알고리즘을 정당화하는 것을 정사각형 분할 모델을 통해 알아보기로 하자. 제수가 진분수인 경우이다.

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$에서 제수가 진분수인 경우는 c < d 이다. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=(\frac{a}{b}\times1)\div\frac{c}{d}$이다. 피제수의 $\frac{a}{b}\times1$에서 1=1×1로 나타낼 수 있으므로, 정사각형 분할 모델을 적용하기 위해, 정사각형의 한 변(편의상 가로라고 하자.)을 c등분하고, 이 변에 수직인 한 변(편의상 세로라고 하자.)을 d등분하면, 가로 한 칸은 $\frac{1}{c}$이 되고, 세로 한 칸은 $\frac{1}{d}$이 된다. 세로에 c칸까지만 남겨놓고 나머지 c×(d-c)칸을 가로에 붙여 가로의 칸이 c+(d-c)=d칸이 되게 하면, 세로는 $\frac{c}{d}$가 되고 가로는 $\frac{d}{c}$가 된다. 따라서 [그림 8]과 같이 1×1은 $\frac{d}{c}\times\frac{c}{d}$로 나타낼 수 있게 된다. 이러한 과정을 나눗셈식으로 표현하면,

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=(\frac{a}{b}\times1)\div\frac{c}{d}=\{\frac{a}{b}\times(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})\}\div\frac{c}{d}$$
$$=\{(\frac{a}{b}\times\frac{d}{c})\times\frac{c}{d}\}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

이 되어 분수 나눗셈의 표준 알고리즘에 이르게 된다.



[그림 8] $\frac{d}{c}\times\frac{c}{d}$(단, c<d)의 정사각형 분할 모델

[Fig. 8] The square partition model of $\frac{d}{c}\times\frac{c}{d}$(단, c<d)

또한 이러한 과정에서 포함제 상황의 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱해야 하는지에 대한 이유와 의미가 자연스럽게 드러난다. 제수의 역수를 곱하는 이유는 정사각형을 분할하여 제수만큼을 한 변으로 만들었을 때, 이에 수직인 다른 한 변의 크기가 제수의 역수가 되기 때문이며, 제수의 역수를 곱하는 것에 대한 의미는 피제수가 제수를 포함한 곱셈식으로 표현될 수 있도록 하는 역할이다.

Ⅴ. 결론

나눗셈은 피제수를 제수로 똑같이 나눌 때, 피제수가 제수의 몇 배인지를 알아가는 과정이다. 실생활 상황을 통해 도입되는 나눗셈 문제를 해결하기 위해 일단 나눗셈식으로 나타내게 되면, 1차 단위 비율법 또는 2차 단위 비율법으로 해결할 수 있다. 1차 단위 비율법은 맥락적으로 등분제 상황에 적용하는 것이 자연스러우며, 2차 단위 비율법은 포함제 상황에 적합하다.

본 연구에서는 자연수 나눗셈의 방법을 분수 나눗셈에 적용하기 위해 이산량 뿐만 아니라 연속량에도 적합한 단위와 배 개념으로 등분제 상황과 포함제 상황의 분수 나눗셈을 정의하였다. 그리고 단위원 분할 모델을 통해 등분제 상황의 분수 나눗셈의 표준 알고

리즘을, 정사각형 분할 모델을 통해 포함제 상황의 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 정당화하였으며, 제수의 역수를 곱하는 이유와 그 의미를 알아보았다. 이러한 과정을 통해 얻을 수 있는 결론은 다음과 같다.

첫째, 등분제와 포함제 상황의 자연수 나눗셈의 정의를 적절히 확장하여 분수 나눗셈에 적용할 수 있다. 등분제 상황의 경우, 제수 '한 묶음의 크기' 대신 '한 단위의 크기'를 구함으로써 분수 나눗셈을 할 수 있다. 또한 포함제 상황의 경우, 피제수가 제수 크기의 묶음이 '몇 개'인지를 알아보는 대신 '몇 배'인지를 알아봄으로써 분수 나눗셈의 몫을 구할 수 있다.

둘째, 분수 나눗셈에서 표준 알고리즘을 정당화하고, 제수의 역수를 곱하는 이유와 그 의미를 이해하는데 단위원 분할 모델과 정사각형 분할 모델을 사용할 수 있다. 단위원 분할 모델은 등분제 상황의 분수 나눗셈에서 제수의 한 단위의 크기를 구하는 과정을 알아보는 구체적 조작 활동을 통해 표준 알고리즘을 정당화할 수 있으며, 정사각형 분할 모델은 포함제 상황의 분수 나눗셈에서 정사각형을 분할하여 재배치하는 구체적 조작활동을 통해 표준 알고리즘을 정당화할 수 있다. 또한 이러한 구체적 조작 활동 과정에서 제수의 역수를 곱하는 이유와 그 의미를 파악할 수 있도록 해준다.

셋째, 수식으로 나타낸 나눗셈의 해결법으로 1차 단위 비율법과 2차 단위 비율법을 적극 활용해야 한다. 수식으로 제시된 나눗셈식의 계산이 실생활과 관련성을 유지하기 위해서는 수식으로 주어진 나눗셈식의 계산을 제수의 분모와 분자를 바꾸어 곱하는 알고리즘의 형식화에 치우치기 보다는 나눗셈의 의미를 생각하게 할 수 있는 1차 단위 비율법과 2차 단위 비율법의 계산 방법을 적극 활용할 필요가 있다.

위의 결론을 통해 몇 가지 교육적 시사점을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 자연수의 나눗셈 방법을 적절히 확장하는 방식으로 분수 나눗셈을 도입함으로써 교육과정에서 나눗셈을 일관되게 정의할 수 있다.

둘째, 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 이유와 그 의미를 알도록 하기 위해서 단위원 분할 모델과 정사각형 분할 모델과 같은 구체적 조작 활동을 통해 분수 나눗셈을 지도할 수 있다.

셋째, 분수 나눗셈을 구체적 조작 활동을 통해 제수의 역수를 곱하는 이유와 의미를 알게 되었다면 이를 지속적으로 상기할 수 있도록 해야 한다. 이를 위해 "1차 단위 비율법" , "제수를 1로 만드는 접근 방식", 그리고 "2차 단위 비율법" 등을 통해 분수 나눗셈식을 계산하도록 할 수 있다.

자연수 나눗셈의 방법을 분수 나눗셈으로 연결하게 하는 본 연구가 교육적 효과를 거두기 위해서는 단위원 분할 모델과 정사각형 분할 모델을 통한 등분제 상황과 포함제 상황의 분수 나눗셈을 어느 시기에, 그리고 어떠한 학습 경로를 통해 가르칠 것인가에 대한 더 많은 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

강홍규(2014). 초등수학에서 분수 나눗셈의 포함제와 등분제의 정의에 관한 교육적 고찰. 한국초등수학교육학회지, 18(2), 319-339.

Kang, H. K. (2014). A study on a definition regarding the division and partition of fraction in elementary mathematics. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 18*(2), 319-339.

교육부(2015a). 수학 5-2. 서울: (주)천재교육.

Ministry of Education. (2015a). *Mathematics 5-2.* Seoul: Chunjae Education Inc.

교육부(2015b). 수학 6-1. (주)천재교육, 서울.

Ministry of Education. (2015b). *Mathematics 6-1.* Seoul: Chunjae Education Inc.

교육부(2015c). 교사용 지도서 수학 5-1. 서울: (주)천재교육.

Ministry of Education. (2015c). *Mathematics Teacher's Manual 5-1.* Seoul: Chunjae Education Inc.

교육부(2018). 교사용 지도서 수학 3-1, 서울: ㈜천재교육.

Ministry of Education. (2018a). *Mathematics Teacher's Manual 3-1.* Seoul: Chunjae Education Inc.

교육부(2018b). 수학 3-1, 서울: ㈜천재교육.

Ministry of Education. (2018b). *Mathematics 3-1.* Seoul: Chunjae Education Inc.

김용석(2015). 단위화 드러내기를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈의 이해. 석사학위논문. 한국교원대학교.

Kim, Y. S. (2015). *Understanding of multiplication and division of fractions through revealing unitizing.* Master's thesis. Korea National University of Education

박교식(2014) 우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정 분석. 한국초등수학교육학회지, 18(1), 105-122.

Park, K. S. (2014). An analysis processes of justifying the standard fraction division algorithms in korean elementary mathematics textbooks. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 18*(1), 105-122.

박만구(2002). 왜 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$ 인가?. 수학교육 논문집, 13, 39-54.

Park, M. G. (2002). Why $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$?. *Communications of Mathematical Education, 13*, 39-54.

신준식(2013). 문제 상황과 연결된 분수 나눗셈의 교과서 내용 구성 방안. 수학교육, 52(2), 217-230.

Shin, J. S. (2013). A proposal to the construction of textbook contents of fraction division connected to problem context. *The Mathematical Education, 52*(2), 217-230.

임재훈(2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈, 학교수학, 9(1), 13-28.

Yim, J. H. (2007). Division of fractions in the contexts of the inverse of a cartesian product. *School Mathematics, 9*(1), 13-28.

임재훈(2016). 분수 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성, 한국초등수학교육학회지, 20(4), 521-539.

Yim, J. H. (2016). Quotitive division and invert and multiply algorithm for fraction division. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 20*(4), 521-539.

임재훈, 김수미, 박교식(2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로, 학교수학, 7(2), 103-121.

Yim, J. H., Kim, S. M., & Park, K. S. (2005). Different approaches of introducing the division algorithm of fractions: Comparison of mathematics textbooks of North Korea, South Korea, China, and Japan. *School Mathematics, 7*(2), 103-121.

전평국, 박혜경(2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석. *수학교육논문집*, 15, 71-76.

Joen, P, G., & Park, H. K. (2003). (An) Analysis on connections with related knowledge for conceptual understanding about division of fractional numbers. *Communications of Mathematical Education, 15*, 71-76.

조용진, 홍갑주(2013). 분수 나눗셈의 지도에서 단위비율 결정 맥락의 실제 적용을 위한 기초 연구. 초등수학교육, 16(2), 93-106.

Cho, Y. J., & Hong, G. J. (2013). Teaching fractional division: A basic research for practical application context of determination of a unit rate. *Education of Primary School Mathematics, 16*(2), 93-106.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.권성룡, 김남균, 김수환, 김용대, 남승인, 류성림, 방정숙, 신준식, 이대현, 이봉주, 조완영, 조정수 역(2005). 수학의 힘을 길러주자 : 왜? 어떻게?. 서울: 경문사.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teacher's Understanding OfFundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. 신현용, 승영조 역(2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. 서울: 승산.

Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 247-256). Reston, VA: NCTM.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). Reston, VA: NCTM.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally(5th Ed.)*. Boston: Pearson Education, Inc. 남승인, 서찬숙, 최진화, 강영란, 홍우주, 배혜진, 김수민 역(2008). 수학을 어떻게 가르칠 것인가?. 서울: 경문사.

Justifying the Fraction Division Algorithm in Mathematics of the Elementary School

Park, Jungkyu
Irimahan Elementary School
Iksan, Jeonbuk 54542, Korea
E-mail : pjkrang@hanmail.net

Lee, Kwangho†
Korea National University of Education
Cheongju, Chungbuk 28173, Korea
E-mail : paransol@knue.ac.kr

Sung, Chang-geun
Yeung-chun Elementarh School
Gwansan-gu, Gwangju, Korea
E-mail: doway7668@hanmail.net

The purpose of this study is to justify the fraction division algorithm in elementary mathematics by applying the definition of natural number division to fraction division. First, we studied the contents which need to be taken into consideration in teaching fraction division in elementary mathematics and suggested the criteria. Based on this research, we examined whether the previous methods which are used to derive the standard algorithm are appropriate for the course of introducing the fraction division. Next, we defined division in fraction and suggested the unit-circle partition model and the square partition model which can visualize the definition. Finally, we confirmed that the standard algorithm of fraction division in both partition and measurement is naturally derived through these models.

* ZDM Classification : F42
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D99
* Key Words : fraction division, method of unit rate, building block, unit-circle partition, square partition
† Corresponding Author