한국학교수학회논문집 제 22 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 22, Number 1, 1-21, March 2019
http://doi.org/10.30807/ksms.2019.22.1.001

제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해 및 근호를 포함한 식의 계산에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오류 분석

도종훈[1], 권오병[2]

학교 교육에서 수학은 학습 부진의 문제가 가장 심각한 교과 중 하나이다. 특히 중학교 수학은 초등학교 수학과 고등학교 수학을 잇는 가교 역할을 하고 비형식적 수학에서 형식적 수학으로 전환되는 시기에 위치해 있어 이 시기의 학습 부진은 이후의 수학 및 수학 관련 교과 학습에서 지속적인 부진을 야기할 가능성이 크다. 이런 점에서 중학교 수학의 학습에서 발생하는 학습 부진의 실태와 그 원인의 분석은 학생들의 미래 수학 학습을 위한 토대 마련이라는 점에서 중요한 의미를 갖는다. 이에 본 연구에서는 중학교 3학년 학생들을 대상으로 학습 시기와 내용의 계통성 측면에서 중학교 3학년 수학의 출발점이자 근간에 해당하는 제곱근의 뜻과 성질 이해 및 근호를 포함한 식의 계산 과정에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오류를 조사하고 그 유형을 분석하였다. 본 연구를 통해 여러 가지 오류가 발견되었는데, 그 중에서도 근호 $\sqrt{\ }$를 괄호 ( )처럼 인식하는 오류나 $x=-2\pm\sqrt{10}$ 을 $x=-2$ 또는 $\pm\sqrt{10}$ 으로 인식하는 오류는 우리가 예상하지 못했던 뜻밖의 오류로서 본 연구와 같은 오류 분석 연구가 보다 광범위하고 심층적으로 이루어질 필요가 있음을 시사하는 사례라 할 수 있다.

주요용어 : 수학 학습 부진, 제곱근, 근호, 오류 분석

Ⅰ. 서론

인간은 인지적, 심리적, 환경적인 면에서 많은 개인차를 지니고 성장한다. 이런 점을 감안하면 학교 교육에서 개인 간 학업 성취 차이가 존재하는 것은 일면 당연하다. 특히 한 명의 교사가 다양한 능력과 적성을 지닌 다수의 학생들을 가르쳐야 하는 상황에서 교사는 불가피하게 특정 수준의 학생들을 주된 대상으로 수업 계획을 수립하고 실행하게 된다. 이로 인해 해당 수업에서 소외되어 학습 결손이 나타나는 학생이 존재할 수 있고, 학습 결손이 점차 누적되면 학습 부진으로 고착될 수 있다. 즉, 특정 시기의 학습 부진이 해소되지 않고 학년이 올라가면서 누적되면, 학습에 대한 흥미와 관심마저 잃게 되고, 이는 이후의 학습에 대한 지속적인 부진을 야기하는 원인으로 작용하게 된다. 이런 점에서 교사가 자신의 수업을 운영하면서 갖게 되는 가장 큰 책무 중 하나가 바로 학습 부진 학생의 발생을 최소화하고, 이미 존재하는 학습 부진 학생의 경우 학습 부진에서 벗어나도록 돕는 것이라 할 수 있다.

---

* MSC2010분류 : 97D70
1) 서원대학교 교수 (jhoondo@seowon.ac.kr)
2) 진천고등학교 교사 (mathshow@korea.kr)

학교 교육에서 수학은 '수포자'라는 신조어가 등장해서 사회적인 이슈가 될 정도로 학습 부진의 문제가 가장 심각한 교과 중 하나이다. 이런 이유로 수학 학습 부진 학생의 사고 특성에 대한 연구(이은휘, 2001; 조완영, 2008)를 비롯하여 정수, 유리수, 일차식, 일차방정식, 함수 등 학교 수학의 여러 개념, 원리, 법칙에 대한 수학 학습 부진 학생들의 오개념이나 오류 분석 연구(김미경, 2007; 나세희, 2010; 안명희, 2009; 이은영, 2006; 이원정, 2008; 정진혜, 2004; 진선미, 송영무, 2007 등)가 여러 연구자들에 의해 이루어져 왔다. 최근 들어서는 학생들의 개인차를 고려한 수준별 수업이 보편화되면서 학습 부진 학생들의 능력과 특성을 고려한 수업이 이루어지기도 하였다.

그러나 이런 여러 연구와 개선 노력에도 불구하고 학습 부진 학생은 여전히 존재한다. 이런 점에서 학습 부진 학생들의 학습 실태에 대한 분석 및 분석 결과에 근거한 교수학습 개선 방안이나 학습 자료 개발 논의가 좀 더 광범위하고 심층적으로 이루어질 필요가 있다. 특히 학교수학의 여러 가지 기초 개념, 원리, 법칙에 대한 수학 학습 부진 학생들의 오류 분석은 이런 논의의 출발점으로서 중요한 의미를 지닌다. 가능한 한 학교수학의 모든 내용을 대상으로 이들 내용의 학습 과정에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오개념 및 오류를 분석하고 그 결과를 공유할 필요가 있을 것으로 보인다.

그 중에서도 중학교 수학은 초등학교 수학과 고등학교 수학을 잇는 가교 역할을 하고 비형식적 수학에서 형식적 수학으로 전환되는 시기에 위치해 있어, 이 시기의 학습 부진은 이후의 수학 및 수학 관련 교과 학습에서 지속적인 부진을 야기할 가능성이 크다. 이런 점에서 중학교 수학의 학습에서 발생하는 학습 부진의 실태와 그 원인의 분석 및 적절한 처방의 모색은 학생들의 미래 수학 학습을 위한 토대 마련이라는 점에서 중요한 의미를 갖는다.

이에 본 연구에서는 연구자 중 한 명이 담당하고 있는 중학교 3학년 학생들을 대상으로 학습 시기와 내용의 계통성 측면에서 중학교 3학년 수학의 출발점이자 근간에 해당하는 제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해 및 근호를 포함한 식의 계산 과정에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오류를 조사하고 그 유형을 분석하여 공유하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학습 부진

학습 부진에 대한 논의는 '어떤 학습능력에 장애를 받고 있는가?'라는 질문을 중심으로 학습자가 학습에서 겪는 어려움을 진단하고 치료하기 위한 연구로부터 비롯되었으며, 학습 부진에 대한 정의는 학자에 따라 다양하다(박성익, 1989; 이나미, 1997; 김선 외, 2001; 서울대학교 교육연구소, 2011). 교과 학습에서는 통상적으로 학습 부진의 개념을 학업 성취 수준에 따른 구분으로서 해당 교과의 학업 저성취 범주 내에서 기초 학습 기능이 습득되지 않은 기초 학습 부진과 교과별 최소 학업 성취 수준에 도달하지 못한 기본 학습 부진으로 구분한다(권점례 외, 2013). 이에 따르면 수학 학습 부진은 지능이 일정 수준 이상인 학생들이 수학의 학습을 통해 기대되는 최소한의 학습 기능 및 학업 성취를 달성하지 못할 때 사용하는 개념이라 할 수 있다.

수학 학습 부진 학생들은 대체로 수 감각이 부족하고, 패턴과 관계를 쉽게 파악하지 못하며, 이전에 학습한 내용을 기억하는데 어려움을 겪고, 기초적인 수학 개념의 이해에 어려움을 겪는 것은 물론 문장제를 매우 어려워하는 것으로 알려져 있다(Winebrenner, 1996). 더구나 이들은 보통 학생에 비해 소극적이면서 불안한 인성을 가지고 있다. 따라서 학습 부진 학생들의 학습 지도에서는 무엇보다 면밀

한 오류 분석을 통한 부진의 원인 분석이 필요하다고, 부진 원인에 따른 개별 지도를 통해 학생들이 성공을 경험하고 학습에 대한 자신감을 회복할 수 있도록 지도할 필요가 있다(박성익, 1989; 이나미, 1997; 김선 외, 2001). 이처럼 학습 부진 학생의 교육에서는 학습 부진 학생들의 정의적 특성에 대한 논의와 더불어 이들의 수학 학습 및 문제해결 과정에서 나타나는 오류의 진단과 이를 통한 학습 부진의 원인 분석이 우선적으로 필요하다고 할 수 있다. 본 연구 역시 이런 필요성으로부터 비롯되었다.

2. 오류 분석

여러 연구자들이 수학 학습에서 학생들이 겪는 어려움을 학교수학의 여러 개념에 대한 오개념과 문제해결 과정에서의 오류 분석을 통해 밝히고자 노력했다(Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, Inbar, 1987; 김옥경, 1991; 최영아, 2001; 최지선, 2003; 김부미, 2006; 조완영, 2008 등). 학생들에게서 나타나는 오류의 원인은 크게 지각적 특성이나 논리적 추론의 특성에 따른 인식론적 측면과 교사의 오개념, 제한된 학습 경험 제공, 극단적인 교수 현상, 교육과정 내용의 제시 순서와 같은 교수학적 측면으로 구분할 수 있다(최지선, 2003; 김부미, 2006).

학생들에게서 나타나는 실제 오류의 사례는 매우 다양하며, 교사의 예상을 벗어나는 경우도 종종 있다. 따라서 학생들의 오류를 체계적으로 분석하여 분류하고 데이터베이스화할 수 있는 분석 틀이 필요하다. 이와 관련하여 Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, Inbar(1987)는 수학 문제해결 과정에서 나타나는 오류를 문제의 자료를 잘못 이용한 경우(misused data), 문제 내용을 잘못 해석한 경우(misinterpreted language), 논리적으로 부적절한 추론을 한 경우(logically invalid inference), 정리나 정의를 잘못 사용한 경우(distorted theorem or definition), 요구하지 않은 답을 제시한 경우(unverified solution), 기술적인 실수를 범한 경우(technical error)의 6가지로 유형화하였다. 이들이 제시한 오류 분석 모델은 이후 여러 연구자들(김옥경, 1991; 이승민, 1999; 최영아, 2001 등)이 수학 학습 및 문제해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류를 분석하기 위한 기본 틀을 제공하였다. 이 틀은 여러 연구자들에 의해 그 적절성이 확인되었고 기존 연구와의 비교 분석 또한 용이하다는 점에서 본 연구에서는 Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, Inbar(1987)가 제시한 6가지 오류 유형을 수정, 보완하여 오류 분석의 기본 틀을 마련하였다(Ⅲ장 4절 참고).

3. 학습 부진 학생들의 오류 분석

수학 학습 및 문제해결 과정에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오류에 대한 분석은 학교수학의 모든 영역의 모든 개념, 원리, 법칙, 기능을 대상으로 면밀하게 이루어질 필요가 있다. 실제로 여러 연구자들이 학교수학의 특정 영역이나 특정 개념의 학습 및 문제 해결 과정에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오류를 분석하였다(정진혜, 2004; 구미자, 2005; 최보영, 2005; 김미경, 2006; 이은영, 2006; 진선미, 송영무, 2007; 이원정, 2008; 안명희, 2009; 나세희, 2010; 최승현, 남금천, 류현아, 2013 등). 특히 최승현, 남금천, 류현아(2013)는 기존의 선행연구들을 분석하여 수학 학습 부진 학생들에게서 나타나는 오류 사례들을 정리하였는데, 그 중에서 본 연구에서 분석하고자 하는 제곱근의 뜻과 성질, 근호를 포함한 식의 계산과 관련된 오류를 정리해보면 [그림 Ⅱ-1]과 같다.

• a의 제곱근과 제곱근 a는 어떻게 다를까?
• $\sqrt{\ }$ 를 포함하는 수는 무리수이다?
• $\sqrt{\ }$ 는 실제로는 없는 수이고 사용하지 않는다?
• 실수와 수직선 위의 점은 1 : 1 대응이다?
• $2\sqrt{3}=\sqrt{6}$ 또는 $-2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ 로 계산한다?
• 분모의 유리화에 관련된 오류들
• $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{8}$, $\sqrt{5}-\sqrt{3}=\sqrt{2}$ 와 같이 계산한다?

[그림 Ⅱ-1] 제곱근 관련 오류 사례(최승현, 남금천, 류현아, 2013)

학생에게서 나타나는 오류를 면밀히 파악하고 있는 교사는 이를 고려하여 수업을 설계하고 진행할 수 있다. 이런 점에서 학생이 지닌 여러 가지 오류에 대한 교사의 인식 여부는 교사의 수업 전개 방식에 직접적인 영향을 미친다(최승현, 황혜정, 2008). 본 연구의 결과(Ⅳ장)를 통해 좀 더 자세하게 살펴보겠지만, [그림 Ⅱ-1]에 제시된 오류 사례 중 어떤 것은 본 연구에 참여한 학생들에게서도 나타나지만, [그림 Ⅱ-1]의 사례들이 학습 부진 학생들의 오류 사례를 모두 포괄하지는 않는다. 이런 점에서 오류 분석 연구는 그간 보고되지 않은 오류가 단 한건이라도 발견된다면 지속적으로 이루어져야 하고, 그 결과 역시 지속적으로 누적되고 공유되어야 할 것이다. 본 연구 역시 기존의 연구들과 마찬가지로 지속적으로 이루어져야 할 다양한 오류 분석 연구의 일환으로 진행된 것이다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 연구자 중 한 명이 재직 중인 충북 지역 A중학교 3학년 학생들 중 수준별 반 편성에서 미흡(하) 수준으로 판정된 학생 32명이다.[3] A중학교는 3학년 학생들의 수준별 수업을 위해 2학년 정기고사 수학 성적을 기준으로 3개 반 학생들을 4개의 반(우수, 보통, 보통, 미흡)으로 나누어 편성하였는데, 미흡 수준의 경우 성적이 하위 25%이하인 학생들로 편성되었으며, 연구자가 담당하는 3개 반에서 각각 10명, 11명, 11명이 미흡 수준으로 판정되었다.

2. 검사지

본 연구에서는 A중학교에서 사용하는 교과서(김원경 외, 2013)에 제시된 문항들을 이용하여 학생들의 오류를 분석할 수 있는 검사지를 구성하였다. 그 이유는 본 연구가 연구자가 재직 중인 학교의 수학 학습 부진 학생들을 대상으로 진행되었으므로 별도의 문항을 개발하여 사용하는 것보다는 이 학생들이 수업 시간에 주교재로 사용하는 교과서의 문항을 통해 오류를 분석하는 것이 오류 분석의 측면

3) 주지하는 바와 같이 학습부진의 개념과 판단 기준은 다양할 수 있다. 본 연구에서는 단위 학교에서의 수준별 반 편성에서 미흡(하) 수준으로 판정된 학생을 학습부진 학생으로 간주하였으며, 따라서 본 연구에서 설정한 학습부진의 개념과 기준 및 이들에 의해 나타난 오류 분석 결과를 일반화하기에는 무리가 있을 수 있다.

에서뿐 아니라 학습의 측면에서도 학생들에게 도움이 될 것으로 생각하였기 때문이다. 따라서 교과서에 제시된 문항들 중 각 단원의 기초적인 수학 개념에 대한 이해 여부를 평가할 수 있는 문항으로 구성된 중단원 학습 점검 문항을 오류 분석을 위한 문항으로 사용하였다. 제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해 및 근호를 포함한 식의 사칙계산 능력은 해당 단원뿐 아니라 이차방정식의 풀이에서도 필요하므로, 제곱근의 뜻과 성질, 근호를 포함한 식의 사칙계산, 이차방정식의 3개 중단원 학습 점검 문항들을 각 단원의 학습이 종료될 때마다 학생들에게 제시하여 해결하게 하였고, 이 과정에서 나타나는 제곱근의 뜻과 성질 및 계산 관련 오류를 분석하였다. 모든 문항은 서답식 문항으로 학생들의 사고 과정이 나타나도록 풀이 과정을 모두 서술하게 하였다.

3. 검사 시행 및 결과 분석

검사는 학기 중 각 중단원(제곱근의 뜻과 성질, 근호를 포함한 식의 계산, 이차방정식)의 학습이 종료된 후 3차례 시행하였으며, 검사지 응답 시간은 40분으로 동일하게 하였다. 검사 실시 후 검사지에 나타난 오류 사례들을 수집하고, 대면 상담을 실시하여 자신의 응답에 대한 학생들의 생각을 듣고, 가능한 대로 이를 기록하였다.

4. 오류 분석의 틀

본 연구에서는 Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, Inbar(1987)가 제시한 6가지 유형을 본 연구의 상황에 맞게 수정한 다음의 6가지 유형을 오류 분석의 기본 틀로 사용하였다.

1) 제곱근의 뜻(용어, 기호 포함)과 성질에 대한 이해 부족으로 인한 오류(A형)

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, Inbar(1987)가 제시한 6가지 오류 유형 중 정리나 정의를 잘못 사용하여 발생하는 오류는 실제로 학생들에게서 나타나는 빈도가 매우 높고(김옥경, 1991), 학생들이 수학의 정리나 정의를 이해하는데 어려움을 겪는다는 관점에서 오류의 한 유형으로 분류하였다. 그 대신 정리나 정의의 의미를 보다 명료화하여 이 유형을 '제곱근의 뜻(용어, 기호 포함)과 성질에 대한 이해 부족으로 인한 오류'로 명명하였다. 제곱근의 뜻과 성질을 모르는 경우, 제곱근의 뜻과 성질을 잘못 이해하는 경우, 제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해가 부족하여 문제를 틀리게 해석하는 경우, 필수적인 용어나 기호에 대한 인식이 불충분한 경우, 연습이나 숙련이 부족한 경우 등이 이에 해당한다.

2) 선수학습 결손으로 인한 오류(B형)

이 유형의 경우 Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, Inbar(1987)는 오류의 유형으로 분류하지 않았지만, 본 연구에 참여한 학생들이 학습 부진 학생들이라는 점에서 선수학습 결손으로 인한 오류가 많이 발생할 것으로 예상하여 한 유형으로 분류하였다. 초등학교, 중학교 1~2학년 과정에서 발생하는 선수학습 결손에 의해 발생하는 오류를 말하며, 본 연구에서는 자연수, 정수, 유리수, 소수의 사칙계산, 거듭제곱, 곱셈공식 등과 관련된 학습 결손뿐 아니라, 중학교 3학년 과정 내에서도 이전 학습내용의 결손이 현재의 학습에 영향을 미치는 경우까지 이 유형으로 분류하였다.

3) 기술적인 오류(C형)

기술적인 오류 역시 Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, Inbar(1987)가 분류한 오류 유형 중 하나로서, 학생들이 수학 용어나 기호를 정확하게 사용하지 못하는 경우를 연구자가 많이 경험하였고, 특히 학습 부진 학생들의 경우 정확한 용어나 기호 사용에 미숙한 경우가 많을 것이라 예상하여 오류의 한 유형으로 분류하였다. 사소한 계산 실수를 포함하여 $\sqrt{\ }$, $+$, $-$, $=$ 등의 수학 기호의 부적절한 사용 및 누락으로 인해 발생하는 오류가 이에 해당한다.

4) 문제를 잘못 이해하여 생긴 오류(D형)

이 유형은 Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, Inbar(1987)의 오류 유형 분류에서 문제의 자료를 잘못 이용한 오류, 문제의 내용을 잘못 해석한 오류, 논리적으로 부적절한 추론에 의한 오류를 통합한 것이다. 이들 세 가지 유형 중 전자의 두 유형은 모두 문제의 이해와 관련이 있다는 점에서 한 유형으로 통합하였다. 또 본 연구의 대상이 수학 학습 부진 학생들이고 오류 검사지 또한 각 영역의 기초 개념과 기능을 평가하는 문항이어서 문제를 이해하는 과정을 제외하면 문제 해결 과정에서 논리적인 추론을 요구하는 부분이 거의 없기 때문에 부절절한 논리적 추론으로 인한 오류 역시 문제의 이해 과정에서의 오류의 유형으로 통합하였다. 문제에 서술되지 않았거나 주어진 조건에서 도출되지 않는 정보를 사용하는 경우, 주어진 자료나 조건을 무시하고 관련이 없거나 근거 없는 다른 자료를 이용하는 경우에 발생하는 오류가 이에 해당한다. 그러나 본 연구에서 이런 유형으로 분류할 만한 오류 사례는 발견되지 않았다.

5) 풀이 과정의 오류(E형)

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, Inbar(1987)에서는 풀이를 잘 하고도 문제에서 요구하지 않은 답을 제시한 경우를 오류의 한 유형으로 분류하였으나, 연구자의 경우 오히려 학생들이 풀이 과정을 쓰지 않고 답만 제시하거나 풀이 과정을 완성하지 못하는 경우를 많이 경험하였고, 특히 수학 학습 부진 학생들의 경우 풀이 과정 기술에 어려움을 겪으리라는 점에서 풀이 과정의 오류를 오류의 한 유형으로 분류하였다. 풀이 과정을 쓰지 않고 답만 제시한 경우, 특정 단계까지는 풀이가 맞지만 이후 단계의 풀이 과정이 없거나 틀린 경우가 이에 해당한다. 그러나 본 연구에서는 이런 유형의 오류 사례 역시 발견되지 않았다.

6) 기타 오류(F형)

그밖에 풀이 과정에 일관성이 없는 경우, 학생이 제시한 풀이와 답만으로는 학생의 의도를 파악할 수 없는 경우, 근거 없이 단순히 생각나는 대로 자신의 생각을 풀이에 적용한 경우 등을 기타 오류로 분류하였다.

Ⅳ. 연구 결과

이 장에서는 본 연구 결과 나타난 수학 학습 부진 학생들의 오류 사례를 앞서 살펴본 오류 분석 틀의 여섯 가지 유형 중에서 실제 오류 사례가 나타난 제곱근의 뜻(용어, 기호 포함)과 성질에 대한 이해 부족으로 인한 오류(A형), 선수학습 결손으로 인한 오류(B형), 기술적인 오류(C형), 기타 오류(F형)의 네 가지 유형별로 살펴본다.[4] 오류 사례는 학생이 제시한 응답 원본을 스캔하여 가능한 한 원본 그대로 제시하려고 하였으나, 원본이 너무 흐리거나 알아보기 어려운 경우 연구자가 그 내용을 문서 작성 프로그램으로 타이핑하여 제시하였다.

1. 제곱근의 뜻(용어, 기호 포함)과 성질에 대한 이해 부족으로 인한 오류(A형)

네 가지 유형 중 제곱근의 뜻(용어, 기호 포함)과 성질에 대한 이해 부족으로 인해 발생한 경우에 해당하는 오류 사례가 가장 많이 발견되었는데, <표 Ⅳ-1>은 이들 오류 사례를 정리한 것이다.

<표 Ⅳ-1> 제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해 부족으로 인한 오류(A형)

구분	오류 내용	오류 사례 (학생 반응)
A-1	제곱근을 구할 때, 양의 제곱근 또는 음의 제곱근만 구함	$\frac{2}{3}$의 제곱근 → $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 16의 제곱근 → $4\,/-4$
A-2	제곱근을 구한 후 근호의 불필요한 재사용	16의 제곱근 → $\pm\sqrt{4}$
A-3	근호를 고려하지 않은 두 수의 대소 비교	6과 $\sqrt{12}$의 대소 비교 → $6<\sqrt{12}$
A-4	$(-\sqrt{a})^2=-a$ 즉, 제곱하면 근호만 제거된다고 생각함	$(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2=2+(-3)$
A-5	근호를 포함한 식의 계산 후 근호의 불필요한 재사용	$\sqrt{64}-\sqrt{9}=8-3=\sqrt{5}$
A-6	근호 $\sqrt{\ }$를 괄호 ( )처럼 생각함	$\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{2-3}=\sqrt{-1}=-\sqrt{1}$
A-7	분모의 유리화에서 분모 $\sqrt{a}+b$에 자기 자신 $\sqrt{a}+b$를 곱함	$\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)\times(\sqrt{5}+1)}$
A-8	분모의 유리화에서 분모, 분자를 각각 유리화하려고 함	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}$
A-9	분모의 유리화에서 분모 $\sqrt{a}+b$에 제곱근인 $\sqrt{a}$만 곱함 분배법칙 오류 $(\sqrt{a}+b)\times\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2+b$	$\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2\times\sqrt{5}}{(\sqrt{5}+1)\times\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)\times\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)\times\sqrt{2}}$ $(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}=5+1$, $(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}=2+1$
A-10	$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$로 계산	$\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}=\sqrt{8+18+32}$
A-11	$\sqrt{a}+b=\sqrt{a+b}$로 계산	$\sqrt{3}+2=\sqrt{3+2}$
A-12	$\sqrt{a^2\times b^2\times c}=(a+b)\sqrt{c}$로 계산	$\sqrt{2\times2^2\times5^2}=(2+5)\sqrt{2}$
A-13	$x=a\pm\sqrt{b}$를 $x=a$ 또는 $x=\pm\sqrt{b}$라고 생각함	$x=-2\pm\sqrt{10}$이므로 $x=-2$또는$x=\pm\sqrt{10}$

A-1 오류는 양수의 제곱근은 양의 제곱근과 음의 제곱근 두 개가 존재한다는 성질에 대한 이해 부족으로 인해 나타난 오류이다([그림 Ⅳ-1] 참고). 이와 같은 오류를 보인 학생들의 경우 제곱근의 정의를 학습할 때는 양의 제곱근과 음의 제곱근 두 가지를 잘 말했음에도 정작 문제 해결 상황에 직면해서는 '*제곱근과 양의 제곱근을 혼동*'하거나 '*양의 제곱근이나 음의 제곱근 둘 중 하나만 선택해서 적어야한다*'고 생각하고 있는 것으로 나타났다. 이 과정에서 양의 제곱근과 음의 제곱근 둘 중 어떤 것을 선택해야 하는가에 대한 고민을 하는 학생도 있었다. 학생들은 '*수학 문제의 답은 오직 한 개뿐이다*'는 생각을 부지불식간에 하고 있었고, 두 개의 답을 적어야 하는 상황에 혼란을 느끼고 있었던

4) 이하의 내용은 권오병(2013)의 연구를 통해 수집, 정리된 자료와 논의 결과를 재해석하여 수정, 보완한 것으로 권오병, 도종훈(2016)을 통해 일부 내용이 발표된 바 있음.

것으로 보인다. 양수의 제곱근이 두 개인 이유에 대해 충분히 이해시키는 과정이 필요하고, 더불어 수학 문제의 답이 두 개 이상인 경우에 대한 경험의 확대가 필요한 것으로 보인다.

다음 수의 제곱근을 구하여라.

$\frac{2}{3}$ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 　 16 $= 4$ 　 16 $= -4$

[그림 Ⅳ-1] A-1 오류 사례

A-2 오류는 학생이 16의 제곱근이 ± 4임을 알고 있음에도 불구하고 이를 $\pm\sqrt{4}$로 나타낸 오류로서, 학생이 '제곱근은 항상 근호 $\sqrt{\ }$를 사용해서 나타내야한다.'고 생각하기 때문에 발생한 오류이다([그림 Ⅳ-2] 참고). 이 학생은 양수의 제곱근 중에는 반드시 근호를 사용해서 나타내야 하는 것뿐 아니라 근호를 사용하지 않아도 되는 경우가 있음을 명료하게 파악하지 못하고 있으며, 이로부터 근호 $\sqrt{\ }$가 제곱근에 대한 개념 이미지로서 제곱근의 개념 정의와 적절한 조화를 이루지 못하고 있음을 짐작할 수 있다. 이 경우 제곱근의 개념 및 표현에서 근호 $\sqrt{\ }$를 도입할 수밖에 없는 이유에 대한 설명을 구체적인 사례와 함께 강조할 필요가 있는 것으로 보인다. 특히 유리수의 제곱인 수의 제곱근은 근호로 나타낼 수도 있고 근호 없이도 나타낼 수 있음을 구체적인 사례와 함께 충분히 인식시킬 필요가 있을 것으로 보인다.

다음 수의 제곱근을 구하여라.

16 $\pm\sqrt{4}$

[그림 Ⅳ-2] A-2 오류 사례

A-3 오류는 유리수도 근호를 사용하여 나타낼 수 있음을 이해하지 못하는 학생에게서 나타나는 오류 사례로서, 평소 익숙한 자연수의 대소 관계를 근호와는 상관없이 눈에 보이는 두 개의 자연수에 곧바로 적용함으로써 나타난 오류이다([그림 Ⅳ-3] 참고).

두 수의 대소를 비교하여라.

$6,\ \sqrt{12}$ 　 $6 < 12$

[그림 Ⅳ-3] A-3 오류 사례

A-4 오류는 '근호를 이용하여 표현된 수를 제곱하면 근호만 제거하면 된다.'는 생각에서 비롯된 오류이다([그림 Ⅳ-4] 참고). 실제로 이 학생은 $x^2=3$이 되는 수를 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$으로 표현하고 이를 3의 제곱근이라 한다는 것은 알고 있지만, $(-\sqrt{3})^2$으로 표현된 식의 의미는 올바로 이해하지 못하고 있었음을 [그림 Ⅳ-4]에 제시된 연구자와 학생 간의 대화에서 확인할 수 있다. 이 학생에게 x를 □로 대체하여 $□^2=3$으로 나타내고 □에 $-\sqrt{3}$을 대입하여 보여주자, 곧 $-\sqrt{3}$이 3의 제곱근이고 $(-\sqrt{3})^2=3$임을 이해하였다. 이처럼 어떤 학생이 근호(기호)가 포함된 식의 의미를 이해하는데 어려

움을 겪고 있다고 해서 그 학생이 제곱근의 정의 자체를 이해하지 못한다고 단정하기는 어려울 수 있으며, 이는 개념에 대한 관계적 이해가 기호적 이해까지 보장하지 않을 수 있다는 스켐프의 주장(Skemp, 1971)과도 상통한다.

$(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2=-1$

연구자 : $\sqrt{\ }$ 기호는 왜 사용하게 됐다고 했지?
학　생 : 제곱되는 수를 표현하기 위해서요.
연구자 : 그럼, 어떤 수를 제곱했을 때 음수가 되는 경우가 있는지 생각해 보자.
학　생 : 없어요.
연구자 : 그래, 어떤 수를 제곱하면 제곱된 수는 음수가 될 수 없다고 했는데, $(-\sqrt{3})^2=-3$이 될 수 있을까?
학　생 : (침묵)

[그림 Ⅳ-4] A-4 오류 사례

A-5 오류는 근호가 포함된 식의 계산 이후 뚜렷한 근거나 이유 없이 '*제곱근 관련 문제의 답은 근호 $\sqrt{\ }$를 붙여야한다.*'고 생각하는 학생의 오류 사례이다([그림 Ⅳ-5] 참고). 사실 이 학생은 평소 자신의 답에 대한 확신이 부족했고, 자신이 문제를 해결한 후에는 늘 동료 학생의 답을 자신의 것과 비교하는 모습을 보여 왔다. 논리적 사고에 의해 문제를 해결하고 그 결과를 검토하여 확신을 갖기 보다는 심리적 안정감을 찾는 방향으로 답을 하려는 경향을 보였다. 이런 경우 학생이 해결할 수 있는 수준의 문항을 제공하여 성공적인 문제 해결을 경험하게 함으로써 자신감을 고취시키고, 동시에 교사의 칭찬과 격려 등을 통해 자기효능감을 향상시키는 지도가 필요할 것으로 보인다. 더불어 논리적 사고에 의해 문제를 해결하고 그 결과를 검토하며 자신의 사고 과정과 그 결과에 대한 확신을 갖도록 하는 활동의 병행도 필요할 것으로 보인다.

$\sqrt{64}-\sqrt{9}=\sqrt{5}$

$\sqrt{8^2}$　$\sqrt{3^2}$

$8-3=5$

[그림 Ⅳ-5] A-5 오류 사례

A-6 오류는 매우 독특하다. [그림 Ⅳ-6]에 제시된 대화를 살펴보자. 대화에서 확인할 수 있듯이 이 학생은 '*근호 $\sqrt{\ }$를 괄호 ( )처럼 취급*'하고 있다. 이 학생에게 근호를 포함한 식의 계산 $\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{2-3}=\sqrt{-1}=-\sqrt{1}$은 식 $(2)-(3)=(2-3)=(-1)=-(1)$로 인식된다. 이 학생은 근호 $\sqrt{\ }$를 제곱근을 나타내는데 쓰이는 기호가 아니라 지금까지 익숙하게 사용해 왔던 괄호 ( )의 다른 모양으로 인식하고 있는 것이다. 이 학생의 오류 사례는 매우 독특하지만, 학생들이 중학교 3학년이 될 때까지 원주율 π를 제외하고는 수를 '숫자' 이외의 다른 기호나 문자로 나타내본 적이 없고, 사칙

연산 기호나 양의 부호, 음의 부호 이외에 숫자의 주변(앞, 뒤, 위, 아래)에 숫자와 함께 사용한 기호가 괄호 ( ), { }밖에 없었다는 점에서, 생소한 기호 $\sqrt{\ }$를 괄호 ( )처럼 취급하는 학생이 더 존재할 수도 있을 것으로 보인다. 이와 같은 오류 사례는 우리의 예상을 뛰어넘는 학생들의 사고가 존재함을 단적으로 보여주며, 본 연구와 같은 오류 분석 연구가 보다 광범위하고 심층적으로 이루어질 필요가 있음을 보여주는 사례라 할 수 있다.

$$\sqrt{2}-\sqrt{3} = \sqrt{2-3} = \sqrt{-1} = -\sqrt{1}$$

연구자 : $\sqrt{-1}=-\sqrt{1}$로 계산했네?
학 생 : 네
연구자 : 왜 이런 생각을 했지?
학 생 : (-1)은 $-(1)$이잖아요.

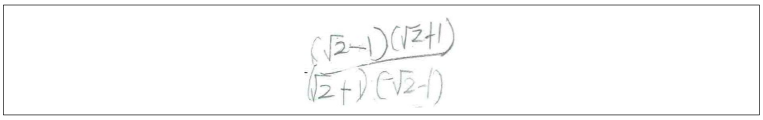
[그림 Ⅳ-6] A-6 오류 사례

A-7 오류는 분모가 $\sqrt{a}$일 때의 분모의 유리화에 대한 학습 경험에 기인한 오류이다([그림 Ⅳ-7] 참고). 이 오류를 보인 학생들은 분모가 $\sqrt{a}$일 때 자기 자신인 $\sqrt{a}$를 곱해서 분모를 유리화하는 경험을 통해 '*분모의 유리화는 분모의 무리수와 같은 수를 곱하면 된다.*'는 생각을 가지게 되었고, 이를 분모가 $\sqrt{5}+1$인 경우에 적용한 것이다. 더구나 이 학생들은 이후 계산에서 $(\sqrt{5}+1)\times(\sqrt{5}+1)=(\sqrt{5}+1)^2=5+1=6$과 같은 오류 역시 보였는데, 앞선 오류와 유사하게 $(\sqrt{a})^2=a$에서 제곱을 하면 근호가 없어지는 경험으로부터 '*근호가 포함된 수를 제곱하면 근호가 없어진다.*'는 오개념이 형성되었고, 이를 분모가 $(\sqrt{5}+1)$인 경우에 그대로 적용한 것으로 나타났다. 이 학생들에게 곱셈공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 알고 있는지 질문하였을 때 곱셈공식은 공식 자체로 기억하고 있었다. 그렇지만 이 곱셈공식을 이용하여 계산하려는 시도를 하지는 못했다.

$$\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}$$

[그림 Ⅳ-7] A-7 오류 사례

A-8 오류는 분모와 분자가 모두 $\sqrt{a}+b$ 혹은 $\sqrt{a}-b$인 꼴인 분모의 유리화에서 분모뿐 아니라 분자에도 $\sqrt{a}-b$ 혹은 $\sqrt{a}+b$를 각각 곱한 오류로서, 곱셈공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하는 분모의 유리화에서 $\sqrt{a}+b$ 혹은 $\sqrt{a}-b$인 꼴의 분모에 $\sqrt{a}-b$ 혹은 $\sqrt{a}+b$를 곱하는 방법을 학습한 뒤에, 이를 분모뿐 아니라 분자에도 적용하면서 나타난 오류이다([그림 Ⅳ-8] 참고). 이 학생은 분모를 유리화하는 이유나 목적은 이해하지 못한 채 '*곱셈공식을 이용한 분모의 유리화에서는 부호가 반대인 꼴의 수를 곱한다.*'는 방법을 기계적으로 암기하여 적용하려고 한 것이다.

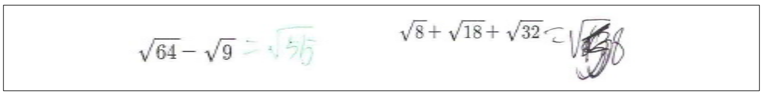


[그림 Ⅳ-8] A-8 오류 사례

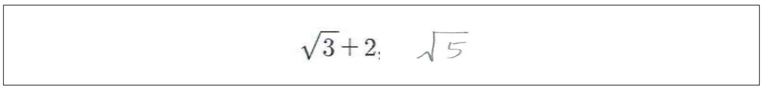
A-9 오류는 분모가 $\sqrt{a}+b$인 꼴의 분모를 유리화할 때 분모에 포함된 제곱근 $\sqrt{a}$만을 곱하면서 생긴 오류이다([그림 Ⅳ-9] 참고). 이 오류를 보인 학생은 '*$\sqrt{a}+b$인 꼴의 수 자체를 하나의 무리수로 인식하지 못하고 $\sqrt{a}$만 무리수로 인식*'하고, $\sqrt{a}$를 유리수로 만들기 위해 $\sqrt{a}$를 곱한 것이다. 이 과정에서 $b\sqrt{a}$인 꼴의 무리수가 다시 분모에 나타나게 되는데, 학생은 이를 미처 인식하지 못하였다. 실제로 [그림 Ⅳ-9]에서 학생들이 $(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}=5+1=6$, $(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}=2+1=3$으로 잘못 계산한 것을 확인할 수 있는데, 이로부터 학생들에게서 $(\sqrt{a}+b)\times\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2+b$와 같이 분배법칙에 대한 오류가 함께 나타났음을 확인할 수 있다.

[그림 Ⅳ-9] A-9 오류 사례

A-10 오류는 곱셈공식과 관련하여 종종 발견되곤 하는 오류 중의 하나인 $(a+b)^2=a^2+b^2$, $(a-b)^2=a^2-b^2$과 유사한 오류로서 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$로 잘못 계산한 오류이다([그림 Ⅳ-10] 참고). 이 오류를 보인 학생은 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$이 성립하므로 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ 역시 당연히 성립한다고 생각하고 있었고, '*계산의 결과가 한 개의 항으로 나타나지 않고 덧셈이나 뺄셈 연산이 포함되어 있으면 계산이 종료되지 않은*'것으로 생각하는 경향이 있었다. [그림 Ⅳ-11]에 나타난 A-11 오류 역시 이런 생각에 기인한 오류이다. 즉, 이 학생은 $\sqrt{3}+2$가 종료되지 않은 계산인 것으로 생각하여 무리하게 $\sqrt{3}+2=\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$와 같이 계산한 것이다.

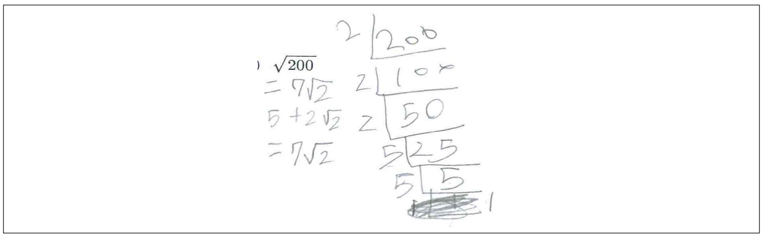


[그림 Ⅳ-10] A-10 오류 사례



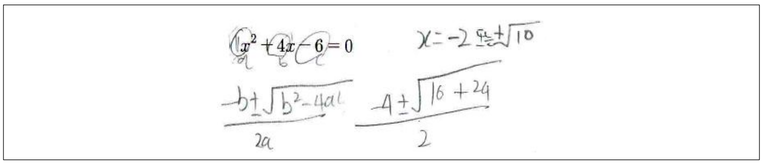
[그림 Ⅳ-11] A-11 오류 사례

A-12 오류는 $\sqrt{a^2\times b^2\times c}=(a+b)\sqrt{c}$ 로 계산한 오류이다. 실제로 [그림 Ⅳ-12]에 나타난 오류 사례를 보면, 200을 소인수분해한 뒤 $\sqrt{200}=\sqrt{5^2\times 2^2\times 2}=(5+2)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$ 로 잘못 계산하였음을 알 수 있다. 이 학생은 $\sqrt{5^2\times 2^2\times 2}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{2}$ 로 분리하여 곱하는 과정을 올바로 수행하지 못한 것인데, 역으로 $\sqrt{5^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{5^2\times 2^2\times 2}$ 의 연산은 제대로 잘 수행하였다. 이는 학생들에게 '$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ *는 친숙하지만* $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ *는 친숙하지 않고 어렵게 인식됨*'을 의미한다. 근호를 포함한 식의 계산에서 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 뿐만 아니라 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 가 성립함을 함께 인식시킬 필요가 있을 것으로 보인다.



[그림 Ⅳ-12] A-12 오류 사례

A-13 오류는 덧셈과 뺄셈을 동시에 나타내는 기호 ±가 포함된 수 표현에 대한 이해 부족에서 오는 오류이다([그림 Ⅳ-13] 참고). 이 오류를 보인 학생은 $x^2+4x-6=0$의 해를 근의 공식을 이용하여 $x=-2\pm\sqrt{10}$ 으로 찾은 뒤, '$\pm\sqrt{a}$ *을 하나의 수로 생각*'한 나머지 $-2\pm\sqrt{10}$ 을 -2 와 $\pm\sqrt{10}$ 으로 분리하여 $x=-2$ 또는 $\pm\sqrt{10}$ 과 같이 나타낸 것이다. 이는 양수 a의 두 제곱근을 $\pm\sqrt{a}$ 로 나타내는 경험으로부터 비롯된 오류인 것으로 보인다.



[그림 Ⅳ-13] A-13 오류 사례

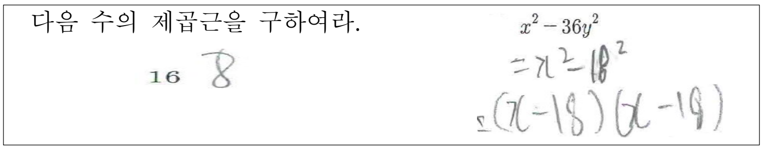
2. 선수학습 결손으로 인한 오류 (B형)

주어진 양수의 제곱근을 구하기 위해서는 거듭제곱의 개념에 대한 이해가 필수적이고, 주어진 수가 소수(小數)이거나 분수인 경우 이들 수의 사칙계산 능력 또한 필요하다. 또 근호를 포함한 식의 사칙계산에서는 곱셈공식에 대한 이해가 필요하다. <표 Ⅳ-2>는 제곱근의 뜻과 성질 및 그 계산에 필요한 이들 선수학습 내용에 대한 이해 부족으로 인해 발생한 오류 사례를 정리한 것이다.

<표 Ⅳ-2> 선수학습 결손으로 인한 오류(B형)

구분	오류 내용	오류 사례 (학생 반응)
B-1	양수 a의 제곱근을 $\frac{a}{2}$로 구함	16의 제곱근 → 8, $36=18^2$
B-2	소수(小數)의 제곱근을 구하지 못함	$\sqrt{0.18}=0.3\sqrt{0.2}$, $\sqrt{0.18}=3\sqrt{0.2}$
B-3	분모의 유리화를 위한 수를 분모에만 곱함	$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$
B-4	두 제곱근의 합의 제곱을 각각의 제곱의 합으로 구함	$(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})^2=a\times b+c\times d$, $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})^2=(a\sqrt{b})^2+(c\sqrt{d})^2$
B-5	근호를 포함한 식의 곱셈을 덧셈으로 인식함 두 수의 제곱근의 차를 두 수의 차의 제곱근으로 구함	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{2})=$ $\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$ $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{2})=\sqrt{(6-2)}\times\sqrt{(6-8)}$

B-1 오류는 양수 a의 제곱근을 $\frac{a}{2}$라고 생각하는 오류이다. 실제로 [그림 Ⅳ-14]에서 어떤 학생이 16의 제곱근을 8, 36의 제곱근을 18이라 답했는데, 이는 중학교 1학년에서 학습하는 거듭제곱에 대한 학습 결손으로 인해 발생한 것으로, 거듭제곱을 $a^2=2a$ 즉, $8^2=8\times2=16$, $18^2=18\times2=36$이라고 생각하고 있음을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-14] B-1 오류 사례

B-2 오류는 소수(小數)의 제곱근을 구하지 못하는 오류로서, [그림 Ⅳ-15]에 예시된 두 학생 모두 소수 0.18의 양의 제곱근을 옳게 구하지 못했는데, 이는 학생들이 $0.18=0.2\times0.3^2$, $0.18=0.2\times3^2$과 같이 소수의 제곱을 포함한 소수의 곱셈 계산을 제대로 수행하지 못했기 때문임을 알 수 있다. 이 학생들은 주어진 소수를 분모가 10의 거듭제곱인 분수로 나타내는 것도 어려워하여 소수 개념에 대한 기본적인 이해 역시 충실하지 못함을 확인할 수 있었다. 더구나 [그림 Ⅳ-15]에 나타난 한 학생과의 대화에서 보듯이 학생들은 소수 계산 특히 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 어려움과 더불어 소수 개념이나 연산에 대한 막연한 두려움을 지니고 있음을 알 수 있다.

$\sqrt{n}$ 을 $a\sqrt{b}$ 꼴로 나타내어라.

$\sqrt{0.18} = 0.3\sqrt{0.2}$

0.2×0.3^2

$2)\,0.18$, $3)\,9$, 3

$\sqrt{0.18}$

$\boxed{3\sqrt{0.2}}$

연구자 : $0.18 = 0.2 \times 0.3^2$ 으로 계산했네?
학　생 : 네
연구자 : 왜 이런 생각을 했지?
학　생 : 소수를 어떻게 해야 할지 모르겠어요.

[그림 Ⅳ-15] B-2 오류 사례

B-3 오류는 분모의 유리화에서 분모를 유리화하기 위한 수를 분모에만 곱하고 분자에는 곱하지 않는 오류로서, [그림 Ⅳ-16]에 예시된 학생들은 분모에 어떤 수를 곱하면 분자에도 같은 수를 곱해야 함을 명료하게 이해하지 못하고 있었다. 초등학교에서 학습한 분수 즉, 양의 유리수 개념에 대한 학습 결손이 학생들에게 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$　　　　$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}$

[그림 Ⅳ-16] B-3 오류 사례

B-4 오류와 B-5 오류는 모두 근호를 포함한 식의 곱셈에 대한 오류 사례이다([그림 Ⅳ-17] 참고). B-4 오류는 $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2 = 2\times3+3\times2=6$, $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2=(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2=30$과 같이 잘못 계산한 경우로서, 곱셈공식에 대한 오개념 $(a+b)^2=a^2+b^2$에서 비롯된 오류라 할 수 있다. 그리고 전자의 경우 $(a\sqrt{b})^2=ab$와 같은 오류 역시 함께 나타났음을 확인할 수 있다. 한편 B-5 오류는 $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{2})$의 계산을 $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{2})=\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$, $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{2})=\sqrt{(6-2)}\times\sqrt{(6-8)}$과 같이 잘못한 경우로서, 전자는 곱셈을 덧셈처럼 생각해서 생긴 오류이고 후자는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$로 생각해서 나타난 오류이다.

$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2=2\times3+3\times2=6,$
$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2=(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2=30$
$(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{2})=\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{6}-3\sqrt{2},$
$(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{2})=\sqrt{(6-2)}\times\sqrt{(6-8)}$

[그림 Ⅳ-17] B-4 오류와 B-5 오류 사례

3. 기술적인 오류 (C형)

사소한 계산 실수를 포함하여 $\sqrt{\ }$, $+$, $-$, $=$ 등의 수학 기호의 부적절한 사용 및 누락으로 인해 나타난 기술적인 오류 사례를 정리하면 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 기술적인 오류(C형)

구분	오류 내용	오류 사례 (학생 반응)
C-1	$a\sqrt{b}=a^2\sqrt{b}$ 에서 근호 누락	$3\sqrt{6}=3^2\times\sqrt{6}=9\times\sqrt{6}=\sqrt{9\times6}=\sqrt{54}$,
C-2	$a\sqrt{b}=ab$에서 근호 누락	$3\times\sqrt{5}=15$
C-3	$a\sqrt{b}=\sqrt{ab}$에서 근호 추가	$3\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$
C-4	$\sqrt{a^2\times b}=b\sqrt{a}$에서 숫자 혼동	$\sqrt{98}=\sqrt{2\times7^2}=2\sqrt{7}$
C-5	$\dfrac{b\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}$를 $\dfrac{b-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a}}$로 표현	$\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

C-1 오류는 근호를 포함한 식의 계산 과정에서 근호를 일부 누락한 오류로서([그림 Ⅳ-18] 참고), 학생들에게서 종종 발견되곤 하는 오류이다. 통상 지필평가에서 이런 오류가 나타날 경우 단순 실수나 우연에 의해 풀이 과정에서 근호가 누락된 것인지, 아니면 학생이 정답으로 제시한 $\sqrt{54}$가 우연에 의한 것인지 판단하기가 쉽지 않아 불필요한 논쟁을 유발할 수 있다. 이 학생의 경우 풀이 과정에서 자신도 모르게 근호를 누락한 것으로 나타났다. 정확한 기호와 식의 표현의 중요성을 인식시킬 필요가 있을 것으로 보인다.

$3\sqrt{6}$을 $\sqrt{a}$꼴로 나타내어라.

$$3\sqrt{6}=3^2\times\sqrt{6}=9\times\sqrt{6}=\sqrt{54}$$

[그림 Ⅳ-18] C-1 오류 사례

C-2 오류 역시 근호가 누락된 사례인데, $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$의 분모를 유리화할 때 $\sqrt{5}$의 근호를 누락하면서 $3\times\sqrt{5}=15$와 같은 오류가 나타난 것이다([그림 Ⅳ-19] 참고). 그러나 위에서 살펴 본 [그림 Ⅳ-18]의 사례에서는 풀이 과정 중에 나타난 근호의 누락에도 불구하고 마지막에 제시된 답은 옳은 반면 [그림 Ⅳ-19]의 사례에서는 근호 누락이 최종 정답에도 영향을 미쳤음을 알 수 있다. 전자의 경우 학생의 단순 실수임이 확인되었지만, 후자의 경우 $a\times\sqrt{b}=ab$와 같은 오개념에서 비롯된 오류인 것으로 나타났다. 그러나 학생에게 직접 물어서 확인해보지 않는 이상 이들 두 가지 경우를 교사가 구분하기는 쉽지 않다. 이처럼 부정확한 기호 표현은 수학적 의사소통에 혼란을 야기할 수 있다는 점에서 학생들에게 정확한 기호 표현의 필요성과 중요성을 인식시킬 필요가 있을 것으로 보인다.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{15}{5}=3$$

[그림 Ⅳ-19] C-2 오류 사례

C-1 오류와 C-2 오류가 근호를 누락함으로써 나타난 오류인 반면 C-3 오류는 $\frac{3}{\sqrt{5}}$의 분모를 유리화하면서 불필요하게 근호를 추가하여 발생한 오류이다([그림 Ⅳ-20] 참고). 즉, 이 학생은 [그림 Ⅳ-19]에 제시된 사례와는 정반대로 $3\times\sqrt{5}$에서 3에 근호를 추가하여 $3\times\sqrt{5}=\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$와 같이 계산한 것이다. 이 경우 역시 학생의 단순 실수임이 밝혀지긴 했지만, 경우에 따라서는 $a\sqrt{b}=\sqrt{ab}$와 같은 오개념이 그 원인인 경우도 있을 수 있다.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

[그림 Ⅳ-20] C-3 오류 사례

C-4 오류는 $\sqrt{98}$을 $a\sqrt{b}$인 꼴로 나타내는 문제에서 98을 소인수분해한 뒤, $\sqrt{7^2}\times\sqrt{2}$로 잘 나타냈지만 마지막 단계에서 $7\sqrt{2}$가 아닌 $2\sqrt{7}$을 답으로 제시한 오류이다. 이는 정답을 기술하는 과정에서 발생한 단순 오류인 것이 학생과의 대화에서 확인되었다.

$\sqrt{n}$을 $a\sqrt{b}$꼴로 나타내어라.

$\sqrt{98}$ $2\sqrt{7}$

$\sqrt{2\times 7^2} = \sqrt{2}\ \sqrt{7^2}$

[그림 Ⅳ-21] C-4 오류 사례

C-5 오류는 풀이 과정에서 뺄셈 기호(－)를 사용하였으나, 실제는 곱셈 연산을 한 경우로서, 풀이 과정을 기술할 때 분모와 분자에서 각각 $\sqrt{5}$를 빼는 것으로 표현은 했으나 실제로는 곱셈 연산을 한 경우이다([그림 Ⅳ-22] 참고). 이 사례 역시 학생과의 대화를 통해 학생의 단순 실수에 의한 것으로 확인되었다.

분모를 유리화하여라.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

[그림 Ⅳ-22] C-5 오류 사례

4. 기타 오류 (F형)

앞서 살펴본 바와 같이 풀이 과정에 일관성이 없는 경우, 학생이 제시한 풀이와 답만으로는 학생의 의도를 파악할 수 없는 경우, 근거 없이 단순히 생각나는 대로 자신의 생각을 풀이에 적용한 경우 등을 기타 오류로 분류하였다. 사실 이런 오류는 어떤 개념에 대한 잘못된 이해나 논리적 절차 수행에서의 오류 등으로 인해 체계적으로 나타났다기보다는, 학생들이 별 다른 근거 없이 자의적인 방법으로 문제 해결을 시도하는 과정에서 나타나는 경우가 많은 것으로 보인다. 어떤 면에서는 앞서 살펴본 여러 가지 오류들보다 더 수학 학습부진 학생들의 수학 학습 실태를 극명하게 드러내주는 사례들이라고도 할 수 있다.

<표 Ⅳ-4> 기타 오류(F형)

구분	오류 내용	오류 사례 (학생 반응)
F-1	근호는 제곱해서 없애야 한다고 생각	$\sqrt{3}+2=9+2=11$
F-2	별다른 근거 없이 수식을 자의적으로 변형	$3\sqrt{6}=3+\sqrt{6}=\sqrt{9}+\sqrt{6}=\sqrt{9+6}=\sqrt{15}$ $3\sqrt{6}=\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$

F-1 오류는 근호를 보고 이를 제곱해서 없애려는 시도로부터 비롯된 오류이다([그림 Ⅳ-23] 참고). 이 학생은 $\sqrt{3}+2$를 덧셈 기호가 포함되지 않은 하나의 수로 정리하려고 시도하였는데, 이는 계산의 결과가 한 개의 항으로 나타나지 않는 경우 계산이 종료되지 않은 것으로 인식하여 무리한 계산을 시도했다는 점에서 앞서 살펴 본 A-10 오류나 A-11 오류 사례와 유사하다고 할 수 있다. 이 과정에서 학생은 근호 $\sqrt{\ }$를 식에서 제거하려고 시도했고 이를 위해 $\sqrt{3}$이 아닌 $\sqrt{\ }$ 안의 수 3을 제곱했다. 이 학생은 수학 수업 시간에 듣고 보았던 것들을 생각하면서 자신의 머릿속에 떠오르는 대로 자신이 수행할 수 있는 계산을 그저 수행하였음을 [그림 Ⅳ-23]에 나타난 대화를 통해 확인할 수 있다. 즉, 이 학생이 3을 제곱한 이유는 그저 근호가 있을 때 이를 제거하기 위함이었고 제곱한 수 9를 2와 더한 것은 주어진 식을 정리하여 단순화해야 한다고 생각했기 때문인 것이다.

교사 : $\sqrt{3}$ 속의 3을 왜 제곱했지?
학생 : 그냥 제곱하면 $\sqrt{\ }$가 없어질 것 같아서요
교사 : 그럼 3을 왜 다시 제곱했지?
학생 : 그냥 3을 제곱한건데....

[그림 Ⅳ-23] F-1 오류 사례

F-2 오류는 주어진 수식을 자의적으로 변형하여 문제를 해결하려고 시도하는 과정에서 나타난 오류이다. [그림 Ⅳ-24]에 제시된 왼쪽 사례는 $3\sqrt{6}$을 $3+\sqrt{6}$로 임의로 변형한 뒤 $3+\sqrt{6}=\sqrt{9}+\sqrt{6}=\sqrt{9+6}=\sqrt{15}$와 같이 계산한 것이고, 오른쪽 사례는 $3\sqrt{6}=\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$로 문제를 자의적으로 변형하여 계산한 사례이다. F-1 오류에서와 유사하게 학생은 주어진 수 $3\sqrt{6}$을 $\sqrt{a}$의 꼴로 변형하기 위해 자신의 머릿속에 떠오르는 대로 자신이 수행할 수 있는 계산을 그저 수행하였고, 그 결과 [그림 Ⅳ-24]과 같은 오류가 나타난 것이다.

$3\sqrt{6}$을 $\sqrt{a}$ 꼴로 나타내어라.

$3\sqrt{6}$ $\boxed{\sqrt{15}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$

[그림 IV-24] F-2 오류 사례

Ⅴ. 결론 및 제언

이상을 통해 중학교 3학년 수학 학습 부진 학생들이 제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해 및 근호를 포함한 식의 계산에서 보이는 오류 사례들을 제곱근의 뜻(용어, 기호 포함)과 성질에 대한 이해 부족으로 인한 오류(A형), 선수학습 결손으로 인한 오류(B형), 기술적인 오류(C형), 기타 오류(F형)의 네 가지 유형으로 나누어 살펴보았다.

유형별로 여러 가지 오류 사례가 나타났지만, 특히 제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해 부족으로 인한 오류 사례가 다수 발견되었다. 이에 따르면 학습 부진 학생들은 제곱근과 양의 제곱근을 명료하게 구분하지 못하고 혼동하거나, 양의 제곱근과 음의 제곱근 둘 중 하나만 선택해서 답으로 제시해야 한다고 생각하기도 하고, 제곱근은 항상 근호 $\sqrt{\ }$를 써서 나타내야 한다고 생각하며, $\sqrt{a}+b$인 꼴의 수 자체를 하나의 무리수로 인식하지 못하고 $\sqrt{a}$만 무리수로 인식하는 오류를 보이는 것으로 나타났다. 또 근호를 이용하여 표현된 수를 제곱하면 근호만 제거하면 된다고 생각하거나 제곱근 관련 문제의 답은 항상 근호 $\sqrt{\ }$를 붙여야 한다고 생각하기도 하였으며, 분모의 유리화는 분모의 무리수와 같은 수를 곱하면 된다거나 곱셈공식을 이용한 분모의 유리화에서는 부호가 반대인 꼴의 수를 곱하면 된다고 생각하여 이를 무분별하게 적용하기도 하였다. 근호를 포함한 식의 계산 결과가 하나의 항으로 나타나지 않고 덧셈이나 뺄셈 연산이 포함되어 있는 경우 계산이 종료되지 않은 것으로 생각하여 무리한 계산을 시도하는 경우도 종종 나타났다. 이외에도 거듭제곱, 소수(小數)와 분수의 개념과 계산, 곱셈공식 등과 같은 선수학습 결손으로 인한 오류, 문제 해결 과정에서 근호를 누락하거나 불필요하게 추가하는 등의 부정확한 기호 표현으로 인한 오류 등이 나타났다.

이런 다양한 오류 사례들로부터 수학 학습 부진 학생들의 수학 학습 실태를 짐작해볼 수 있다. 특히 근호 $\sqrt{\ }$를 괄호 ( )처럼 취급하거나 $x=-2\pm\sqrt{10}$을 $x=-2$ 또는 $\pm\sqrt{10}$으로 인식하는 오류는 우리가 미처 예상하지 못했던 뜻밖의 오류로서, 이는 본 연구가 아니었으면 그와 같은 오류의 존재 여부를 파악하기 어려웠으리라는 점에서 본 연구와 같은 오류 분석 연구가 보다 다양하고 지속적으로 이루어질 필요가 있음을 보여주는 사례라 할 수 있다.

본 연구는 중학교 수학의 극히 일부 영역의 일부 내용에 대한 일부 수학 학습 부진 학생들의 오류

사례를 분석한 연구이다. 서론에서 언급한 바와 같이 학교수학의 여러 가지 기초 개념, 원리, 법칙에 대한 학습 부진 학생들의 오류 분석은 수학 학습 부진 문제 해결을 위한 논의의 출발점으로서 중요한 의미를 지닌다는 점에서, 가능한 한 학교수학의 모든 내용을 대상으로 이들 내용의 학습 과정에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오개념 및 오류를 분석하고 그 결과를 공유하기 위한 논의와 노력이 필요할 것으로 보인다.

참고문헌

구미자 (2005). **수학 학습부진아의 학습부진 원인 분석과 효과적인 지도 방안에 관한 연구**. 경남대학교 석사학위논문.

권오병 (2013). **기초 개념의 이해 및 계산 과정에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오류 분석 - 중학교 3학년 수와 식을 중심으로 -**. 서원대학교 석사학위논문.

권오병, 도종훈 (2016). 기초 개념의 이해 및 계산 과정에서 나타나는 학습 부진 학생들의 오류 분석. **2016 국제수학교육학술대회 프로시딩**.

권점례, 최승현, 김도남, 가은아 (2013). **초등학교와 중학교 국어, 수학 학습부진아를 위한 학습 주제별 맞춤형 교수·학습 방법 자료 개발**. 한국교육과정평가원.

김미경 (2006). **일차방정식에 대한 수학 학습 부진아의 오류 유형과 교정에 관한 연구**. 공주대학교 석사학위논문.

김부미 (2006). **수학적 오개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰**. 이화여자대학교대학원 박사학위논문.

김선, 김경옥, 김수동, 이신동, 임혜숙, 한순미 (2001). **학습부진아의 이해와 교육**. 학지사

김옥경 (1991). **고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구**. 이화여자대학교 석사학위논문.

김원경 외 6인 (2011). 중학교 수학3. 비상교육.

나세희 (2010). **오류분석을 통한 수학학습부진아의 일차방정식 풀이 지도**. 전남대학교 석사학위논문.

박성익 (1989). **학습 부진아 교육**. 서울 : 법문사.

서울대학교 교육연구소 (2011). **교육학 용어 사전**. 하우동설.

안명희 (2009). **수학 부진아의 일차식의 계산에서의 오류에 관한 분석**. 아주대학교 석사학위논문.

이나미 (1997). 학습부진아 교육. **교육개발 110**, 81-85.

이승민 (1999). **고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구**. 경북대학교 석사학위논문.

이원정 (2008). **수학학습부진아의 오류 유형 분석 및 지도에 관한 연구(수학 7-가 '유리수의 사칙계산' 단원을 중심으로)**. 경남대학교 석사학위논문.

이은영 (2006). 정**수 연산에서 학습 부진아의 오류분석과 교정**. 고려대학교 석사학위논문.

이은휘 (2001). 수학과 학습부진아의 수업방법의 탐색. **한국학교수학학회논문집** 4(2), 33-48.

조완영 (2008). 수학부진아의 수학적 사고 특성 - 대수적 사고를 중심으로-. CBNU Journal of Educational Research **29**(1), 189-209.

정진혜 (2004). **수학학습부진아의 오류분석 연구 -식의 계산 단원을 중심으로-**. 목포대학교 석사학위논문.

진선미, 송영무 (2007). 중학교 3학년 수학학습부진아가 함수 분야에서 겪는 어려움에 관한 사례 연구. **한국학교수학회논문집 10**(2), 187-206.

최보영 (2005). **'식의 계산' 단원에서 수학 학습부진아의 오류 분석과 교정에 관한 연구 -고등학교 1학년을 대상으로-**. 이화여자대학교 석사학위논문.

최승현, 남금천, 류현아 (2013). 수학 학습 부진 학생을 위한 오개념 교정 지도 자료 개발 연구. **수학교육학연구 23**(2), 117-133.

최승현, 황혜정 (2008). 수학과 내용교수지식(PCK)의 의미 및 분석틀 개발에 관한 연구. **한국학교수학회논문집 11**(4), 569-593.

최영아 (2001). **고등학교 수학에서 수학적 오류의 분석과 분류에 대한 연구**. 성신여자대학교 석사학위논문.

최지선 (2003). 중등학교 수학 학습에서 나타나는 오개념에 대한 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 18*(1), 3-14.

Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of learning mathematics*. 황우형 역(1987). **수학학습심리학**. 사이언스북스.

Winebrenner, S. (1996). *Teaching kids with learning difficulties in the regular classroom.* MN, Free Spirit Publishing Inc.

Analyzing Errors of Mathematics Under-Achievers in Understanding the Concept of the Square Root of Positive Numbers and Related Calculations

Jong Hoon Do[5], Oh Byeong Kwon[6]

Abstract

Mathematics is one of the subjects in which learners seriously experience under-achievements in school education. Middle school level mathematics especially plays such a role as a bridge between elementary level informal mathematics and high school level formal mathematics that learners' under-achievements in the middle school level mathematics may yield more serious under-achievements later. Therefore it is crucial to prevent learners' later under-achievements that we analyze the status of under achievements including analysing various under-achievers' errors in the middle school level mathematics. From this point of view, we analysed errors of mathematics under-achievers in understanding the concept of the square root of positive numbers and related calculations in this paper. As the results of our research, we found some unexpected errors of 'some mathematics under-achievers regarding the mathematical symbol $\sqrt{\ }$ of square root as a parenthesis ( ), and others interpret $x=-2\pm\sqrt{10}$ as $x=-2$ or $\pm\sqrt{10}$.' that suggest the necessity of more various and in-depth discussions and researches of analysis on learners' errors and misconceptions in all areas of school mathematics.

Key Words : mathematics under achievement, square root, square root symbol, error analysis

Received September 11, 2018
Revised February 20, 2019
Accepted February 23, 2019

---

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97D70
5) Seowon University (jhoondo@seowon.ac.kr)
6) Jincheon High School (mathshow@korea.kr)